МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

Л.А. Золкина
Е.С. Плотникова

КРИВИЗНА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Методические указания
для студентов лесоинженерного факультета
специальности «автомобильные дороги и аэродромы»

Екатеринбург
2011

Печатается по рекомендации методической комиссии ФЭУ.
Протокол № 2 от 23 сентября 2010 г.

Рецензент доцент кафедры высшей математики УГЛТУ Н.К. Орехова

Редактор Л.Д. Черных
Оператор компьютерной верстки Г.И. Романова

Подписано в печать 30.11.12		Поз. 46
Плоская печать	Формат 60х84 1/16	Тираж 190 экз.
Заказ №	Печ. л. 1,86	Цена 9 руб. 60 коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

1. Кривые на плоскости

Рассмотрим функции

$$y = f(x) \text{ или } x = \varphi(y). \tag{1}$$

Полагаем их непрерывными и имеющими непрерывные производные. Неявная функция:

$$F(x;y) = 0. \tag{2}$$

Функция, заданная параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \tag{3}$$

Кривая есть геометрическое место точек, удовлетворяющих аналитическим выражениям (1), (2) или (3).

Пример 1. Цепная линия

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \cdot ch\frac{x}{a}.$$

По такой линии устанавливается в равновесии гибкая, нерастяжимая тяжёлая нить (цепь, провод и т. д.), подвешенная за оба конца.

Пример 2. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В параметрической форме уравнение эллипса принимает вид

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

где параметр t изменяется в пределах $0 \le t \le 2\pi$. В прямоугольных декартовых координатах параметр t можно представить как угол между радиусом-вектором $(x;y)$ и осью абсцисс Ox.

Пример 3. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В параметрической форме уравнение гиперболы имеет вид

$$\begin{cases} x = a \cdot cht, \\ y = b \cdot sht, \end{cases}$$

где параметр t изменяется в пределах $-\infty < t < \infty$; $cht = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$;

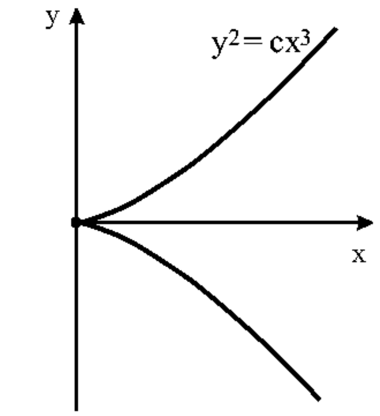


Рис. 1

$$sht = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Пример 4. Полукубическая парабола (рис.1)

$$y^2 = cx^3.$$

Тогда $y = \pm\sqrt{cx^3}$, где $O(0;0)$ - особая точка.

2. Кривые механического происхождения

Кривые механического происхождения получаются путём качения одних кривых по другим.

2.1. Циклоида

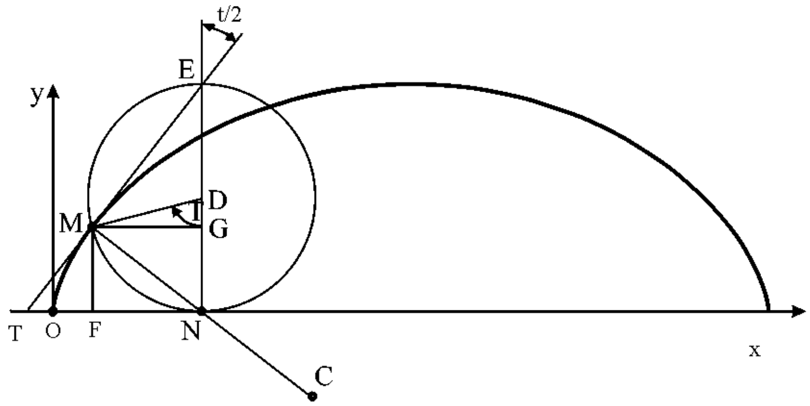


Рис. 2

По оси Ox слева направо катится без скольжения круг радиуса a с центром в точке A (рис.2). Кривая, описываемая в этом движении любой точкой $A(0;a)$ окружности, называется циклоидой. Проследим путь, пробегаемый точкой O, за один оборот круга:

$$\begin{cases} x = a\left(t - \sin t\right), \\ y = a\left(1 - \cos t\right). \end{cases}$$

Границы изменения параметра $0 \le t \le 2\pi$.

2.2. Эпициклоида

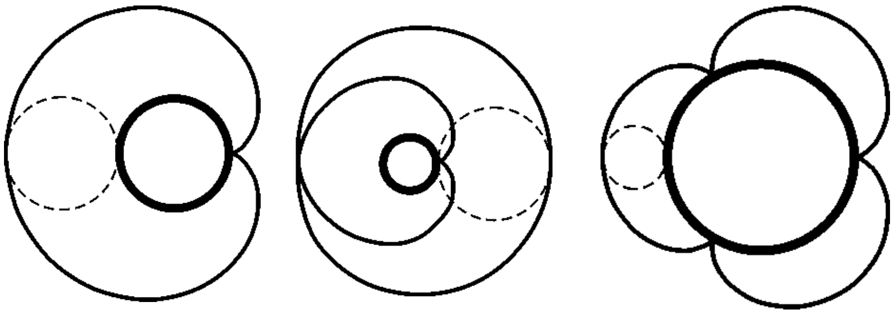
Если один круг без скольжения катится по другому неподвижному кругу, то кривая, описываемая произвольной точкой М окружности подвижного круга, называется эпициклоидой.

$$\begin{cases} x=(a+b)\cos t-a\cos\dfrac{a+b}{a}t, \\ y=(a+b)\sin t-a\sin\dfrac{a+b}{a}t. \end{cases}$$

Здесь a — радиус катящейся окружности, b — радиус неподвижной окружности.

Эпициклоида представляет собой замкнутую кривую, если радиусы неподвижного и катящегося круга соизмеримы, т. е. $m=\dfrac{a}{b}=\dfrac{p}{q}$ (p, q - целые числа).

На рис. 3 приведены эпициклоиды, построенные для значений: $m=1$ - кардиоида (рис. 3, а); $m=2$ (рис. 3, б); $m=3$ (рис. 3, в).



а) б) в)

Рис. 3

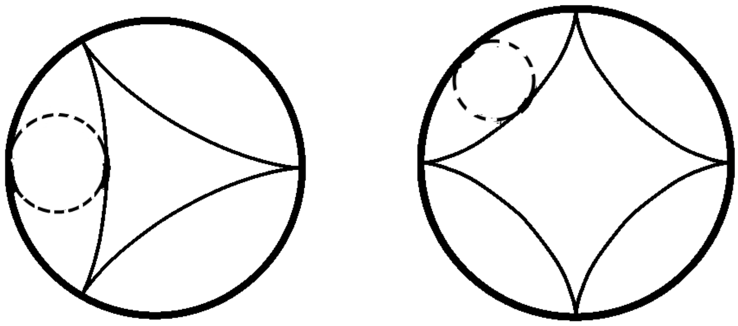
2.3. Гипоциклоида

Если катящийся круг движется внутри неподвижной окружности, то получаемая кривая называется гипоциклоидой. Уравнение гипоциклоиды получается из уравнения эпициклоиды заменой a на $-a$.

$$\begin{cases} x=(b-a)\cos t+a\cos\dfrac{b-a}{a}t, \\ y=(b-a)\sin t-a\sin\dfrac{b-a}{a}t \end{cases}.$$

Здесь a — радиус катящейся окружности; b — радиус неподвижной окружности.

На рис. 4 построены гипоциклоиды для отношений $m=\frac{a}{b}$ (a — радиус катящегося круга; b — радиус неподвижного круга) $m=\frac{1}{3}$ (рис. 4, а); $m=\frac{1}{4}$ — астроида (рис. 4, б).



а) б)

Рис. 4

3. Кривые в полярных координатах

Уравнение кривой в полярных координатах имеет вид $r=f(\varphi)$.

3.1. Архимедова спираль (рис. 5)

Уравнение в полярных координатах: $r=a\varphi$.

