МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный
лесотехнический университет»

Л.А.Чернышев

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Учебное пособие

Екатеринбург
2013

УДК 519.869
ББК 65.050я73
Ч 49

Рецензенты:

кафедра экономики и организации на предприятиях машиностроения Уральского федерального университета им. первого Президента России Б.Н. Ельцина;

кандидат экономических наук, доцент кафедры экономики, менеджмента и туризма РГСУ филиал в г. Советский А.М. Чернопятов.

Ч 49 **Чернышев Л.А.** ***Экономико-математические методы и модели:*** учеб. пособие / Л.А.Чернышев. – Екатеринбург, 2013. – 206 с.
ISBN 978-5-94984-444-1

В учебном пособии представлен широкий круг экономико-математических методов и моделей. Приведены основные понятия о методах и моделях, теоретические положения, примеры решения задач. Особое внимание уделено моделям управления запасами, моделям производства, потребительского выбора и моделям макроэкономики.

Пособие предназначено для студентов экономических специальностей, изучающих курс «Экономико-математические методы и модели». В него включены материалы по основным темам программы обучения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Уральского государственного лесотехнического университета.

УДК 519.869
ББК 65.050я73

ISBN 978-5-94984-444-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Экономические явления и процессы, протекающие в современном промышленном производстве, столь сложны и многогранны, что для их изучения необходимо привлекать математическое моделирование как мощное средство научного и практического исследования. Это вызвано, прежде всего, тем, что математические методы и модели позволяют удобнее описывать сложнейшие экономические ситуации, и делают управленческие решения научно обоснованными. Математическое моделирование играет чрезвычайно важную роль в организации любой деятельности человека, оно являются необходимым элементом современной экономической науки, как на микро-, так и макроуровне, изучается в таких её разделах, как математическая экономика и эконометрика.

Экономико-математические модели дают фундаментальную основу решения аналитических задач различных сфер деятельности современных предпринимателей. Построение математических моделей в экономике во многих случаях связано напрямую с анализом статистических данных, для получения которых часто требуются большие материальные и временные затраты. Поэтому изучение данного предмета требует от студентов глубоких знаний как в области экономики, так и математики и статистики.

Реальный объект моделирования в экономике по своей сложности превосходит многие объекты физической природы. Вместе с тем проверка адекватности экономико-математических моделей с помощью единственного критерия истины – практики – затруднена, поскольку практический эксперимент зачастую связан с колоссальными затратами и поэтому не всегда возможен.

Основная цель данного учебного пособия – формирование системы теоретических знаний, умений и навыков относительно возможности использования аппарата высшей математики, теории вероятностей и математической статистики при построении моделей экономических явлений и процессов. Под экономико-математической моделью понимают описание исследуемого экономического процесса или явления с помощью абстрактных математических соотношений. Использование математического моделирования в экономике и управлении позволяет углубить количественный экономический анализ, расширить область использования экономической информации, интенсифицировать экономические расчеты. Разработка экономико-математических моделей является важным звеном в теоретических и прикладных экономических исследованиях.

В учебном пособии рассматриваются модели линейного и динамического программирования, балансовые модели, модели производства и потребительского выбора, конкуренции и макроэкономики, и другие.

1. МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

1.1. Моделирование как метод научного познания

Предметом изучения дисциплины «Экономико-математические методы и модели» являются количественные характеристики экономических процессов, протекающих в производстве, и изучение их взаимосвязей.

Основным понятием курса является понятие математической модели.

Модель – образ реальной системы (объекта, процесса) в материальной или теоретической форме. Этот образ отражает существенные свойства объекта, он замещает реальный объект в ходе исследования и управления.

Математическая модель – это система математических уравнений, неравенств, формул, и различных математических выражений, описывающих реальный объект, составляющие его характеристики и взаимосвязи между ними. Процесс построения математической модели называют математическим моделированием.

В теории моделей *моделированием* называется результат отображения одной абстрактной математической структуры на другую - тоже абстрактную, либо как результат интерпретации первой модели в терминах и образах второй. Моделирование основывается на принципе аналогии, т.е. возможности изучения реального объекта (системы) не непосредственно, а опосредованно, через рассмотрение подобного ему и более доступного объекта (модели). Таким образом, моделирование представляет собой процесс построения, изучения и применения моделей.

Целью моделирования является повышение эффективности управления экономикой на разных уровнях управления. Экономическое управление осуществляется на макро- и микроэкономическом уровнях. На макроуровне объектами управления являются народное хозяйство в целом, отрасли и сектора экономики, на микроуровне – предприятия и рынки. Моделирование и построение математической модели экономического объекта позволяют свести экономический анализ производственных процессов к математическому анализу и принятию эффективных решений [1].

Главная особенность моделирования состоит в том, что это метод опосредованного познания при помощи объектов-заменителей. Модель выступает как инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом с целью изучения последнего, т.е. объект рассматривается как бы через «призму» его модельного представления. Процесс моделирования, таким образом, включает в себя три элемента: субъект исследования (исследователь), объект исследования и модель (рис. 1.1).

Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно, или же это исследование требует слишком высоких затрат времени и средств.

Рис. 1.1. Роль модели в процессе исследования

Сущность процесса моделирования иллюстрирует схема, представленная на рис. 1.2

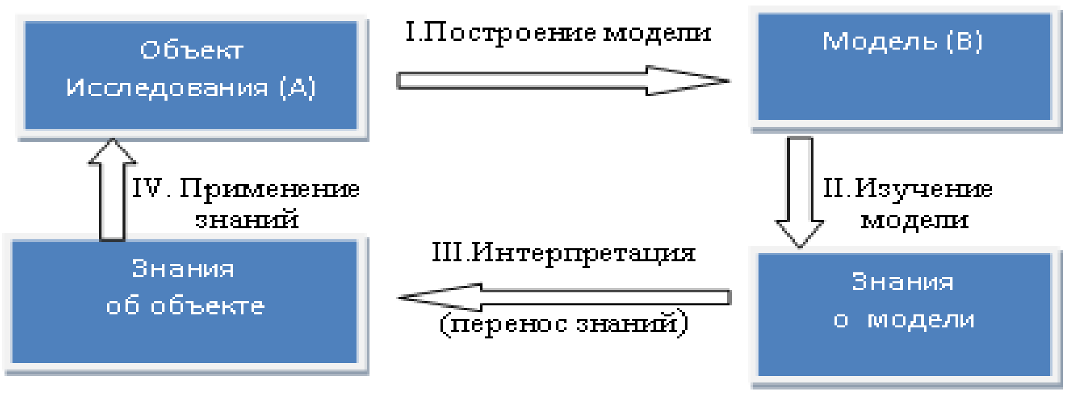


Рис. 1.2. Сущность процесса моделирования

Пусть имеется или необходимо создать некоторый объект «А». Тогда (материально или мысленно) мы находим в реальном мире другой объект («В») – модель объекта «А». Этап построения модели предполагает наличие некоторых первоначальных знаний об объекте-оригинале. Модель отображает какие-либо существенные черты объекта-оригинала. Важнейшим является вопрос о необходимой и достаточной степени сходства оригинала и модели. Этот вопрос требует детального анализа и решения в зависимости от конкретной ситуации. Очевидно, что модель утрачивает свой смысл как в случае тождества с оригиналом (тогда она перестает быть моделью), так и в случае чрезмерного во всех существенных отношениях отличия от оригинала.

На втором этапе процесса моделирования модель выступает уже как самостоятельный объект изучения. Конечным результатом этого этапа является совокупность знаний о модели. Однако знания о модели - это еще не есть знания о самом объекте-оригинале.

На третьем этапе происходит интерпретация полученных знаний, т. е. перенос знаний с модели на оригинал. Происходит формирование множества знаний об объекте «А».

Четвертый этап – практическая проверка полученных знаний, их использование для выработки суждений об объекте, для его преобразования или управления им.

Для понимания сущности моделирования важно не упускать из виду того, что это – не единственный источник знаний об объекте. Процесс моделирования «погружен» в общий процесс познания. Это обстоятельство должно учитываться не только на этапе построения модели, но и на завершающей стадии, когда происходит объединение и обобщение результатов исследования, получаемых на основе многообразных средств познания.

Моделирование – циклический процесс. Это означает, что за первым четырехшаговым циклом может последовать второй, третий и т.д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым знанием объекта и ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах. Таким образом, в методологии моделирования заложены большие возможности саморазвития.

Преимущество использования математических моделей для описания экономических систем заключается в следующем

1) в процессе построения математической модели исследователь может определить существенные и не существенные для исследуемой системы связи и параметры;

2) математическая модель позволяет установить взаимосвязь между различными параметрами системы, а также описать влияние одних параметров на другие;

3) математическая модель, в отличие от вербальной, позволяет описать процесс компактно, в виде набора математических соотношений;

4) построенная математическая модель может быть использована для численного анализа исследуемой системы с помощью ЭВМ. Это позволяет выявить альтернативные сценарии поведения системы;

5) используя математический аппарат, исследователь может получать новые знания об исследуемой системе, адекватные реальности в той же степени, что и построенная модель;

6) использование математических моделей позволяет осуществить предварительный выбор оптимальных или близких к ним вариантов решений по определенным критериям;

7) они научно обоснованы, и лицо, принимающее решение, может руководствоваться ими при выборе окончательного решения.

Следует понимать, что не существует решений, оптимальных «вообще». Любое решение, полученное при расчете математической модели, оптимально по одному или нескольким критериям, предложенным постановщиком задачи и исследователем.

В настоящее время математические модели применяются для анализа, прогнозирования и выбора оптимальных решений в различных областях экономики. Это планирование и оперативное управление производством, управление трудовыми ресурсами, управление запасами, распределение ресурсов, планировка и размещение объектов, руководство проектом, распределение инвестиций и т.п.

1.2. Виды подобия и адекватность моделей

Чтобы некоторая материальная или абстрактная конструкция могла быть моделью, т.е. замещала в каком-то отношении оригинал, между оригиналом и моделью должно быть установлено отношение подобия. Существуют разные способы установления такого подобия, что придает моделям особенности, специфичные для каждого способа.

Прежде всего, это подобие, устанавливаемое в процессе создания модели. Назовем такое *подобие прямым*. Примером такого подобия являются фотографии, масштабированные модели самолетов, кораблей, макеты зданий, выкройки, куклы и т.д.

Однако следует помнить, что как бы хороша ни была модель, она все-таки лишь заменитель оригинала, и только в определенном отношении. Даже тогда, когда модель прямого подобия выполнена из того же материала, что и оригинал, т.е. подобна ему субстрактно, возникают проблемы переноса результатов моделирования на оригинал. Например, при испытании уменьшенной модели самолета в аэродинамической трубе задача пересчета данных модельного эксперимента становится нетривиальной и возникает разветвленная, содержательная теория подобия, позволяющая привести в соответствие масштабы и условия эксперимента, скорость потока, вязкость и плотность воздуха.

Второй тип подобия между моделью и оригиналом называется *косвенным*. Косвенное подобие между оригиналом и моделью объективно существует в природе и обнаруживается в виде достаточной близости или совпадения их абстрактных математических моделей и вследствие этого широко используется в практике реального моделирования. Наиболее характерным примером может служить электромеханическая аналогия между маятником и электрическим контуром. Оказалось, что многие закономерности электрических и механических процессов описываются одинаковыми уравнениями, различие состоит в разной физической интерпретации переменных, входящих в это уравнение.

Роль моделей, обладающих косвенным подобием, очень велика; и роль аналогий (моделей косвенного подобия) в науке и практике трудно переоценить. Аналоговые вычислительные машины позволяют найти решение почти всякого дифференциального уравнения, представляя собой, таким образом, модель, аналог процесса, описываемого этим уравнением. Использование электронных аналогов в практике определяется тем, что электрические сигналы легко измерить и зафиксировать, что дает известные преимущества модели.

Третий, особый класс моделей составляют модели, подобие которых оригиналу не является ни прямым, ни косвенным, а *устанавливается в результате соглашения*. Такое подобие называется *условным.* Примерами условного подобия служат деньги (модель стоимости), удостоверение личности (модель владельца), всевозможные сигналы (модели сообщения).

Модель, с помощью которой успешно достигается поставленная цель, будем называть *адекватной* этой цепи. Адекватность означает, что требования полноты, точности и правильности (истинности) модели выполнены не вообще, а лишь в той мере, которая достаточна для достижения поставленной цели.

В ряде случаев удается ввести меру адекватности некоторых целей, т.е. указать способ сравнения двух моделей по степени успешности достижения цели с их помощью. Если к тому же есть способ количественно выразить меру адекватности, то задача улучшения модели существенно облегчается. Именно в таких случаях можно количественно ставить, вопросы об идентификации модели т.е. о нахождении в заданном классе моделей наиболее адекватной, об исследовании чувствительности и устойчивости моделей т.е. зависимости меры адекватности модели от ее точности, об адаптации моделей, т.е. подстройке параметров модели с целью повышения ее точности.

Приближенность модели не следует путать с адекватностью. Приближенность модели может быть очень высокой, но во всех случаях модель - это другой объект и различия неизбежны (единственной совершенной моделью любого объекта является сам объект). Величину, меру, степень приемлемости различия можно ввести, только соотнеся его с целью моделирования. Так некоторые подделки произведений искусства даже эксперты не могут отличить от оригинала, но все-таки это всего лишь подделка, и с точки зрения вложения капитала не представляет никакой ценности, хотя для любителей искусства ничем не отличается от оригинала.

Упрощение является сильным средством для выявления главных эффектов в исследуемом явлении: это видно на примере таких явлений физики, как идеальный газ, абсолютно упругое тело, математический маятник и абсолютно твердый рычаг.

Довольно интересный и непонятный пока аспект упрощенности модели, который заключается в том, что чем проще модель, тем она ближе к моделируемой реальности и тем она удобнее для использования. Классический пример – геоцентрическая модель Птолемея и гелиоцентрическая модель Коперника. Обе модели позволяют с достаточной точностью вычислять движения планет, предсказывать затмения Солнца и т.п. Но модель Коперника истинна и намного проще для использования, чем модель Птолемея. Ещё древние подметили, что «простота – печать научной истины» [2].

1.3. Экономико-математические методы и модели. Их классификация

Математические модели экономики, отражая с помощью математических соотношений основные свойства экономических процессов и явлений, представляют собой эффективный инструмент исследования сложных экономических проблем. Математические модели экономических процессов и явлений называют экономико-математическими моделями (ЭММ).

На базе использования ЭММ реализуются прикладные программы ЭВМ, предназначенные для решения задач экономического анализа, планирования и управления. Экономико-математические модели являются важнейшим компонентом (наряду с базами данных, техническими средствами, человеко-машинным интерфейсом) так называемых систем поддержки решений (СПР).

Система поддержки решений - это человеко-машинная система, позволяющая использовать данные, знания, объективные и субъективные модели для анализа и решения слабоструктурированных и неструктурированных проблем.

Математические модели для экономических систем можно разделить на поведенческие и феноменологические.

1. *Поведенческой* называют модель, построенную на основе наблюдений за поведением объекта и описывающую наблюдаемое поведение (соотношение между входными и выходными переменными) без какой-либо информации о внутренней структуре объекта (модель «черного ящика»). Структура и количество параметров устанавливаются в процессе построения модели, при этом параметры таких моделей могут не иметь какого-либо экономического смысла.

2. *Феноменологическая* модель представляет собой математическое описание внутренней структуры соответствующей экономической системы. Как

правило, структура уравнений таких моделей соответствует гипотезам экономической теории, а количество параметров заранее определено и ясен их экономический смысл.

Экономико-математические модели можно классифицировать по признакам, приведенным ниже.

1. *По целевому назначению* модели можно делить на:

а) теоретико-аналитические, применяемые для исследования наиболее общих свойств и закономерностей развития экономических процессов;

б) прикладные, используемые для решения конкретных задач.

2. *По уровням исследуемых экономических процессов*:

а) производственно-технологические;

б) социально-экономические.

3. *По характеру отражения причинно-следственных связей*:

а) детерминированные;

б) недетерминированные (вероятностные, стохастические), учитывающие фактор неопределённости.

4. *По способу отражения фактора времени*:

а) статические (здесь все зависимости относятся к одному моменту или периоду времени);

б) динамические, характеризующие изменения процессов во времени.

5. *По форме математических зависимостей*:

а) линейные (наиболее удобны для анализа и вычислений, вследствие чего получили большое распространение);

б) нелинейные.

6. *По степени детализации* (степени огрубления структуры):

а) агрегированные («макромодели»);

б) детализированные («микромодели»).

Экономико-математические модели, применяемые для исследования наиболее общих свойств и закономерностей развития экономических процессов, можно разделить на статистические; балансовые; оптимизационные.

Статистические модели – это модели, в которых описываются корреляционно-регрессионные зависимости результата производства от одного или нескольких независимых факторов. Эти модели широко используются для построения производственных функций, а также при анализе экономических систем.

Балансовые модели представляют систему балансов производства и распределения продукции и записываются в форме квадратных матриц. Балансовые модели служат для установления пропорций и взаимосвязей при планировании различных отраслей народного хозяйства.

Оптимизационные модели представляют систему математических уравнений, линейных или нелинейных, подчиненных определенной целевой функции и служащих для поиска наилучших (оптимальных) решений конкретной экономической задачи. Эти модели относятся к классу экстремальных задач и описывают условия функционирования экономической системы.

Классификация экономико-математических моделей может быть различной и условной. Это зависит от того, на базе каких признаков строится модель.

По функциональному признаку модели подразделены на модели планирования, модели бухгалтерского учета, модели экономического анализа, модели информационных процессов.

По признаку размерности модели классифицируются на макромодели, локальные модели и микромодели.

Макроэкономические модели строятся для изучения народного хозяйства в целом на базе укрупненных показателей.

