

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ ВПО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

Ш.А. Салахутдинов

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Методическое указание
для студентов очной, заочной форм обучения и бакалавров
по специальностям: 270205 «Автомобильные дороги и аэродромы»,
250401 «Лесоинженерное дело», 190601 «Автомобили
и автомобильное хозяйство»

Екатеринбург
2010

Печатается по рекомендации методической комиссии ЛИФ.
Протокол № 10 от 5 сентября 2009г.

Методические указания к решению задач и расчётно-графических работ по определению перемещений для самостоятельной работы студентов всех специальностей, изучающих курс «Сопротивление материалов».

Рецензент доцент С.Н. Городилов

Редактор Р.В. Сайгина
Оператор Г.И. Романова

Подписано в печать 24.06.10

Плоская печать

Заказ №

Формат 60x84 1/16

Печ. л. 2,56

Поз. 104

Тираж 100 экз.

Цена 13 руб. 52 коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

ГЛАВА 1

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Изогнутой осью балки, или ее упругой линией называется кривая, в которую превращается прямолинейная ось балки после приложения к ней внешней нагрузки.

На рис 1.1 (а, б) показана консольная балка до и после приложения нагрузки

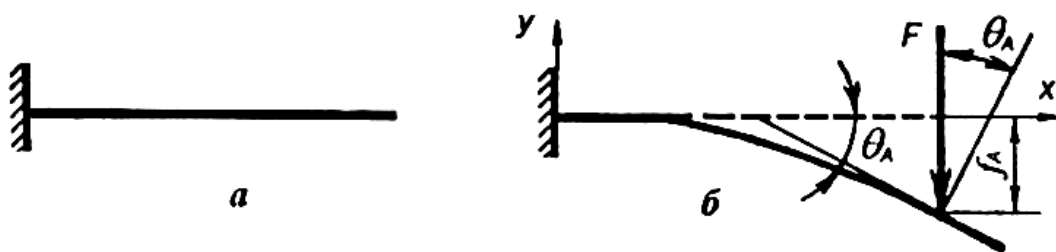


Рис. 1.1

Плоский поперечный изгиб характеризуется двумя величинами:

- перемещением f центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному оси балки, которое называется прогибом;
- углом θ поворота сечения или равным ему углом наклона касательной упругой линии (рис. 1.1, б).

Из курса высшей математики известно, что кривизна кривой AB (рис. 1.2) в произвольной точке D может характеризоваться выражением

$$k = \frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (1.1)$$

Из этой формулы следует, что при известном уравнении кривой $y = f(x)$ ее кривизна в каждой точке может быть вычислена через первую и вторую производные от этой функции.

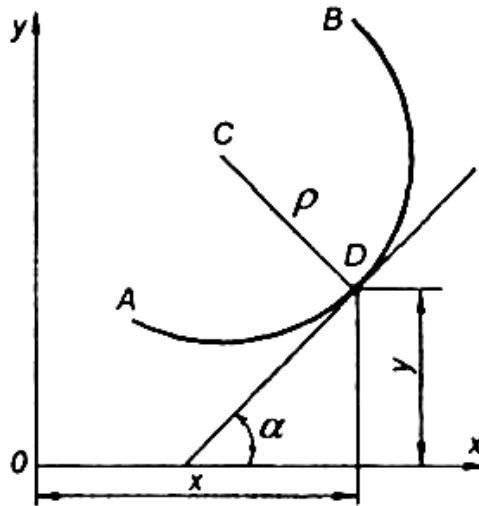


Рис. 1.2

Если зависимость $y = f(x)$ выражает закон изменения прогибов по длине балки, то математическую кривизну, представленную уравнением (1.1), можно связать с кривизной балки, полученной при изгибе:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (1.2)$$

Из зависимости (1.2) видно, что кривизна балки в рассматриваемом сечении прямо пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна ее жесткости.

Приравняв правые части уравнений (1.1) и (1.2), имеем

$$\pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EI}. \quad (1.3)$$

ГЛАВА 2

Метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения

В главе 1 получено приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M .$$

Если это уравнение проинтегрировать дважды, то получим уравнение прогиба $y = f(x)$. Изгибающий момент M является функцией от x , поэтому, интегрируя выражение (1.5), имеем

$$EI \frac{dy}{dx} = \int M dx + C ,$$

интегрируя вторично, получаем

$$EI y = \int dx \int M dx + Cx + D .$$

Сравнение углов поворота сечений запишем как:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left[\int M dx + C \right]. \quad (2.1)$$

Сравнение прогибов можно представить в следующем виде:

$$y = \frac{1}{EI} \left[\int dx \int M dx + Cx + D \right]. \quad (2.2)$$

Постоянные интегрирования C и D при решении конкретных задач находятся от граничных условий на концах каждого участка балки.

Для балок с защемленным концом прогиб и угол поворота сечения в заделке равны нулю, $y = 0$; $\theta = 0$.

Это граничные условия для определения C и D .

Для двухопорных балок прогибы в левой и правой опорах равны нулю $y_A = 0$; $y_B = 0$. Следовательно, для таких балок это является *граничным условием для определения C и D* .

Пример 2.1. Для консольной балки длиной l , нагруженной сосредоточенной силой F , найти прогиб в точке приложения силы, а также угол поворота сечения, где приложена сила F (рис. 2.1).

Если балки под действием внешних нагрузок имеют значительные перемещения, то дифференциальное уравнение (1.3) используется для нахождения прогибов и углов поворота сечений балок.

Учитывая, что современные конструкции изготавливаются из железобетона или металла, жесткость которых велика, а величина прогибов незначительна по сравнению с длиной, уравнение (1.3) можно упростить, составив равенство:

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} = 1.$$

Основанием для этого могут служить следующие соображения: изогнутая ось балки представляет собой весьма пологую линию. Следовательно, $a = dy / dx$ - величина, близкая к нулю, так как тангенс угла, образованного касательной к кривой $y = f(x)$ с осью x , и есть dy / dx . Сводя это допущение, получим приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$\pm EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M. \quad (1.4)$$

По правилу знаков для изгибающих моментов, установленному ранее, изгибающие моменты в сечении считаются положительными, если балка изгибается выпуклостью вниз. Это правило согласуется с правилом знаков для математической кривизны. Если оси координат выбрать так, чтобы ось y была направлена вверх (см. рис. 1.2), то уравнение (1.4) приобретает вид

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M, \quad (1.5)$$

как для изгибающего момента знаки ставятся при этом «по правилу дождя».

Заметим, что допускаемые значения прогибов в строительных конструкциях находятся в пределах

$$[f / l] = 1/250 - 1/400.$$

Для машиностроительных конструкций

$$[f / l] = 1/1000.$$

При этом под l подразумевается вся длина балки.

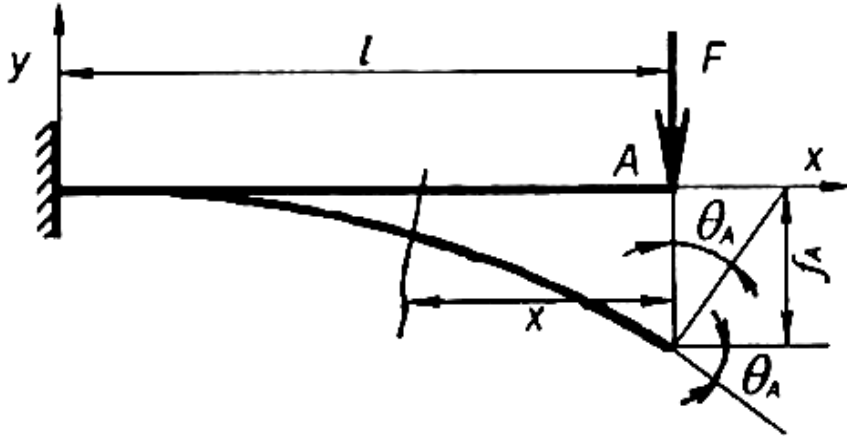


Рис. 2.1

Решение

Составим дифференциальное уравнение упругой линии, для чего рас-сечем балку сечением на расстоянии x от правого конца и найдем величину изгибающего момента в этом сечении: $M = -Fx$. Тогда

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Fx. \quad (\text{a})$$

Полученное выражение интегрируем дважды:

$$EI \frac{dy}{dx} = -Fx^2 / 2 + C; \quad (\text{б})$$

$$EIy = -Fx^3 / 6 + Cx + D. \quad (\text{в})$$

Постоянные интегрирования C и D находим из граничных условий.

1. При $x = l$ в левой части уравнения (б) имеем нуль, так как в заделке угла поворота не будет, поэтому

$$0 = -Fl^2 / 2 + C, \quad C = Fl^2 / 2.$$

2. При $x = l$ в левой части уравнения (в) имеем нуль, тогда

$$0 = -Fl^3 / 6 + (Fl^2 / 2)l + D, \quad D = Fl^3 / 3.$$

Для определения угла поворота и прогиба сечения балки в точке A введем найденные постоянные интегрирования C и D в уравнения (б) и (в), значение x считаем равным нулю:

$$\theta_A = \frac{dy}{dx} = \frac{Fl^2}{2EI}; \quad f_A = -\frac{Fl^2}{3EI}.$$

Знак минус означает несовпадение направления оси и прогиба балки.

ГЛАВА 3

Метод начальных параметров

Метод непосредственного интегрирования, рассмотренный ранее, удобен при определении углов поворота θ и прогибов f сечений балки, когда число участков балки незначительно (один-два). При интегрировании приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси балки каждый участок дает две постоянных интегрирования C и D , т. е. при числе участков балки m имеем n постоянных интегрирования.

При числе участков более двух удобнее пользоваться универсальным уравнением упругой линии, вывод которого приводится ниже.

Число постоянных интегрирования можно свести к двум при любом количестве участков балки, если при составлении и интегрировании дифференциальных уравнений соблюдать следующие правила.

- Начало координат для рассматриваемой балки выбирается в крайних левой или правой точках и считается постоянным для всех участков балки.
- Уравнения для изгибающих моментов составляются при рассмотрении всех участков балки, в зависимости от того, где выбрано начало координат: слева или справа от сечения.
- Если в каком-либо сечении балки действует сосредоточенный момент M , то он вводится в выражение изгибающего момента с сомножителем $(x - a)^0$, равным единице (a - расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенного момента).
- При действии на каком-либо участке балки распределенной нагрузки ее необходимо продолжить до конца балки и ввести точно такую же компенсирующую нагрузку, используя аксиому статики о присоединении или отбрасывании взаимно уравновешенных сил.
- Интегрирование дифференциальных уравнений производить без раскрытия скобок.

Используя эти правила, составим приближенное дифференциальное уравнение упругой линии пятого участка балки, представленной на рис.3.1, проинтегрируем его дважды. Для удобства рассуждений все нагрузки, приложенные к балке, приняты такими, что создают положительные изгибающие моменты. Изгибающий момент для пятого участка равен:

$$M_5 = M(x-a)^0 + F(x-b) + \frac{q(x-c)^2}{2} - \frac{q(x-d)^2}{2} + \frac{\text{tg}\beta(x-d)^3}{6}$$

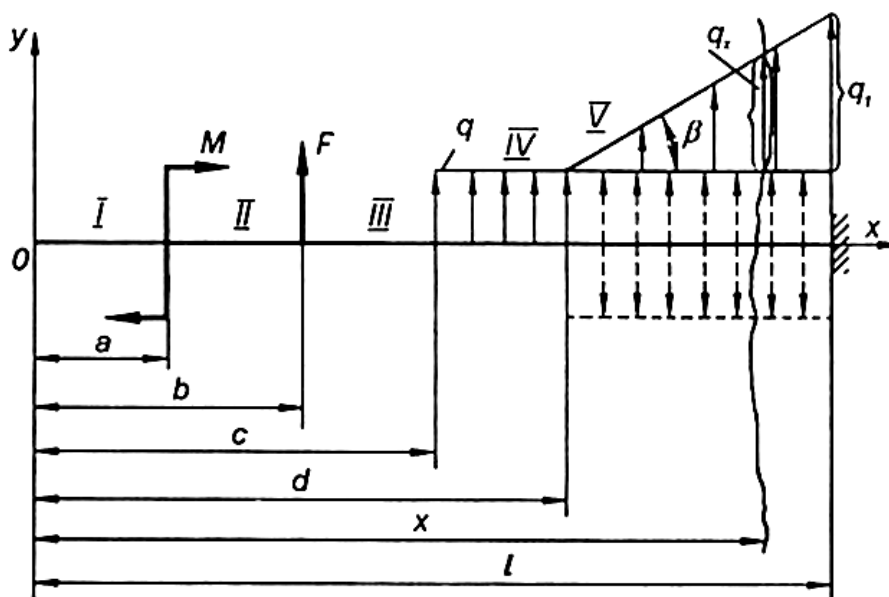


Рис. 3.1

Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x-a)^0 + F(x-b) + \frac{q(x-c)^2}{2} - \frac{q(x-d)^2}{2} + \frac{\text{tg}\beta(x-d)^3}{6}, \quad (3.1)$$

где $\frac{q(x-d)^2}{2}$ - момент, создаваемый компенсирующей нагрузкой

$\frac{\text{tg}\beta(x-d)^3}{6}$ - момент, создаваемый треугольной нагрузкой.