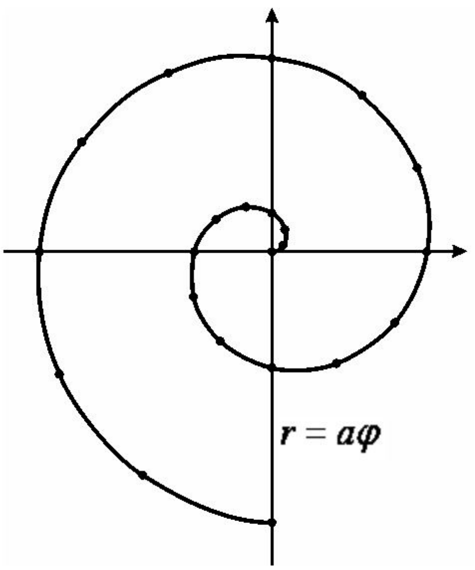


Рис. 5

3.2. Лемниската Бернулли (рис. 6)

Уравнение в полярных координатах: $r^2=2a^2\cos 2\varphi$

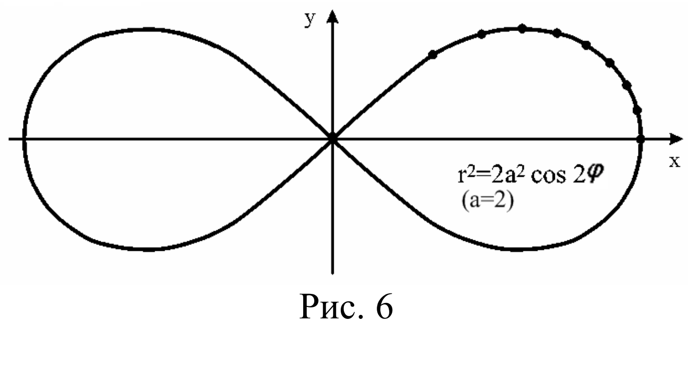


Рис. 6

4. Касание кривых между собой. Огибающая семейства кривых

Если две кривые имеют общую точку M_0 и в этой точке общую касательную, то говорят, что кривые касаются в точке M_0.

Пусть семейство кривых задано уравнением

$$F(x;y;a)=0, \tag{4}$$

где a – параметр.

Для получения конкретной кривой должно быть задано значение a. При изменении значения a будут получатся различные по форме или положению кривые. Совокупность всех этих кривых называется семейством кривых с одним параметром. Уравнение (4) называется уравнением семейства.

Кривая *L*, которая касается каждой кривой семейства в одной или нескольких точках и при том состоит из этих точек касания, называется огибающей этого семейства (рис. 7).

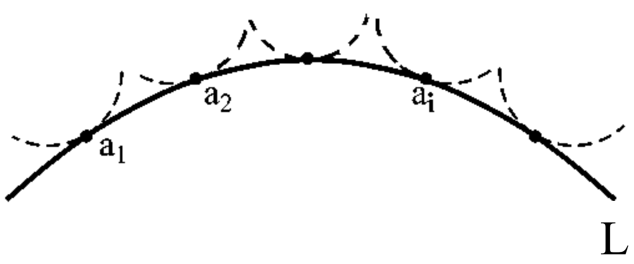


Рис. 7

$x=\varphi(a),\ y=\psi(a)$ являются координатами точки касания.

Если огибающая семейства (4) существует, то её уравнение получаем как решение относительно x, y системы уравнений:

$$\begin{cases} F(x;y;a)=0, \\ F_a^{'}(x;y;a)=0. \end{cases}$$

Пример 5. Найти огибающую для семейства окружностей

$$\left(x-a\right)^2+y^2-r^2=0.$$

Решение

Частная производная уравнения семейства по параметру a равна: $-2(x-a)=0$. Откуда получаем $x-a=0$.

Подставляя в первое уравнение системы, получаем $y^2-r^2=0$. $\left(y-r\right)\left(y+r\right)=0$. $r=const$.

$y=r$, $y=-r$. Огибающими семейства являются две прямые, параллельные оси абсцисс.

5. Скорость изменения длины кривой

Пусть по кривой движется точка M. Её положение на этой кривой будем задавать длиной дуги, отсчитываемой от некоторой точки A, принятой за начало координат. В некоторый момент времени положение подвижной точки M совпадает с некоторой неподвижной точкой кривой $M_0\left(x_0;y_0\right)$ (рис. 8).

Длина дуги $\overset{\frown}{AM_0}=s$. Предположим, что точка M_0 перешла в положение $M_1\left(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y\right)$. Длина дуги кривой при этом изменилась на величину $\Delta s=\overset{\frown}{M_0M_1}$. Квадрат длины хорды, соединяющей точки M_0M_1, равен

$$M_0M_1^{\;2}=\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2. \tag{5}$$

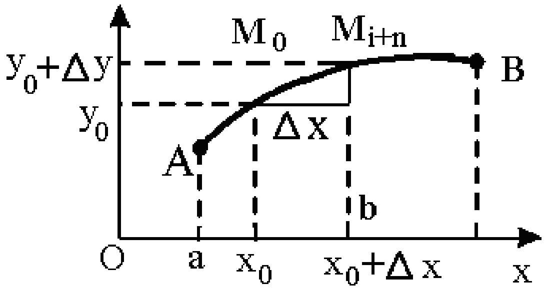


Рис 8.

При $\Delta x\to 0$ длина хорды стремится к длине дуги $M_0M_1\to\overset{\frown}{M_0M_1}$.

Средней скоростью точки называется отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta x}$. Предел этого отношения называется мгновенной скоростью точки

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=s'(x). \tag{6}$$

Приведем левую часть (5) к виду

$$\left(\frac{M_0M_1}{\Delta x}\right)^2\Delta s^2=\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2.$$

Разделив полученное равенство на $\left(\Delta x\right)^2$, получим

$$\left(\frac{M_0M_1}{\Delta x}\right)^2\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ и учитывая, что предел первой скобки в левой части равенства равен 1, получаем

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \tag{7}$$

Извлекая квадратный корень, находим мгновенную скорость движения точки по кривой:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(y^{'}\right)^2}\ . \qquad (8)$$

Вспоминая геометрический смысл производной: $y^{'}(x_0) = tg\alpha$, получаем

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(y^{'}\right)^2} = \sqrt{1+tg^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \sec\alpha\ . \qquad (9)$$

По аналогии получаем

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1+\left(x^{'}\right)^2} = \sec\beta\ , \qquad (10)$$

где β - угол между осью ординат и касательной.

Скорость изменения длины дуги кривой измеряется секансом угла между касательной к кривой и соответствующей координатной осью.

Дифференциал дуги равен

$$ds = \sqrt{1+\left(y^{'}\right)^2}\,dx\ . \qquad (11)$$

Если кривая задана параметрически $x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)$, то дифференциал дуги определяется по формуле

$$ds = \sqrt{\left(\varphi_t^{'}\right)^2 + \left(\psi_t^{'}\right)^2}\,dt\ . \qquad (12)$$

Дифференциал дуги можно представить длиной отрезка касательной к линии в начальной точке дуги. Достаточно малую дугу линии можно со сколь угодно малой относительной ошибкой заменять и по положению и по длине соответствующим отрезком касательной к этой линии в начальной точке дуги.

Проекции *dx, dy* отрезка касательной *ds* на оси координат определяются по формулам

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\alpha}\ ;\ \frac{dx}{ds} = \cos\alpha\ ;\ dx = ds\cos\alpha\ ; \qquad (13)$$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{1}{\cos\beta}\ ;\ \frac{dx}{ds} = \cos\beta\ ;\ dx = ds\cos\beta\ . \qquad (14)$$

6. Понятие кривизны

Введём новую количественную характеристику линии, определяющую меру изогнутости, искривлённости линии. Под кривизной понимают её отклонение от прямой линии.