К локальным экономическим моделям можно отнести модели, с помощью которых анализируются и прогнозируются некоторые показатели развития отрасли. Например, модель прогноза производительности труда.

Микромодели на предприятиях разрабатываются для углубленного анализа структуры производства. При построении микромоделей широко используются методы математической статистики - корреляционный и регрессионный, индексный и выборочный.

Оптимизационные модели могут носить детерминированный и стохастический характер. В детерминированных моделях результат решения однозначно зависит от входных данных. В стохастических вероятностных моделях определенный набор входных данных может дать, а может и не дать соответствующего результата.

Для понимания структуры курса учебной дисциплины важное значение имеет схема, представленная на рис. 1.3. В правой части рисунка показаны основные классы экономико-математических методов (классификация по используемому математическому аппарату), а в левой части - важнейшие направления применения методов.

Следует заметить, что каждый из методов может быть применен для решения различных по специфике задач. И наоборот, одна и та же задача может решаться различными методами.

На схеме экономико-математические методы представлены в виде некоторых укрупненных группировок.

1. Линейное программирование - линейное преобразование переменных в системах линейных уравнений. Сюда можно отнести: симплекс-метод, распределительный метод, статический матричный метод решения материальных балансов.

2. Дискретное программирование представлено двумя классами методов: локализационными и комбинаторными. К локализационным относятся

методы линейного целочисленного программирования. К комбинаторным относят метод ветвей и границ.

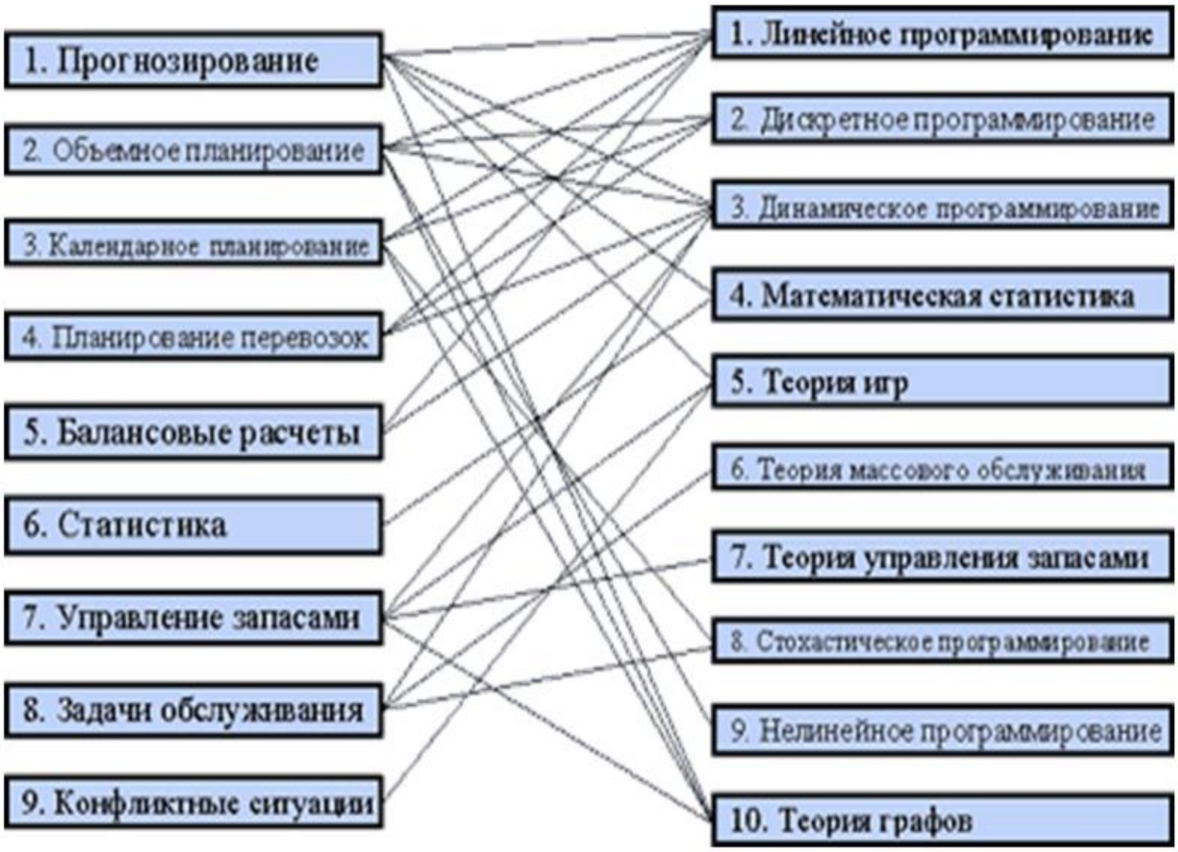


Рис. 1.3. Важнейшие области применения основных классов ЭММ

3. Математическая статистика используется для корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа экономических процессов и явлений. Корреляционный анализ применяется для установления тесноты связи между двумя или более стохастически независимыми процессами или явлениями. Регрессионный анализ устанавливает зависимость случайной величины от неслучайного аргумента. Дисперсионный анализ - установление зависимости результатов наблюдений от одного или нескольких факторов в целях выявления важнейших.

4. Динамическое программирование используется для планирования и анализа экономических процессов во времени. Динамическое программирование представляется в виде многошагового вычислительного процесса с последовательной оптимизацией целевой функции. Некоторые авторы относят сюда же имитационное моделирование.

5. Теория игр представляется совокупностью методов, используемых для определения стратегии поведения конфликтующих сторон.

6. Теория массового обслуживания - большой класс методов, где на основе теории вероятностей оцениваются различные параметры систем, характеризуемых как системы массового обслуживания.

7. Теория управления запасами объединяет в себе методы решения задач, в общей формулировке сводящихся к определению рационального размера запаса какой-либо продукции при неопределенном спросе на нее.

8. Стохастическое программирование. Здесь исследуемые параметры являются случайными величинами.

9. Нелинейное программирование относится к наименее изученному, применительно к экономическим явлениям и процессам, математическому направлению.

10. Теория графов - направление математики, где на основе определенной символики представляется формальное описание взаимосвязанности и взаимообусловленности множества элементов (работ, ресурсов, затрат и т.п.). До настоящего времени наибольшее практическое применение получили так называемые сетевые графики.

1.4. Классификация задач математического программирования

Все модели могут быть классифицированы в зависимости от природы и свойств операции, характера решаемых задач, особенностей применяемых математических методов [1,3].

Прежде всего необходимо выделить большой класс оптимизационных моделей. Такие модели нужны при попытке оптимизировать планирование и управление сложными системами, в первую очередь экономическими системами. Оптимизационную задачу можно сформулировать следующим образом: найти значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые при заданных условиях $a_1, a_2, \ldots, a_m$, удовлетворяют системе неравенств (уравнений)

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m) \le b_i, i = 1,2, \ldots, k \tag{1.1}$$

и обращают в экстремум (минимум или максимум) целевую функцию, т.е. критерий эффективности:

$$F(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m) \to extr. \tag{1.2}$$

Если имеются условия неотрицательности значений переменных x_1, x_2 ,..., x_n, то они так же входят в ограничение (1.1). В тех случаях, когда функции f и g_i дважды дифференцируемы, для поиска условного экстремума (максимума или минимума) функции f можно использовать *классические методы оптимизации*. Однако их применение в исследовании операций весьма ограничено или вообще невозможно, если множество допустимых значений аргументов дискретно или же функция f представлена в табличном виде. В этих случаях для решения задачи, представленной отношениями (1.1) и (1.2), используются методы *математического программирования*.

В основе классификации задач математического программирования лежит вид функций, задающих критерий эффективности и ограничения, зависимость их от такого параметра, как время, стохастический характер поведения и т.п.

Если критерий эффективности $F(X)$ представляет собой линейную функцию, а функции $g_i(x)$ в системе ограничений также линейны, то такая задача является задачей *линейного программирования* (ЗЛП).

Если, исходя из содержательного смысла ЗЛП, её решения должны быть целыми числами, то это - задача *целочисленного программирования*.

Если критерий эффективности $F(X)$ и (или) система ограничений $g_i(x)$ задаются нелинейными функциями, то это – задача *нелинейного программирования*. В частности, если указанные функции обладают свойствами выпуклости, то это задача *выпуклого программирования*. В свою очередь среди задач выпуклого программирования выделяют наиболее простые задачи *квадратичного программирования*, в которых целевая функция представляет собой полином второй степени (квадратичную форму) относительно переменных $x_1, x_2,..., x_n$, а область допустимых значений решений задается линейными ограничениями.

Если в задаче имеется переменная времени и критерий эффективности $F(X)$ выражается не в явном виде, как функция переменных, а косвенно – через уравнения, описывающие протекание операций во времени, то это задача *динамического программирования*.

Если критерий эффективности F(X) и система ограничений $g_i(x)$ задаются функциями вида $cx_1^{a_1}, cx_2^{a_2}, \dots, cx_n^{a_n}$ то имеет место задача *геометрического программирования.*

Если функции $F(X)$ и / или $g_i(x)$ зависят от параметров, то получается задача *параметрического программирования*.

Если эти функции носят случайный, точнее вероятностный, характер, то это - задача *стохастического программирования*.

Если точный оптимум найти алгоритмическим путем невозможно из-за чрезмерно большого числа вариантов решений, прибегают к методам *эвристического программирования*, которые позволяют существенно сократить просматриваемое число вариантов и получить, если не оптимальное, то вполне удовлетворительное с точки зрения практики, решение.

1.5. Принципы построения экономико-математических моделей

В основе построения ЭММ и процесса моделирования принято считать важными следующие принципы.

1. Принцип достаточности исходной информации. В каждой модели должна использоваться только та информация, которая известна с точностью, требуемой для получения результатов моделирования.

2. Принцип инвариантности (однозначности) информации требует, чтобы входная информация, используемая в модели, была независима от тех параметров моделируемой системы, которые еще неизвестны на данной стадии исследования.

3. Принцип преемственности. Сводится к тому, что каждая последующая модель не должна нарушать свойств объекта, установленных или отраженных в предыдущих моделях.

4. Принцип эффективной реализуемости. Необходимо, чтобы модель могла быть реализована при помощи современных вычислительных средств.

Некоторые исследователи при построении ЭММ и моделировании используют следующие правила:

● необходимо соизмерять точность и подробность модели, во-первых, с точностью тех исходных данных, которыми располагает исследователь, и, во-вторых, с теми результатами, которые требуется получить;

● ЭММ должна отражать существенные черты исследуемого явления и при этом не должна его сильно упрощать;

● ЭММ не может быть полностью адекватна реальному явлению, поэтому для его исследования лучше использовать несколько моделей, для построения которых применены разные математические методы, если при этом получаются сходные результаты, то исследование заканчивается, если результаты сильно различаются, то следует пересмотреть постановку задачи;

● любая сложная экономическая система всегда подвергается внешним и внутренним воздействиям, следовательно, экономико-математическая модель должна быть устойчивой (сохранять свойства и структуру при этих воздействиях).

1.6. Этапы экономико-математического моделирования

Основные этапы процесса моделирования были рассмотрены выше (см. рис. 1.2). В различных отраслях знаний они приобретают свои специфические черты. Проанализируем последовательность и содержание этапов одного цикла экономико-математического моделирования (рис. 1.4).

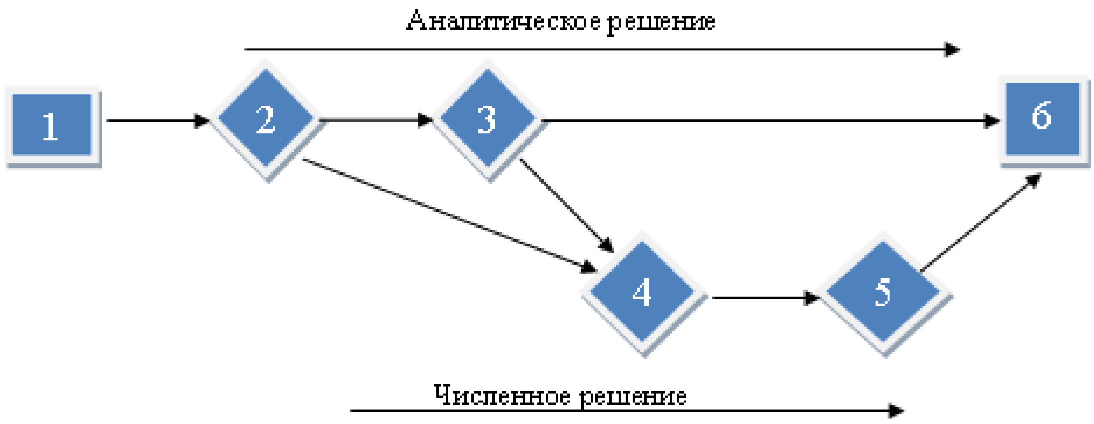


Рис. 1.4. Этапы экономико-математического моделирования

Первый этап. Постановка проблемы (задачи) и её качественный анализ. Главное на этом этапе - чётко сформулировать сущность проблемы, определить принимаемые допущения, а также определить те вопросы, на которые требуется получить ответ.

Этап включает выделение важнейших черт и свойств моделируемого объекта, основных зависимостей, связывающих его элементы. Здесь же происходит формулирование гипотез, хотя бы предварительно объясняющих поведение объекта.

Второй этап. Построение математической модели. Это этап формализации задачи, т.е. выражения ее в виде математических зависимостей и отношений (функций, уравнений, неравенств, схем). Как правило, сначала определяется тип математической модели, а затем уточняются детали.

Неправильно полагать, что, чем больше факторов учитывает модель, тем лучше она работает и дает лучшие результаты. Излишняя сложность модели затрудняет процесс исследования. При этом нужно учитывать не только реальные возможности информационного и математического обеспечения, но и сопоставлять затраты на моделирование с получаемым эффектом (при возрастании сложности модели прирост затрат может превысить прирост эффекта).

Третий этап. Математический анализ модели. Цель - выявление общих свойств и характеристик модели. Применяются чисто математические приёмы исследования. Наиболее важный момент - доказательство существования решений в сформулированной модели. Если удастся доказать, что задача не имеет решения, то необходимость в последующей работе по данному варианту модели отпадает; следует скорректировать либо постановку задачи, либо способы ее математической формализации.

Однако модели сложных экономических объектов с большим трудом поддаются аналитическому исследованию. В тех случаях, когда не удается выяснить общие свойства модели аналитическими методами, а упрощение модели приводит к недопустимым результатам, прибегают к численным методам исследования.

Четвертый этап. Подготовка исходной информации. Численное моделирование предъявляет жесткие требования к исходной информации. В то же время реальные возможности получения информации существенно ограничивают выбор используемых моделей. При этом принимается во внимание не только возможность подготовки информации (за определенный срок), но и затраты на подготовку соответствующих информационных массивов. Эти затраты не должны превышать эффекта от использования данной информации.

Пятый этап. Численное решение. Это составление алгоритмов, разработка программ и непосредственное проведение расчётов на ЭВМ.

Шестой заключительный этап. Анализ результатов и их применение: проверяются правильность, полнота и степень практической применимости полученных результатов.

Естественно, что после каждого из этапов возможен возврат к одному из предыдущих в случае необходимости уточнения информации, пересмотра результатов выполнения отдельных этапов. Например, если на этапе 2 формализовать задачу не удается, то необходимо вернуться к постановке проблемы (этап 1). Соответствующие связи на рис. 1.4 не показаны, чтобы не загромождать схему.

2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

2.1. Общая постановка задачи линейного программирования

Линейное программирование – направление математики, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием оптимальности.

В данном случае программирование - это, конечно, не составление программ для ЭВМ. Программирование здесь должно интерпретироваться как планирование, формирование планов, разработка программы действий.

К математическим задачам линейного программирования (ЗЛП) относят исследования конкретных производственно-хозяйственных ситуаций, которые в том или ином виде интерпретируются как задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов.

Круг задач, решаемых при помощи методов линейного программирования достаточно широк. Это, например:

- задача об оптимальном использовании ресурсов при производственном планировании;
- задача о смесях (планирование состава продукции);
- задача о нахождении оптимальной комбинации различных видов продукции для хранения на складах (управление товарно-материальными запасами или «задача о рюкзаке»);
- транспортные задачи (анализ размещения предприятия, перемещение грузов).

Линейное программирование – наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования (кроме того, сюда относят: целочисленное, динамическое, нелинейное, параметрическое программирование). Это объясняется следующим:

- математические модели большого числа экономических задач линейны относительно искомых переменных;
- данный тип задач в настоящее время наиболее изучен; для него разработаны специальные методы, с помощью которых эти задачи решаются, и соответствующие программы для ЭВМ;
- многие задачи линейного программирования, будучи решенными, нашли широкое применение;
- некоторые задачи, которые в первоначальной формулировке не являются линейными, после ряда дополнительных ограничений и допущений могут стать линейными или могут быть приведены к такой форме, что их можно решать методами линейного программирования.

Экономико-математическая модель любой задачи линейного программирования включает целевую функцию, оптимальное значение которой (максимум или минимум) требуется отыскать; ограничения в виде системы линейных уравнений или неравенств; требование не отрицательности переменных.

В общем виде модель записывается следующим образом:
целевая функция:

$$F(x)= c_1 x_1+ c_2 x_2+ \ldots + c_n x_n \to max(min); \quad (2.1)$$

ограничения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\{\leq=\geq\}b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\{\leq=\geq\}b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\{\leq=\geq\}b_m \end{cases} \quad (2.2)$$

требование неотрицательности:

$$x_i \geq 0, j = \overline{1, n}. \quad (2.3)$$

При этом a_{ij}, b_i, c_j $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ - заданные постоянные величины.