Момент от треугольной нагрузки находится следующим образом

$$M_{\text{пр}} = \frac{q_x(x-d)}{2} \cdot \frac{(x-d)}{3} = \frac{q_1(x-d)}{l-d} \cdot \frac{(x-d)}{2} \cdot \frac{(x-d)}{3} = \frac{\text{tg}\beta(x-d)^3}{6}.$$

Интегрируем уравнение (3.1) дважды:

$$EI \frac{dy}{dx} = M(x-a) + \frac{F(x-b)^2}{2} + \frac{q(x-c)^3}{6} - \frac{q(x-d)^3}{6} + \frac{\text{tg}\beta(x-d)^4}{24} + C_5; \quad (\text{а})$$

$$EIy = \frac{M(x-a)^2}{2} + \frac{F(x-b)^3}{6} + \frac{q(x-c)^4}{24} - \frac{q(x-d)^4}{24} + \frac{\text{tg}\beta(x-d)^5}{120} + C_5x + D_5. \quad (\text{б})$$

Если внимательно рассмотреть рис. 3.1, то можно убедиться, что для четвертого участка балки дифференциальное уравнение упругой линии будет таким же, как и для пятого участка, только оно не будет содержать моменты, действующие на пятом участке:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M(x-a)^0 + F(x-b) + \frac{q(x-c)^2}{2}. \quad (3.2)$$

Интегрируем это уравнение дважды:

$$EI \frac{dy}{dx} = M(x-a) + \frac{F(x-b)^2}{2} + \frac{q(x-c)^3}{6} + C_4; \quad (\text{в})$$

$$EIy = \frac{M(x-a)^2}{2} + \frac{F(x-b)^3}{6} + \frac{q(x-c)^4}{24} - \frac{q(x-d)^4}{24} + C_4x + D_4. \quad (\text{г})$$

Имея уравнения (а), (б), (в) и (г), можно доказать, что при соблюдении правил составления дифференциальных уравнений упругой линии и их интегрировании постоянные интегрирования C и D для всех участков будут одинаковыми.

Рассматривая уравнения (а) и (в) при $x = d$ и считая участки плавно сопрягающимися, видим, что $C_5 = C_4$. К равенству $C_4 = C_5$ можно прийти, приравняв правые части уравнений (а) и (в).

Аналогично, рассмотрев уравнения (б) и (г), получим $D_5 = D_4$.

Переходя последовательно от четвертого участка к третьему, а затем ко второму и первому, и рассматривая смежные участки при равенстве $x = c$, $x = b$, $x = a$, можно убедиться, что постоянные интегрирования $C_5 = C_4 = C_3 = C_2 = C_1 = C$, а $D_5 = D_4 = D_3 = D_2 = D_1 = D$, т. е. они равны друг другу.

Геометрический смысл постоянных интегрирования можно установить при рассмотрении уравнений углов поворота и прогибов для первого участка балки. Для первого участка балки имеем

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = C; \quad (\text{д})$$

$$Iy = Cx + D.$$

При $x = 0$; $EI\theta_0 = C$; $EIy_0 = D$.

Здесь θ_0 и y_0 - угол поворота сечения и его прогиб в начале координат соответственно. Их принято называть начальными параметрами. Тогда уравнение прогибов для пятого участка примет вид

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 + \frac{M(x-a)^2}{2!} + \frac{F(x-b)^3}{3!} + \frac{q(x-c)^4}{4!} - \frac{q(x-d)^4}{4!} + \frac{tg\beta(x-d)^5}{5!}. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) принято называть *универсальным уравнением упругой линии*, так как оно может применяться при любых расчетных схемах балок.

В обобщенном виде универсальное уравнение упругой линии можно представить следующим образом:

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 + \frac{M_0(x-a)^2}{2!} + \frac{F_0(x-b)^3}{3!} + \sum \frac{M(x-a)^2}{2!} + \sum \frac{F(x-b)^3}{3!} + \quad (3.4)$$

$$+ \sum \frac{q(x-c)^4}{4!} - \sum \frac{q(x-d)^4}{4!} + \sum \frac{tg\beta(x-d)^5}{5!},$$

где M_0 и F_0 - статические начальные параметры (момент и реакция в заделке).

При необходимости определения углов поворота сечений методом начальных параметров уравнение (3.4) нужно про дифференцировать, тогда получим

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 + M_0(x-a) + \frac{F_0(x-b)^2}{2!} + \sum M(x-a) + \sum \frac{F(x-b)^2}{2!} + \quad (3.5)$$

$$+ \sum \frac{q(x-c)^3}{3!} - \sum \frac{q(x-d)^3}{3!} + \sum \frac{tg\beta(x-d)^4}{4!}.$$

Прежде чем пользоваться уравнениями (3.4) и (3.5), т. е. находить перемещения методом начальных параметров, необходимо найти начальные параметры θ_0 , y_0 , M_0 и F_0 .

Статические начальные параметры M_0 и F_0 находятся обычным способом уравнениями статики. Начальные же параметры $EI\theta_0$ и EIy_0 определяются по граничным условиям.

1. Если в начале координат балка имеет заделку (рис. 3.2), то $EI\theta_0$ и EIy_0 равны нулю, так как в заделке нет ни прогиба, ни угла поворота сечения. Балка содержит статические начальные параметры в виде опорного момента в заделке M_0 и реакции P_0 .

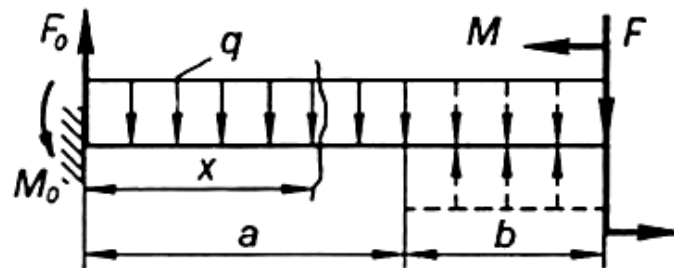


Рис. 3.2

2. Балка опирается на две опоры (рис. 3.3), при этом слева от опоры A нет консоли.

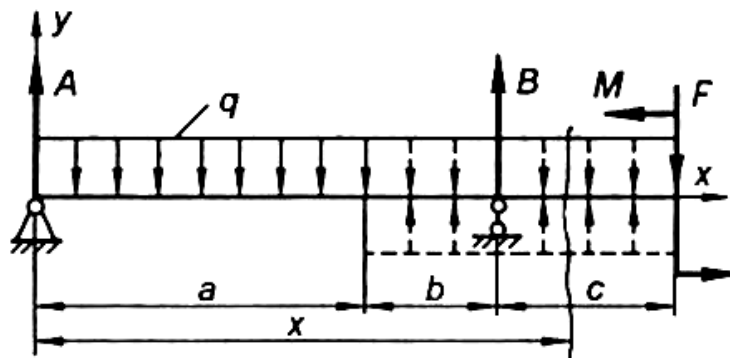


Рис. 3.3

Для рассматриваемой балки граничными условиями будут значения $x = 0$; $y = 0$ и $x = a + b$; $y = 0$ — точки, прогибы в которых заведомо равны нулю. При $x = 0$; $EIy_0 = 0$, т. е. первый начальный параметр равен нулю. При $x = a + b$ имеем

$$0 = EI\theta_0(a + b) + \frac{A(a + b)^3}{6} - \frac{q(a + b)^4}{24} + \frac{qb^4}{24}.$$

Из этого уравнения найдем второй начальный параметр.

1. Если двухопорная балка имеет на левой и на правой опорах консоли (рис. 3.4), то по граничным условиям составляют два уравнения упругой линии для рассматриваемой балки. Решая эту систему, находят начальные параметры. При $x = a$, $y = 0$

$$0 = EIy_0 + EI\theta_0 a - qa^2 / 24. \quad (\text{ж})$$

При $x = a + b + c; y = 0$

$$0 = EIy_0 + EI\theta_0(a + b + c) + \frac{A(b + c)^3}{6} - \frac{q(a + b + c)^4}{24} + \frac{qc^4}{24}. \quad (\text{з})$$

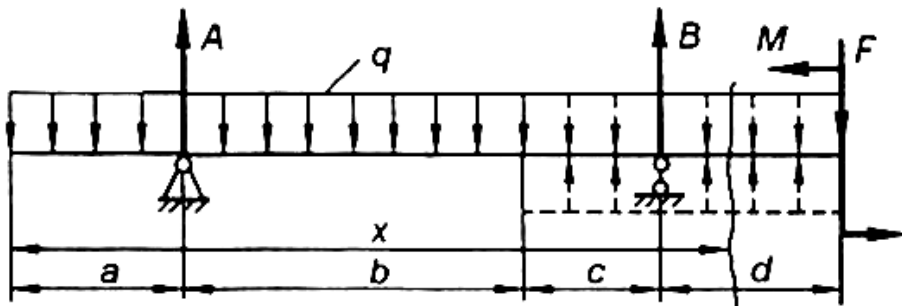


Рис. 3.4

Решая совместно уравнения (ж) и (з), находят $EI\theta_0$ и EIy_0 , которые входят в уравнение прогибов.

В случае действия на каком-либо участке балки треугольной нагрузки, так же как и равномерно распределенной нагрузки, она должна быть продолжена до конца балки, при этом вводится ее компенсирующая нагрузка (рис. 3.5, а, б) или только компенсирующая нагрузка (рис. 3.5, в, г).

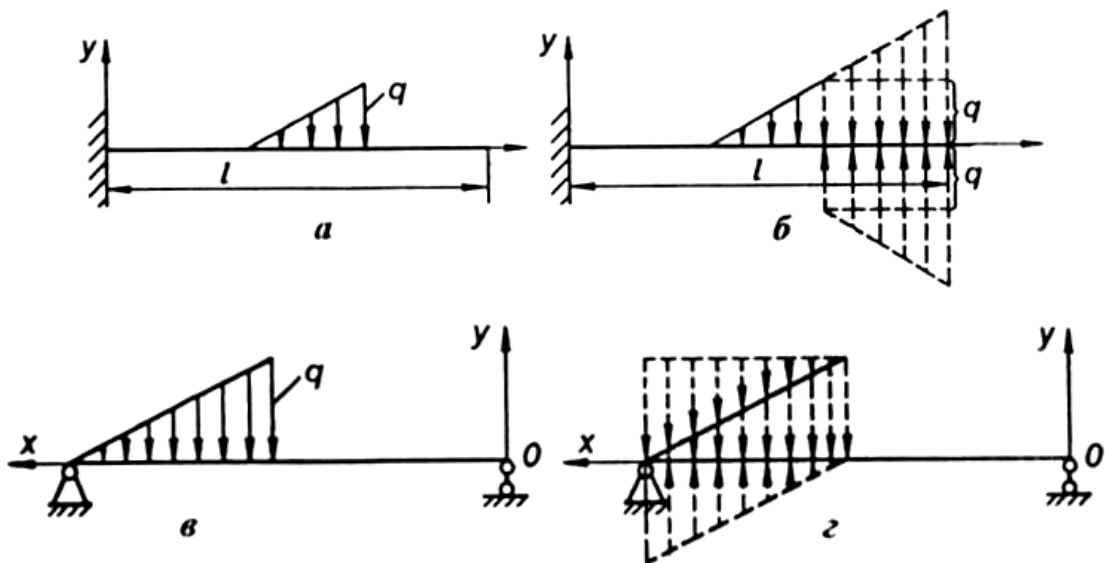


Рис. 3.5

Пример 3.1. На консольную балку (рис. 3.6) длиной l действует сосредоточенная сила F . Определить методом начальных параметров угол поворота и прогиб в точке приложения силы F .