Пусть дана линия, определяемая уравнением $y = f(x)$, непрерывная со своими производными 1-го и 2-го порядка. Рассмотрим дугу этой кривой. Если в каждой точке кривой провести касательную, то вследствие искривлённости кривой эта касательная будет вращаться с перемещением точки касания. Этим кривая отличается от прямой, для которой касательная, совпадающая с ней, сохраняет одно и то же направление для всех точек.

Важным элементом, характеризующим течение кривой, является степень её искривлённости или *кривизна* в различных точках.

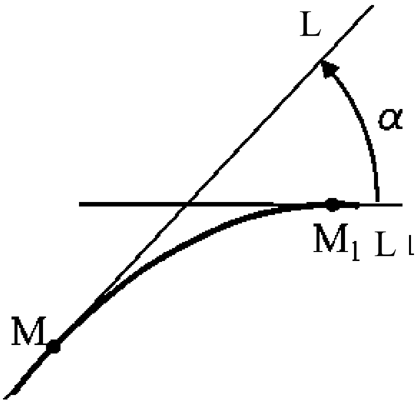


Рис. 9

На рис. 9 показан угол поворота касательной к кривой при переходе из точки M в точку M_1.

Полной характеристикой изогнутости кривой является отношение угла поворота касательной к длине соответствующей дуги $\overset{\smile}{MM_1}$.

Средней кривизной K_{cp} дуги $\overset{\smile}{MM_1}$ называется отношение угла поворота касательной к длине дуги

$$K_{cp} = \frac{\alpha}{\overset{\smile}{MM_1}}. \tag{15}$$

На различных участках кривой средняя кривизна будет различной.

Пример кривых с различной кривизной на участках (рис. 10, 11).

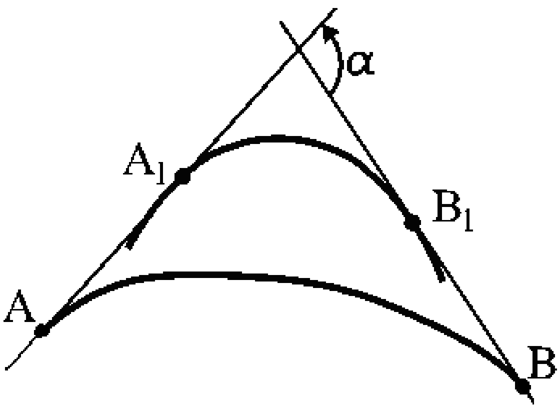


Рис. 10

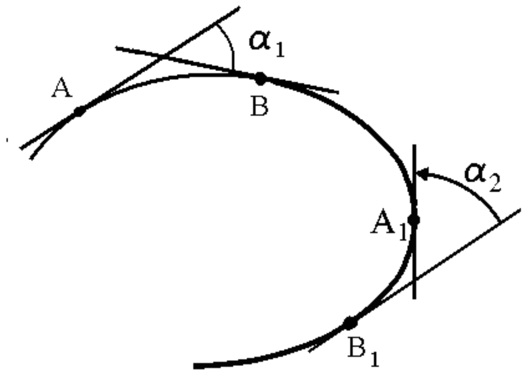


Рис. 11

От понятия средней кривизны дуги $\overset{\smile}{MM_1}$ перейдём к понятию кривизны кривой в точке.

Кривизной кривой в точке M называется предел, к которому стремится кривизна дуги $\overset{\smile}{MM_1}$, когда точка M_1 стремится вдоль кривой к точке M :

$$k = \lim_{M_1 \to M} K_{cp} = \lim_{M_1 \to M} \frac{\alpha}{\overset{\smile}{MM_1}}. \tag{16}$$

Понятия средней кривизны и кривизны кривой в данной точке аналогичны понятиям средней скорости и скорости кривой в данный момент для движущейся точки. Средняя кривизна характеризует среднюю скорость изменения направления касательной на некоторой дуге, а кривизна в точке -

- истинную скорость изменения этого направления, приуроченную к данной точке.

Пример 6. Найти среднюю кривизну дуги $\overset{\frown}{AB}$ некоторой окружности радиуса r и кривизну в точке *A*.

Обозначим α — угол поворота касательной. Длина дуги $\overset{\frown}{AB} = \alpha r$.

Средняя кривизна дуги *AB* равна $K_{cp} = \dfrac{\alpha}{\alpha r} = \dfrac{1}{r}$. Кривизна кривой в точке *A* равна $k = \lim\limits_{B \to A} K_{cp} = \dfrac{1}{r}$.

Средняя кривизна дуги окружности не зависит от длины и положения дуги, кривизна окружности в каждой точке также не зависит от выбора точки.

Для любой прямой средняя кривизна $K_{cp} = 0$, и кривизна в точке так же равна $k = 0$. Прямая представляет собой линию *нулевой кривизны.*

7. Вывод аналитического выражения для вычисления кривизны

Пусть дана кривая $y = f(x)$ (рис. 12). Начало координат на кривой (начало отсчёта дуги) выбрано в точке M_0. Рассмотрим точки $M(x; y)$ и $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$.

Длина дуги $\overset{\frown}{M_0 M} = s$. При переходе от точки *M* к точке M_1 длина дуги увеличивается на $\Delta s = \overset{\frown}{M_0 M_1} - \overset{\frown}{M_0 M}$. Приращение дуги будем считать положительным Δs. Угол наклона касательной к оси абсцисс обозначим φ. Модуль приращения угла поворота касательной $|\Delta\varphi|$.

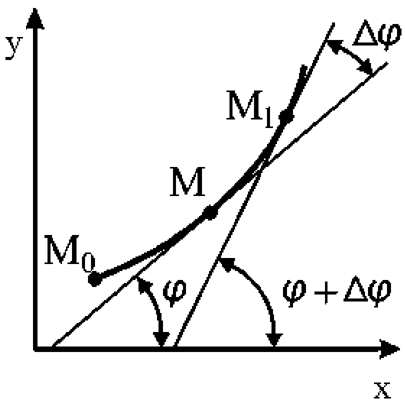


Рис. 12

Средняя кривизна дуги $\overset{\smile}{M_1M}$ равна

$$K_{cp} = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Кривизна в точке равна $k = \lim\limits_{M_1 \to M}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$.

Так как длина дуги s и угол поворота касательной φ зависят от x, то φ можно рассматривать как функцию, зависящую от x. Тогда

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}}\right| = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right|}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta x}\right|} = \left|\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}\right| = \left|\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}\right| \tag{17}$$

По определению производной $tg\varphi = y'$. Разрешая уравнение относительно φ получаем $\varphi = \mathrm{arc}\,tgy'$. Дифференцируем φ по x, получаем

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{1+\left(y'\right)^2}\,y''. \tag{18}$$

Подставляя выражение производной в числитель выражения кривизны, получаем

$$k = \left|\frac{y''}{\sqrt{\left(1+\left(y'\right)^2\right)^3}}\right|. \tag{19}$$

Знак $\dfrac{y''}{\left(1+\left(y'\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ указывает сторону, в которую изогнута кривая в точке M, а модуль этого выражения даёт кривизну, т. е. меру изогнутости линии в точке M. Кривизну можно вычислить в любой точке кривой, где существует вторая производная y''.

Пример 7. Найти кривизну линии $y = kx + b$.

Решение

$y' = k,\ \ y'' = 0.$ Прямая представляет собой линию нулевой кривизны.

Пример 8. Кривая задана уравнением $y = x^3 + x^2 - 5$. Найти кривизну в точке $A(0;-5)$.

Решение

Найдём y' и y'' от функции $y = x^3 + x^2 - 5$:

$$y' = 3x^2 + 2x, \quad y'' = 6x + 2.$$

Вычислим значения y' и y'' в точке $A(0;-5)$:

$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2.$$

Используя формулу (19) найдём кривизну линии в точке $A(0;-5)$:

$$k = \frac{2}{\sqrt{(1+0)^3}} = 2.$$

Пример 9. Кривая задана уравнением $y^2 = 2px$. Найти кривизну в точках $M_0(0;0)$ и $M_1(p/2;p)$.