Задача состоит в нахождении оптимального значения функции (2.1) при соблюдении ограничений (2.2) и (2.3).

Систему ограничений (2.2) называют функциональными ограничениями задачи, а ограничения (2.3) - прямыми.

Вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (2.2) и (2.3), называется допустимым решением (планом) задачи линейного программирования. План при котором функция (2.1) достигает своего максимального (минимального) значения, называется оптимальным.

Далее приведем примеры некоторых типовых задач, решаемых при помощи методов линейного программирования. Такие задачи имеют реальное экономическое содержание. Сейчас лишь сформулируем их в терминах ЗЛП, а методы решения подобных задач рассмотрим ниже.

1. Задача об оптимальном использовании ресурсов при производственном планировании.

Общий смысл задач этого класса сводится к следующему.

Предприятие выпускает n различных изделий. Для их производства требуется m различных видов ресурсов (сырья, материалов, рабочего времени и т.п.). Ресурсы ограничены, их запасы в планируемый период составляют соответственно b_1, b_2,..., b_m условных единиц.

Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, которые показывают, сколько единиц i-го ресурса требуется для производства единицы изделия j-го вида ($i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$).

Прибыль, получаемая предприятием при реализации изделия j-го вида, равна c_j.

В планируемом периоде значения величин a_{ij}, b_i и c_j остаются постоянными.

Требуется составить такой план выпуска продукции, при реализации которого прибыль предприятия была бы наибольшей.

Далее приведем пример известной задачи такого класса.

Компания специализируется на выпуске хоккейных клюшек и наборов шахмат. Каждая клюшка приносит компании прибыль в размере 2 у.е, а каждый шахматный набор - в размере 4 у.е. На изготовление одной клюшки требуется четыре часа работы на участке A и два часа работы на участке B. Шахматный набор изготавливается с затратами шести часов на участке A, шести часов на участке B и одного часа на участке C. Доступная производственная мощность участка A составляет 120 н/часов в день, участка B - 72 н/часа и участка C - 10 н/часов.

Сколько клюшек и шахматных наборов должна выпускать компания ежедневно, чтобы получать максимальную прибыль?

Условия задач указанного класса часто представляют в табличной форме (см. таблицу 2.1).

Таблица 2.1

Исходные данные задачи об использовании производственных ресурсов

Производственные участки	**Затраты времени на единицу продукции, н/час**		**Доступный фонд времени, н/час**
	клюшки	наборы шахмат	
A	4	6	120
B	2	6	72
C	-	1	10
Прибыль на единицу продукции, у.е.	2	4	

По данному условию сформулируем задачу линейного программирования.

Обозначим x_1 – количество выпускаемых ежедневно хоккейных клюшек, x_2 – количество выпускаемых ежедневно шахматных наборов.

Формулировка ЗЛП:

$$f(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 120, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 72, \\ \quad x_2 \leq 10; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Подчеркнем, что каждое неравенство в системе функциональных ограничений соответствует в данном случае тому или иному производственному участку, а именно: первое - участку A, второе - участку B, третье - участку C.

Повторимся: методы решения ЗЛП мы будем рассматривать чуть позднее, а сейчас - пример задачи другого типа.

2. Задача о смесях (планирование состава продукции).

К группе задач о смесях относят задачи по отысканию наиболее дешевого набора из определенных исходных материалов, обеспечивающих получение смеси с заданными свойствами. Иными словами, получаемые смеси должны иметь в своем составе m различных компонентов в определенных количествах, а сами компоненты являются составными частями n исходных материалов.

Пример.

На птицеферме употребляются два вида кормов - I и II. В единице массы корма I содержатся единица вещества A, единица вещества B и единица вещества C. В единице массы корма II содержатся четыре единицы вещества A, две единицы вещества B и не содержится вещество C. В дневной рацион каждой птицы надо включить не менее единицы вещества A, не менее четырех единиц вещества B и не менее единицы вещества C. Цена единицы массы корма I составляет 3 руб, корма II - 2 руб.

Составьте ежедневный рацион кормления птицы так, чтобы обеспечить наиболее дешевый рацион.

Представим условие задачи в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Исходные данные задачи о смесях

Питательные вещества	**Содержание веществ в единице массы корм ед.**		**Требуемое количество в смеси, ед.**
	корм I	корм II	
A	1	4	1
B	1	2	4
C	1	-	1
Цена единицы массы корма, р	2	4	

Сформулируем задачу линейного программирования.

Обозначим: x_1 – количество корма I в дневном рационе птицы, x_2 – количество корма II в дневном рационе птицы.

Формулировка ЗЛП:

$$f(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to min;$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 1, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 1; \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Транспортная задача.

Под транспортной задачей понимают целый ряд задач, имеющих определенную специфическую структуру. Наиболее простыми транспортными задачами являются задачи о перевозках некоторого продукта из пунктов отправления в пункты назначения при минимальных затратах на перевозку.

Пример.

Три поставщика одного и того же продукта располагают в планируемый период следующими его запасами: первый – 120 условных единиц, второй – 100 условных единиц, третий – 80 условных единиц. Этот продукт должен быть перевезен к трем потребителям, потребности которых равны 90, 90 и 120 условных единиц соответственно.

Обычно начальные условия транспортной задачи записывают в так называемую транспортную таблицу (табл. 2.3). В ячейках таблицы в левом верхнем углу записывают показатели затрат (расходы по доставке единицы продукта между соответствующими пунктами), под диагональю каждой ячейки размещается величина поставки x_{ij} (т.е. x_{ij} – количество единиц груза, которое будет перевезено от i-го поставщика j-му потребителю).

Таблица 2.3

Исходные данные транспортной задачи

Поставщики	Возможности поставщиков, ед. груза	Потребители и их спрос, ед. груза		
		I	II	III
		90	90	120
I	120	7 / x_{11}	6 / x_{12}	4 / x_{13}
II	100	3 / x_{21}	8 / x_{22}	5 / x_{23}
III	80	2 / x_{31}	3 / x_{32}	7 / x_{33}

Необходимо определить наиболее дешевый вариант перевозок, при этом каждый поставщик должен отправить столько груза, сколько имеется у него в запасе, а каждый потребитель должен получить нужное ему количество продукции.

Сформулируем ЗЛП:

$$f(\bar{x}) = 7x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 2x_{31} + 3x_{32} + 7x_{33} \to min;$$

$$\begin{cases} x_{12} + x_{13} = 120, \\ x_{22} + x_{23} = 100, \\ x_{32} + x_{33} = 80, \\ x_{21} + x_{31} = 90, \\ x_{22} + x_{32} = 90, \\ x_{23} + x_{33} = 120; \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0; (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,3})$$

2.2. Графическое решение задач линейного программирования

Если система ограничений задачи линейного программирования представлена в виде системы линейных неравенств с двумя переменными, то такая задача может быть решена геометрически. Таким образом, данный метод решения ЗЛП имеет очень узкие рамки применения.

Однако метод представляет большой интерес с точки зрения выработки наглядных представлений о сущности задач линейного программирования.

Графический (или геометрический) метод предполагает последовательное выполнение ряда шагов. Ниже представлен порядок решения задачи линейного программирования на основе ее геометрической интерпретации.

1. Сформулировать ЗЛП.

2. Построить на плоскости $\{x_1, x_2\}$ прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

3. Найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

4. Найти область допустимых решений.

5. Построить прямую зависимость $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, где h - любое положительное число, желательно такое, чтобы проведенная прямая проходила через многоугольник решений.

6. Перемещать найденную прямую параллельно самой себе в направлении увеличения (при поиске максимума) или уменьшения (при поиске минимума) целевой функции. В результате либо отыщется точка, в которой целевая

функция принимает максимальное (минимальное) значение, либо будет установлена неограниченность функции на множестве решений.

7. Определить координаты точки максимума (минимума) функции и вычислить значение функции в этой точке.

Далее рассмотрим пример решения ЗЛП графическим методом. Для этого воспользуемся представленной выше задачей о хоккейных клюшках и шахматных наборах.

1. Выше уже приводилась формулировка задачи, здесь нам остается лишь повторить ее:

$$f(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 120, \\ 2x_1 6x_2 \le 72, \\ x_2 \le 10; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Теперь построим прямые, соответствующие каждому из функциональных ограничений задачи (рис. 2.1). Эти прямые обозначены на рисунке как (1), (2) и (3).

3. Штрихи на прямых указывают полуплоскости, определяемые ограничениями задачи.

4. Область допустимых решений (ОДР) включает в себя точки, для которых выполняются все ограничения задачи. В нашем случае область ОДР представляет собой пятиугольник (на рисунке она обозначена ABCDO и окрашена синим цветом).

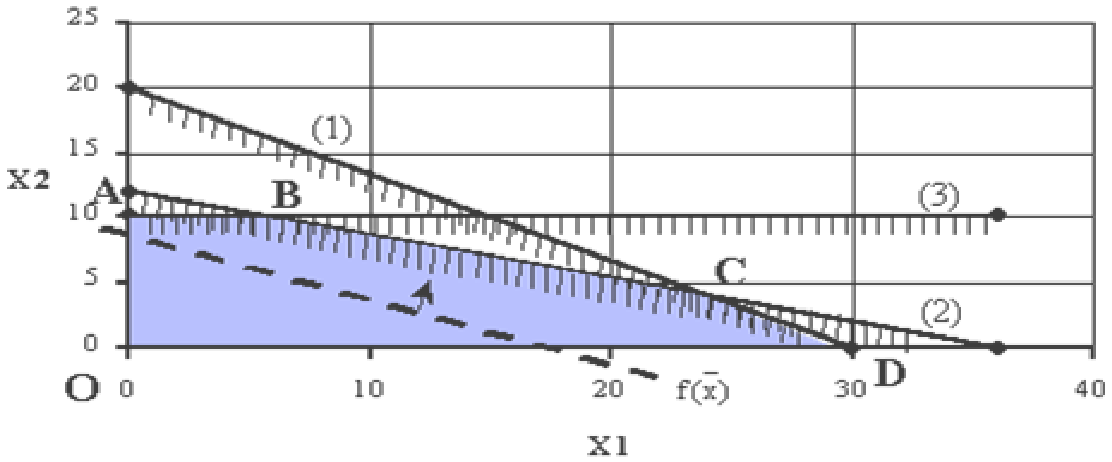


Рис. 2.1. Графическое решение ЗЛП

5. Прямая линия, соответствующая целевой функции (ЦФ), на рисунке представлена пунктирной линией.

6. Прямую линию ЦФ передвигаем параллельно самой себе вверх (направление указано стрелкой), поскольку именно при движении в этом

направлении значение ЦФ увеличивается. Последней точкой многоугольника решений, с которой соприкоснется передвигаемая прямая ЦФ прежде чем покинет его, является точка С. Это и есть точка, соответствующая оптимальному решению задачи.

7. Осталось вычислить координаты точки С. Она является точкой пересечения прямых линий (1) и (2). Решив совместно уравнения этих прямых, найдем: $x_1 = 24$, $x_2 = 4$. Подставляя найденные величины в целевую функцию, найдем ее значение в оптимальной точке $f(\bar{x}^*) = 64$

Таким образом, для максимизации прибыли компании следует ежедневно выпускать 24 клюшки и 4 набора. Реализация такого плана обеспечит ежедневную прибыль в размере 64 у.е.

2.3. Основные теоремы линейного программирования

Для обоснования методов решения задач линейного программирования сформулируем ряд важнейших теорем, опуская их аналитические доказательства. Уяснить смысл каждой из теорем поможет понятие о геометрической интерпретации решения ЗЛП, данное в предыдущем подразделе.

Однако сначала напомним о некоторых понятиях, важных с точки зрения дальнейшего разговора.

Любые m переменных системы линейных уравнений с n переменными ($m < n$) называются основными, если определитель матрицы коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные m-n переменных называются неосновными (или свободными).

Базисным решением системы m линейных уравнений с n переменными ($m < n$) называется всякое ее решение, в котором все неосновные переменные имеют нулевые значения.

Теорема 1. Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.

В частном случае, когда в систему ограничений входят только две переменные x_1 и x_2, это множество можно изобразить на плоскости. Так как речь идет о допустимых решениях ($x_1, x_2 \geq 0$), то соответствующее множество будет располагаться в первой четверти декартовой системы координат. Это множество может быть замкнутым (многоугольник), незамкнутым (неограниченная многогранная область), состоять из единственной точки и, наконец, система ограничений-неравенств может быть противоречивой.

Теорема 2. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает с одной (двумя) из угловых точек множества допустимых решений.

Из теоремы 2 можно сделать вывод о том, что единственность оптимального решения может нарушаться, причем, если решение не единственное, то таких оптимальных решений будет бесчисленное множество (все точки отрезка, соединяющего соответствующие угловые точки).

Теорема 3. Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка области допустимых решений, и наоборот.

Следствием из теорем 2 и 3 является утверждение о том, что оптимальное решение (оптимальные решения) задачи линейного программирования, заданной (или приведенной) ограничениями-уравнениями, совпадает с допустимым базисным решением (допустимыми базисными решениями) системы ограничений.

Таким образом, оптимальное решение ЗЛП следует искать среди конечного числа допустимых базисных решений.

2.4. Симплексный метод

Симплекс-метод решения ЗЛП был разработан и впервые применен для решения задач в 1947 г. американским математиком Дж. Данцигом.

Симплексный метод в отличие от графического универсален. С его помощью можно решить любую задачу линейного программирования [1, 4].

В основу симплексного метода положена идея последовательного улучшения получаемого решения.

Геометрический смысл симплексного метода состоит в последовательном переходе от одной вершины многогранника ограничений к соседней, в которой целевая функция принимает лучшее (или, по крайней мере, не худшее) значение до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение - вершина, где достигается оптимальное значение функции цели (если задача имеет конечный оптимум).

Таким образом, имея систему ограничений, приведенную к канонической форме (все функциональные ограничения имеют вид равенств), находят любое базисное решение этой системы, заботясь только о том, чтобы найти его как можно проще. Если первое же найденное базисное решение оказалось допустимым, то проверяют его на оптимальность. Если оно не оптимально, то осуществляется переход к другому, обязательно допустимому базисному решению. Симплексный метод гарантирует, что при этом новом решении целевая функция если и не достигнет оптимума, то приблизится к нему (или, по крайней мере, не удалится от него). С новым допустимым базисным решением поступают так же, пока не отыщется решение, которое является оптимальным.

Процесс применения симплексного метода предполагает реализацию трех его основных элементов:

1) способ определения какого-либо первоначального допустимого базисного решения задачи;

2) правило перехода к лучшему (точнее, не худшему) решению;

3) критерий проверки оптимальности найденного решения.

Симплексный метод включает в себя ряд этапов и может быть сформулирован в виде четкого алгоритма (четкого предписания о выполнении последовательных операций). Это позволяет успешно программировать и реализовывать его на ЭВМ. Задачи с небольшим числом переменных и ограничений могут быть решены симплексным методом «вручную».

Далее рассмотрим симплексный алгоритм, не углубляясь в его обоснование.

Реализация симплекс-метода включает восемь шагов. Опишем их, параллельно рассматривая пример выполнения каждого шага в применении к задаче о хоккейных клюках и шахматных наборах.

Шаг 1. Формулировка ЗЛП (формирование целевой функции и системы ограничений).

Для определенности будем считать, что решается задача на отыскание максимума. Ниже приведем общую постановку такой задачи.

$$f(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = max;$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \{\leq = \geq\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \{\leq = \geq\} b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \{\leq = \geq\} b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$$

Еще раз повторим формулировку задачи из нашего примера.

$$f(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 120, \\ 2x_1 6x_2 \leq 72, \\ x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Шаг 2. Приведение задачи к канонической форме (перевод функциональных ограничений в систему уравнений).

Для реализации шага в ограничения задачи вводятся дополнительные переменные. Ниже приведен порядок выполнения этой операции

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\{\leq = \geq\}b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\{\leq = \geq\}b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\{\leq = \geq\}b_m \end{cases}$$

Обозначим добавочные переменные несколько иначе, а именно:

$$y_1 = x_{n+1},\ y_2 = x_{n+2},\ \ldots,\ y_m = x_{n+m}\ , \tag{2.4}$$

где n - число переменных в исходной задаче, m - число уравнений.

Все дополнительные переменные должны быть неотрицательными. В отношении добавочных переменных следует заметить, что они должны иметь тот же знак, что и свободные члены системы ограничений. В противном случае используется так называемый М-метод (метод искусственного базиса).

Выполним второй шаг для нашего примера.

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 120, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 \leq 72, \\ x_2 + x_5 = 10; \end{cases}$$

Шаг 3. Построение исходной симплекс-таблицы (получение первоначального допустимого базисного решения).

При «ручной» реализации симплексного метода удобно использовать так называемые симплексные таблицы. Исходная симплекс-таблица соответствует первоначальному допустимому базисному решению. В качестве такового проще всего взять базисное решение, в котором основными являются дополнительные переменные x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} . Ниже приведены исходная симплексная таблица в общем виде (табл. 2.4) и в применении к рассматриваемой нами задаче (табл. 2.5).

Итак, в левом столбце записываются основные (базисные) переменные, в первой строке таблицы перечисляются все переменные задачи. Крайний правый столбец содержит свободные члены системы ограничений b_1, b_2, ..., b_m .

В последней строке таблицы (она называется оценочной) записываются коэффициенты целевой функции, а также значение целевой функции (с обратным знаком) при текущем базисном решении ($L = -f(\bar{x})$)

В рабочую область таблицы (начиная со второго столбца и второй строки) занесены коэффициенты a_{ij} при переменных системы ограничений.