Решение

Начало координат принимаем в точке B . Ось x направляем вправо, ось y - вверх. Поскольку в начале координат имеем заделку, начальные параметры $EI\theta_0$ и EIy_0 равны нулю, т.е. сечение балки в точке B не имеет ни прогиба, ни угла поворота. Но в точке B будут действовать реакция B и опорный момент, т.е. балка содержит статические начальные параметры. Находим их:

$$\begin{aligned} \sum y &= 0; B - F = 0; B = F; \\ \sum m_s &= 0; Fl - m = 0; m = Fl. \end{aligned}$$

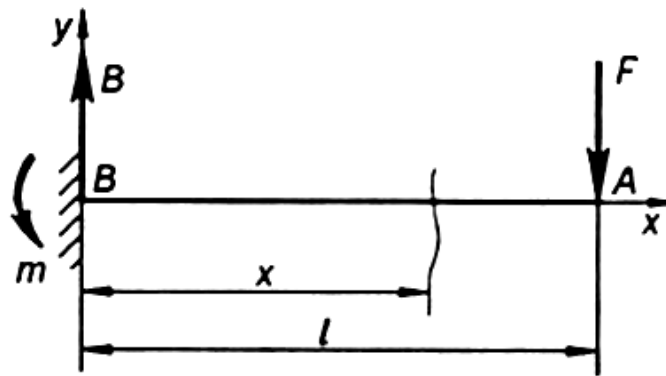


Рис 3.6

Рассекаем балку сечением и составляем уравнение упругой линии, используя метод начальных параметров. Слева от сечения действуют только m и B , поэтому уравнение имеет вид

$$EIy = -mx^2/2 + Bx^3/6. \tag{a}$$

Подставляя значения m и B , получаем

$$EIy = -\frac{Fl}{2}x^2 + \frac{F}{6}x^3.$$

Прогиб в точке A найдется при $x = l$:

$$y_A = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Fl^3}{2} + \frac{Fl^3}{6} \right) = -\frac{Fl^3}{3EI}.$$

Угол поворота сечения в точке A найдем из уравнения (а), предварительно продифференцировав его:

$$EI\theta = -mx + \frac{B}{2}x^2.$$

При $x = l$, $EI\theta_A = -Fl^2 + \frac{B}{2}l^2$, откуда $\theta_A = -\frac{Fl^2}{2EI}$.

Пример 3.2. Построить эпюры прогибов и углов поворота для двутавровой балки № 30, если $F = 50$ кН; $M = 80$ кНм; $a = 2$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $I = 1080\text{см}^4$ (рис. 3.7)

Решение

Определим опорные реакции A и B .

$$\sum m_A = 0; Fa - M - B \cdot 3a = 0;$$

$$B = \frac{Fa - M}{3a} = \frac{50 \cdot 2 - 80}{6} = 3\frac{1}{3} \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = 0; F \cdot 4a - M - A \cdot 3a = 0;$$

$$A = \frac{F \cdot 4a - M}{3a} = \frac{50 \cdot 4 \cdot 2 - 80}{6} = 53\frac{1}{3} \text{ кН.}$$

Выбрав начало координат в крайней левой точке балки, составляем уравнение изгибающих моментов для наиболее удаленного от начала координат участка балки:

$$M_x = -Fx + A(x - a) + M(x - 3a)^0; \quad M(x - 3a)^0 = 1.$$

Подставляем M_x в дифференциальное уравнение упругой линии:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x - 3a)^0 - Fx + A(x - a).$$

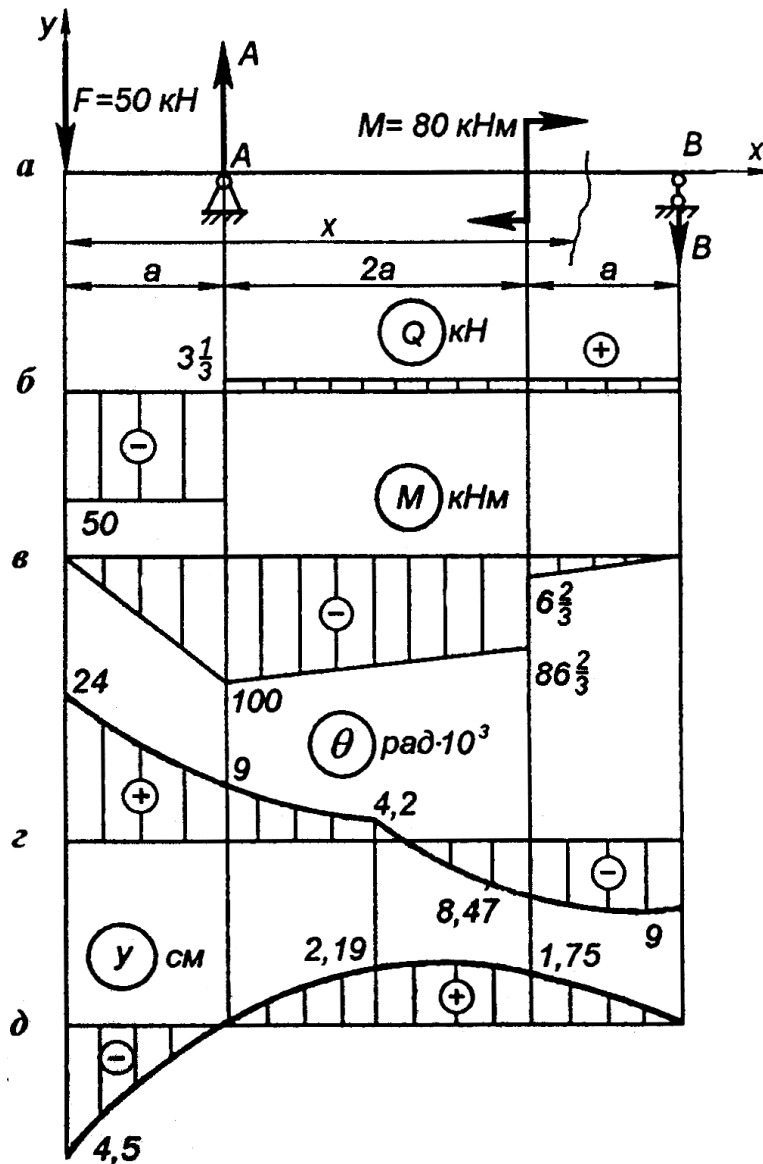


Рис. 3.7

Полученное уравнение дважды проинтегрируем:

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta_0 + M(x - 3a) - \frac{Fx^2}{2} + \frac{A(x - a)^2}{2}; \quad (a)$$

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 x + \frac{M(x - 3a)^2}{2} - \frac{Fx^3}{6} + \frac{A(x - a)^3}{6}. \quad (б)$$

В уравнения (а) и (б) вошли начальные параметры $EI\theta_0$ и EIy_0 . Найдем их, используя граничные условия рассматриваемой балки.

Если задать $x = a = 2$ м, то мы попадем в левую опору А. Как известно, в опоре нет прогиба, поэтому уравнение (б) можно записать в следующем виде:

$$0 = EIy_0 + EI\theta_0 \cdot 2 - \frac{F \cdot 2^3}{6}. \quad (\text{в})$$

Вторым граничным условием для этой балки будет значение $x = 4a = 8$ м. В этом случае уравнение (б) запишется как

$$0 = EIy_0 + EI\theta_0 \cdot 8 + \frac{M \cdot 2^2}{2} - \frac{F \cdot 8^3}{6} + \frac{A \cdot 6^3}{6}. \quad (\text{г})$$

Решая совместно уравнения (в) и (г), находим начальные параметры $EI\theta_0$ и EIy_0 .

$$EI\theta_0 = 353 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2;$$

$$EIy_0 = -64 \cdot 10^{10} \text{ Н/см}^2.$$

Уравнения для определения перемещений (а) и (б) будут следующими:

$$EI \frac{dy}{dx} = 353 \cdot 10^7 + M(x-6) - \frac{Fx^2}{2} + \frac{A(x-2)^2}{2};$$

$$EIy = -64 \cdot 10^7 + 353 \cdot 10^7 \cdot x + \frac{M(x-6)^2}{2} - \frac{Fx^3}{6} + \frac{A(x-2)^3}{6}.$$

Пользуясь этими уравнениями, построим по участкам эпюру углов поворотов сечений и эпюру прогибов балки:

Для участка 1 ($0 \leq x_1 \leq 2$ м):

$$EI\theta = 353 \cdot 10^7 - \frac{Fx_1^2}{2};$$

$$EIy = -64 \cdot 10^{10} + 353 \cdot 10^7 \cdot x_1 + \frac{Fx_1^3}{6}.$$

При $x_1 = 0$, $\theta_0 = 0,024$ рад, $y_0 = -4,5$ см;

$$x_2 = 2 \text{ м}, \theta_2 = 0,009 \text{ рад}, y_2 = 0.$$

Для участка 2 ($2 \text{ м} \leq x_2 \leq 6 \text{ м}$)

$$EI\theta = 353 \cdot 10^7 - \frac{Fx_2^2}{2} + \frac{A(x_2 - 2)^2}{2};$$

$$EIy = -64 \cdot 10^{10} + 353 \cdot 10^7 \cdot x_2 + \frac{Fx_2^3}{6} + \frac{A(x_2 - 2)^3}{6}.$$

При $x_2 = 6\text{ м}$, $\theta_6 = -0,0847$ рад, $y_6 = 1,752$ см.

При $x_2 = 4\text{ м}$, $\theta_4 = 0,0042$ рад, $y_4 = 2,19$ см;

Для участка 1 ($6\text{ м} \leq x_3 \leq 8\text{ м}$) имеем $\theta_8 = 0,009$ рад, $y_8 = 0$

Эпюры θ и y представлены на рис. 3.7, ε , δ , соответственно.

ГЛАВА 4

Графоаналитический метод определения перемещений

Известны дифференциальные зависимости

$$\frac{dM}{dx} = Q; \quad \frac{dQ}{dx} = q; \quad EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M; \quad \frac{dy}{dx} = \theta.$$

Их можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} EI \frac{dy}{dx} &= EI\theta; \\ EI \frac{d^2 y}{dx^2} &= EI \frac{d\theta}{dx} = M; \\ EI \frac{d^3 y}{dx^3} &= EI \frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{dM}{dx} = Q; \\ EI \frac{d^4 y}{dx^4} &= EI \frac{d^3 \theta}{dx^3} = \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q. \end{aligned}$$

Из этих уравнений видно, что при известном законе распределения нагрузки q к длине балки или ее участка можно последовательным интегрированием получить законы распределения Q , M_x , θ_x , y_x и наоборот, зная уравнение изогнутой оси балки, путем последовательного дифференцирования можно получить Q_x , M_x , θ_x , q_x . Не всегда целесообразно строить полную эпюру прогибов или углов поворотов. Иногда бывает необходимо определить y или θ только для характерных сечений. Это удобно делать

при помощи графоаналитического метода, смысловая сторона которого построена на сходстве дифференциальных зависимостей, связывающих прогиб и интенсивность сплошной нагрузки.