Решение

Найдём y' и y'' от функции $y = \sqrt{2px}$:

$$y' = \sqrt{\frac{p}{2x}}, \quad y'' = -\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x^3}}.$$

Получим выражение кривизны в произвольной точке x:

$$k = \left| \frac{-\dfrac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x^3}}}{\left(1+\dfrac{p}{2x}\right)^{3/2}} \right| = \left| -\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x^3}\,\dfrac{(2x+p)^{3/2}}{(2x)^{3/2}}} \right| = \left| -\frac{\sqrt{2p}}{(2x+p)^{3/2}} \right|.$$

Найдём кривизну линии $y^2 = 2px$ в точке $M_0(0;0)$:

$$k(0) = \left| -\frac{\sqrt{2p}}{p^{3/2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{p}.$$

Далее определим кривизну в точке $M_1(p/2;p)$:

$$k\left(\frac{p}{2}\right) = \left| -\frac{\sqrt{2p}}{(2p)^{3/2}} \right| = \frac{1}{2p}.$$

8. Вычисление кривизны линии, заданной параметрически

Кривая задана уравнениями $x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t)$. Производная по x от функции y равна

$$y_x^{'}=\frac{y_t^{'}(t)}{x_t^{'}(t)}. \tag{20}$$

Вторая производная определится по формуле

$$y_{xx}^{"}=\frac{dy^{'}}{dx}=\frac{\frac{dy^{'}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y_{tt}{}^{"}x_t{}^{'}-y_t^{'}x_{tt}{}^{"}}{\left(x_t{}^{'}\right)^3}. \tag{21}$$

Подставляя найденные производные в формулу для кривизны кривой, получаем

$$k=\frac{y_{tt}^{"}x_t^{'}-y_t^{'}x_{tt}^{"}}{\left(\left(x_t^{'}\right)^2+\left(y_t^{'}\right)^2\right)^{3/2}}. \tag{22}$$

Пример 10. Определить кривизну циклоиды $x=a\left(t-\sin t\right), y=b\left(1-\cos t\right)$ в произвольной точке $\left(x;y\right)$.

Решение

Производные по параметру t равны:

$x_t^{'}=a\left(1-\cos t\right);\ \ y_t^{'}=a\sin t;\ \ x_{tt}^{''}=a\sin t;\ \ y_{tt}^{''}=a\cos t.$ Подставляя производные в формулу для кривизны, получаем

$$k=\frac{a\cos t\ a\left(1-\cos t\right)-a\sin t\ a\sin t}{\left(a^2\left(1-\cos t\right)^2+a^2\sin^2 t\right)^{3/2}}=\frac{\left|a^2\left(\cos t-1\right)\right|}{a^3\left(2-2\cos t\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{\left|\cos t-1\right|}{2^{3/2}a\left(1-1\cos t\right)^{3/2}}=\frac{1}{2^{3/2}a\left(1-1\cos t\right)^{1/2}}=\frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

9. Вычисление кривизны линий, заданных в полярных координатах

Задание функции в полярных координатах $r = f(\varphi)$ сводится к параметрическому представлению. Для этого в качестве параметра выбирают полярный угол φ, декартовы координаты выражаются через параметр соотношениями

$$x = r\cos\varphi = f(\varphi)\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi = f(\varphi)\sin\varphi. \tag{23}$$

Кривизна линии, заданной в полярных координатах, вычисляется по формуле

$$K = \left| \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{\left(r^2 + (r')^2\right)^{3/2}} \right|. \tag{24}$$

Пример 11. Кривизна спирали Архимеда в произвольной точке.

Спираль Архимеда задана уравнением в полярных координатах $r = a\varphi$. Первая и вторая производные радиуса вектора по параметру (полярному углу φ) равны

$$r'(\varphi) = a; \quad r''(\varphi) = 0.$$

Подставляя в (24) выражения для полярного радиуса и его производных, получаем

$$K = \left| \frac{a^2\varphi^2 + 2a^2}{\left(r^2\varphi^2 + a^2\right)^{3/2}} \right| = \left| \frac{a^2(2+\varphi^2)}{a^3\left(1+\varphi^2\right)^{3/2}} \right| = \frac{(2+\varphi^2)}{a\left(1+\varphi^2\right)^{3/2}}.$$

Пример 12. Кривизна логарифмической спирали

Уравнение логарифмической спирали в полярных координатах и частные производные по параметру (полярному углу φ):

$$r = a^{\varphi}; \quad r' = a^{\varphi}\ln a; \quad r'' = a^{\varphi}\ln^2 a.$$

Подставляя полученные выражения для полярного радиуса и его производных в (24), получаем

$$K=\left|\frac{a^{2\varphi}+2a^{2\varphi}\ln^2 a-a^{\varphi}a^{\varphi}\ln^2 a}{\left(a^{2\varphi}+a^{2\varphi}\ln^2 a\right)^{3/2}}\right|=\frac{a^{2\varphi}\left(1+\ln^2 a\right)}{a^{3\varphi}\left(1+\ln^2 a\right)^{3/2}}=\frac{1}{a^{\varphi}\sqrt{1+\ln^2 a}}.$$

10. Радиус, центр и круг кривизны

Во многих исследованиях представляется удобным приближённо заменить кривую вблизи рассматриваемой точки окружностью, имеющей ту же кривизну, что и кривая в этой точке. (Круг кривизны - в смысле окружность кривизны).

Кругом кривизны кривой в данной точке М называют круг, который: 1) касается кривой в точке М; 2) направлен выпуклостью в ту же сторону, что и кривая; 3) имеет ту же кривизну, что и кривая в точке М.

Центром кривизны называют центр круга кривизны.

Радиусом кривизны кривой в данной точке называют радиус круга кривизны в точке.

Радиус кривизны кривой в данной точке связан с кривизной соотношением

$$R=\frac{1}{K}=\frac{\left(1+\left(y'\right)^2\right)^{3/2}}{y''}. \tag{25}$$

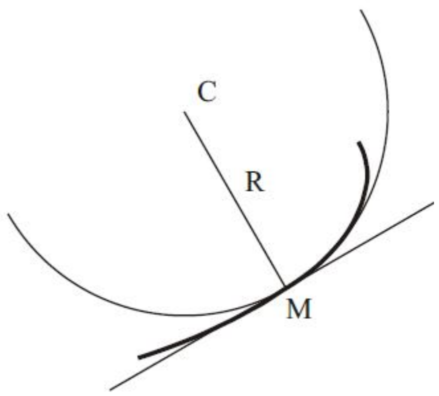


Рис. 13

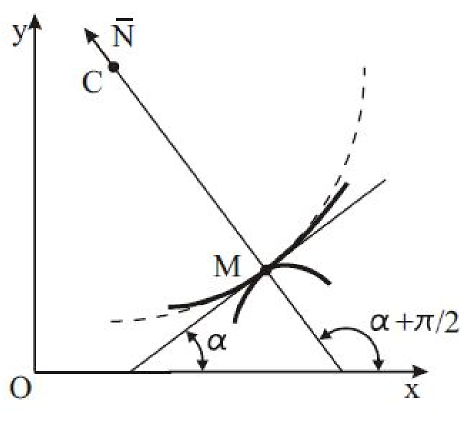


Рис. 14 Центр кривизны лежит на нормали к кривой в рассматриваемой точке М со стороны вогнутости (рис. 13). Радиус кривизны получается со знаком. Установим геометрический смысл знака радиуса кривизны. Нормаль к кривой составляет с касательной к кривой в той же точке угол $\pi/2$. В правой системе координат угол, отсчитываемый против часовой стрелки, считается положительным. Радиус кривизны будет иметь знак "+", если он откладывается по нормали в положительном направлении. Радиус кривизны имеет знак "–", если он откладывается от касательной в отрицательном направлении.

Пример 13. Выбор знака радиуса кривизны.