Таким образом, в данном базисном решении неосновные переменные x_1 и x_2 равны нулю. Базисные переменные отличны от нуля: x_3 =120, x_4 =72, x_5 = 10. Данное базисное решение является допустимым. Естественно, что значение целевой функции в этом случае равно нулю, так как в формировании целевой функции участвуют переменные, которые для данного базисного решения являются неосновными.

Шаг 4. Проверка условия: все $c_j \leq 0$. Если «НЕТ» - осуществляется переход к шагу 5, если «ДА» - задача решена. Таким образом, на данном шаге проверяется наличие положительных элементов в последней строке симплексной таблицы. Если такие элементы имеются, необходимо продолжать решение.

Таблица 2.4

Общий вид исходной симплекс-таблицы

Базис	**Переменные**							b_i
	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	1	b_m
c_j	c_1	c_2	...	c_n	0	0	0	L

Таблица 2.5

Исходная симплекс-таблица для задачи
о хоккейных клюшках и шахматных наборах

Базис	**Переменные**					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	4	6	1	0	0	120
x_4	2	6	0	1	0	72
x_5	0	1	0	0	1	10
c_i	2	4	0	0	0	0

В нашей задаче последняя строка содержит два положительных элемента, следовательно, необходимо перейти к шагу 5.

Шаг 5. Выбор разрешающего столбца (переменной, вводимой в базис). Разрешающий столбец выбирается в соответствии со следующим условием:

$$C_r = max\{C_j\}, j = \overline{1, n+m}, \tag{2.5}$$

где r – номер разрешающего столбца.

Таким образом, при определении разрешающего столбца просматривается последняя строка симплексной таблицы и в ней отыскивается наибольший положительный элемент.

В нашей задаче в качестве разрешающего выберем второй столбец (соответствующий переменной x_2), поскольку в последней строке для этого столбца содержится 4.

Шаг 6. Проверка условия: все $a_{ir} \leq 0$. Если «ДА» - целевая функция не ограничена и решения нет, если «НЕТ» - переход к шагу 7.

Таким образом, необходимо проверить элементы разрешающего столбца. Если среди них нет положительных, то задача неразрешима.

В нашем примере все элементы разрешающего столбца положительны (6, 6 и 1), следовательно, необходимо перейти к шагу 7.

Шаг 7. Выбор разрешающей строки (переменной, выводимой из базиса) по условию:

$$D_s = min\left\{\frac{b_i}{a_{ir}}\right\}, i = \overline{1, m}, a_{ir} > 0, \tag{2.6}$$

где s - номер разрешающей строки.

Таким образом, для тех строк, где элементы разрешающего столбца положительны, необходимо найти частное от деления элемента b_i (последний столбец таблицы) на элемент, находящийся в разрешающем столбце. В качестве разрешающей выбирается строка, для которой результат такого деления будет наименьшим.

Проиллюстрируем выполнение шага 7, обратившись к нашему примеру.

Для первой строки: $D_1 = 120 / 6 = 20$.

Для второй строки: $D_2 = 72 / 6 = 12$.

Для третьей строки: $D_3 = 10 / 1 = 10$.

Наименьший результат деления - в третьей строке, значит именно эту строку мы выбираем в качестве разрешающей, т.е. исключать из базисного решения будем переменную x_5.

Элемент, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, называется разрешающим элементом. В нашем случае таковым является единица, стоящая на пересечении третьей строки и второго столбца.

Исходная симплекс-таблица нашего примера с выделенными цветом разрешающей строкой и разрешающим столбцом представлена ниже (табл. 2.6).

Шаг 8. Пересчет элементов симплекс-таблицы (переход к новому базисному решению).

Порядок пересчета различных элементов таблицы несколько отличается. Для элементов разрешающей строки используются следующие формулы:

$$a'_{sj} = \frac{a_{sj}}{a_{sr}};\ b'_s = \frac{b_s}{a_{sr}} \qquad (2.7)$$

где s – номер разрешающей строки,
r – номер разрешающего столбца,
a'_{sj}, b'_s – новые значения пересчитываемых элементов,
a_{sj}, b_s – старые значения пересчитываемых элементов,
a_{sr} – старое значение разрешающего элемента.

Таблица 2.6

Исходная симплекс-таблица с выделенными разрешающей строкой и столбцом, а также с иллюстрацией к применению правила прямоугольника

базис	переменные					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	4	6	1	0	0	120
x_4	2	6	0	1	0	72
x_5	0	1	0	0	1	10
c_j	2	4	0	0	0	0

Таким образом, при пересчете элементов разрешающей строки каждый ее элемент делится на разрешающий элемент.

Еще проще пересчитать элементы разрешающего столбца. Все они (кроме разрешающего элемента) становятся равными нулю:

$$a'_{ir} = 0, c'_r = 0. \qquad (2.8)$$

Элементы, не принадлежащие разрешающим столбцу и строке, пересчитываются по так называемому правилу прямоугольника: мысленно выделяется прямоугольник, в котором элемент, подлежащий пересчету и разрешающий элемент образуют одну из диагоналей. Формулы будут иметь следующий вид:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ir}a_{sj}}{a_{sr}}, b'_i = b_i - \frac{a_{ir}b_s}{a_{sr}}, c'_j = c_j - \frac{a_{sj}c_r}{a_{sr}}, L' = L - \frac{c_r c_s}{a_{cr}}. \qquad (2.9)$$

где a'_{ij}, b'_i, c'_j, L' – новые значения пересчитываемых элементов,
a_{ij}, b_i, c_j, L – старые значения пересчитываемых элементов.

Применение правила прямоугольника проиллюстрируем, используя таблицу 2.6. Пересчитаем элемент a_{11} (в исходной симплекс-табл. 2.5 его значение равно 4). В таблице 2.6 можно видеть прямоугольник (прочерчен пунктиром), соединяющий четыре элемента, участвующих в пересчете:

$$a_{11} = a_{11} - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{32}}, \text{т. е.} \, a_{11} = 4 - \frac{6 \times 0}{1} = 4.$$

Аналогичным образом пересчитываются остальные элементы.

По окончании пересчета осуществляется возврат к шагу 4.

Полностью результат пересчета для нашего примера можно видеть в табл. 2.7.

Таблица 2.7

Симплекс-таблица для задачи о хоккейных клюшках и шахматных наборах (второе базисное решение)

Базис	**Переменные**					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	*4*	*0*	*1*	*0*	*-6*	*60*
x_4	*2*	*0*	*0*	*1*	*-6*	*12*
x_2	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*10*
c_j	*2*	*0*	*0*	*0*	*-4*	*-40*

Таким образом, в новом базисном решении базисными переменными являются: $x_2 = 10$, $x_3 = 60$, $x_5 = 12$ (соответствующие значения можно видеть в последнем столбце таблицы). Неосновные переменные x_1 и x_5 равны нулю. Значение целевой функции в этом случае равно 40 (это можно видеть в правой нижней ячейке таблицы).

Доведем решение нашего примера до конца.

Вернемся к *шагу 4* симплекс-алгоритма. Рассмотрим последнюю строку таблицы 2.7. В ней есть положительные элементы, значит полученное решение не является оптимальным.

Шаг 5. Выберем разрешающий столбец. Им окажется столбец x_1, поскольку здесь содержится единственный положительный элемент нижней строки. Стало быть, переменную x_1 будем переводить в основные.

Далее. *Шаг 6.* Проверка показывает, что в разрешающем столбце есть положительные элементы, следовательно, можно продолжать решение.

Шаг 7. Определим разрешающую строку. При этом будем рассматривать лишь первую и вторую строки, поскольку для третьей строки в разрешающем столбце находится нуль. Найдем частное от деления элемента b_i на элемент, находящийся в разрешающем столбце:

Для первой строки: D_1= 60 / 4 = 15.

Для второй строки: D_2= 12 / 2 = 6.

Наименьший результат деления - во второй строке, значит именно эту строку выбираем в качестве разрешающей, т.е. переводить в неосновные (исключать из базиса) будем переменную x_4.

Ниже приведена симплекс-таблица с выделенными разрешающей строкой и столбцом (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Симплекс-таблица (второе базисное решение)
с выделенными разрешающей строкой и столбцом

Базис	Переменные					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	4	0	1	0	-6	60
x_4	2	0	0	1	-6	12
x_2	0	1	0	0	1	10
c_j	2	0	0	0	-4	-40

Далее перейдем к шагу 8 и осуществим пересчет элементов симплексной таблицы в соответствии с правилами, приводимыми выше. Результат пересчета представлен в таблице 2.9.

Таблица 2.9

Симплекс-таблица для задачи о хоккейных клюшках
и шахматных наборах (третье базисное решение)

Базис	Переменные					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	-2	6	36
x_1	1	0	0	1/2	-3	6
x_2	0	1	0	0	1	10
c_j	0	0	0	-1	2	-52

Таким образом, в очередном (третьем) базисном решении основными переменными являются: $x_1 = 6$, $x_2 = 10$, $x_3 = 36$. Неосновные переменные x_4 и x_5 равны нулю. Значение целевой функции для этого решения равно 52.

Вернемся к шагу 4 симплекс-метода. Рассмотрим последнюю строку таблицы 2.9. В ней все еще есть положительные элементы, значит, полученное решение не является оптимальным, и необходимо продолжить выполнение симплекс-алгоритма.

Шаг 5. Выберем разрешающий столбец. Им окажется столбец x_5, поскольку здесь содержится единственный положительный элемент нижней строки. Переменную x_5 будем переводить в основные.

Шаг 6. Проверка показывает, что в разрешающем столбце есть положительные элементы, следовательно, можно продолжать решение.

Шаг 7. Определим разрешающую строку. При этом будем рассматривать лишь первую и третью строки, поскольку для второй строки в разрешающем столбце находится отрицательное число. Найдем частное от деления элемента b_i на элемент, находящийся в разрешающем столбце:

Для первой строки: $D_1 = 36 / 6 = 6$.

Для третьей строки: $D_2 = 10 / 1 = 10$.

Наименьший результат деления - в первой строке, значит именно эту строку мы выбираем в качестве разрешающей, т.е. переводить в неосновные (исключать из базиса) будем переменную x_3.

Ниже приведена симплекс-таблица с выделенными разрешающей строкой и столбцом (табл.2.10).

Далее перейдем к шагу 8 и осуществим пересчет элементов симплексной таблицы в соответствии с правилами, приводимыми выше. Результат пересчета представлен в табл. 2.11.

Таблица 2.10

Симплекс-таблица (третье базисное решение)
с выделенными разрешающей строкой и столбцом

Базис	**Переменные**					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	*0*	*0*	*1*	*-2*	*6*	*36*
x_1	*1*	*0*	*0*	*1/2*	*-3*	*6*
x_2	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*10*
c_j	*0*	*0*	*0*	*-1*	*2*	*-52*

Таким образом, в очередном (четвертом) базисном решении основными переменными являются: $x_1 = 24$, $x_2 = 4$, $x_5 = 6$. Неосновные переменные x_3 и x_4 равны нулю. Значение целевой функции для этого решения равно 64.

Вернемся к шагу 4. Рассмотрим последнюю строку таблицы 2.11. Положительных элементов в ней не осталось, следовательно, полученное решение является оптимальным.

Решение задачи найдено. Оно, что естественно, совпадает с решением, полученным для этой же задачи при помощи графического метода:

$$x_1^* = 24; \quad x_2^* = 4; \; f(\overline{x^*}) = 64.$$

Таблица 2.11

Симплекс-таблица для задачи о хоккейных клюшках
и шахматных наборах (четвертое базисное решение)

Базис	**Переменные**					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	*0*	*0*	*1/6*	*-1/3*	*1*	*6*
x_1	*1*	*0*	*1/2*	*-1/2*	*0*	*24*
x_2	*0*	*1*	*-1/6*	*1/3*	*0*	*4*
c_j	*0*	*0*	*-1/3*	*-1/3*	*0*	*-64*

На рисунке 2.2 приведена общая схема симплексного алгоритма, наглядно показывающая порядок его реализации.

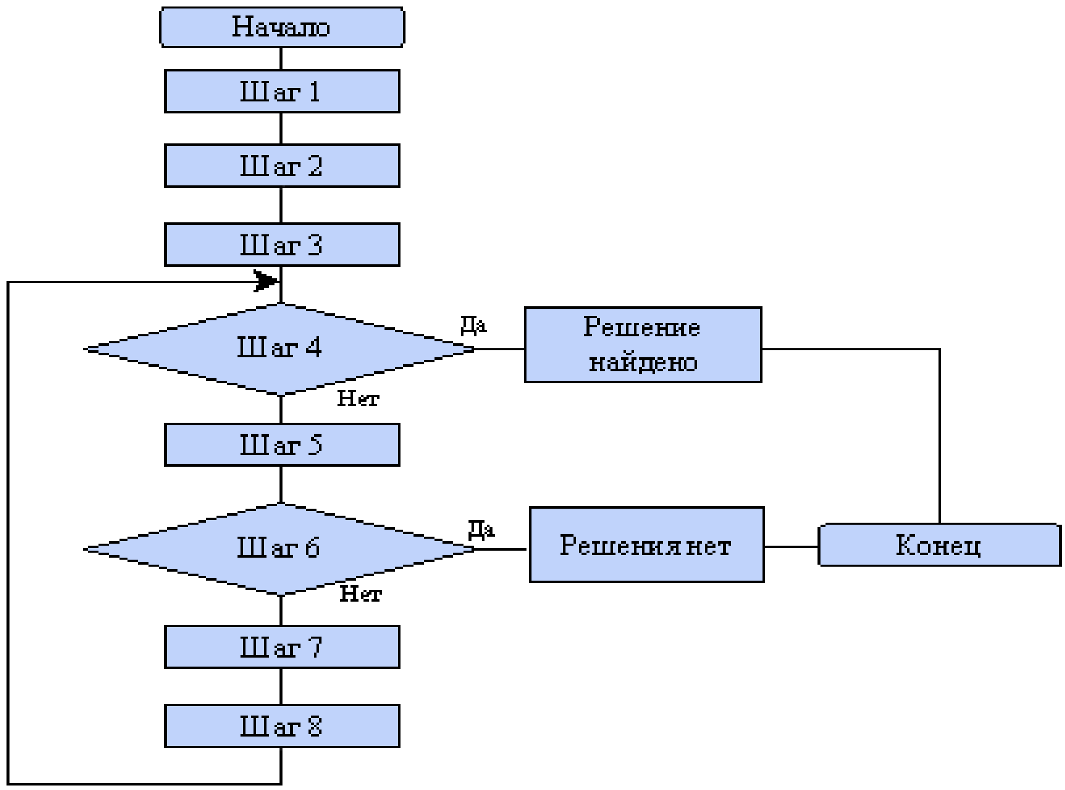


Рис. 2.2. Общая схема симплекс-метода

2.5. Двойственность в линейном программировании

Теория математического линейного программирования позволяет не только получать оптимальные планы с помощью эффективных вычислительных процедур, но и делать ряд экономически содержательных выводов, основанных на свойствах задачи, которая является двойственной по отношению к исходной ЗЛП.

Пусть в качестве исходной дана задача:

$$f(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = max;$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{2.10}$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}$$

Задача линейного программирования, двойственная задаче (2.10), будет иметь вид:

$$g(\bar{y}) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \to min;$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \le c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \le c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \le b_n \end{cases} \tag{2.11}$$
$$y_j \ge 0, i = \overline{1,m}$$

Можно сформулировать правила получения двойственной задачи линейного программирования из задачи исходной.

1. Если в исходной задаче ищется максимум целевой функции, то в двойственной ей - минимум.

2. Коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи.

3. В исходной ЗЛП все функциональные ограничения - неравенства вида «$\le$», а в задаче, двойственной ей, - неравенства вида «$\ge$».

4. Коэффициенты при переменных в системах ограничений взаимно двойственных задач описываются матрицами, транспонированными относительно друг друга.

5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой.

6. Условие неотрицательности переменных сохраняется в обеих задачах.

Связь между оптимальными планами взаимно двойственных задач устанавливают теоремы двойственности.

Теорема 1. Если одна из двойственных задач имеет конечный оптимум, то другая также имеет конечный оптимум, причем экстремальные значения целевых функций совпадают:

$$max f(\bar{x}) = f(\bar{x}^*) = min\, g(\bar{y}) = g(\bar{y}^*) \qquad (2.12)$$

Если целевая функция одной из двойственных задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы.

Теорема 2 (*о дополняющей нежёсткости*). Для того чтобы планы

$$\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \text{ и } \bar{y}^* = (y_{1,}^* y_2^*, \dots, y_m^*)$$

являлись оптимальными решениями необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0 \qquad (2.13)$$

$$y_j^*\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^* - b_j\right) = 0 \qquad (2.14)$$

Таким образом, если компонент оптимального плана x_j^* больше нуля, то при подстановке в соответствующее ограничение двойственной задачи оптимального плана $\bar{y}^*$ это ограничение обращается в верное равенство, и наоборот.

Теорема об оценках. Значения переменных y_i^* в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов bi в системе ограничений прямой задачи на величину целевой функции $f(\bar{x}^*)$:

$$y_i^* = \frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial b_i} \qquad (2.15)$$

Компоненты оптимального решения двойственной задачи y_i^* принято называть двойственными оценками. Часто употребляется также термин «объективно обусловленные оценки».

На свойствах двойственных оценок базируется экономико-математический анализ распределения ресурсов. В пределах устойчивости двойственных оценок имеют место свойства, рассмотренные ниже.

При описании свойств двойственных оценок будем пользоваться задачей о хоккейных клюшках и шахматных наборах для наглядной иллюстрации рассматриваемых положений.