Предположим, что мы имеем балку, нагруженную произвольной нагрузкой (рис. 4.1, а). Для этой балки эпюра моментов показана на рис. 4.1,б.

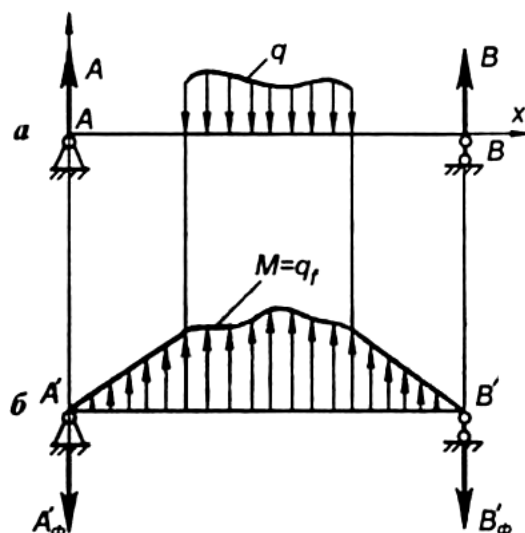


Рис. 4.1

Дифференциальное уравнение упругой линии балки будет выглядеть так:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M . \quad (4.1)$$

Будем считать, что эпюра моментов (рис. 4.1, б) - это фиктивная нагрузка для новой (фиктивной) балки, т.е. каждая ордината эпюры моментов - какая-то условная нагрузка. Условно создадим для этой фиктивной нагрузки опоры \$A'\$ и \$B'\$ и будем рассматривать эту схему как новую балку, для которой можно записать дифференциальную зависимость

$$\frac{d^2 M_f}{dx^2} = q_f . \quad (4.2)$$

В уравнениях (4.1) и (4.2) правые части одинаковы, следовательно, левые части можно также приравнять друг другу, т. е.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 M_f}{dx^2} . \quad (4.3)$$

Проинтегрируем левую и правую части этого уравнения дважды:

$$EI \frac{dy}{dx} + C_n = \frac{dM_f}{dx} + C_n;$$

$$EIy + C_n x + D_n = M_f + C_n x + D_n.$$

Если при интегрировании добиться, чтобы $C_n = C_n$ и $D_n = D_n$, то получим:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{dM_f}{dx} = Q_f; \quad EIy = M_f.$$

Отсюда:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Q_f}{EI}, \quad (4.4)$$

$$y = \frac{M_f}{EI} \quad (4.5)$$

Из формул видно, что угол поворота в сечении действительной балки равен поперечной силе в том же сечении фиктивной балки, деленной на жесткость действительной балки, а прогиб сечения действительной балки равен изгибающему моменту в том же сечении фиктивной балки, деленному на жесткость действительной балки, при условии, что $C_n = C_n$ и $D_n = D_n$.

Пример 4.1. Определить графоаналитическим способом величину прогиба и угол поворота сечения в точке приложения силы F (рис. 4.2).

Решение

Для данного нагружения балки реактивный момент будет равен $m_p = Fl$, а вертикальная реакция заделки $A = F$.

Строим эпюру моментов и принимаем ее за фиктивную нагрузку для фиктивной балки, которая имеет защемление в точке B .

Фиктивный момент найдется как произведение площади фиктивной нагрузки $\omega = (Fl \cdot l) / 2$ на плечо от центра тяжести ω до точки, в которой определяется

прогиб, т.е. $\frac{2}{3}l$ $M_f = -\frac{1}{2}Fl \cdot l \frac{2}{3}l = -\frac{Fl^3}{3}.$

Делим это выражение на EI и получаем прогиб в точке B :

$$f_B = \frac{M_f}{EI} = -\frac{Fl^3}{3EI}.$$

Величина прогиба совпала с результатами, полученными в главах 2 и 3.

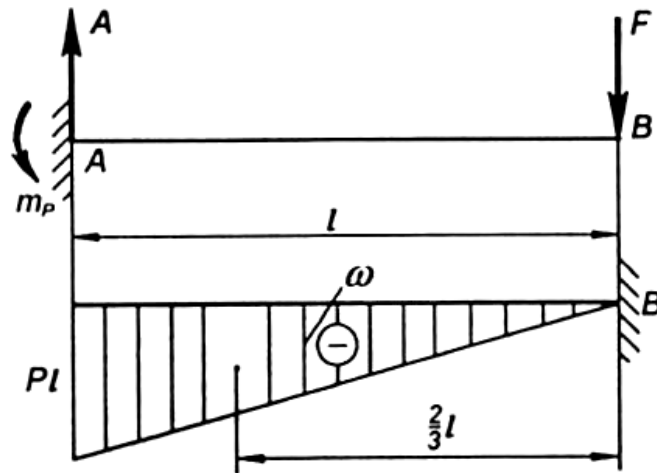


Рис. 4.2

Поперечная сила в сечении B фиктивной балки численно равна площади всей треугольной нагрузки $Q = -Fl / 2$, а угол поворота сечения B действительной балки равен:

$$\theta_B = \frac{Q_f}{EI} = -\frac{Fl^2}{2EI}.$$

Пример 4.2. Определить для двухопорной балки (рис. 4.3) прогиб в точке приложения силы F , действующей посередине пролета.

Решение

Известно, что для балки, приведенной на рис. 4.3, эпюра моментов представляет равнобедренный треугольник (гл. 10.1) Наибольший момент равен $Fl \cdot lA$.

Примем эпюру моментов за фиктивную нагрузку балки, при этом на основании симметрии фиктивные реакции будут равны:

$$A_f = B_f = \frac{Fl}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Fl^2}{16}.$$

Фиктивный изгибающий момент в точке приложения силы F найдется как момент, создаваемый реакцией A_f , и момент, создаваемый $\omega / 2$.

$$M_{fc} = -A_f \cdot \frac{1}{2} + \frac{\omega}{2} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{Fl^2l}{16 \cdot 2} + \frac{Fl^2}{16} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{Fl^3}{48}.$$

Отсюда получим
$$f_c = -\frac{Fl^3}{48EI}.$$

Углы поворота на левой и правой опорах найдутся как

$$\theta_A = \theta_B = \frac{Q_{fA}}{EI} = \frac{Q_{fB}}{EI} = \pm \frac{Fl^2}{16EI}.$$

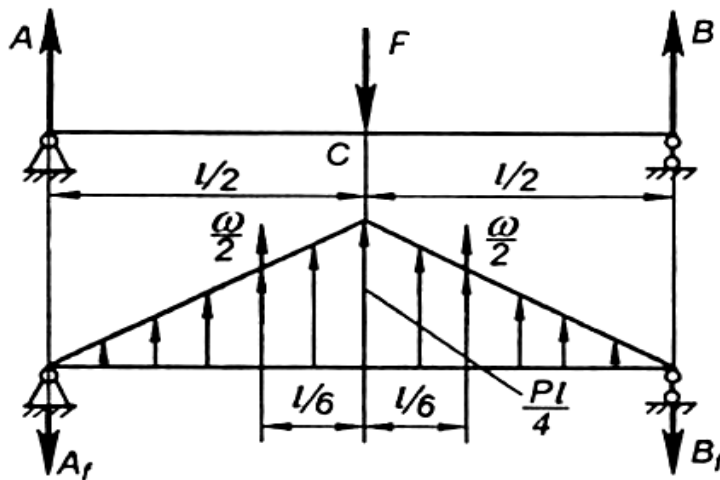


Рис. 4.3

ГЛАВА 5

Энергетический метод определения перемещений

Обобщенным по сравнению с тремя предыдущими способами определения перемещений является способ, построенный на использовании закона сохранения энергии и потенциальной энергии упругой деформации; накапливаемой нагруженным телом.

Известно, что при действии на тело внешней нагрузки внутри его появляются противодействующие силы, и тело изменяет свою форму и объем, т. е. в теле происходят микро - и макроперемещения.

Сила, действующая на тело, совершает перемещение вместе с частицами, к которым она приложена, следовательно, внешняя сила совершает работу. Эта работа трансформируется в потенциальную энергию упругой деформации, которая накапливается упругим телом.

Пренебрегая тепловыми, электрическими и магнитными явлениями, происходящими в теле, также считая, что система, невзирая на перемещения, находится в состоянии равновесия, можно сказать, что

$$U = A_p, \quad (5.1)$$

т.е. потенциальная энергия упругой деформации тела равна работе внешних сил на элементарных перемещениях, которые вызывают накопление этой энергии. В предыдущих разделах были найдены величины потенциальной энергии при деформациях - растяжении или сжатии, сдвиге, кручении и поперечном изгибе:

- при растяжении:

$$U = A_p = \frac{1}{2} P \Delta l = \frac{F^2 l}{2EA}; \quad (5.2)$$

- при сдвиге:

$$U = A_p = \frac{1}{2} P \Delta S = \frac{F^2 l}{2GA}; \quad (5.3)$$

- при кручении:

$$U = A_p = \frac{1}{2} M_{кр} \varphi = \frac{M_{кр}^2 l}{2GI_p}; \quad (5.4)$$

- при изгибе:

$$U = A_p = \frac{1}{2} M_{изг} \theta = \frac{M_{изг}^2 l}{2EI}; \quad (5.5)$$

Из приведенных формул видно, что потенциальная энергия упругой деформации во всех четырех случаях находится как половина произведения внешнего силового фактора (сосредоточенная сила или сосредоточенный момент) на перемещение.

Если заменить внешние силовые факторы какой-либо обобщенной величиной, например, обобщенной силой, а перемещение при любой деформации - обобщенной координатой, то все четыре выражения можно представить как:

$$U = F \delta / 2. \quad (5.6)$$

Из формулы видно, что потенциальная энергия деформации численно равна половине произведения обобщенной силы на обобщенную координату.

Учитывая, что рассматриваются случаи определения перемещений в балках, испытывающих только поперечный изгиб, величина потенциальной энергии при изгибе в общем случае может быть найдена как

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI} \int M^2 dx. \quad (5.7)$$

Если же балка содержит несколько участков, то полная потенциальная энергия системы определится как сумма потенциальных энергий отдельных участков:

$$U = \int \frac{M_1^2 dx}{2EI} + \int \frac{M_2^2 dx}{2EI} + \dots + \int \frac{M_n^2 dx}{2EI}. \quad (5.8)$$

Для определения перемещений в точке приложения силового фактора определяем потенциальную энергию упругой деформации системы. Полученное значение приравниваем к величине потенциальной энергии для общего случая. Из этого равенства находим перемещение искомой точки.

Пример 5.1. Для жестко заземленной консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой F , найти перемещение точки приложения силы энергетическим способом (рис. 5.1).

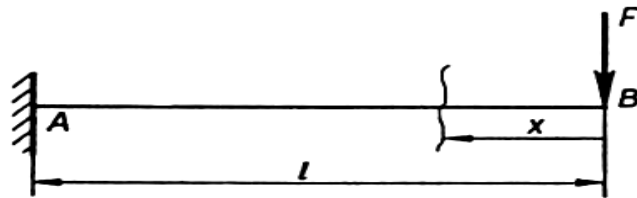


Рис. 5.1

Решение

Находим величину потенциальной энергии упругой деформации системы, предварительно определив величину изгибающего момента в произвольном сечении:

$$M = -Fx;$$

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l (-Fx)^2 dx = \frac{F^2 l^3}{6EI}.$$

Обобщенная потенциальная энергия упругой деформации системы равна

$$U = F\delta / 2.$$

Приравниваем правые части полученных выражений:

$$\frac{F\delta}{2} = \frac{F^2 l^3}{6EI} \text{ или } \delta_n = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Значение величины перемещения точки приложения силы F такое же, как при решении этой задачи тремя предыдущими методами.

Пример 5.2. Для балки на двух опорах, нагруженной сосредоточенной силой F , найти прогиб в точке приложения силы (рис. 5.2).