Из рис. 14 следует, знак радиуса кривизны противоположен знаку второй производной уравнения кривой $y = f(x)$, а именно

$$\begin{cases} R > 0, \ \textit{если} \ y'' < 0, \\ R < 0, \ \textit{если} \ y'' > 0. \end{cases} \tag{26}$$

Замена бесконечно малой дуги кривой вблизи точки *M* соответствующей дуги окружности даёт значительно меньшую ошибку, чем замена её отрезком касательной. Таким образом, понятие радиуса, центра и круга кривизны служат достаточно точной характеристикой линии в её точке *M.* Они указывают степень изогнутости линии посредством сравнения её с окружностью, имеющей с ней общую точку М, общую касательную в этой точке и ту же кривизну.

11. Координаты центра кривизны

Задана кривая $y = f(x)$ и точка $M(x;y)$ на этой кривой. Найти координаты центра (круга) кривизны $C(\xi;\eta)$ в этой точке (см. рис. 13).

Пусть радиус круга кривизны равен *R*. Длина отрезка *MC* = *R,* причём точка *C* принадлежит нормали к кривой в точке *M.* Запишем уравнение нормали к кривой в точке *M:*

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x), \tag{27}$$

где $(X;Y)$ - точка на нормали.

Координаты центра $(\xi;\eta)$ также удовлетворяют этому уравнению:

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x). \tag{28}$$

Подставив координаты точек *C* и *M* в уравнение круга кривизны

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = R^2 \tag{29}$$

и заменив $\eta - y$ значением, взятым из (28), получим

$$\left(\xi - x\right)^2 + \frac{1}{\left(y'\right)^2}\left(\xi - x\right)^2 = R^2.$$

Разрешая полученное уравнение относительно $\left(\xi - x\right)^2$, получаем

$$\left(\xi - x\right)^2 = \frac{\left(y'\right)^2}{1+\left(y'\right)^2} R^2.$$

Извлекаем квадратный корень и находим координату ξ:

$$\xi = x \pm \frac{\left(y'\right)^2}{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}} R. \qquad (30)$$

Подставляя найденное ранее выражение для радиуса кривизны (25), получаем

$$\xi = x \pm \frac{y'\left(1+\left(y'\right)^2\right)}{\left|y''\right|}. \qquad (31)$$

Для того чтобы найти вторую координату центра круга кривизны, находим из уравнения нормали (28) $\xi - x = -y'\left(\eta - y\right)$ и подставляем полученное значение в формулу для круга кривизны (29), получаем

$$\left(y'\right)^2\left(\eta - y\right)^2 + \left(\eta - y\right)^2 = R^2.$$

Находим квадрат разности координат центра круга и точки касания:

$$\left(\eta - y\right)^2 = \frac{R^2}{1+\left(y'\right)^2}.$$

Искомая координата равна

$$\eta = y \mp \frac{1}{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}} R. \qquad (32)$$

Подставляя выражение для радиуса кривизны (25), получаем

$$\eta = y \mp \frac{1+\left(y'\right)^2}{\left|y''\right|}. \qquad (33)$$

Если вторая производная $y'' > 0$, то ордината центра круга кривизны выше ординаты точки касания $\eta > y$. Следовательно, кривая вогнута и в формулах для координат центра круга кривизны (31), (33) следует взять нижние знаки:

$$\xi = x - \frac{y'\left(1+\left(y'\right)^2\right)}{\left|y''\right|}, \quad \eta = y + \frac{1+\left(y'\right)^2}{\left|y''\right|}. \tag{34}$$

Если вторая производная y" < 0 , то ордината центра круга кривизны ниже ординаты точки касания $\eta < y$. Следовательно, кривая выпукла и в формулах для координат центра круга кривизны (31), (33) следует взять верхние знаки:

$$\xi = x + \frac{y'\left(1+\left(y'\right)^2\right)}{\left|y''\right|}, \quad \eta = y - \frac{1+\left(y'\right)^2}{\left|y''\right|}. \tag{35}$$

Пример 14. Найти координаты центра кривизны параболы $y^2 = 2px$ в произвольной точке $M\left(x;y\right)$, в вершине $M_0\left(0;0\right)$) и в точке $M_1\left(p/2;p\right)$.

Решение

Дифференцируя уравнение параболы по координате x, получаем *2yy'=2p.*

Первая производная равна $y' = \frac{p}{x}$. Вторая производная равна

$$y'' = -\frac{p}{y^2}y' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Координаты центра кривизны определяем по формулам (34):

$$\xi = x - \frac{y'\left(1+\left(y'\right)^2\right)}{\left|y''\right|}, \quad \eta = y + \frac{1+\left(y'\right)^2}{\left|y''\right|}.$$

Подставим найденные выражения для y' и y'' в формулы для ξ и η:

$$\frac{1+\left(y'\right)^2}{\left|y''\right|} = \frac{1+\frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{\left(y^2+p^2\right)y}{p^2}$$

и получим

$$\xi = \frac{y^2}{2p} + \frac{p}{y}\frac{\left(y^2+p^2\right)y}{p^2} = \frac{y^2+2y^2+2p^2}{2p} = \frac{3y^2}{p} + p,$$

$$\xi = 3x + p,$$

$$\eta = y - \frac{y^2 + p^2}{p^2} y = \frac{yp^2 - 3y^3 + yp^2}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Итак, $\xi = 3x + p$, $\eta = -\frac{y^3}{p^2} = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}$.

При параметрическом задании функции координаты центра кривизны имеют вид:

$$\begin{cases} \xi = x(t) - y_t' \dfrac{x_t'^2 + y_t'^2}{x_t' y_{tt}'' - y_t' x_{tt}''}, \\ \eta = y(t) + x_t' \dfrac{x_t'^2 + y_t'^2}{x_t' y_{tt}'' - y_t' x_{tt}''}. \end{cases} \tag{36}$$

Пример 15. Найти координаты центра кривизны эллипса

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Решение

Найдём производные:

$$x_t' = -a\sin t; \quad y_t' = b\cos t,$$

$$x_{tt}'' = -a\cos t; \quad y_{tt}'' = -b\sin t.$$

Подставим найденные выражения в (36):

$$\xi = a\cos t - b\cos t \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{-a\sin t(-b\sin t) - b\cos t(-a\cos t)} =$$

$$= \cos t \left(a - \frac{b\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)}{ab\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} \right) =$$

$$= \frac{\cos t\left(a^2 - \left(1 - \cos^2 t\right)a^2 + b^2\cos^2 t\right)}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta = b\sin t - a\sin t\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{-a\sin t\left(-b\sin t\right) - b\cos t\left(-a\cos t\right)} =$$

$$= \sin t\left(b - \frac{a\left(a^2\sin^2 t + b^2\left(1-\sin^2 t\right)\right)}{ab\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}\right) =$$

$$= \frac{\sin t\left(b^2 - a^2\sin^2 t - b^2 + b^2\sin^2 t\right)}{b} = \frac{-a^2+b^2}{b}\sin^3 t.$$

Итак, $\xi = \dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\ \eta = \dfrac{-a^2+b^2}{b}\sin^3 t.$

12. Эволюта и эвольвента

Нахождение эволюты

Если точка $M\left(x;y\right)$ перемещается вдоль данной кривой, то соответствующий ей центр кривизны $C\left(\xi;\eta\right)$ тоже описывает некоторую кривую.

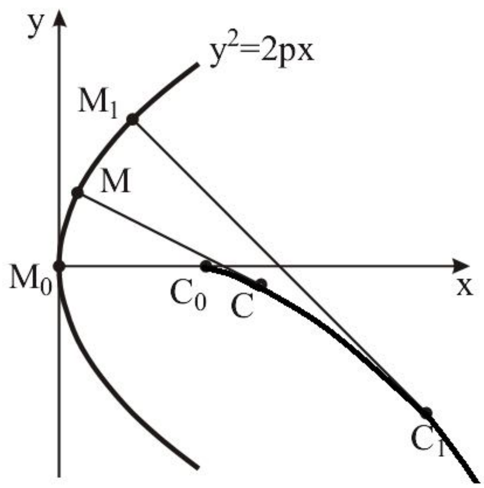


Рис. 15

Если в точке M_1 данной линии кривизна отлична от нуля, то этой точке соответствует вполне определённый центр кривизны. Совокупность всех центров кривизны данной линии L образует некоторую новую линию L_1, называемую эволютой по отношению к первой (рис. 15).