Формулировка прямой (исходной) задачи:

$$f(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 120, \\ 2x_1 6x_2 \le 72, \\ x_2 \le 10; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Получим двойственную задачу.

$$g(\bar{y}) = 120y_1 + 72y_2 + 10y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 \ge 2, \\ 6y_1 + 6y_2 y_3 \ge 4, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0.$$

В результате решения получим следующие оптимальные планы:

$$\bar{x}^* = (24, 4); \qquad \bar{y}^* = (1/3, 1/3, 0).$$

Легко убедиться, что при подстановке оптимальных планов в целевые функции задач оба получаемых значения равны 64.

Рассмотрим свойства двойственных оценок.

Свойство 1. Оценки как мера дефицитности ресурсов. Двойственные оценки отражают сравнительную дефицитность факторов производства. Чем выше величина оценки y_i^*, тем выше дефицитность i-го ресурса. Факторы, получившие нулевые оценки, не являются дефицитными и не ограничивают производство.

В нашем примере нулевую оценку получил третий ресурс ($y_3^* = 0$), поэтому он не является дефицитным, т.е., с точки зрения задачи, фонд рабочего времени на участке С не ограничивает производство. Напротив, первый (участок А) и второй (участок В) ресурсы являются дефицитными, причем ограничивают производство в одинаковой степени ($y_1^* = y_2^* = 1/3$).

Последнее утверждение легко подтвердить, подставив x_1^* и x_2^* в ограничения исходной задачи:

$$\begin{cases} 4 \cdot 24 + 6 \cdot 4 = 120, \\ 2 \cdot 24 + 6 \cdot 4 = 72, \\ 4 < 10; \end{cases}$$

Откуда видно, что при реализации оптимального плана фонд рабочего времени участка С, действительно, расходуется не полностью.

Свойство 2. Оценки как мера влияния ограничений на значение целевой функции. Величина двойственной оценки какого-либо ресурса показывает, насколько возросло бы максимальное значение целевой функции, если бы объем данного ресурса увеличился на единицу. В связи с этим значение объективно обусловленной оценки иногда называют теневой ценой ресурса. Теневая цена - это стоимость единицы ресурса в оптимальном решении.

Однако нужно учитывать, что двойственные оценки позволяют измерить эффективность лишь незначительного изменения объема ресурсов. При значительных изменениях может быть получен новый оптимальный план и новые двойственные оценки.

Для нашего примера увеличение (уменьшение) фонда времени на участке А или В должно приводить к увеличению (уменьшению) максимальной прибыли на 1/3 у.е. Соответственно, например, при увеличении фонда времени участка А на 12 н/часов общая прибыль должна увеличиться на 4 у.е. (1/3·12).

Свойство 3. Оценки как инструмент определения эффективности отдельных хозяйственных решений. С помощью двойственных оценок можно определить выгодность выпуска новых изделий, эффективность новых технологических способов производства. При этом эффективным может считаться тот вариант производства, для которого сумма прибыли, недополученной из-за отвлечения дефицитных ресурсов, будет меньше прибыли получаемой. Разница между этими величинами (Δ_j) вычисляется как

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j, \quad j = \overline{1,n} \qquad (2.16)$$

В том случае, если $\Delta_j \le 0$, вариант производства является выгодным, если $\Delta_j > 0$ – вариант невыгоден.

Вернемся к нашему примеру. Пусть предприятие планирует выпуск нового вида изделий: бейсбольные биты. Для производства одной биты необходимо затратить 3 часа работы на участке А, 4 часа работы на участке В и 1 час работы на участке С. Прибыль, получаемая от продажи одной биты, составляет 3 у.е. Выгодно ли предприятию выпускать новую продукцию?

Для ответа на вопрос рассчитаем Δ_j по формуле (2.16):

$$\Delta_j = 3\cdot y_1^* + 4\cdot y_2^* + 1\cdot y_3^* - 3 = 3\cdot 1/3 + 4\cdot 1/3 + 1\cdot 0 - 3 = -2/3,$$

Получается, что $\Delta_j < 0$, значит производить бейсбольные биты выгодно.

Свойство 4. Оценки как мера относительной заменяемости ресурсов с точки зрения конечного эффекта.

Например, отношение y_i^*/y_k^* показывает, сколько единиц k-го ресурса может быть высвобождено при увеличении объема i-го ресурса на единицу, для того чтобы максимум целевой функции остался на прежнем уровне. Или наоборот, сколько единиц k-го ресурса необходимо дополнительно ввести при уменьшении на единицу объема i-го ресурса, если мы хотим, чтобы значение целевой функции не изменилось.

В нашем примере двойственные оценки первого и второго ресурсов равны. Это означает, что, например, при уменьшении фонда времени на участке А на 1 н/ч необходимо увеличить фонд времени на участке В на 1 н/ч, чтобы общая получаемая предприятием прибыль осталась неизменной.

Завершая рассмотрение вопроса, отметим, что применение теорем двойственности (а именно, соотношений (2.6 - 2.8)) позволяет, зная оптимальное решение одной из взаимно двойственных задач, без труда отыскать оптимальное решение другой задачи.

Проиллюстрируем это утверждение примером.

Для производства четырех видов изделий A_1, A_2, A_3 и A_4 завод должен использовать три вида сырья I, II и III. Запасы сырья на планируемый период составляют, соответственно, 1000, 600 и 150 единиц.

Технологические коэффициенты (расход каждого вида сырья на производство единицы каждого изделия) и прибыль от реализации единицы каждого изделия приведены в табл. 2.12.

Таблица 2.12

Исходные данные задачи о четырех видах изделий

Виды сырья	Технологические коэффициенты				Запасы сырья
	A_1	A_2	A_3	A_4	
I	5	1	0	2	1000
II	4	2	2	1	600
III	1	0	2	1	150
Прибыль от ре лизации	6	2	2,5	4	

Требуется, зная решение данной задачи, решить задачу, двойственную ей.

Сформулируем исходную ЗЛП.

$$f(\bar{x}) = 6x_1 + 2x_2 + 2{,}5x_3 + 4x_4 \rightarrow max;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + \cdots + 2x_4 \le 1000 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 600 \\ x_1 + \cdots + 2x_3 + x_4 \le 150; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Оптимальное решение данной задачи состоит в следующем (сам процесс решения здесь опускаем):

$$\bar{x}^* = (0,\ 225,\ 0,\ 150); \quad f(\bar{x}^*) = 1050.$$

Сформулируем двойственную задачу и решим ее, используя теоремы двойственности.

$$g(\bar{y}) = 1000\,y_1 + 600\,y_2 + 150\,y_3 \rightarrow min;$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 6, \\ y_1 + 2y_2 \geq 2, \\ 2y_2 + 2y_3 \geq 2{,}5, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 4. \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Подставим $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ в ограничения исходной задачи:

$$\begin{cases} 5 \cdot 0 + 225 + 2 \cdot 150 < 1000, \\ 4 \cdot 0 + 2 \cdot 225 + 2 \cdot 0 + 150 = 600, \\ 0 + 2 \cdot 0 + 150 = 150. \end{cases}$$

Следовательно, используя вторую теорему двойственности и первое свойство двойственных оценок, можем записать: $y_1^* = 0$.

Рассмотрим ограничения двойственной задачи. Каждое их них соответствует одной из переменных исходной задачи. Поскольку $x_2^* > 0$ и $x_4^* > 0$, то при подстановке в них оптимального плана $\bar{y}^*$ второе и четвертое ограничения двойственной задачи обращаются в верное равенство (такой вывод следует из соотношений (2.13-2.14)). Учитывая, что $y_1^* = 0$, можно записать систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2y_2 = 2, \\ y_2 + y_3 = 4. \end{cases}$$

Решая систему, получим: $y_2^* = 1, y_3^* = 3$

Полностью решение двойственной задачи запишется в виде:

$$\bar{y}^* = (0{,}1{,}3); \quad g(\bar{y}^*) = 1050.$$

2.6. Имитационное моделирование систем и процессов

Имитационное моделирование – распространенная разновидность аналогового моделирования, реализуемого с помощью набора математических инструментальных средств, специальных имитирующих компьютерных программ и технологий программирования, позволяющих посредством процессов-аналогов провести целенаправленное исследование структуры и функций реального сложного процесса в памяти компьютера в режиме имитации, выполнить оптимизацию некоторых его параметров [5].

Имитационной моделью называется специальный программный комплекс, позволяющий имитировать деятельность какого-либо сложного объекта. Он запускает в компьютере параллельные взаимодействующие вычислительные процессы, которые являются по своим временным параметрам (с точностью до масштабов времени и пространства) аналогами исследуемых процессов.

Следует отметить, что любое моделирование имеет в своей методологической основе элементы имитации реальности с помощью какой-либо символики (математики) или аналогов. Поэтому иногда имитационным моделированием стали называть целенаправленные серии многовариантных расчетов, выполняемых на компьютере с применением экономико-математических моделей и методов. Однако с точки зрения компьютерных технологий такое моделирование – это обычные вычисления, выполняемые с помощью расчетных программ или табличного процессора «*Excel*». Поэтому часто для этого вида моделирования используется синоним «*компьютерное моделирование*».

Имитационную модель нужно создавать. Для этого необходимо специальное программное обеспечение – *система моделирования*. Имитационная модель должна отражать большое число параметров, логику и закономерности поведения моделируемого объекта во времени *(временная динамика)* и в пространстве *(пространственная динамика)*. Моделирование объектов экономики связано с понятием *финансовой динамики* объекта. С точки зрения специалиста (экономиста-математика-программиста), *имитационное моделирование* контролируемого процесса или управляемого объекта – это высокоуровневая информационная технология, которая обеспечивает два вида действий, выполняемых с помощью компьютера: работы по созданию или модификации имитационной модели и эксплуатацию имитационной модели и интерпретацию результатов.

Имитационное моделирование экономических процессов обычно применяется в двух случаях:

1) для управления сложным бизнес-процессом, когда имитационная модель управляемого экономического объекта используется в качестве инструментального средства в контуре адаптивной системы управления, создаваемой на основе информационных (компьютерных) технологий;

2) при проведении экспериментов с дискретно-непрерывными моделями сложных экономических объектов для получения и отслеживания их динамики в экстренных ситуациях, связанных с рисками, натурное моделирование которых нежелательно или невозможно.

Можно выделить следующие типовые задачи, решаемые средствами имитационного моделирования при управлении экономическими объектами:

● моделирование процессов логистики для определения временных и стоимостных параметров;

● управление процессом реализации инвестиционного проекта на различных этапах его жизненного цикла с учетом возможных рисков и тактики выделения денежных сумм;

● анализ клиринговых процессов в работе сети кредитных организаций (в том числе применение к процессам взаимозачетов в условиях российской банковской системы);

● прогнозирование финансовых результатов деятельности предприятия на конкретный период времени (с анализом динамики сальдо на счетах);

● бизнес-реинжиниринг несостоятельного предприятия (изменение структуры и ресурсов предприятия-банкрота, после чего с помощью имитационной модели можно сделать прогноз основных финансовых результатов и дать рекомендации о целесообразности того или иного варианта реконструкции, инвестиций или кредитования производственной деятельности);

● оценка параметров надежности и задержек в централизованной экономической информационной системе с коллективным доступом (на примере системы продажи авиабилетов с учетом несовершенства физической организации баз данных и отказов оборудования);

● анализ эксплуатационных параметров распределенной многоуровневой ведомственной информационной управляющей системы с учетом неоднородной структуры, пропускной способности каналов связи и несовершенства физической организации распределенной базы данных в региональных центрах;

● анализ сетевой модели для проектов замены и наладки производственного оборудования с учетом возникновения неисправностей;

● анализ работы автотранспортного предприятия, занимающегося коммерческими перевозками грузов, с учетом специфики товарных и денежных потоков в регионе;

● расчет параметров надежности и задержек обработки информации в банковской информационной системе.

Приведенный перечень является неполным и охватывает те примеры использования имитационных моделей, которые описаны в литературе или применялись авторами на практике [4, 5]. Действительная область применения аппарата имитационного моделирования не имеет видимых ограничений.

Система имитационного моделирования, обеспечивающая создание моделей для решения перечисленных задач, должна обладать следующими свойствами:

1) возможностью применения имитационных программ совместно со специальными экономико-математическими моделями и методами, основанными на теории управления;

2) инструментальными методами проведения структурного анализа сложного экономического процесса;

3) способностью моделирования материальных, денежных и информационных процессов и потоков в рамках единой модели, в общем модельном времени;

4) возможностью введения режима постоянного уточнения при получении выходных данных (основных финансовых показателей, временных и пространственных характеристик, параметров рисков и др.) и проведении экстремального эксперимента.

Технология имитационного моделирования.

Имитационное моделирование реализуется посредством набора математических инструментальных средств, специальных компьютерных программ и приемов, позволяющих с помощью компьютера провести целенаправленное моделирование в режиме имитации структуры и функций сложного процесса и оптимизацию некоторых его параметров. Набор программных средств и приемов моделирования определяет специфику системы моделирования – специального программного обеспечения [5].

В отличие от других видов и способов математического моделирования с применением ЭВМ имитационное моделирование имеет свою специфику: запуск в компьютере взаимодействующих вычислительных процессов, которые являются по своим временным параметрам – с точностью до масштабов времени и пространства – аналогами исследуемых процессов.

Имитационное моделирование, как особая информационная технология, состоит из следующих основных этапов.

1. Структурный анализ процессов.

Проводится формализация структуры сложного реального процесса путем разложения его на подпроцессы, выполняющие определенные функции и имеющие взаимные функциональные связи согласно легенде, разработанной рабочей экспертной группой. Выявленные подпроцессы, в свою очередь, могут разделяться на другие функциональные подпроцессы. Структура общего моделируемого процесса может быть представлена в виде графа, имеющего иерархическую многослойную структуру. В результате появляется формализованное изображение имитационной модели в графическом виде.

Экономические процессы содержат подпроцессы, не имеющие физической основы и протекающие виртуально, так как оперируют с информацией, деньгами, логикой, законами и их обработкой, поэтому структурный анализ является эффективным этапом при моделировании экономических процессов.

На этом этапе описываются *экзогенные переменные* - это переменные, которые задаются вне модели, известные заранее. А так же описываются параметры (коэффициенты) уравнений модели и *эндогенные переменные,* т.е. те переменные, которые определяются в ходе расчетов по модели, а не задаются извне.

2. Формализованное описание модели.

Производится графическое изображение модели, функции, выполняемой каждым подпроцессом; описываются условия взаимодействия всех подпроцессов и особенности поведения моделируемого процесса (временная, пространственная, финансовая динамики) на специальном языке одним из способов:

● описание «вручную» на алгоритмическом языке, т.е. написание программы на языке программирования.

● автоматизированное описание с помощью компьютерного графического конструктора.

3. Построение модели. Обычно это трансляция и редактирование связей (сборка модели); режимы интерпретации и компиляция; верификация (калибровка) параметров, работа на тестовых примерах.

4. Проведение модельного эксперимента.

Проводится оптимизация определенных параметров реального процесса. Этому должен предшествовать процесс, который называется планирование эксперимента.

Концепция имитационного моделирования требует предварительного знакомства читателя с методом Монте-Карло, с методологией проведения проверок статистических гипотез, с устройством программных датчиков случайных (псевдослучайных) величин и с особенностями законов распределения случайных величин при моделировании экономических процессов, которые не рассматриваются в типовых программах дисциплины «Теория вероятностей» [5].

Кроме того, необходимо рассмотреть специальные стохастические сетевые модели, которые дают представление о временных диаграммах специальных имитационных процессов при выполнении программной модели.

Метод Монте-Карло - способ исследования поведения вероятностных систем экономических, технических и т.п. в условиях, когда неизвестны в полной мере внутренние взаимодействия в этих системах.

Создателями метода статистических испытаний Монте-Карло считают американских математиков Д. Неймана и С. Улама, которые предложили широко использовать аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач с помощью ЭВМ. Данный метод был назван так в честь города в княжестве Монако из-за рулетки, простейшего генератора случайных чисел.

Первоначально метод Монте-Карло использовался главным образом для решения задач нейтронной физики, где традиционные численные методы оказались малопригодными. Затем его влияние распространилось на широкий класс задач статистической физики, очень разных по своему содержанию. К разделам науки, где все в большей мере используется метод Монте-Карло, следует отнести задачи теории массового обслуживания, задачи теории игр и математической экономики, задачи теории передачи сообщений при наличии помех и ряд других.

Метод Монте-Карло можно определить как метод моделирования случайной величины с целью вычисления характеристик их распределений.

Суть метода состоит в том, что результат испытаний зависит от некоторой случайной величины, распределенной по заданному закону. Для этого составляется программа осуществления одного случайного испытания. Проведя серию испытаний, получают статистическую *выборку*. Полученные данные обрабатываются и представляются в виде численных оценок интересующих исследователя величин (характеристик системы). Число испытаний должно быть достаточно велико, поэтому метод существенно опирается на возможности компьютера.

Теоретической основой метода Монте-Карло являются предельные теоремы теории вероятностей. Они гарантируют высокое качество статистических оценок при весьма большом числе испытаний. Метод статистических испытаний применим для исследования как стохастических, так и детерминированных систем. Однако практическая реализация метода Монте-Карло невозможна без использования компьютера.

Можно проиллюстрировать метод статистических испытаний на простейшем примере [1, 5]: вычисление числа $\boldsymbol{\pi}$ как отношения площади 1/4 круга к площади всей картинки путем разбрасывания случайным образом точек по всему рисунку. Затем считается отношение попавших в круг точек ко всем точкам, и по этому отношению приблизительно определяется отношение площадей. Увеличением числа вбрасываемых точек можно более точно определить площадь круга, но это также ведет и к увеличению времени вычислений.