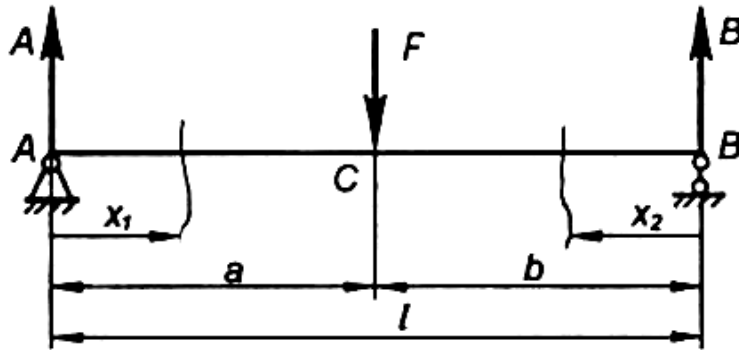


Рис. 5.2

Решение

Находим реакции в опорах балки:

$$\begin{aligned} \sum m_A = 0; Fa - Bl; B = l/l; \\ \sum m_B = 0; Al - Fb = 0; A = Fb/l. \end{aligned}$$

Определяем изгибающие моменты на первом и втором участках балки:

$$\begin{aligned} M_1 = Ax_1 = \frac{Fb}{l} x_1; \\ M_2 = Bx_2 = \frac{Fb}{l} x_2. \end{aligned}$$

Находим величину потенциальной энергии упругой деформации балки:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2EI} \int_0^a M_1^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^b M_2^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^a \left(\frac{Fb}{l} x_1 \right)^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^b \left(\frac{Fa}{l} x_2 \right)^2 dx = \\ &= \frac{F^2 b^2}{2EI^2} \int_0^a x_1^2 dx + \frac{F^2 a^2}{EI^2} \int_0^b x_2^2 dx = \frac{F^2 a^2 b^2}{6EI^2} (a + b) = \frac{F^2 a^2 b^2}{6EI}. \end{aligned}$$

Зная, что потенциальная энергия упругой деформации в общем случае равна $U = F\delta/2$, находим

$$\frac{F\delta_c}{2} = \frac{F^2 a^2 b^2}{6EI}.$$

Отсюда получим

$$\delta_c = \frac{Fa^2b^2}{3EI}.$$

Если сила F приложена посредине пролета $a = b = l / 2$, то величина прогиба балки равна:

$$\delta_c = \frac{F(l/2)^2(l/2)^2}{3EI} = \frac{Fl^3}{48EI}.$$

ГЛАВА 6

Теорема о взаимности работ

Понятие о потенциальной энергии упругой деформации позволяет установить следующую зависимость между деформациями в различных сечениях балки.

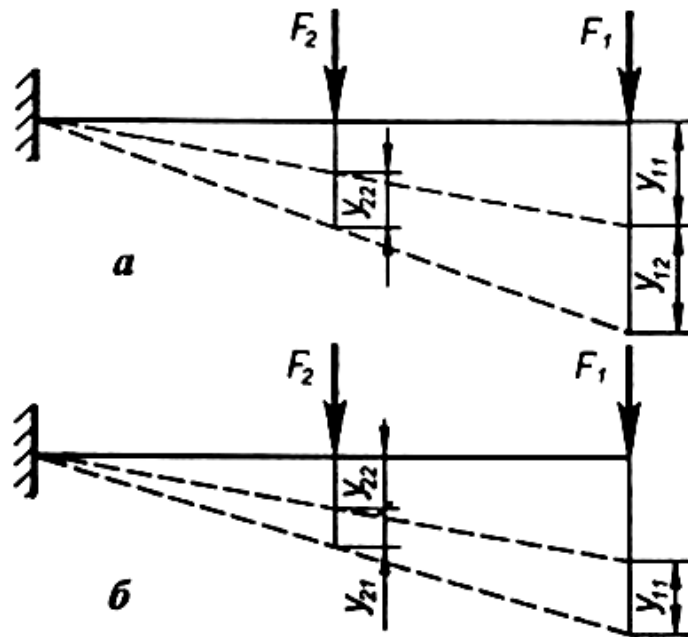


Рис 6.1

Пусть консольная балка последовательно нагружается сосредоточенными силами F_1 и F_2 (рис. 6.1, а). От действия силы F_1 точка ее приложения переместится на величину y_{11} (первый индекс означает, что перемещение сходит по направлению силы F_1). Теперь приложим в каком-то произвольном сечении силу F_2 . Точка ее приложения переместится на величину y_{22} , а точка приложения силы F_1 и F_2 на величину y_{12} . Полная работа от действия сил F_1 и F_2 на балку будет состоять из трех частей:

- работа силы F_1 на перемещении y_{11}

$$A_1 = (F_1 y_{11}) / 2;$$

- работа силы F_2 на перемещении y_{22}

$$A_2 = (F_2 y_{22}) / 2;$$

- работа силы F_1 на перемещении y_{12}

$$A_3 = F_1 y_{12}.$$

Накопленную в балке потенциальную энергию упругой деформации найдем как сумму этих работ:

$$U = \frac{F_1 y_{11}}{2} + \frac{F_2 y_{22}}{2} + F_1 y_{12}. \quad (6.1)$$

Правая часть третьей работы $A_3 = F_1 y_{12}$ не делится на два, потому что здесь работа производится уже приложенной к балке силой F_1 , не меняющей своего значения на перемещении, вызываемом второй силой F_2 .

Теперь повторим рассуждения, но порядок приложения сил изменим на обратный (рис. 6.1, б).

Прикладываем первоначально к балке силу F_2 , которая вызовет перемещение точки ее приложения - y_{22} . Затем приложим силу F_1 , вызывающую перемещение точки ее приложения на величину y_{11} , а точка приложения силы F_2 переместится на величину y_{21} .

Работы, создаваемые силами F_2 и F_1 :

$$A'_1 = \frac{1}{2} F_1 y_{11};$$

$$A'_2 = \frac{1}{2} F_2 y_{22};$$

$$A'_3 = \frac{1}{2} F_2 y_{21}.$$

Потенциальная энергия, накопленная системой, будет равна

$$U = \frac{F_1 y_{11}}{2} + \frac{F_2 y_{22}}{2} + F_2 y_{21}.$$

Количество энергии, расходуемое на деформацию системы, зависит от конечных значений сил и прогибов и не зависит от порядка нагружения. Поэтому приравнивая правые части уравнений, получим

$$F_1 y_{12} = F_2 y_{21}.$$

Это теорема о взаимности работ, которая формулируется следующим образом: работа первой силы F_1 на перемещении, вызванном второй силой F_2 , равна работе второй силы F_2 на перемещении, вызванном первой силой F_1 .

ГЛАВА 7

Теорема Кастельяно

В 1875г. итальянским ученым Кастельяно была предложена теорема для определения прогибов и углов поворота сечений балок и других упругих систем, основанная на вычислении потенциальной энергии деформации.

Предположим, что имеется упругая система в виде балки на двух опорах (рис. 7.1), нагруженной произвольной нагрузкой N и некоторой обобщенной силой F .

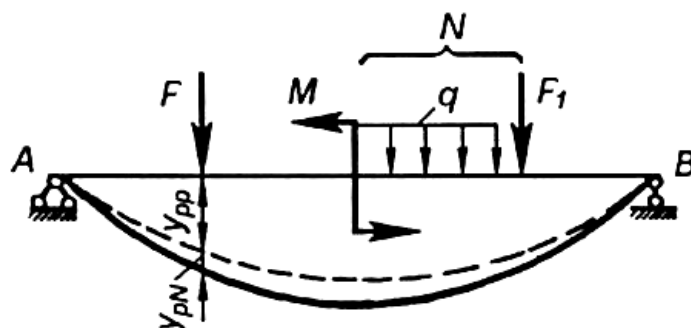


Рис. 7.1

Определим потенциальную энергию, накапливаемую в балке от действия сил N . Порядок нагружения системы примем следующий. Вначале нагрузим балку обобщенной силой F , при этом точка ее приложения переместится на величину y_{PP} . Затем прикладываем нагрузку N , которая вызовет перемещение, от приложения силы F на величину y_{PN} . Полное перемещение точки приложения силы F составит:

$$y_P = y_{PP} + y_{PN}. \quad (7.1)$$

Потенциальная энергия упругой деформации рассматриваемой системы, равна работе внешних сил,

$$U = \frac{1}{2} F y_{PP} = F y_{PN} + U_{NN}. \quad (7.2)$$

где U_{NN} - потенциальная энергия, накопленная системой в результате действия сил N , численно равная работе сил N на вызванных ими перемещениях.

Величину перемещения y_{PP} можно представить как произведение единичной силы $\bar{F} = 1$ на удельное перемещение δ_{PP} . Принято считать единичные силы $\bar{F} = 1$ и пары сил $\bar{M} = 1$ величинами безразмерными, тогда

$$y_{PP} = F \delta_{PP}. \quad (7.3)$$

Введем это значение перемещения в уравнение (7.2), при этом

$$U = \frac{1}{2} F^2 \delta_{PP} + F y_{PN} + U_{NN}.$$

Дифференцируя уравнение по силе, получим

$$\frac{\partial U}{\partial P} = F \delta_{PP} + y_{PN} = y_{PP} + y_{PN} = y_P; \quad (7.4)$$

$$y_P = \frac{\partial U}{\partial F}.$$

Из формулы видно, что перемещение точки приложения обобщенной силы по направлению ее действия равно частной производной от потенциальной энергии системы по этой силе.

Учитывая, что в общем случае упругая система может одновременно воспринимать растягивающие, сжимающие, сдвигающие, крутящие и изгибающие нагрузки, потенциальную энергию, накапливаемую системой, найдем как

$$U = \int_1 \frac{N^2 dx}{2EF} + \int_1 \frac{Q^2 dx}{2GF} + \int_1 \frac{M_{кр}^2 dx}{2GI_p} + \int_1 \frac{M_{изг}^2 dx}{2EI}. \quad (7.5)$$

Применяя правило дифференцирования по параметру, получим

$$y_P = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_1 \frac{N dx}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial F} + \int_1 \frac{Q dx}{GF} \cdot \frac{\partial Q}{\partial F} + \int_1 \frac{M_{кр} dx}{GI_p} \cdot \frac{\partial M_{кр}}{\partial F} + \int_1 \frac{M_{изг} dx}{EI} \cdot \frac{\partial M_{изг}}{\partial F}. \quad (7.6)$$

Пренебрегая влиянием осевых и поперечных сил и крутящего момента на величину перемещения, получим

$$y_P = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_1 \frac{M dx}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial F}. \quad (7.7)$$

В случае, если нужно определить угловое перемещение в точке системы, где приложен обобщенный момент, частная производная от потенциальной энергии системы берется по обобщенному моменту:

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M^0} = \int_1 \frac{M dx}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial M^0}. \quad (7.8)$$

Если же линейное или угловое перемещение ищем в точке, где не действует обобщенная сила или обобщенный момент, то в этой точке необходимо приложить фиктивную силу или фиктивный момент и вводить их в выражение для потенциальной энергии. Производная берется по этой фиктивной силе или фиктивному моменту. В конечном результате, для определения перемещения значения фиктивных нагрузок принимаются равными нулю.

Пример 7.1. Определить прогиб и угол поворота сечения в точке приложения сосредоточенной силы консольной балки (рис. 7.2, а, б).

