ватости поверхности не устанавливаются и шероховатость этой поверхности не контролируется.

Точность размеров и шероховатость обработанных поверхностей взаимосвязаны, хотя прямой связи между точностью и шероховатостью поверхности нет. Так, например, к самым неточным поверхностям по допуску размера, но предназначенных для лаковой отделки, предъявляют весьма высокие требования шероховатости. Деревянные рукоятки выполняют с низкой точностью размеров, но обязательно шлифуют, добиваясь высокой гладкости их поверхности. Вместе с тем при выборе шероховатости поверхности следует учитывать, что величина микронеровностей поверхности должна укладываться в поле допуска детали, иначе говоря, величина шероховатости должна быть меньше поля допуска IT детали. При назначении шероховатости параметрами *Rm, Rz, Ra* высоту микронеровностей принимают равной (0,24-0,5) IT.

Точность сопряжения подвижных посадок так же зависит от шероховатости поверхностей деталей, образующих посадку. При неправильно выбранной шероховатости крупные микронеровности в процессе эксплуатации изнашиваются, образуя дополнительный зазор, который может перевести посадку в другой квалитет или в другую посадку. Однако, чем больше прочность древесины, из которой сделаны детали соединения, тем в меньшей степени величина шероховатости сказывается на точности сопряжения деталей.

Библиографический список

1. Белкин, И.М. Допуски и посадки [Текст]: учеб. пособие /И.М. Белкин. М.: Машиностроение, 1992. 528 с

2. Глебов, И.Т. Обработка древесины методом фрезерования [Текст]: учеб. пособие /И.Т. Глебов. Екатеринбург: УГЛТУ, 2007. 192 с.

Глухих В.Н. *(СПбГЛТА, г. Санкт-Петербург, РФ)*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ НАЙДЕННЫХ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ НЕЗАВИСИМЫМИ ПОСТОЯННЫМИ УПРУГОСТИ

DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR CYLINDRICAL ANISOTROPIC SOLID SUBJECT TO BETWEENNESS RELATION INDEPENDENT CONSTANTS OF RESILIENCE

При решении задач о напряжениях в цилиндрически анизотропном теле при механических и термических воздействиях необходимо исходить из уравнений теории упругости, которые должны учитывать различие свойств материала в главных направлениях анизотропии и содержать в соответствии с этим более двух упругих постоянных.

В теории упругости анизотропного тела известно дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка в функции напряжений без учета объемных сил:

$$\frac{1}{E_t}\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial r^4}+\left(\frac{1}{G_{rt}}-\frac{2\mu_{rt}}{E_r}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial r^2\partial\theta^2}+\frac{1}{E_r}\cdot\frac{1}{r^4}\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial\theta^4}+$$

$$+\frac{2}{E_t}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial r^3}-\left(\frac{1}{G_{rt}}-\frac{2\mu_{rt}}{E_r}\right)\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial r\partial\theta^2}-\frac{1}{E_r}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+$$

$$+\left(2\frac{1-\mu_{rt}}{E_r}+\frac{1}{G_{rt}}\right)\cdot\frac{1}{r^4}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}+\frac{1}{E_r}\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\frac{\partial F}{\partial r}=0. \tag{1}$$

То же в декартовых координатах [1]:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}(x^4+Bx^2y^2+\alpha^2 y^4)+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}(y^4+Bx^2y^2+\alpha^2 x^4)+$$

$$+\frac{\partial^4 F}{\partial y\partial x^3}\left[2x^2+B(y^2-x^2)-2\alpha^2 y^2\right]\cdot 2xy+\frac{\partial^4 F}{\partial x\partial y^3}\left[2y^2+B(x^2-y^2)-2\alpha^2 x^2\right]\cdot 2xy+$$

$$+\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}\left[6x^2y^2+B(x^4-4x^2y^2+y^4)+6\alpha^2 x^2y^2\right]+\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\left[2x^2+B(3y^2-x^2)-6\alpha^2 y^2\right]\cdot x+$$

$$+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\left[2y^2+B(3x^2-y^2)-6\alpha^2 x^2\right]\cdot y+\frac{\partial^3 F}{\partial y\partial x^2}\left[2x^2(1+2\alpha^2)+B(y^2-3x^2)-2\alpha^2 y^2\right]\cdot 3y+$$

$$+\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}\left[2y^2(1+2\alpha^2)+B(x^2-3y^2)-2\alpha^2 x^2\right]\cdot 3x+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(2\alpha^2-B)(x^2-y^2)+$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(B-2\alpha^2)(x^2-y^2)+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(2\alpha^2-B)\cdot 4xy=0, \tag{2}$$

где $$\alpha^2=\frac{E_t}{E_r};\qquad B=E_t\left(\frac{1}{G_{rt}}-\frac{2\mu_{rt}}{E_r}\right). \tag{3}$$

Используя решение уравнения (2) в виде суммы полиномов [2]

$$F=\sum_{i=1}^{\text{к}}x^{\text{к}}f_{\text{к}}(y), \tag{4}$$

после подстановки и соответствующих преобразований были получены соотношения между постоянными интегрирования, некоторые из которых представляют определенный интерес. Например, соотношения между постоянными C_{04} и C_{22}, C_{13} и C_{31}

$$C_{22} = C_{04}\,\frac{3(B-1-\alpha^2)}{2(B-2\alpha^2)}, \tag{5}$$

$$C_{31} = -C_{13}\,\frac{2(B-2\alpha^2)}{3(1+\alpha^2-B)}, \tag{6}$$

$$C_{22} = -C_{04}\,\frac{6(B-2\alpha^2)}{3+11\alpha^2-7B}, \tag{7}$$

$$C_{31} = -C_{13}\,\frac{3+11\alpha^2-7B}{6(B-2\alpha^2)}. \tag{8}$$

В результате приравнивания множителей при одинаковых постоянных было получено алгебраическое уравнение

$$B^2 - \frac{2}{3}(5+\alpha^2)B - \frac{5}{3}\alpha^4 + \frac{14}{3}\alpha^2 + 1 = 0, \tag{9}$$