Точность вычислений сильно зависит от качества используемого генератора псевдослучайных чисел. Другими словами, точность тем выше, чем более равномерно случайные точки распределяются по единичному квадрату

$$\pi \approx 4S_{кр} / S_{кв} . \qquad (2.17)$$

Подсчитаем число точек внутри квадрата и внутри четверти круга. Очевидно, что их отношение будет приближенно равно отношению площадей этих фигур, так как попадание точек в различные места чертежа равновероятно. Пусть $N_{кр}$ - число точек в круге, $N_{кв}$ –число точек в квадрате , тогда

$$\pi \approx 4N_{кр} / N_{кв} \qquad (2.18)$$

Каждой точке поставим в соответствие два случайных числа, характеризующих её положение вдоль осей Ox и Oy (см. рис. 2.3). Если окажется, что для точки (x_i, y_i) выполняется неравенство $x_i^2 + y_i^2 > 1$, то, значит, она лежит вне круга. Если $x_i^2 + y_i^2 \le 1$, то точка лежит внутри круга.

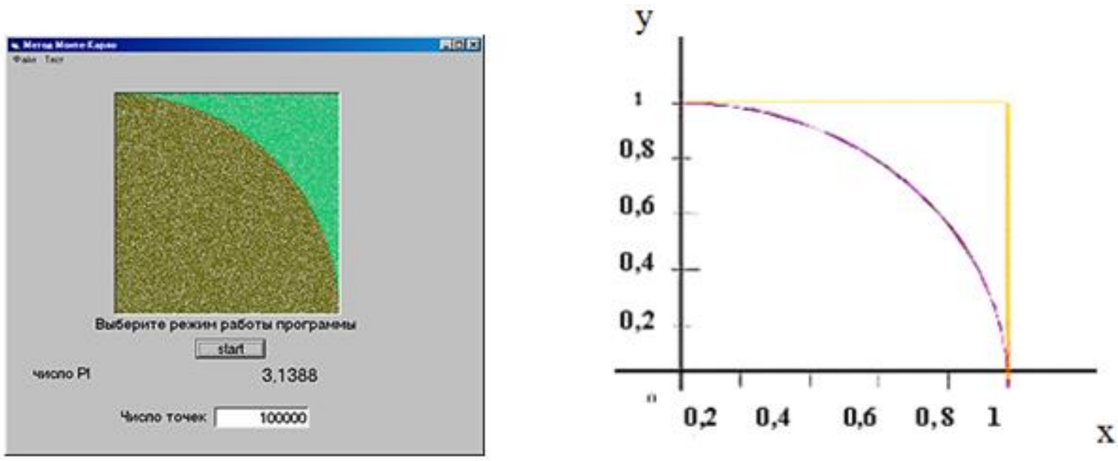


Рис. 2.3. Иллюстрация метода статистических испытаний

Для подсчета значения π воспользуемся формулой (2.18). Ошибка вычислений по этому методу, как правило, пропорциональна $\sqrt{D/N}$, где D – некоторая постоянная, а N – число испытаний. В этом примере $N = N_{кв}$. Из этой формулы видно, что для того, чтобы уменьшить ошибку в 10 раз, т.е. получить ещё один верный десятичный знак, нужно увеличить N, т.е. объём работы, в 100 раз (см. табл. 2.).

Таблица 2.13

Результаты испытаний определения погрешности

Число бросаний	Точное значение	Программное значение	Погрешность
1 000	0,25	3,1632	0,021607346
100 000	0,25	3,1388	0,002767346

С имитацией случайных элементов, примерами и разновидностями имитационного моделирования экономических процессов более подробно можно ознакомиться в работе [5].

3. МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ

В настоящее время модели данного класса регулярно строятся во многих странах мира. С их помощью решаются задачи анализа, планирования и прогнозирования развития экономических систем. Регулирование экономического развития, расчеты по составлению долгосрочных планов, расчеты по оптимизации внешней торговли, составление межрегиональных балансов, расчеты по ценообразованию - вот далеко не полный перечень задач, в решении которых могут быть применены матричные модели.

Наиболее типичным примером матричных моделей считается экономико-математическая модель межотраслевого баланса (модель В.В. Леонтьева). Именно за разработку и применение этого метода к решению важных экономических проблем в 1973 г. Василий Васильевич Леонтьев был удостоен Нобелевской премии в области экономики. В западной литературе модели данного класса чаще всего именуются как метод «затраты-выпуск».

3.1. Общая структура межотраслевого баланса

Центральным элементом матричных моделей является так называемый межотраслевой баланс. Он представляет собой таблицу, характеризующую связи между различными отраслями экономики страны. Общая структура межотраслевого баланса представлена в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Общая структура межотраслевого баланса

Отрасли	1	2	…	j	…	n	Итого	Конечная продукция	Валовая продукция
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	y_2	X_2
…								…	…
i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	y_i	X_i
…								…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	y_n	X_n
Итого	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$	…	$\sum_{i=1}^{n} x_{in}$	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} X_i$
Условно чистая продукция	V_1	V_2	…	V_j	…	V_n	$\sum_{j=1}^{n} V_j$		
Валовая продукция	X_1	X_2	…	X_j	…	X_n	$\sum_{j=1}^{n} X_j$		

Производственная сфера экономики представлена в балансе в виде совокупности n отраслей.

Баланс состоит из четырех разделов (квадрантов).

Первый квадрант представляет собой матрицу, состоящую из (n+1) строки и (n+1) столбца. Этот раздел является важнейшей частью баланса, поскольку именно здесь содержится информация о межотраслевых связях. Величина x_{ij}, находящаяся на пересечении i-й строки и j-го столбца, показывает, сколько продукции i-й отрасли было использовано в процессе материального производства j-й отрасли. Величины x_{ij} характеризуют межотраслевые поставки сырья, материалов, топлива и энергии, обусловленные производственной деятельностью.

В i-й строке величины x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ij}, ..., x_{in} описывают распределение продукции i-й отрасли как средства производства для других отраслей.

Величины x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{ij}, ..., x_{nj} j-го столбца в этом случае будут описывать потребление j-й отраслью сырья, материалов, топлива и энергии на производственные нужды.

Таким образом, первый раздел баланса дает общую картину распределения продукции на текущее производственное потребление всех n отраслей материального производства.

В зависимости от того, в каких единицах измеряются потоки продукции в балансе, существуют различные его варианты: в натуральном выражении, в денежном (стоимостном) выражении, в натурально-стоимостном, в трудовых измерителях. Мы рассмотрим баланс в стоимостном выражении, в котором потоки продукции измеряются на основе стоимости произведенной продукции в некоторых фиксированных ценах. Поскольку в этом случае величины xij отражают стоимость продукции, т.е. измеряются в одних и тех же единицах, их можно просуммировать.

Величина $\sum_{j=}^{n} x_{ij}$ представляет собой сумму всех поставок i-й отрасли другим отраслям.

Сумма по столбцу $\sum_{i=1}^{n} = x_{ij}$ характеризует производственные затраты j-й отрасли на приобретение продукции других отраслей.

На пересечении (n + 1)-й строки и (n + 1)-го столбца находится величина $\sum_{i=1}^{n} = \sum_{j=1}^{n} = x_{ij}$ - так называемый промежуточный продукт экономики.

Второй раздел посвящен конечному продукту. Столбец конечного продукта – (n + 2)-й столбец. Величина y_i – потребление продукции i-й отрасли, не идущее на текущие производственные нужды. В конечную продукцию, как правило, включаются: накопление, возмещение выбытия основных средств, прирост запасов, личное потребление населения, расходы на содержание государственного аппарата, здравоохранение, оборону и т.д., а также сальдо экспорта и импорта.

Ко второму разделу относится также столбец валовых выпусков (X_i). В пределах первого и второго разделов справедливо соотношение:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij+} y_i, i = \overline{1, n} \tag{3.1}$$

Третий квадрант межотраслевого баланса отражает стоимостную структуру валового продукта отраслей. В (n+2)-й строке таблицы отражена условно чистая продукция (V_j), представляющая собой разницу между величиной валовой продукции отрасли и суммарными затратами отрасли:

$$V_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, j = \overline{1, n} \tag{3.2}$$

Условно чистая продукция подразделяется на амортизационные отчисления и чистую продукцию отрасли. Важнейшими составляющими чистой продукции отрасли являются заработная плата, прибыль и налоги.

Можно показать, что суммарный конечный продукт равен суммарной условно чистой продукции ($\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} V_j$). Для этого возьмём выражения (3.1) и (3.2) и просуммируем: первое равенство по i, а второе – по j:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} V_j$$

Левые части выражений равны, значит, равны и правые:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} V_j$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} V_j$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, в третьем разделе также фигурирует конечный продукт, но если во втором разделе он разбивается на величины y_i, характеризующие структуру потребления, то в третьем разделе величины V_j показывают, в каких отраслях произведена стоимость конечного продукта.

Четвертый раздел располагается под вторым. Он характеризует перераспределительные отношения в экономике, осуществляемые через финансово-кредитную систему. В плановых расчетах четвертый раздел, как правило, не используется, и поэтому в пределах нашего курса рассматриваться не будет.

Итак, межотраслевой баланс – это способ представления статистической информации об экономике страны. Он строится на основе агрегирования результатов деятельности отдельных предприятий. Такой баланс называют отчетным. Кроме этого строятся плановые балансы, предназначенные для разработки сбалансированных планов развития экономики.

3.2. Статическая межотраслевая модель

Статистические межотраслевые модели используются для разработки планов выпуска и потребления продукции и основываются на соотношениях межотраслевого баланса.

При построении модели делают следующие предположения:

1) все продукты, производимые одной отраслью, однородны и рассматриваются как единое целое, т.е. фактически предполагается, что каждая отрасль производит один продукт;

2) в каждой отрасли имеется единственная технология производства;

3) нормы производственных затрат не зависят от объёма выпускаемой продукции;

4) не допускается замещение одного сырья другим.

В действительности эти предположения, конечно, не выполняются. Даже на отдельном предприятии обычно выпускаются различные виды продукции, используются различные технологии, удельные затраты зависят от объема выпуска и в тех или иных пределах допускается замена одного сырья другим.

Следовательно, эти предположения тем более неверны для отрасли. Однако такие модели получили широкое распространение и, как показала практика, они вполне адекватны и применимы для составления планов выпуска продукции.

При этих предположениях величина x_{ij} может быть представлена следующим образом:

$$x_{ij} = a_{ij}X_j; i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n} \quad (3.3)$$

Величина a_{ij} называется коэффициентом прямых материальных затрат. Она показывает, какое количество продукции i-й отрасли идет на производство единицы продукции j-й отрасли. Коэффициенты a_{ij} считаются в межотраслевой модели постоянными.

Подставляя выражение (3.3) в формулу (3.1), получим:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + y_i, i = \overline{1,n} \quad (3.4)$$

Это соотношение можно записать в матричном виде:

$$X = AX + Y, \quad (3.5)$$

где $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ - вектор валовых выпусков;

$Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ - вектор конечного продукта;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
.

А - матрица коэффициентов прямых материальных затрат.

Коэффициенты прямых материальных затрат являются основными параметрами статической межотраслевой модели. Их значения могут быть получены двумя путями:

1) статистически; коэффициенты определяются на основе анализа отчётных балансов за прошлые годы; их неизменность во времени определяется подходящим выбором отраслей;

2) нормативно; предполагается, что отрасль состоит из отдельных производств, для которых уже разработаны нормативы затрат; на их основе рассчитываются среднеотраслевые коэффициенты.

Выражение (3.5) принято называть балансом распределения продукции. Его можно использовать для анализа и планирования структуры экономики. Если известны коэффициенты прямых материальных затрат, то, задав конечный продукт по каждой отрасли, можно определить необходимые валовые выпуски отраслей. В этом заложена основная идея использования матричных моделей для планирования производства.

Преобразуем выражение (3.5):

$$\begin{gathered} X - AX = Y, \\ X\,(E - A) = Y, \\ X = (E - A)\text{- }1Y, \end{gathered} \tag{3.6}$$

где E - единичная матрица.

До начала планирования следует выяснить, существует ли матрица, обратная матрице (Е-А), и не будут ли получены отрицательные значения выпуска по отраслям.

Установим некоторые свойства коэффициентов прямых материальных затрат.

Не отрицательность: $a_{ij} \geq 0, , j = \overline{1,n}\ , i = \overline{1,n}$. Это утверждение следует из не отрицательности величин x_{ij} и положительности валовых выпусков X_j.

2. Сумма элементов матрицы А по любому из столбцов меньше единицы: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1\ , i = \overline{1,n}$.

Доказать это утверждение несложно.

Для любой отрасли условно чистая продукция есть величина положительная, поскольку включает в себя заработную плату, амортизацию, прибыль и т.д., т.е. V_j >0. Поэтому, используя соотношение (3.2), можно записать: $X_j > \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$ откуда безусловно следует: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$, т.е. утверждение доказано.

Можно показать, что при выполнении этих двух условий матрица В = (Е – А) – 1 существует и если ее элементы неотрицательны. Говорят, что в этом случае матрица прямых затрат А является продуктивной.

Перепишем формулу (3.6):

$$X = BY, \tag{3.7}$$

Матрица В носит название матрицы полных материальных затрат, а ее элементы b_{ij} называют коэффициентами полных материальных затрат. Коэффициент b_{ij} показывает, каков должен быть валовый выпуск i-й отрасли для того, чтобы обеспечить выпуск единицы конечного продукта j-й отрасли.

Можно показать, что

$$B = E + A + A_2 + A_3 + \dots \tag{3.8}$$

Умножим обе части на *(E - A)*:

$$B(E - A) = (E + A + A_2 + A_3 + \dots)(E - A),$$
$$B(E - A) = E + A + A_2 + A_3 + ..- A - A_2 - A_3 - \dots,$$
$$B(E - A) = E,$$
$$B = E / (E - A),$$
$$B = (E - A)\text{-}1.$$

Из соотношения (3.8) следует $b_{ij} \geq a_{ij}$. Таким образом, коэффициент полных материальных затрат b_{ij}, описывающий потребность в выпуске продукции i-й отрасли в расчете на единицу конечного продукта j-й отрасли, не меньше коэффициента прямых материальных затрат a_{ij}, рассчитываемого на единицу валового выпуска. Кроме того, из соотношения (3.8) для диагональных элементов матрицы В следует: $b_{ii} \geq 1$.

Взаимосвязь коэффициентов прямых и полных материальных затрат проще всего проследить на примере: пусть единицей выпуска хлебопекарной промышленности является хлеб (рис. 3.1).

Полные затраты электроэнергии для нашего примера складываются из прямых затрат и косвенных затрат всех уровней. Косвенные затраты высоких уровней являются незначительными и при практических расчетах ими можно пренебречь.

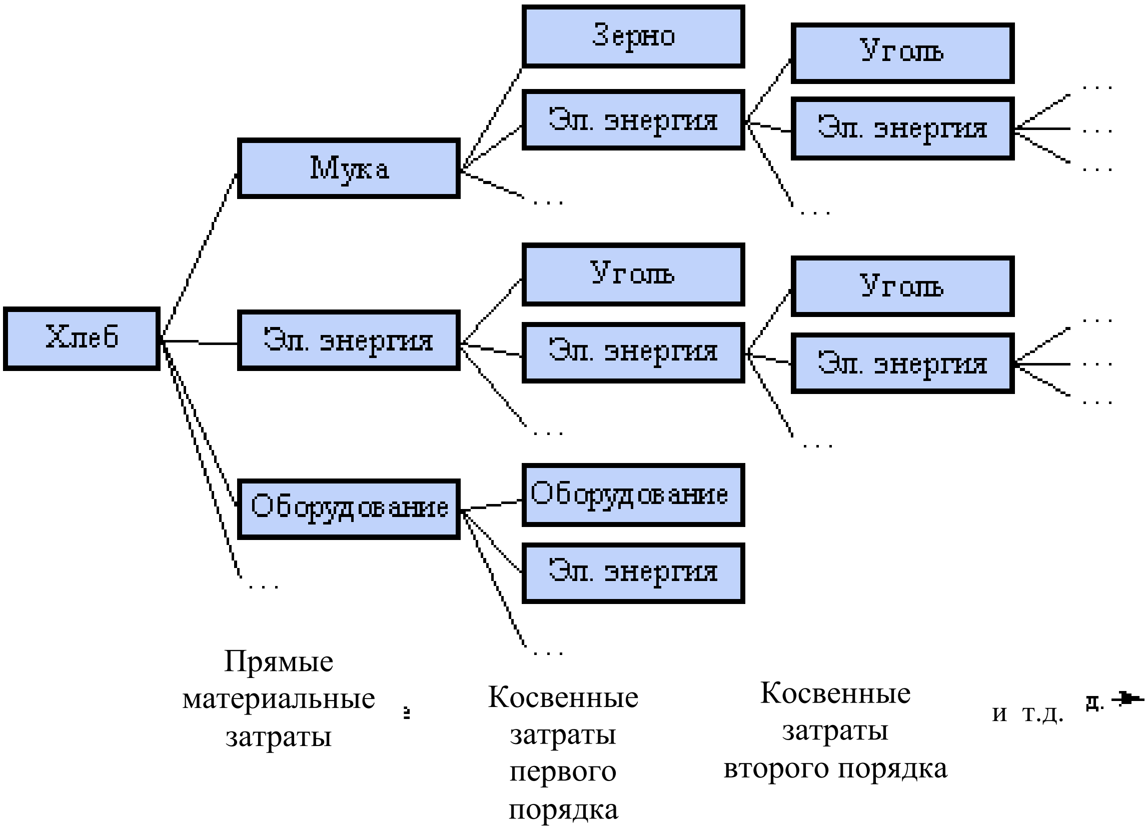


Рис. 3.1. Связь коэффициентов прямых и полных материальных затрат

3.3. Модель межотраслевого баланса затрат труда

Предполагается, что труд выражается в единицах труда одинаковой степени сложности. Обозначим затраты труда в производстве j-го продукта через L_j, объем выпущенной продукции, как и прежде, X_j. Тогда коэффициент прямых затрат труда:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j} \tag{3.9}$$

Определим полные затраты труда, как сумму прямых затрат живого труда и затрат овеществленного труда, перенесенного на продукт через израсходованные средства производства.