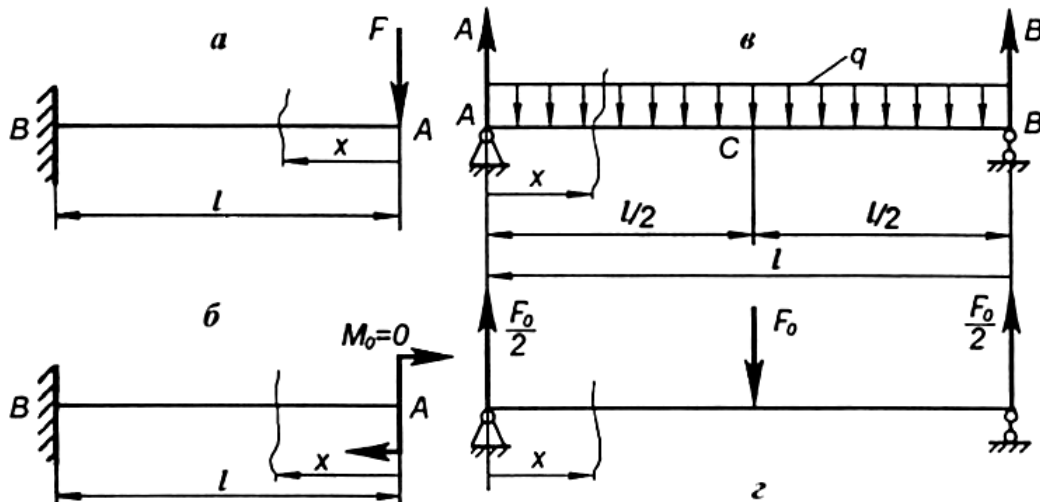


Рис. 7.2

Решение

Находим величину изгибающего момента в произвольном сечении балки

$$M = -Fx$$

и потенциальную энергию, которая создается в балке силой F :

$$U = \int_1 \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_1 \frac{(-Fx)^2 dx}{2EI}.$$

Определяем величину линейного перемещения точки A , используя теорему Кастельяно:

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^1 \frac{M dx}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial F} = \int_0^1 \frac{(-Fx) dx}{EI} \cdot (-x) = \frac{Fl^3}{3EI},$$

так как $\frac{\partial M}{\partial F} = -x$.

Находим угол поворота сечения балки в точке A , для чего приложим в точке A реактивный момент M_0 (рис. 7.2, б), заведомо равный нулю, и найдем величину изгибающего момента M от всех нагрузок, действующих в сечении при:

$$M = -Fx - M_0; \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = -1.$$

Находим угол поворота в точке A :

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M} = \int_0^1 \frac{M dx}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_0} = \int_0^1 \frac{(-Fx - M_0) dx}{EI} \cdot (-1) = \frac{Fl^2}{2EI}.$$

Пример 7.2. Для двухопорной балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой q , определить прогиб посередине пролета (рис. 7.2, в, г).

Решение

Опорные реакции на основании симметрии балки равны

$$A = B = ql/2.$$

Опорные реакции от фиктивной силы $F_0 = 0$ равны $F_0/2$.

Найдем величину изгибающего момента в сечении с учетом фиктивной силы:

$$M = Ax - \frac{qx^2}{2} + \frac{F_0}{2}x; \quad \frac{\partial M}{\partial F_0} = \frac{x}{2};$$

$$\begin{aligned}
y_C &= \frac{\partial U}{\partial F} = 2 \int_0^{l/2} \frac{M dx}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial F} = 2 \int_0^{l/2} \frac{\left(\frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} + \frac{F_0 x}{2} \right) dx}{EI} \cdot \left(\frac{x}{2} \right) = \\
&= \frac{2}{EI} \left(\int_0^{l/2} \frac{ql}{2} \cdot \frac{x^2}{2} dx - \int_0^{l/2} \frac{qx^3}{2 \cdot 2} dx + \int_0^{l/2} \frac{F_0 x}{2} \cdot \frac{x^2}{2} dx \right) = \frac{5ql^4}{384EI}.
\end{aligned}$$

ГЛАВА 8

Теорема Максвелла – Мора

В предыдущей главе получены выражения для определения линейного и углового перемещений

$$y = \int_1 \frac{M dx}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial F}; \quad (a)$$

$$\theta = \int_1 \frac{M dx}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_0}; \quad (б)$$

Выдающимся английским ученым Максвеллом и немецким ученым Мором был одновременно предложен новый способ определения перемещений y_A и θ_A , который состоит в том, что частные производные $\partial M / \partial F$ и $\partial M / \partial M_0$ заменили действием в искомом сечении единичной силы $\overline{F} = 1$ и единичного момента $\overline{M} = 1$.

Следовательно, перемещение по теореме Максвелла - Мора может определяться интегралом в виде

$$\delta = \int \frac{M M^0}{EI} dx, \quad (8.1)$$

где M - изгибающий момент в сечении от внешней нагрузки;

M^0 - единичный момент от единичной силы или от единичного момента в зависимости от того, какое перемещение определяется - линейное или угловое.

Пример 8.1. Для консольной балки, нагруженной на конце сосредоточенной силой, определить в точке приложения силы линейное и угловое перемещения (рис. 8.1, а, б, в).

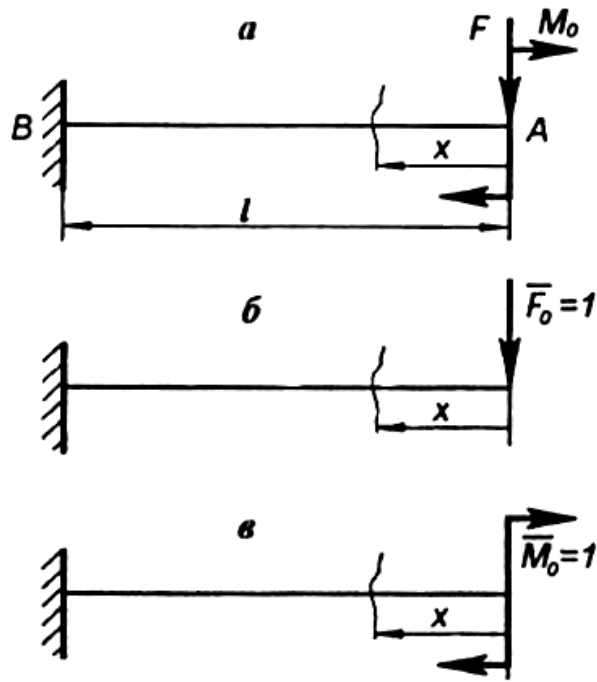


Рис. 8.1

Решение

Для определения перемещении y_A и θ_A построим две дополнительные схемы б и в и приложим на конце ее единичную силу $F_o = 1$ и единичный момент $\overline{M}_o = 1$.

Найдем изгибающие моменты в произвольном сечении:

$$M = -Fx; \quad M_P^0 = -x; \quad M_M^0 = -1.$$

Используем формулу (8.1) для определения перемещений y_A и θ_A :

$$y_A = \int_0^l \frac{MM_P^0}{EI} dx = \int_0^l \frac{(-Fx)(-x)}{EI} dx = \frac{Fl^3}{3EI};$$

$$\theta_A = \int_0^l \frac{MM_M^0}{EI} dx = \int_0^l \frac{(-Fx)(-1)}{EI} dx = \frac{Fl^2}{2EI}.$$

Пример 8.2. Для двухопорной балки, нагруженной посередине пролета сосредоточенной силой F , определить прогиб в точке приложения силы C , пользуясь интегралом Мора (рис. 8.2).

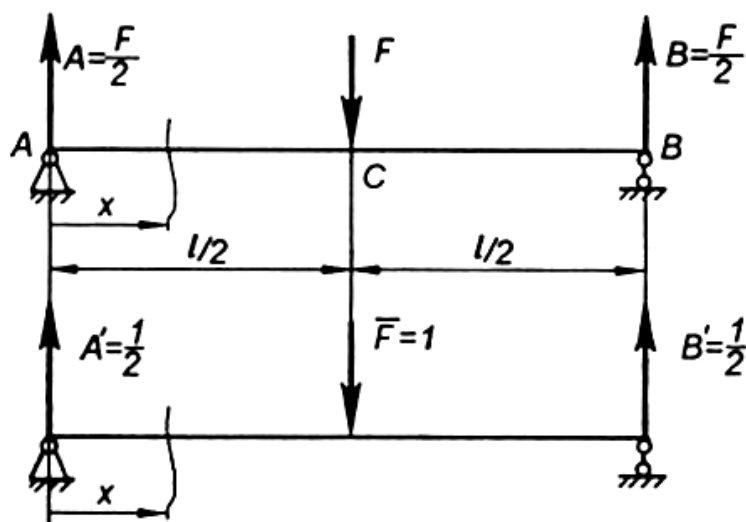


Рис. 8.2

Решение

Построим дополнительную схему балки и приложим посредине пролета силу $\bar{F} = 1$. Опорные реакции основной и дополнительной схем соответственно равны:

$$A = B = F / 2 \text{ и } A' = B' = 1 / 2.$$

Найдем изгибающие моменты в произвольном сечении:

$$M = Ax = \frac{F}{2} x, \quad M^0 = A'x = \frac{x}{2};$$

$$\delta = \int_0^{l/2} \frac{MM^0}{EI} dx = 2 \int_0^{l/2} \frac{(F/2x)(x/2)}{EI} dx = 2 \frac{Fl^3}{4EI \cdot 8 \cdot 3} = \frac{Fl^3}{48EI}.$$

Коэффициент 2 перед интегралом введен в выражение ввиду того что балка содержит два одинаковых участка.

ГЛАВА 9

Правило Верещагина

В 1924 г. А. К. Верещагин предложил более простой способ вычисления интеграла Мора:

$$\delta = \int \frac{MM^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int MM^0 dx. \quad (9.1)$$

Проанализируем подынтегральное выражение $\int MM^0 dx$.

Поскольку единичная нагрузка бывает обычно сосредоточенной силой или парой сил, то эпюра от единичной нагрузки всегда ограничена прямой линией, а вычисление $\int MM^0 dx$ при любом очертании эпюры моментов от внешних сил можно производить следующим образом.

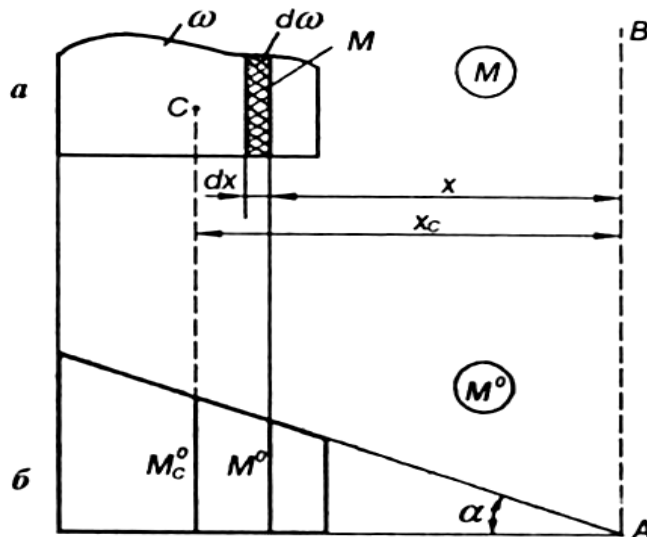


Рис. 9.1

Пусть эпюра M имеет криволинейное очертание (рис. 9.1, *a*), а эпюра от единичной силы M^0 - прямолинейное (рис. 9.1, *б*). Произведение Mdx можно рассматривать как элементарную площадь эпюры $M^0 \cdot d\omega$. Ордината эпюры M^0 в этом же сечении равна:

$$M^0 = x \operatorname{tg} \alpha,$$

а произведение равно

$$MdxM^0 = d\omega \cdot x \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Тогда весь интеграл

$$\int MM^0 dx = \operatorname{tg} \alpha \int_{\omega} x d\omega$$

представляет собой статический момент площади эпюры M относительно прямой AB , умноженной на $\operatorname{tg} \alpha$. Но статический момент $\int_{\omega} x d\omega$ можно

представить как $\int_{\omega} x d\omega = \omega x_c$, тогда $\int MM^0 dx = \omega x_c \operatorname{tg} \alpha$

Произведение $x_c \operatorname{tg} \alpha = M_c^0$, где M_c^0 - ордината на эпюре моментов от единичной силы под центром тяжести эпюры M .

Тогда интеграл принимает вид: $\int MM^0 dx = \omega M_c^0$.