корни которого имеют вид:

$$B_{(1)} = \frac{1+5\alpha^2}{3}; \tag{10}$$

$$B_{(2)} = 3-\alpha^2. \tag{11}$$

С учетом корня (10) дифференциальное уравнение в полярных координатах (1) примет вид:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{1+5\alpha^2}{3}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial r^2\partial\theta^2} + \frac{\alpha^2}{r^4}\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial\theta^4} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1+5\alpha^2}{3}\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial r\partial\theta^2} - \frac{\alpha^2}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} +$$

$$+\frac{1+11\alpha^2}{3}\cdot\frac{1}{r^4}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \frac{\alpha^2}{r^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial r} = 0. \tag{12}$$

В декартовых координатах:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\left(x^4+\frac{1+5\alpha^2}{3}x^2y^2+\alpha^2 y^4\right)+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\cdot\left(y^4+\frac{1+5\alpha^2}{3}x^2y^2+\alpha^2 x^4\right)+$$

$$+2\frac{\partial^4 F}{\partial y\partial x^3}\left[2x^2+\frac{1+5\alpha^2}{3}(y^2-x^2)-2\alpha^2 y^2\right]\cdot xy+$$

$$+2\frac{\partial^4 F}{\partial x\partial y^3}\left[2y^2+\frac{1+5\alpha^2}{3}(x^2-y^2)-2\alpha^2 x^2\right]\cdot xy+$$

$$+\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}\left[6x^2y^2+\frac{1+5\alpha^2}{3}(x^4-4x^2y^2+y^4)+6\alpha^2 x^2y^2\right]+$$

$$+\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\left[2x^2+\frac{1+5\alpha^2}{3}(3y^2-x^2)-6\alpha^2 y^2\right]\cdot x+$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\left[2y^2+\frac{1+5\alpha^2}{3}(3x^2-y^2)-6\alpha^2 x^2\right]\cdot y+$$

$$+3\frac{\partial^3 F}{\partial y\partial x^2}\left[2x^2(1+2\alpha^2)+\frac{1+5\alpha^2}{3}(y^2-3x^2)-2\alpha^2 y^2\right]\cdot y+$$

$$+3\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}\left[2y^2(1+2\alpha^2)+\frac{1+5\alpha^2}{3}(x^2-3y^2)-2\alpha^2 x^2\right]\cdot x+$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\alpha^2-1}{3}\cdot(x^2-y^2)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{1-\alpha^2}{3}\cdot(x^2-y^2)+\frac{4\partial^2 F}{3\partial x\partial y}\cdot(\alpha^2-1)\cdot xy=0. \quad (13)$$

Для материалов цилиндрически анизотропных и ортотропных, у которых соотношение постоянных упругости подчиняется закону (1), дифференциальные уравнения имеют вид

– в полярных координатах:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4}+(3-\alpha^2)\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial r^2\partial\theta^2}+\frac{\alpha^2}{r^4}\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial\theta^4}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial r^3}-(3-\alpha^2)\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial r\partial\theta^2}-\frac{\alpha^2}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+$$

$$+(3+\alpha^2)\cdot\frac{1}{r^4}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}+\frac{\alpha^2}{r^3}\cdot\frac{\partial F}{\partial r}=0, \quad (14)$$

– в декартовых координатах:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\left[x^2(x^2+3y^2)+\alpha^2 y^2(y^2-x^2)\right]+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\left[y^2(y^2+3x^2)+\alpha^2 x^2(x^2-y^2)\right]+$$

$$+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y}(3y^2-x^2)(1-\alpha^2)\cdot xy+2\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3}\cdot(3x^2-y^2)(1-\alpha^2)\cdot xy+$$

$$+\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}\left[2(5\alpha^2-3)x^2y^2+(3-\alpha^2)(x^4+y^4)\right]+\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(1-\alpha^2)(9y^2-x^2)\cdot x+$$

$$+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}(1-\alpha^2)(9x^2-y^2)\cdot y+3\frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2}(1-\alpha^2)(3y^2-7x^2)\cdot y+$$

$$+3\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}(1-\alpha^2)(3x^2-7y^2)\cdot x+3\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\alpha^2-1)(x^2-y^2)+$$

$$+3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(1-\alpha^2)(x^2-y^2)+12\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(\alpha^2-1)\cdot xy=0. \qquad (15)$$

Аналогичное решение можно привести для плоской задачи в перемещениях, используя ранее полученные дифференциальные уравнения [1].

Таким образом, представленные выше дифференциальные уравнения позволяют решать задачи применительно к цилиндрически анизотропным ортотропным телам у которых соотношения между постоянными упругости в главных направлениях анизотропии подчиняются корням (10) и (11) алгебраического уравнения (9).

К таким материалам относится такой природный полимер, как древесина. У большинства отечественных пород древесины соотношение между постоянными упругости подчиняется корню (11), а у таких пород, как ель канадская и пихта дугласова – корню (10).

Библиографический список

1. Глухих В.Н. Плоская задача теории упругости для цилиндрически анизотропного тела // Известия СПбЛТА. Вып. 6 (164). СПб., 1998. С. 141-145.

2. Глухих В.Н. Анизотропия древесины как фактор для повышения качества сушки пиломатериалов: Научное издание. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. 163 с.