Формирование полных затрат труда в модели происходит по схеме, представленной на рис. 3.2.

Таким образом: $T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i + t_j, j = \overline{1, n}$.

Иначе, если известны коэффициенты полных материальных затрат b_{ij}, можно записать:

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} t_i, j = \overline{1, n}. \tag{3.10}$$

$$
\begin{array}{cccc}
a_{11}T_1 & a_{12}T_1 & \dots & a_{1n}T_1 \\
a_{21}T_2 & a_{22}T_2 & \dots & a_{2n}T_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1}T_n & a_{n2}T_n & \dots & a_{nn}T_n \\
\hline
t_1 & t_2 & \dots & t_n \\
\hline
T_1 & T_2 & \dots & T_n
\end{array}
\Bigg\downarrow
$$

Рис. 3.2. Порядок формирования полных затрат труда:
T_j- полные затраты труда на единицу j-го продукта;
tj - прямые затраты труда на единицу j-го продукта;
$a_{ij}T_i$- затраты овеществленного труда, перенесенного на j-й продукт через i-е средство производства.

Более компактно соотношение можно записать в матричном виде:

$$T = t\,B, \tag{3.11}$$

где $T = (T_1, T_2, ..., T_n)$ – вектор-строка коэффициентов полных затрат труда;
$t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ – вектор-строка коэффициентов прямых затрат труда.

Аналогично трудовым затратам в межотраслевой модели могут быть учтены показатели фондоёмкости изделий.

Василий Леонтьев, характеризуя значение балансовых моделей, писал: «Чтобы прогнозировать развитие экономики, нужен системный подход. Экономика каждой страны – это большая система, в которой много различных отраслей, и каждая из них что-то производит – промышленную продукцию, услуги и т.д., которые предлагаются другим отраслям. Каждое звено, компонент системы может существовать только потому, что получает что-то от других. Для производства каждого вида продукции нужно напрямую использовать большое количество других товаров, а еще больше – опосредованно.

Мы изучаем одну страну, беря в расчет 600-700 отдельных отраслей, японцы доходят до 2000»[6].

4. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Товарно-материальный запас – это запас какого-либо ресурса или предметов, используемых в организации.

С точки зрения практики проблема управления запасами является чрезвычайно серьезной. Потери, которые несут предприятия (особенно промышленные) вследствие нерационального управления запасами, очень велики. Плохо, когда запас мал, недостаточен. Это может привести к нарушению ритмичности производства, росту себестоимости продукции, срыву сроков выполнения работ по договорам, потере прибыли. Однако же крайне нежелательной является и ситуация, когда запас чрезмерно велик. В этом случае происходит «замораживание» оборотных средств организации. В результате те деньги, которые могли бы «работать», приносить доход покоятся на складах в виде запасов сырья, материалов, комплектующих.

Для эффективного решения проблем, связанных с управлением товарно-материальными запасами требуется применение соответствующих методов. Такие методы существуют, однако, к сожалению, на практике (особенно в России) они пока не находят должного распространения.

Очень показательным является высказывание одного из зарубежных исследователей: «...Слишком многие предприятия, к сожалению, управляют запасами совершенно неудовлетворительно; это говорит о том, что руководство не осознает всей важности материально-технических запасов производства. Но еще чаще бывает, что осознание проблемы существует. Не хватает понимания того, что надо делать и как это делать» [6].

Итак, управление запасами на рациональной основе – весьма актуальная задача. Определяющее значение при построении системы управления запасами имеет характер потребности в хранимом продукте.

4.1. Спрос и теория управления запасами

Основная особенность, определяющая используемые методы планирования и контроля запасов, – характер спроса на эти запасы. Различают зависимый и независимый спрос. Предметы, пользующиеся зависимым спросом, как правило, представляют собой подузлы и комплектующие, использующиеся в производстве конечного продукта.

Спрос (т.е. использование) на подузлы и комплектующие определяется объемом производства готовых изделий. Классическим примером здесь является потребность в колесах для выпускаемых автомобилей. Если для каждой машины требуется пять колес, то количество колес, требующихся для производства партии автомобилей, является простой функцией от объема этой партии. Например, для 200 машин требуется 1000 (200 · 5) колес.

Предметы с независимым спросом - это, чаще всего, готовые изделия, конечная продукция. Обычно готовый продукт продают (или отгружают) заказчику - в производстве какого-либо другого изделия она не участвует. В этом случае, как правило, невозможно точно определить потребность в товаре на какой-либо период времени, так как в спросе обычно присутствует элемент случайности.

Таким образом, при независимом спросе большую роль в управлении запасами играет прогнозирование, в то время как для зависимого спроса потребность в запасах определяется, исходя из производственного плана.

В данном разделе будут рассмотрены модели, применяемые для анализа ситуаций с независимым спросом. Для регулирования запасов в случае зависимого спроса применяются несколько иные подходы. Это так называемые логистические концепции управления движением материальных ценностей, например, «MRP», «DRP», «Just-in-time» и другие. Соответствующие методы рассматриваются обычно в рамках дисциплин «логистика», «производственный менеджмент».

Теория управления запасами объединяет в себе методы анализа задач регулирования запасов продукта при независимом спросе на этот продукт. В задачах такого рода необходимо найти рациональное количество запаса, учитывая, что потери возникают как из-за неудовлетворенного спроса, так и из-за того, что продукт хранится на складе.

Проблема управления запасами возникает при рассмотрении разнообразных экономических объектов. Широко распространены задачи управления запасами при анализе розничной торговли. В этом случае рассматриваются запасы некоторого продукта в магазине. Обычно спрос считается случайной величиной с заданным распределением. Запас пополняется за счет доставки товара с оптовой базы по заявке магазина, причем время доставки может быть фиксированным или же является случайной величиной. Перед управляющим встает вопрос: когда подавать заявку на пополнение запаса и какое количество товара требовать в заявке? На подобные вопросы отвечает теория управления запасами [7].

Управлять запасами необходимо на производственных объектах и там, где нужно определять рациональный уровень запасов сырья, инструментов и т.п. Чрезмерный запас в этом случае приводит к нерациональному использованию оборотных средств, требует значительных затрат на хранение и уход за ним. С другой стороны, нехватка сырья, материалов или инструментов вызывает перебои в производстве. Поэтому установление рационального количества запаса является средством, позволяющим, с одной стороны, ликвидировать ненужные запасы, а с другой – обеспечить ритмичность производства.

Управление запасами заключается в установлении моментов и объемов заказов на их восполнение.

Совокупность правил, по которым принимаются такие решения, называется стратегией (системой) управления запасами.

Оптимальной стратегией считается та, которая обеспечивает минимум затрат по доведению продукции до потребителей.

Нахождение оптимальных стратегий составляет предмет теории оптимального управления запасами.

4.2. Основные стратегии управления запасами

Любая стратегия регулирования запасов призвана отвечать на два основных вопроса: когда заказывать очередную партию продукции и сколько товара заказать?

Выделяют две основные стратегии регулирования запасов:

1) система с фиксированным размером заказа;

2) система с фиксированной периодичностью заказа.

Система с фиксированным размером заказа предполагает, что размер поступающих партий - величина постоянная, а очередные поставки осуществляются через разные интервалы времени. Заказ на поставку партии делается при уменьшении размера запаса до заранее установленного критического уровня, называемого «точкой заказа» (в зарубежной литературе используется аббревиатура ROP –«Reorder Point»). Таким образом, интервалы между поставками зависят от интенсивности потребления продукта.

Ситуацию иллюстрирует рис. 4.1, на котором обозначены:

Z (t) – величина запаса продукции на складе;

S – «точка заказа» ROP;

q = постоянная величина (const) – объем доставляемой партии;

$t_1' - t_1, t_2' - t_2, t_3' - t_3$ продолжительность заготовительного периода.

Регулируемыми параметрами в такой системе являются «точка заказа» (S, ROP) и объем заказа (q, ROQ – «Reorder Quantity»).

Интервал времени между подачей заявки и поступлением партии на склад называется заготовительным периодом. В модели продолжительность заготовительного периода может считаться постоянной либо быть случайной величиной с заданным распределением.

В качестве недостатка первой стратегии обычно называется необходимость регулярного учета материальных ценностей на складе, с тем, чтобы не упустить момент наступления «точки заказа».

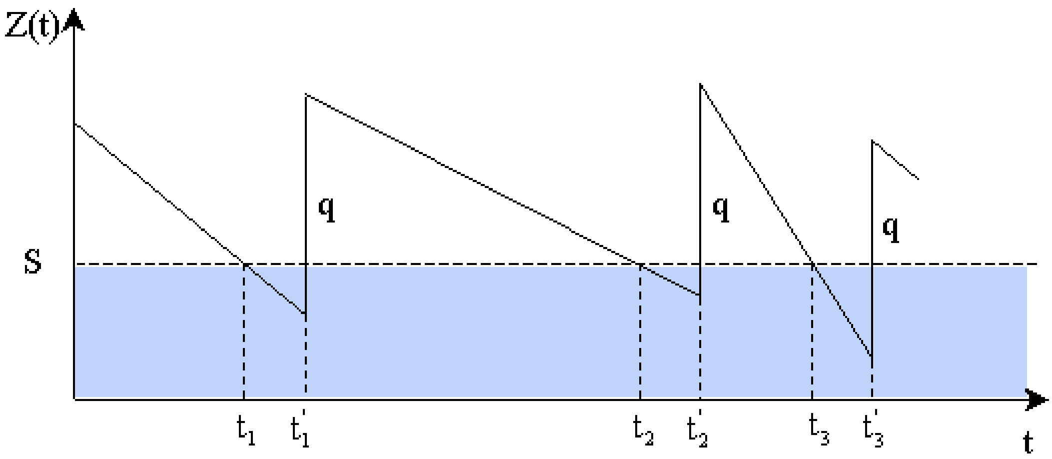


Рис. 4.1. Движение запаса продукции при использовании стратегии
с фиксированным размером заказа

Стратегия с фиксированным размером более подходит для ответственных, важных материалов, поскольку предусматривает более жесткий контроль за состоянием запасов, следовательно может быть обеспечена более быстрая реакция на угрозу исчерпания запаса.

Система с фиксированной периодичностью заказа. В данном случае продукция заказывается через равные промежутки времени, а размер запаса регулируется за счет изменения объема партии. Объем партии принимается равным разности между фиксированным максимальным уровнем, до которого производится пополнение запаса, и фактическим его размером в момент заказа.

Ситуацию иллюстрирует рис. 4.2, на котором обозначены:

Max – максимальный (плановый) уровень;

l – интервал между заказами (планируемый период).

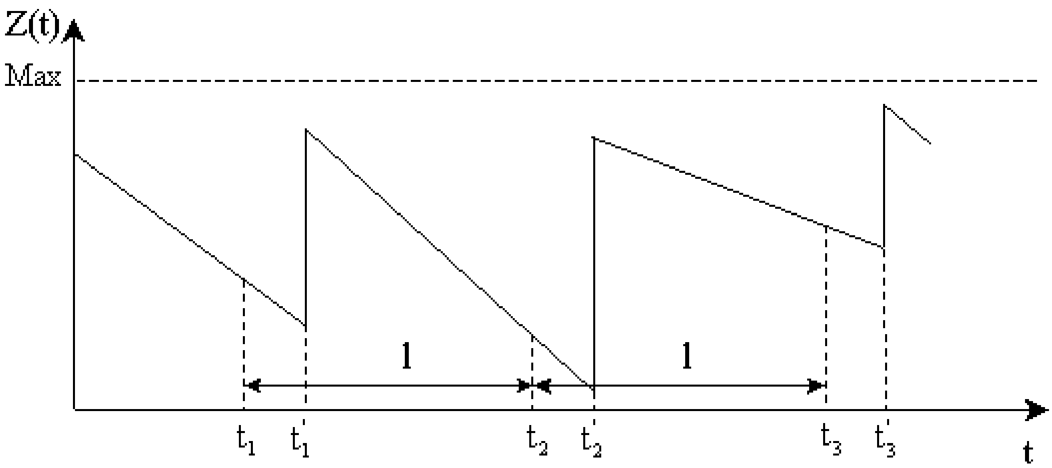


Рис. 4.2. Движение запаса продукции при использовании стратегии
с фиксированной периодичностью заказа

Регулируемыми параметрами в такой системе являются: максимальный (плановый) уровень (Max) и интервал времени между двумя заказами (l), называемый также планируемым периодом.

Достоинство такой системы - отсутствие необходимости регулярного учета материалов. Недостатки: иногда приходится делать заказ на незначительное количество продукции, а при непредвиденно интенсивном потреблении возможно исчерпание запаса до наступления очередного момента заказа.

На рис. 4.3 подробно и наглядно показан порядок функционирования двух основных стратегий регулирования запасов.

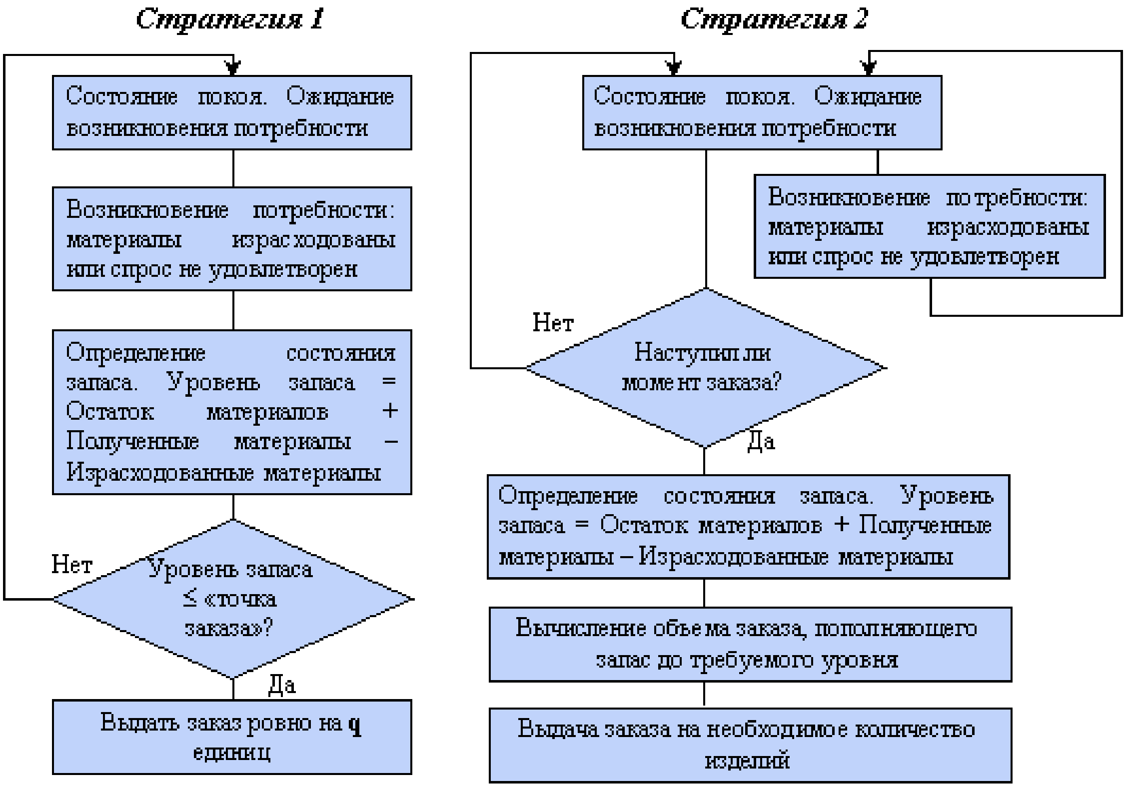


Рис. 4.3. Порядок функционирования основных стратегий управления запасами

4.3. Модификации основных стратегий управления запасами

Стратегии управления запасами применяются для улучшения характеристик базовых стратегий.

Система с фиктивным уровнем запаса. Является модификацией первой из основных стратегий. Используется в ситуации, когда интенсивность спроса является случайной величиной или продолжительность заготовительного периода является случайной величиной, или оба эти параметра являются случайными величинами. При таком положении вещей возможна ситуация, когда по прибытии заказанного количества продукции на склад уровень запаса все равно окажется ниже «точки заказа», т.е. сразу придется делать новый заказ. Но зачем же ждать прихода предыдущей партии, если необходимость скорого заказа следующей можно предсказать?

При использовании данной стратегии в качестве индикатора, используемого для определения момента заказа, применяется фиктивный уровень запаса - *Y(t).* Он представляет собой сумму наличного запаса на складе и количества продукции, находящейся в процессе доставки. Стратегия заключается в следующем: при достижении фиктивным уровнем запаса *Y(t)* «точки заказа» *S* осуществляется новый заказ.

Ситуацию иллюстрирует рис. 4.4, на котором обозначены:

Y(t) – пунктирная линия, фиктивный уровень запаса;

Z(t) – сплошная линия, реальный уровень запаса на складе;

θ– продолжительность заготовительного периода.