Исходная кривая по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой* или *развёрткой*.

Если данная кривая определяется уравнением *y = f(x),* то уравнение центра кривизны можно рассматривать как параметрическое уравнение эволюты с параметром *x*. Исключая, если это возможно, параметр *x*, получим непосредственную зависимость между текущими координатами эволюты ξ и η.

Пример 16. Найти эволюту параболы $y^2 = 2px$.

Решение

Воспользуемся формулами (34), определяющими координаты центра кривизны $C(\xi;\eta)$ кривой $y = f(x)$:

$$\xi = x - \frac{y'\left(1+\left(y'\right)^2\right)}{\left|y''\right|}, \quad \eta = y + \frac{1+\left(y'\right)^2}{\left|y''\right|}.$$

Воспользуемся решением примера 14 и выпишем координаты центра кривизны параболы: $\xi = 3x + p$, $\eta = -\frac{\left(2x\right)^{3/2}}{\sqrt{p}}$.

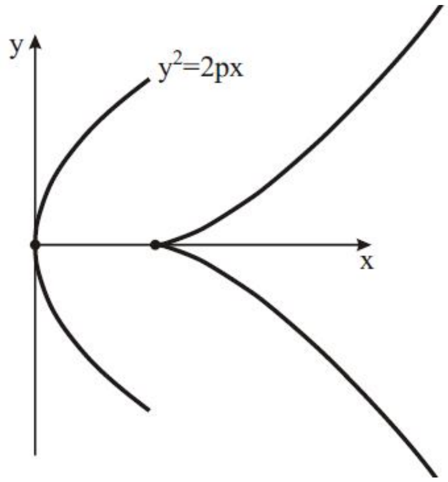


Рис. 16

Выразим $x = \frac{\xi - p}{3}$ и подставим в

$\eta = -\frac{\left(2\frac{\xi - p}{3}\right)^{3/2}}{\sqrt{p}}$. Возведем в квадрат левую и правую части равенства. Получим уравнение

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}\left(\xi - p\right)^{3/2}.$$

Это уравнение описывает полукубическую параболу. Следовательно, эволютой параболы является полукубическая парабола (рис. 16).

Пример 17. Найти эволюту эллипса $x = a\cos t;\ \ y = b\sin t.$

Решение

Воспользуемся решением примера 15 и выпишем найденные формулы

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \eta = \frac{-\left(a^2 - b^2\right)}{b}\sin^3 t.$$

Обозначим $c^2 = a^2 - b^2$. Выразим

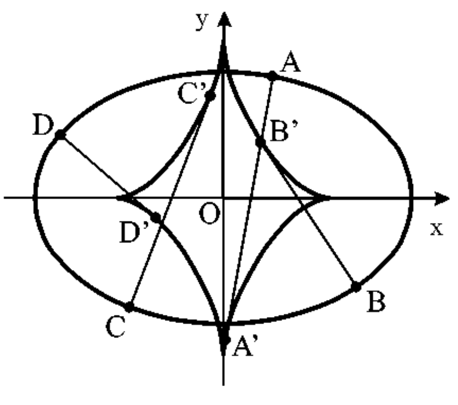


Рис. 17

$$\cos t = \frac{\left(a\xi\right)^{1/3}}{c^{2/3}}, \quad \sin t = \frac{\left(b\xi\right)^{1/3}}{c^{2/3}},$$

$$\cos^2 t = \frac{\left(a\xi\right)^{2/3}}{c^{4/3}}, \quad \sin^2 t = \frac{\left(b\xi\right)^{2/3}}{c^{4/3}}.$$

Согласно основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, получим

$$\left(a\xi\right)^{2/3}+\left(b\xi\right)^{2/3}=\left(c^2\right)^{2/3}.$$

Кривая напоминает астроиду, вытянутую по вертикальному направлению (рис. 17).

13. Свойства эволюты и эвольвенты

Зная уравнения эвольвенты, мы без труда находим уравнения эволюты. Обратная задача более сложная. Она решается с помощью интегрального исчисления.

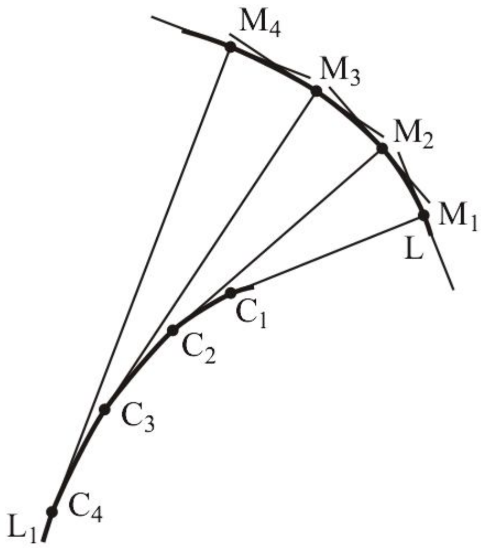


Рис. 18

Каждая эвольвента может быть восстановлена по своей эволюте с помощью разворачивания навёрнутой на эволюту нити или путём качения прямой без скольжения по эволюте. Если прямая катится без скольжения по данной кривой, то траектория любой её точки служит для данной кривой эвольвентой. Таким образом каждая эволюта имеет бесчисленное множество эвольвент.

Теорема 1. Нормаль к данной кривой L является касательной к её эволюте L_1.

Эволюта касается всех нормалей к эвольвенте, следовательно она является огибающей семейства нормалей (рис.18).

Каждая линия имеет одну эволюту, но каждая эволюта имеет бесконечное множество эвольвент, составляющих семейство параллельных линий (рис.19).

Теорема 2. Приращение длины дуги эволюты равно соответствующему приращению радиуса кривизны данной эвольвенты при условии, что радиус кривизны изменяется монотонно на некотором участке кривой M_1M_2:

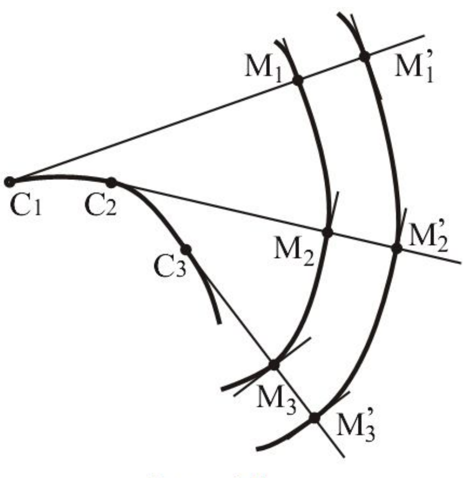


Рис. 19

$C_1M_1 = R_1$, $\quad C_2M_2 = R_2$, $\quad$ тогда $C_1C_2 = R_1 - R_2$.

Разность радиусов кривизны в двух точках эвольвенты равна дуге эволюты между соответствующими центрами кривизны.

Рассмотрим *механический смысл* данного свойства.

Пусть радиус кривизны, который сохраняет на рассматриваемом участке один и тот же знак, будет везде больше ноля. Из второго свойства следует, радиус кривизны отличается от дуги эволюты на постоянную C.

Будем отсчитывать дугу на эвольвенте от той точки P, которой отвечает наименьший радиус кривизны, тогда постоянная $C > 0$. PQ — эволюта. На эволюту навёрнута гибкая нерастяжимая нить от Q к P. Она сходит с эволюты по касательной и обрывается на расстоянии C от P в соответствующей точке A эвольвенты. Станем нить развёртывать, сматывая её с эволюты, но сохраняя её в натянутом состоянии. Пусть QNM - произвольное её положение, так как $NM > PA = C$ на длину дуги $\breve{PN}$, то NM и есть радиус кривизны R, то есть точка M лежит на эвольвенте (рис. 20).