В итоге интеграл Мора запишется в виде

$$\delta = \frac{\omega M_c^0}{EI}. \quad (9.2)$$

Для определения перемещения по правилу Верещагина необходимо знать площадь эпюры моментов от внешней нагрузки и найти положение ее центра тяжести. Если эпюра моментов имеет сложную конфигурацию, то ее разбивают на простые площади $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и находят положение центров тяжести для каждой площади. Строится эпюра моментов от единичной силы или единичного момента, в зависимости от этого определяется y или θ . Под центром тяжести эпюр моментов от внешней нагрузки берутся ординаты на эпюре моментов от единичных силовых факторов. Сумма произведений $\sum \omega M_c^0$, отнесенная к жесткости рассматриваемого элемента, даст перемещение в рассматриваемой точке.

Пример 9.1. Найти перемещение точки приложения сосредоточенной силы в консольной балке (рис. 9.2).

Решение

Строим эпюру моментов от силы F (рис. 9.2,б) и определяем ее площадь

$$\omega = 1 / 2Fl \cdot l.$$

Строим эпюру моментов от единичной силы $\bar{F} = 1$. Эта сила прикладывается в точке, в которой ищется перемещение по направлению действия заданной силы \bar{F} (рис. 9.2, в). Ордината под центром тяжести эпюры M на эпюре моментов от единичной силы равна $M = (2 / 3)l$, тогда перемещение точки будет равно:

$$\delta = \frac{\omega M_c^0}{EI} = \frac{\frac{1}{2}Fl \cdot l \cdot \frac{2}{3}l}{EI} = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Таким образом, мы получим тот же результат, что и при решении этой задачи в предыдущих шести случаях

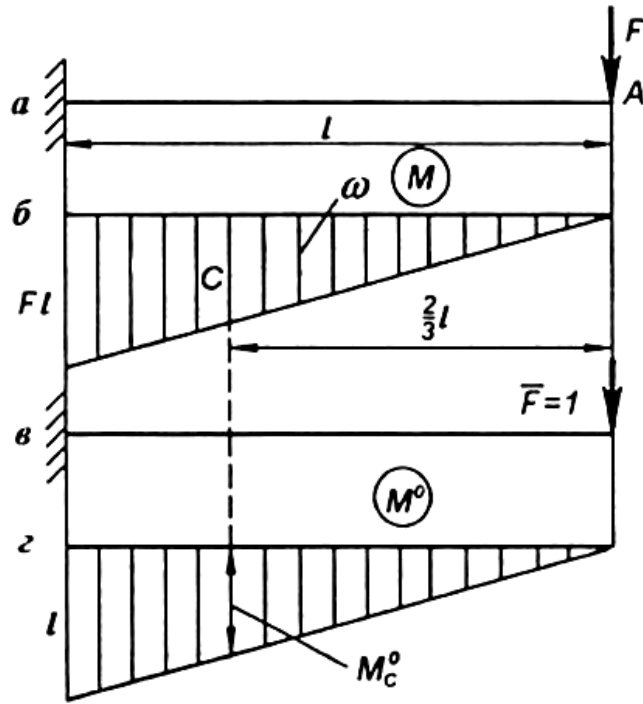


Рис. 9.2

Пример 9.2. Для консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой F , сосредоточенным моментом M и равномерно распределенной нагрузкой q , определить прогиб y_A и угол поворота θ конечного сечения по правилу Верещагина (рис. 9.3).

Решение

Строим эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки F , M и q , от единичной силы $\bar{F} = 1$ и единичного момента $\bar{M} = 1$.

Определяем прогиб в точке A :

$$y_A = \frac{\omega_1 M_{c1}^0}{EI} + \frac{\omega_2 M_{c2}^0}{EI} + \frac{\omega_3 M_{c3}^0}{EI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Fl \cdot l}{EI} \cdot \frac{2}{3} + \frac{M \cdot l}{EI} \cdot \frac{l}{2} + \frac{ql^2 \cdot l}{2EI} \cdot \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Ml^2}{2EI} + \frac{ql^4}{8EI}$$

и угол поворота конечного сечения балки

$$\theta_A = \frac{\omega_1 M_{OM}^0}{EI} + \frac{\omega_2 M_{OM}^0}{EI} + \frac{\omega_3 M_{OM}^0}{EI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Fl \cdot l}{EI} + \frac{M \cdot l}{EI} + \frac{1}{3} \frac{ql^2 \cdot l}{2EI} = \frac{Fl^2}{2EI} + \frac{Ml}{EI} + \frac{ql^3}{6EI}.$$

На рис. 9.3, б-е показаны соответственно эпюры моментов от сосредоточенной силы F , сосредоточенного момента M , равномерно распределен-

ной нагрузки q , единичной силы $\bar{F} = 1$ и единичного момента $\bar{M} = 1$. При использовании правила Верещагина приходится оперировать площадями эпюр и положениями центров тяжести эпюр изгибающих моментов, которые могут быть самыми различными.

Ниже приводятся схемы часто встречающихся балок, их эпюры и положения центров тяжести.

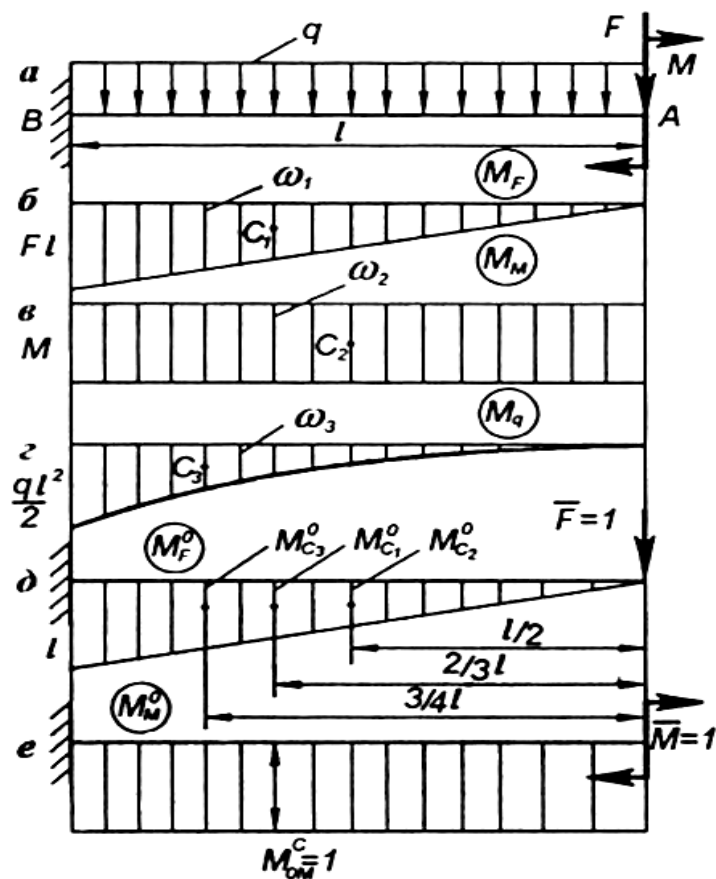


Рис. 9.3

При использовании правила Верещагина приходится оперировать площадями эпюр и положениями центров тяжести эпюр изгибающих моментов, которые могут быть самыми различными.

Ниже приводятся схемы часто встречающихся балок, их эпюры и положения центров тяжести.

В схемах, показанных на рис 9.4, ω означает площадь эпюры моментов, а f – наибольший изгибающий момент на соответствующей эпюре моментов.

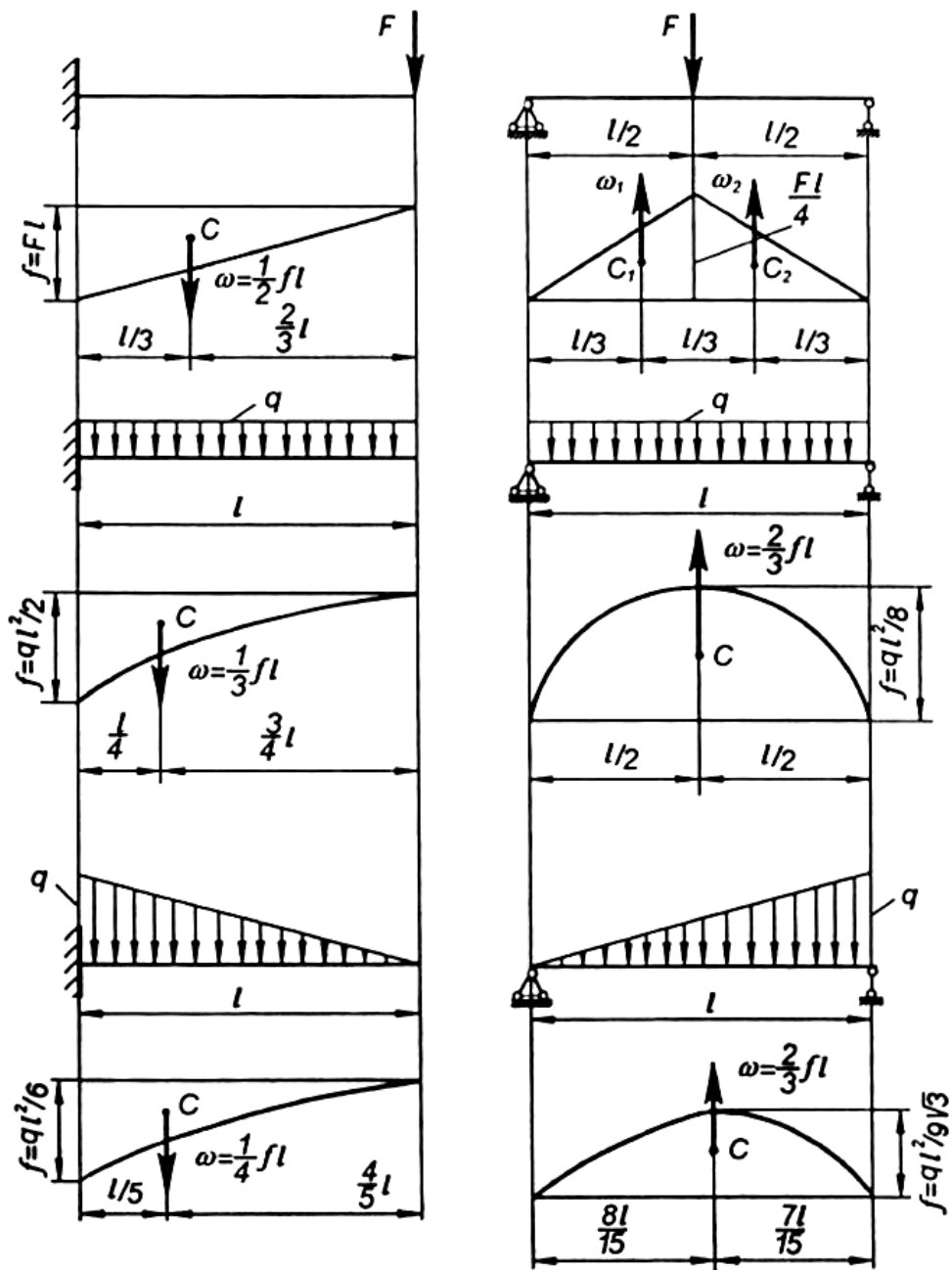


Рис. 9.4

ГЛАВА 10

Применение численного интегрирования по методу Симпсона для вычисления перемещений

Применение формул численного интегрирования не требует расслоения эпюр. В том случае, когда ось стержня в пределах каждого участка

прямолинейна и жесткость EI_x постоянна, разбиение участка $[0, l]$ можно провести на два интервала длиной $h = l/2$ и формула Симпсона для равномерно распределенной нагрузки дает точное значение интеграла Максвелла – Мора;

$$\int_0^l \frac{M_F M_K dz}{EI_x} = \frac{l}{6EI_x} \left[M_F(0)M_K(0) + 4M_F\left(\frac{l}{2}\right)M_K\left(\frac{l}{2}\right) + M_F(l)M_K(l) \right]. \quad (10.1)$$

Оказывается необходимым знать всего три значения изгибающих моментов M_F, M_K : в начале участка ($z = 0$), в середине $\left(z = \frac{l}{2}\right)$ и в конце участка ($z = l$). Для эпюр в форме квадратичной параболы интегрирование по формуле Симпсона даёт точные значения.