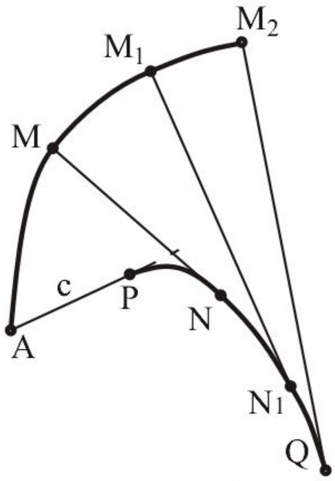


Рис. 20

Итак, эвольвента может быть описана путём разворачивания нити, предварительно навёрнутой на эволюту, то есть эвольвента есть траектория точки A прямой AP, описываемая ею, когда прямая катится по эволюте без скольжения.

Пример 18. Найти эвольвенту круга

$$x = a(\cos t + t\sin t),\ \ y = a(\sin t - t\cos t).$$

Решение

$$x_t' = at\cos t,\quad y_t' = at\sin t\ ,$$

$$tg\alpha = \frac{y_t'}{x_t'} = tgt.$$

Следовательно $\alpha = t.$

Касательная MT параллельна радиусу OB, BM — нормаль к нашей кривой. $OB = a$.

$$x_t'^2 + y_t'^2 = a^2t^2,$$

$$s'(t) = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = at,$$

$$ds = atdt\,.$$

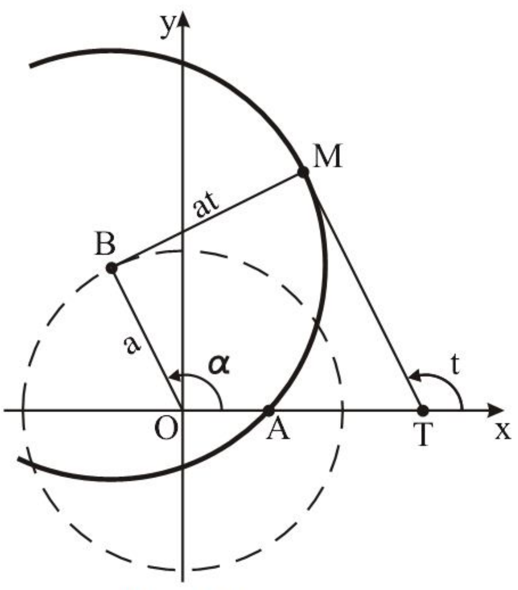


Рис. 21

$R = \dfrac{ds}{d\alpha} = at = MB$ – радиус кривизны эвольвенты. Точка касания *B* (точка схода нити с круга) будет центром кривизны для траектории конца *M* нити. Геометрическим местом центров кривизны нашей кривой является исходный круг (рис. 21).

14. Связь между второй производной и радиусом кривизны

В качестве меры локальной изогнутости можно вместо кривизны использовать радиус кривизны:

$$R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{y''}. \tag{37}$$

Чем меньше радиус кривизны, тем больше изогнута линия в данной точке. Замена бесконечно малой дуги линии вблизи точки *M* соответствующим отрезком касательной сопровождается бесконечно малой погрешностью не ниже 2-го порядка, а замена её соответствующей дугой окружности кривизны - бесконечно малой погрешностью не ниже 3-го порядка. Таким образом, малую дугу линии можно считать почти дугой окружности, то есть радиус кривизны и круг кривизны указывают степень изогнутости линии посредством её сравнения с окружностью, имеющей с ней общую точку *M*, общую касательную в этой точке и ту же кривизну.

Приведём геометрическую интерпретацию второй производной.

Существует тесная связь между второй производной $y''(x)$ и радиусом кривизны графика функции $y = f(x)$ *в* соответствующей его точке. Если радиус кривизны не существует или равен ∞, то $f''(x)$ не существует или $f''(x) = 0$ и обратно.

В точке перегиба линия или не имеет радиуса кривизны или её радиус кривизны равен ∞.

Линия *AMB* составлена из дуг двух окружностей. Функция везде имеет

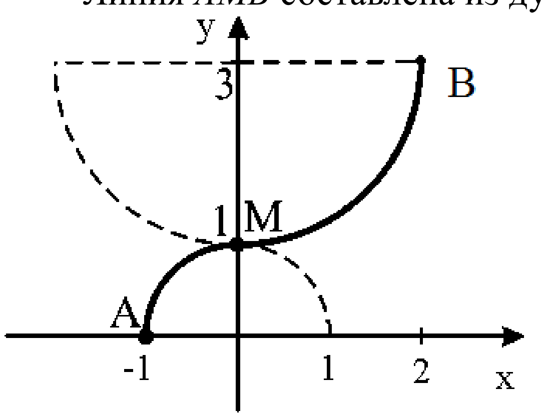


Рис. 22 производную, непрерывно меняющуюся (рис. 22).

Вторая производная не существует в точке M ($x = 0$).

Можно убедиться в этом непосредственным вычислением, но с помощью радиуса кривизны этот факт можно объяснить просто и наглядно. Слева от точки M радиус кривизны всюду равен 1, а справе везде равен 2. Значит в точке M не существует радиуса кривизны, а потому не существует и второй производной. Линия имеет в точке M две касательные и 2 радиуса кривизны.

Линия *AMB* в заданном интервале гладкая, то есть везде имеет непрерывную первую производную. Её график имеет в каждой точке касательную и представляется непрерывной гладкой линией, вдоль которой касательная вращается непрерывно.

Если функция $f(x)$ везде имеет непрерывную $f''(x)$, её график в каждой точке имеет непрерывную кривизну. Тогда функцию $f''(x)$ можно считать гладкой в более сильном смысле: вдоль неё непрерывно меняется не только касательная, но и кривизна.

Функция $f(x)$ считается тем более "гладкой", чем больше производных существует в каждой точке рассматриваемого интервала. Линия *AMB* (рис. 22) не является гладкой в смысле кривизны, так как, не смотря на кажущуюся плавность линии, её кривизна терпит разрыв в точке M. Она переходит от значения 1 к значению $1/2$. Таким образом, если функция не имеет в некоторых точках $f''(x)$, а линия - радиуса кривизны, то с точки зрения изменения кривизны линию нельзя рассматривать как особенно "гладкую", так как кривизна её терпит разрыв в точках стыка отдельных частей с непрерывно меняющейся кривизной.

Итак, для того чтобы линия была "гладкой" необходимо существование непрерывной $f''(x)$ и, следовательно, непрерывной кривизны.

15. Переходные кривые

Рассмотрим практический вопрос, в котором используется изменение кривизны вдоль кривой. Существование непрерывной второй производной и, следовательно, непрерывной кривизны имеет большое применение при разбивке железнодорожных закруглений, при строительстве автомобильных дорог.

Из механики известно, что при движении тела по окружности радиуса R величина центробежной силы $P = \frac{mV^2}{R}$, причём сила направлена по радиусу к центру окружности. При движении по какой-либо другой траектории по нормали к ней направлена сила, определяющаяся по той же формуле, но под R понимается радиус кривизны траектории в данной точке. Пусть скорость сохраняется постоянной, тогда сила будет испытывать разрывы непрерывности в точках разрыва непрерывности кривизны линии, по которой происходит движение. Этим объясняются толчки вагонов на поворотах, хотя обычно кажется, что путь имеет плавные закругления. Во избежание толчков стараются повороты осуществлять так, чтобы кривизна менялась непрерывно. Если бы прямолинейная часть пути примыкала непосредственно к закруглению, разбитому по дуге окружности, то центробежная сила возникала бы мгновенно, создавая сильный и вредный для подвижного состава толчок.

Для избежания этого прямолинейную часть пути соединяют с дугой окружности с помощью так называемых переходных кривых, допускающих непрерывный переход кривизны от нуля до кривизны данной окружности. Как известно, кривизна прямой линии равна нулю, а кривизна окружности равна $\frac{1}{R}$, где *R*— радиус окружности, следовательно, кривизна переходной кривой должна непрерывно изменяться от нуля до $\frac{1}{R}$.