Пример 10.1. В качестве примера рассмотрим определение прогиба посередине пролета балки (рис 10.1, а). $EI_x = const$.

Решение

Сначала определяем опорные реакции и строим грузовую эпюру M_F (рис 10.1, б). Всю длину балки разбиваем на два участка и вычисляем значения изгибающего момента посередине каждого участка:

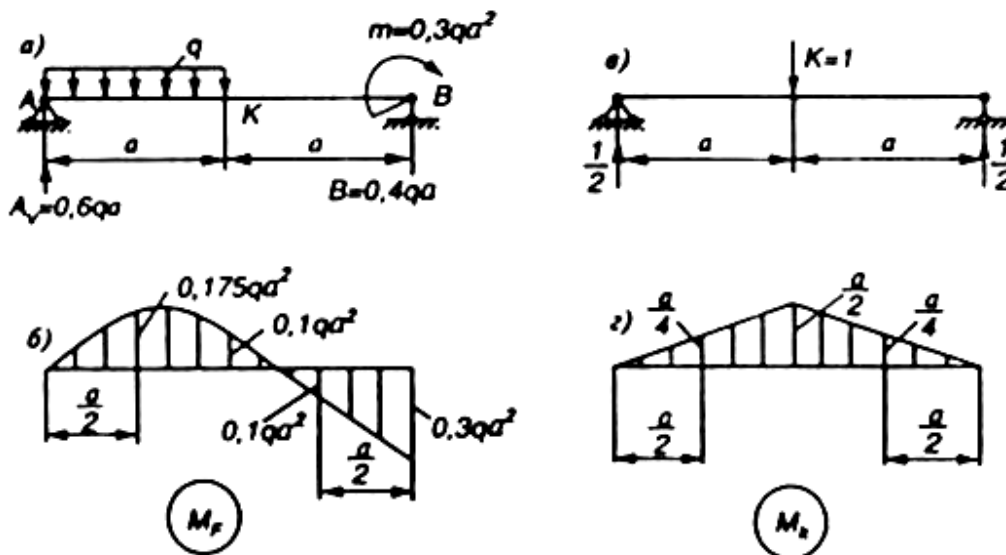


Рис. 10.1

$$M_F\left(\frac{a}{2}\right) = A_F \frac{a}{2} - \frac{q}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0,175qa^2; \quad M_F\left(\frac{3a}{2}\right) = A_F \frac{3}{2}a - qa \cdot a = -0,1qa^2.$$

В направлении искомого прогиба прикладываем единичную силу $K = 1$ и строим единичную эпюру изгибающего момента M_K (рис. 10.1, в, з). Из подобия треугольников легко определяются соответствующие ординаты посередине каждого участка. Затем по приведенной выше формуле определяем искомый прогиб:

$$v(a) = \frac{a}{6EI_x} \left[0 \cdot 0 + 4 \cdot 0,175qa^2 \cdot \frac{a}{4} + 0,1qa^2 \cdot \frac{a}{2} \right] + \frac{a}{6EI_x} \cdot \left[0,1qa^2 \cdot \frac{a}{2} + 4 \cdot (-0,1qa^2) \frac{a}{4} + (-0,3qa^2) \cdot 0 \right] = 0,0292 \frac{qa^2}{EI_x}.$$

При действии равномерно распределенной нагрузки на исследуемом участке получаемые значения перемещений по этой формуле абсолютно точны.

Пример 10.2. Решим задачу методом единичной нагрузки (Максвелла – Мора) с применением правила Верещагина.

Решение

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 10.2 б). На втором и третьем участках разбиваем эпюру на простые слагаемые (рис. в)).

Получаем такие площади:

$$\omega_1 = -\frac{1}{3}a \frac{pa^2}{2} = -\frac{pa^3}{6}, \quad \omega_2 = \frac{p(2a)^3}{12} = \frac{2}{3}pa^3, \quad \omega_3 = -\frac{1}{3}a$$

$$\omega_4 = \frac{1}{4}pa^3, \quad \omega_5 = \frac{1}{4}pa^3, \quad \omega_6 = -pa^3, \quad \omega_7 = -\frac{1}{2}pa^3.$$

Прикладываем в точке B силу 1 (рис. з)). Соответствующая («единичная») эпюра моментов \overline{M} показана на рис. з. Ординаты этой эпюры, соответствующие центрам тяжести найденных выше площадей $\omega_1, \dots, \omega_5$, имеют такие значения:

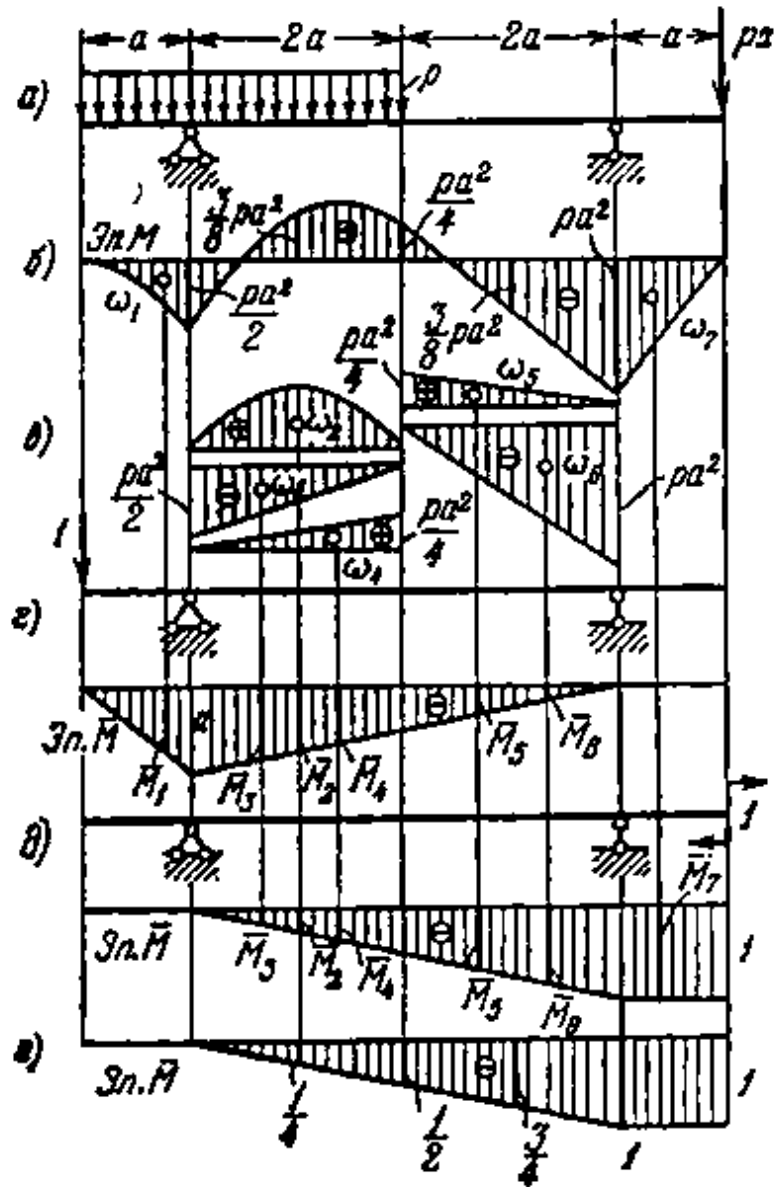


Рис. 10.2

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= -\frac{3}{4}a, & \bar{M}_2 &= -\frac{3}{4}a, & \bar{M}_3 &= -\frac{5}{6}a, & \bar{M}_4 &= -\frac{2}{3}a, & \bar{M}_5 &= -\frac{1}{3}a, \\ & & & & \bar{M}_6 &= -\frac{1}{6}a. \end{aligned}$$

Искомый прогиб в точке B:

$$v_B = \int \frac{M \bar{M} dx}{EI} = \sum \frac{\omega \bar{M}_c}{EI} = \frac{1}{EI} (\omega_1 \bar{M}_1 + \omega_2 \bar{M}_2 + \dots + \omega_6 \bar{M}_6) = -\frac{pa^4}{24EI}.$$

Знак минус означает, что точка B перемещается не вниз, как была направлена сила 1 , а вверх. Для определения угла поворота в точке A прикладываем здесь момент, равный 1 (рис. δ)), и строим соответствующую эпюру изгибающих моментов \overline{M} .

Получаем:

$$\overline{M}_2 = -\frac{1}{4}, \quad \overline{M}_3 = -\frac{1}{6}, \quad \overline{M}_4 = -\frac{1}{3}, \quad \overline{M}_5 = -\frac{2}{3}, \quad \overline{M}_6 = -\frac{5}{6}, \quad \overline{M}_7 = -1.$$

Искомый угол поворота $\varphi_A = \frac{1}{EI}(\omega_2 \overline{M}_2 + \omega_3 \overline{M}_3 + \dots + \omega_7 \overline{M}_7) = \frac{pa^3}{EI}$.

Знак плюс в полученном результате означает, что поворот оси бруса в точке A происходит в том же направлении, в каком действует приложенный момент 1 , т. е. по часовой стрелке.

Покажем также вычисление φ_A по формуле Симпсона:

$$EI\varphi_A = \sum \frac{l}{6}(M_0 \overline{M}_0 + 4M_{l/2} \overline{M}_{l/2} + M_l \overline{M}_l)$$

(l – длина участка). Вычисляя (см. рис. δ) и e)), находим:

$$\begin{aligned} EI\varphi_A &= \frac{2a}{6} \left[-\frac{pa^2}{2} \cdot 0 + 4 \cdot \frac{3}{8} pa^2 \left(-\frac{1}{4} \right) + \frac{pa^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \right] + \\ &+ \frac{2a}{6} \left[\frac{pa^2}{4} \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \left(-\frac{3}{8} pa^2 \right) \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) + (-pa^2) \cdot (-1) \right] + \\ &+ \frac{a}{6} \left[(-pa^2) \cdot (-1) + 4 \cdot \left(-\frac{pa^2}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 0 \cdot 1 \right] = pa^3 \end{aligned}$$

Рекомендуемая литература

1. Александров, А.В. и др. Сопротивление материалов [Текст]: учебник для студентов вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; под ред. А.В. Александрова. 2-е изд., испр. М.: Высшая школа, 2000. 559с.
2. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов [Текст]: учебник для студентов вузов / Н.М. Беляев. М.: Наука, 1976. 479с.
3. Качурин, В.К. и др. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст] / В.К. Качурин, Н.М. Беляев, Л.А. Белявский, Я.И. Кипнис, Н.Ю. Кушелев, А.К. Синицкий; под ред. В.К. Качурина. М.: Наука, 1970. 432с.
4. Кочетов, В.Т. и др. Сопротивление материалов [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / В.Т. Кочетов, М.В. Кочетов, А.Д. Павленко. 3-е изд., перераб. и доп. – БХВ – Петербург, 2004. 544с.
5. Миролюбов, И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов [Текст] / И.Н. Миролюбов, С.Н. Енгальцев, Н.Д. Сергиевский; - М.: Наука, 1967. 484с.
6. Писаренко, Г.С. и др. Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. Киев: Наукова думка, 1975. 704с.
7. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов [Текст]: учебник для студентов вузов / В.И. Феодосьев. – 10-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ Им Н.Э. Баумана, 2001. 588с.
8. Феодосьев, В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов [Текст]: Сборник задачи для студентов вузов / В.И. Феодосьев. М.: Наука, 1973. 484с.
9. Уманский, А.А. и др. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст] / А.А. Уманский, А.М. Афанасьев, А.С. Вольмир, Ю.П. Григорьев, А.И. Коданёв, В.А. Марьин, В.В. Новицкий; под ред. А.А. Уманского. М.: Наука, 1973. 496с.