В качестве переходных кривых используются:

1) кубическая парабола $y=\frac{x^3}{6q}$;

2) лемниската Бернулли $r^2=2a^2\cos 2\varphi$;

3) клотоида $x=\int\limits_o^s \cos\frac{s^2}{2k}ds, \quad y=\int\limits_o^s \sin\frac{s^2}{2k}ds.$

Пример 19. Определить, какая часть кубической параболы $y=\frac{x^3}{6q}$ используется в качестве переходной прямой.

Решение

Найдем радиус кривизны кубической параболы используя формулу (37). Имеем $y'=\frac{x^2}{2q}, \quad y''=\frac{x}{q}$. Для радиуса кривизны получаем выражение $R=\frac{q}{x}\left(1+\frac{x^4}{4q^2}\right)$. Исследуем полученное выражение. При $x=0$ имеем $y'=0, \quad R=\infty$, т. е. в начале координат наша кривая имеет нулевую кривизну и касается оси *Ox*.

Проведя исследование по первой производной от *R,* получаем следующий результат: выражение для *R* убывает до $x = 0,946\sqrt{q}$, где оно имеет минимум $R_{\min} = 1,390\sqrt{q}$.

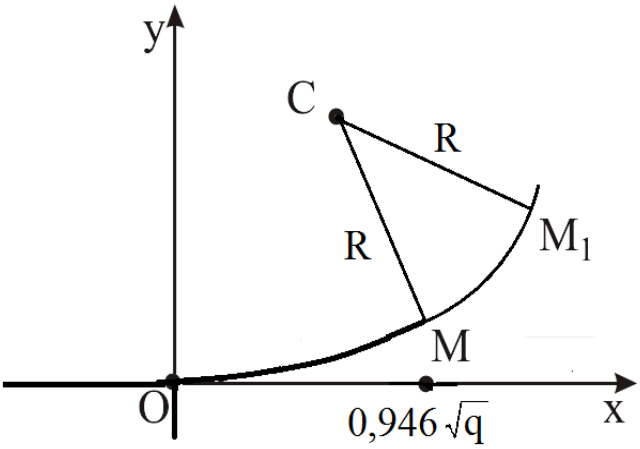


Рис. 23

Только часть кривой от $x = 0$ до $x = 0,946\sqrt{q}$ используется на практике в качестве переходной кривой (рис. 23). Полуось *Ox* можно соединить с подобранной дугой окружности с помощью кубической параболы так, что кривизна образованной линии будет непрерывно увеличиваться от нуля до кривизны окружности. Если траектория настолько гладка, что кривизна непрерывна и существует в любой точке, то движение остаётся плавным без всякого изменения скорости на поворотах.

При проектировании современных автомобильных дорог одним из важнейших условий является обеспечение комфортабельности и безопасности движения, т. е. создание трассы, позволяющей автомобилям двигаться с постоянной или плавно меняющейся скоростью. Этому условию удовлетворяет клотоидная трасса - трасса, состоящая из сопрягающихся круговых и переходных кривых больших параметров. Прямые вставки между ними невелики, а иногда могут совсем отсутствовать.

В качестве переходной кривой применяется начальный участок клотоиды от $R = \infty$ до $R = r$ на расстоянии *L* от начала клотоиды. В конце переходной кривой, то есть в точке сопряжения с окружностью, радиус кривизны клотоиды r равен радиусу окружности.

16. Натуральное уравнение плоской кривой

Часто в практических вопросах удобно характеризовать геометрическую форму кривой уравнением, вид которого не зависит от выбора системы координат и связан только с самой кривой.

Так координаты точки на кривой не являются существенными геометрическими элементами кривой. Такими элементами являются дуга кривой *s*, отсчитываемая в определённом направлении от некоторой начальной точки, и радиус кривизны *R* (или сама кривизна $K = \dfrac{1}{R}$).

Уравнение, выражающее кривизну плоской кривой как функцию длины дуги, называется натуральным уравнением этой кривой:

$$K = f(s), \qquad (38)$$

$$K = \frac{d\alpha}{ds}. \qquad (39)$$

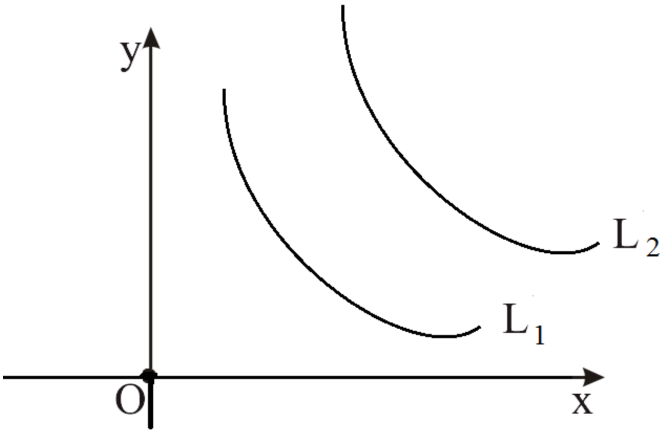


Рис. 24

Натуральное уравнение однозначно определяет форму кривой. Оно не зависит от положения кривой на плоскости, а только от формы этой кривой. Кривые L_1 и L_2, имеющие одно и тоже натуральное уравнение, отличаются друг от друга только своим положением на плоскости и могут быть совмещены движением (рис. 24). Две симметрично расположенные кривые имеют натуральные уравнения, отличающиеся лишь знаком правой части. Совместить их перемещением на плоскости нельзя. Для этого понадобится вращение в пространстве.

По натуральному уравнению кривой $K = f(s)$ можно восстановить её координатное представление. Так как $K = \frac{d\alpha}{ds}$, имеем $\frac{d\alpha}{ds} = f(s)$.

Тогда $\alpha = \int\limits_o^s f(s)ds + \alpha_0$, где α_0 — постоянная.

Затем, исходя из равенств

$$dx = \cos\alpha ds, \quad dy = \sin\alpha ds, \qquad (40)$$

интегрируя, находим

$$x = \int\limits_0^s \cos\alpha ds + x_0, \quad y = \int\limits_0^s \sin\alpha ds + y_0.$$

Постоянные интегрирования будем выбирать по соображениям удобств, так как нам нужно восстановить хоть одну кривую.

По натуральному уравнению кривой можно установить натуральное уравнение её эволюты.

Пример 20. Найти кривую, натуральное уравнение которой $R^2 = 2as$.

Решение

Имеем

$$K = \frac{1}{\sqrt{2as}} = \frac{d\alpha}{ds}, \quad d\alpha = \frac{ds}{\sqrt{2as}}.$$

Интегрируя, получим

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$$

Выразим *s:* $s = \frac{a}{2}\alpha^2$, тогда $ds = a\alpha d\alpha.$

Выбираем α в качестве параметра и получаем, используя (40),

$$dx = a\alpha \cos\alpha d\alpha, \quad dy = a\alpha \sin\alpha d\alpha.$$

Откуда

$$x = a\int \alpha \cos\alpha d\alpha = a\left(\cos\alpha + \alpha \sin\alpha\right),$$

$$y = a\int \alpha \sin\alpha d\alpha = a\left(\sin\alpha - \alpha \cos\alpha\right).$$

Эта кривая оказалась эвольвентой круга.

Пример 21. Показать, что натуральное уравнение цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ есть $K = \frac{a}{a^2 + s^2}.$

Решение

$$K = \frac{d\alpha}{ds},$$

$$K = \frac{1}{R},$$

дуга s отсчитывается от начала координат.

Найдём дифференциал дуги

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$\sqrt{1 + \left(y'\right)^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Интегрируя, получим

$$s = \int_0^x ds = \frac{1}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = ay' = a \cdot tg\alpha$$

Выражаем $\alpha = arctg\frac{s}{a}.$

Затем находим

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{a}\right)^2}\frac{1}{a} = \frac{a}{a^2+s^2}.$$

Отсюда $K = \dfrac{a}{a^2+s^2}$ – натуральное уравнение цепной линии.

УРАЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

Л.А. Золкина
Е.С. Плотникова

КРИВИЗНА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Екатеринбург
2011