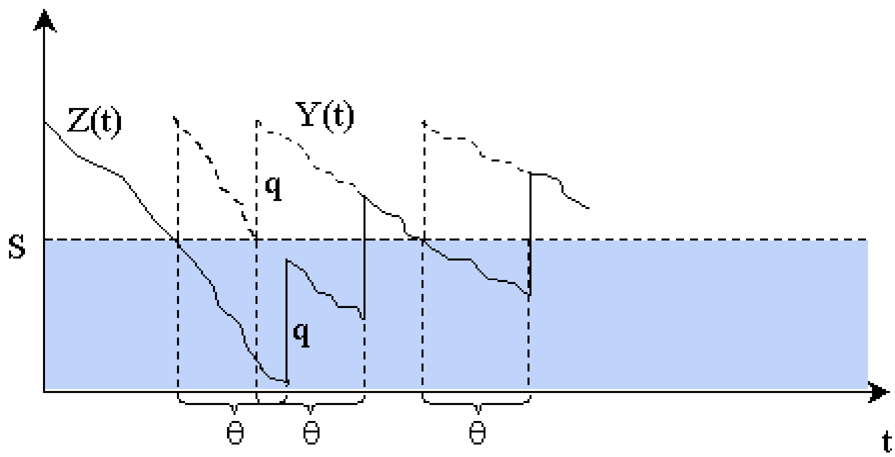


Рис. 4.4. Движение запаса продукции при использовании стратегии с фиктивным уровнем запаса

Система с фиксированной периодичностью и двумя фиксированными уровнями. Является модификацией второй из основных стратегий. Здесь кроме верхнего максимального уровня запаса, устанавливается также минимальный. Если размер запаса снижается до минимального уровня раньше наступления момента очередного заказа, то делается внеочередной заказ. В остальное время данная система функционирует как система с фиксированной периодичностью заказа. Движение запаса продукции при использовании стратегии с фиксированной периодичностью и двумя фиксированными уровнями иллюстрирует рис. 4.5.

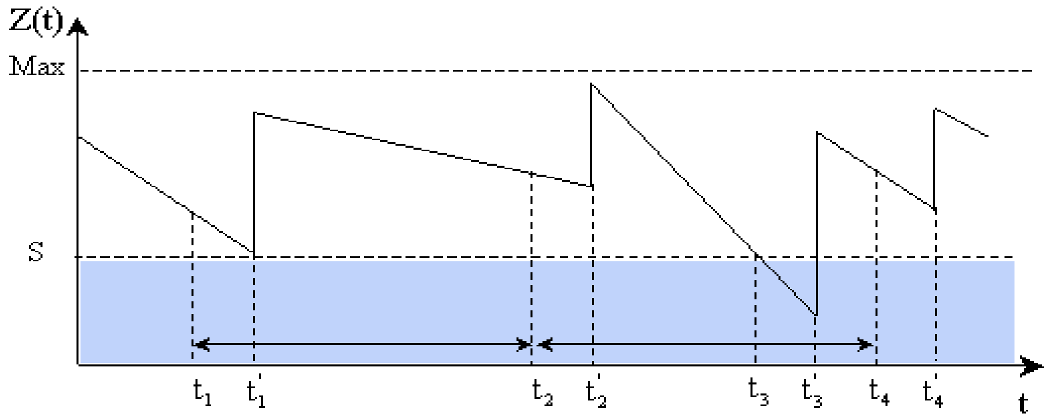


Рис. 4.5. Движение запаса продукции при использовании стратегии
с фиксированной периодичностью и двумя фиксированными уровнями

Достоинством стратегии является исключение возможности нехватки материалов. Необходимость вести регулярное наблюдение за уровнем запасов может быть указана в качестве недостатка.

4.4. Целевые функции моделей управления запасами

За критерий оптимальности стратегии принимается минимум суммарных расходов, связанных с образованием и хранением запасов, и убытков, возникающих при наличии перебоев в обеспечении потребителей. При этом в расчет берутся лишь те расходы, которые зависят от размера партий поставок и величины запаса.

В качестве целевой функции в моделях управления запасами, как правило, принимают минимум суммы следующих видов затрат:

1) связанные с возникновением перебоев в снабжении (потери от дефицита); через a обозначим величину потерь от дефицита единицы продукции;

2) связанные с хранением запаса; обозначим b затраты на хранение единицы продукции в единицу времени;

3) связанные с организацией поставок; пусть c - затраты на одну партию; Вв наиболее простом случае:

$$c(q) = c_0 + c_1 q, \tag{4.1}$$

где q – количество заказанной продукции,

c_0 – издержки, не зависящие от объема заказа и связанные с самим фактом его произведения;

c_1 – закупочная цена единицы продукции.

Наличие в издержках $c(q)$ величины c_0, отличной от нуля, приводит к ограничению количества заказов и, собственно, к необходимости иметь склад.

Попробуем проанализировать зависимость величины затрат каждого вида от уровня запасов на складе. Из рис. 4.6 видно, что с ростом уровня запаса затраты первого вида снижаются, что естественно, поскольку при этом снижается риск исчерпания запасов.

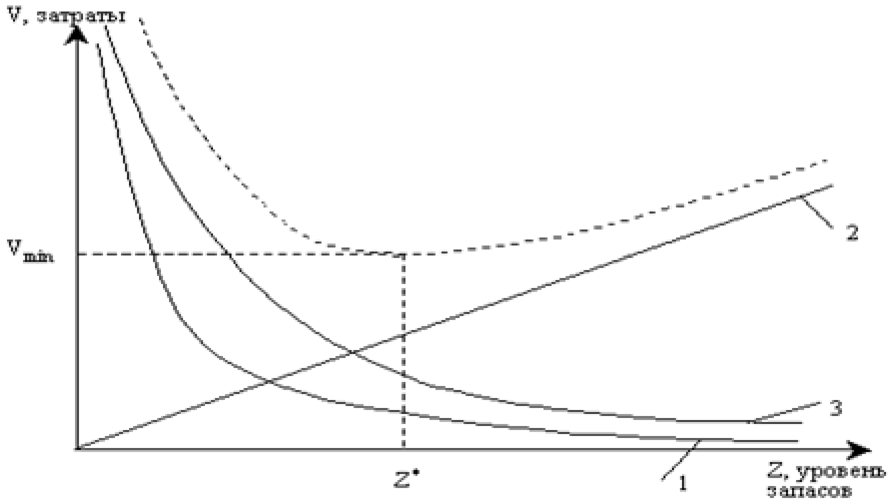


Рис. 4.6. Зависимость величины затрат от среднего уровня запаса

Затраты на хранение (2) возрастают (линейно или нелинейно), а затраты на организацию поставок (3) уменьшаются, так как высокий уровень запасов позволяет делать заказы реже.

Заметим, что кривая суммарных затрат (пунктирная линия) имеет явную точку минимума. Это позволяет сделать вывод о том, что должен существовать такой уровень запаса Z^*, при котором суммарные издержки достигают минимального значения $V_{\min}$.

Поскольку запас с течением времени изменяется, заявки на его пополнение также подаются периодически, при исследовании систем хранения запасов обычно минимизируют средние издержки функционирования системы в единицу времени. Такие издержки могут быть представлены следующим образом:

$$V = \frac{1}{\tau}\left(\int_0^{\tau} f\big(Z(t)\big)dt + c_0 n(\tau) + c_1 d(\tau)\right) \to min, \tag{4.2}$$

где τ – рассматриваемый период времени;

$n(\tau)$ – полное число поставок за период $[0, \tau]$;

$d(\tau)$ – общий объем заказанной продукции за период $[0, \tau]$.

Функция $f(\mathrm{Z})$ в частном случае подсчитывается по формуле:

$$f(Z) = \begin{cases} -aZ, \text{при } Z \le 0 \\ bZ, \text{при } Z > 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Отрицательное значение Z соответствует ситуации, когда имеет место неудовлетворенный спрос на продукт.

4.5. Типы моделей управления запасами

Несмотря на то, что любая модель управления запасами призвана отвечать на два основных вопроса (когда и сколько), имеется значительное число моделей, для построения которых используется разнообразный математический аппарат.

Такая ситуация объясняется различием исходных условий. Главным основанием для классификации моделей управления запасами является характер спроса на хранимую продукцию (напомним, что с точки зрения более общей градации сейчас мы рассматриваем лишь случаи с независимым спросом).

Итак, в зависимости от характера спроса модели управления запасами могут быть детерминированными и вероятностными.

В свою очередь детерминированный спрос может быть статическим, когда интенсивность потребления не изменяется во времени, или динамическим, когда достоверный спрос с течением времени может изменяться.

Вероятностный спрос может быть стационарным, когда плотность вероятности спроса не изменяется во времени, и нестационарным, где функция плотности вероятности меняется в зависимости от времени. Приведенную классификацию поясняет рис. 4.7.

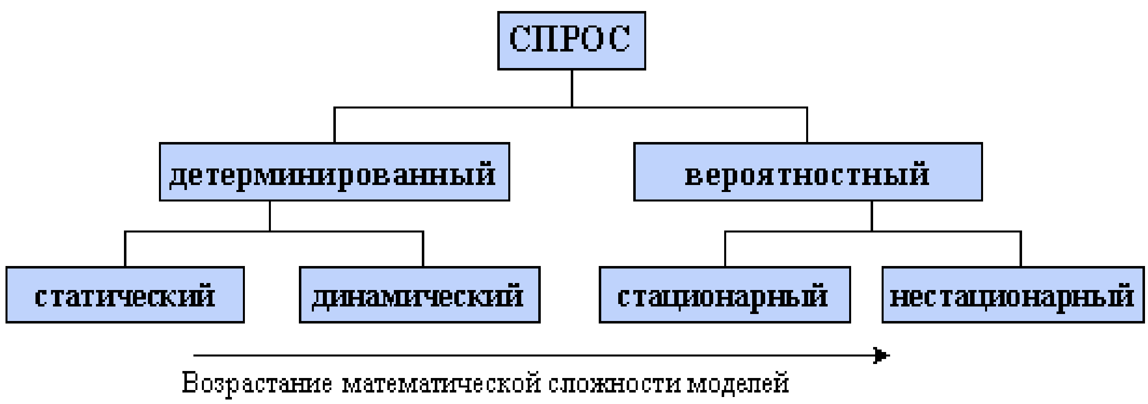


Рис. 4.7. Типы моделей управления запасами в зависимости

от характера спроса

Наиболее простым является случай детерминированного статического спроса на продукцию. Однако такой вид потребления на практике встречается достаточно редко. Наиболее сложные модели - модели нестационарного типа.

Кроме характера спроса на продукцию при построении моделей управления запасами приходится учитывать множество других факторов, например:

● сроки выполнения заказов: продолжительность заготовительного периода может быть постоянной либо являться случайной величиной;

● процесс пополнения запаса может быть мгновенным либо распределенным во времени;

● наличие ограничений по оборотным средствам, складской площади т.п.

4.6. Простейшие модели управления запасами

4.6.1. Однопродуктовая статическая модель

Модель управления запасами простейшего типа характеризуется тремя свойствами: постоянным во времени спросом; мгновенным пополнением запаса; отсутствием дефицита.

В этом случае модель с фиксированным размером заказа и модель с фиксированной периодичностью ведут себя совершенно одинаково, поскольку интенсивность спроса и продолжительность заготовительного периода не изменяются.

На практике такой модели могут соответствовать следующие ситуации: использование осветительных ламп в здании; использование крупной фирмой канцелярских товаров (бумаги, блокнотов, карандашей и т.д.), потребление основных продуктов питания.

График движения запаса на складе для подобной ситуации представлен на рис. 4.8, на котором обозначены:

q – размер партии;

$Z_{ср} = q/2$ – средний уровень запаса;

λ – тангенс соответствующего угла, интенсивность спроса (количество продукции, потребляемой в единицу времени);

S – «точка заказа»;

θ – продолжительность заготовительного периода;

l – продолжительность цикла заказа (планируемого периода).

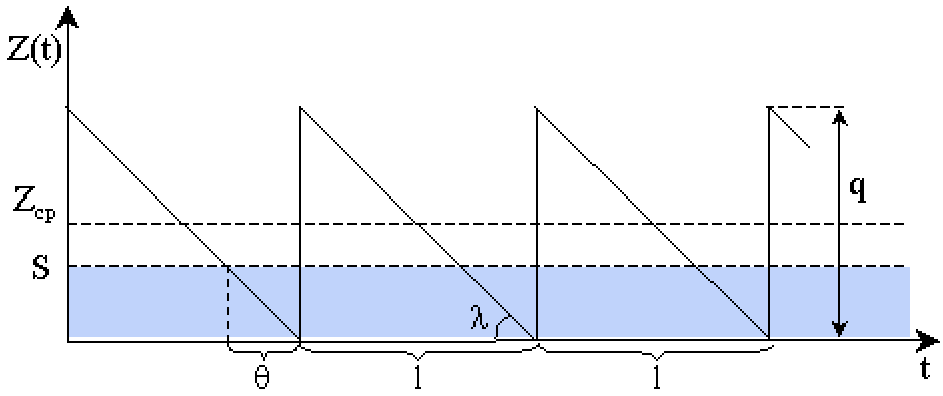


Рис. 4.8. Движение запаса в однопродуктовой статической модели

Для такой модели размер запаса в определенный момент времени может быть рассчитан по формуле:

$$Z(t) = Z(0) - \lambda\, t + W(t), \tag{4.4}$$

где *W(t)* - суммарное поступление продукта за период [0,t].

Величина суммарных поступлений определяется из соотношения:

$$W(t) = q \cdot n(t), \tag{4.5}$$

где *n*(*t*) - полное число поставок за период [0, *t*].

При этом $l = q / \lambda$, т.е. уровень запаса достигнет нуля, спустя q / λ единиц времени после получения заказа размером q.

Полное число поставок:

$$n(t) = \left[\frac{t}{l}\right] = \left[\frac{\lambda t}{q}\right] \tag{4.6}$$

где [...] - целая часть числа.

Из соотношений (4.4), (4.5) и (4.6) получим:

$$Z(t) = Z(0) - \lambda t + q\left[\frac{\lambda t}{q}\right], \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) полностью описывает рассматриваемую систему хранения запаса. Оптимизация заключается в выборе наиболее экономичного размера партии q. Утверждение иллюстрирует рис. 4.9.

Чем меньше q, тем чаще нужно размещать новые заказы. Однако при этом средний уровень запаса будет уменьшаться.

С другой стороны, с увеличением q уровень запаса повышается, но заказы размещаются реже.

Так как затраты зависят от частоты заказов и объема хранимого запаса, то величина q должна определяться из условия обеспечения сбалансированности между двумя видами затрат.

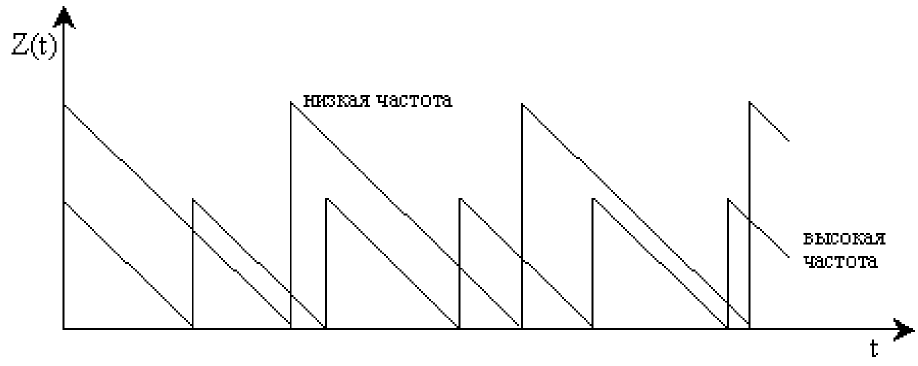


Рис. 4.9. Экономический смысл оптимального размера партии

Итак, c_0, как и прежде, – затраты на оформление заказа, имеющие место всякий раз при его размещении; b – затраты на хранение единицы продукции в единицу времени; c_1 – закупочная цена единицы продукта; $d(t)$ – общий объем потребленной продукции за период [0, t].

Выразим суммарные затраты V (t) за период времени [0, t] и зададимся целью отыскать минимум этих затрат:

$$V(t) = c_0 n(t) + bZ_{cp} + c_1 d(t) \to min \qquad (4.8)$$

Используя соотношения (4.6) и (4.7) и переходя к затратам в единицу времени (для этого разделим предыдущее выражение на t), получим:

$$V = c_0 \frac{\lambda}{q} + b\frac{q}{2} + cl\lambda \to min. \qquad (4.9)$$

Заметим, что требованием о целой части в выражении (4.6) нам пришлось пренебречь, чтобы получить дифференцируемую функцию.

Далее найдем производную функции по q и приравняем ее нулю:

$$\frac{dV}{dq} = -c_0 \frac{\lambda}{q^2} + \frac{b}{2} = 0$$

откуда найдем q*:

$$q^* = \sqrt{\frac{2\lambda c_0}{b}} \qquad (4.10)$$

Заметим, что вторая производная в точке q* строго положительна, что говорит о том, что найден именно минимум функции.

Соотношение (4.10) принято называть формулой экономичного размера заказа Уилсона. Формула Уилсона занимает центральное место во всей теории управления запасами.

Таким образом, оптимальная стратегия модели предусматривает заказ q* единиц продукта через каждые $l^* = q^*/\lambda$ единиц времени.

Стратегия размещения заказов в приведенной модели должна определять также «точку заказа». Можно показать, что «точка заказа» для данного случая определяется как:

$$S^* = \lambda\theta . \qquad (11)$$

При использовании формул (4.9) и (4.10) необходимо контролировать, чтобы интенсивность спроса λ и стоимость хранения b были отнесены к одному и тому же промежутку времени, например, к году, месяцу или дню.

В отношении оптимального объема партии q^* необходимо сделать следующее замечание.

Стоимость хранения и стоимость заказа, а также предполагаемый спрос, - все это по своей сути ориентировочные показатели, их невозможно точно рассчитать. Иногда стоимость хранения не рассчитывается, а просто устанавливается, исходя из каких-то разумных соображений. Соответственно, экономичный объем заказа нужно считать приблизительным, а не точным показателем. Возникает вопрос: в какой степени приемлем такой «приблизительный» объем партии с точки зрения минимальных расходов (рис. 4.10)?

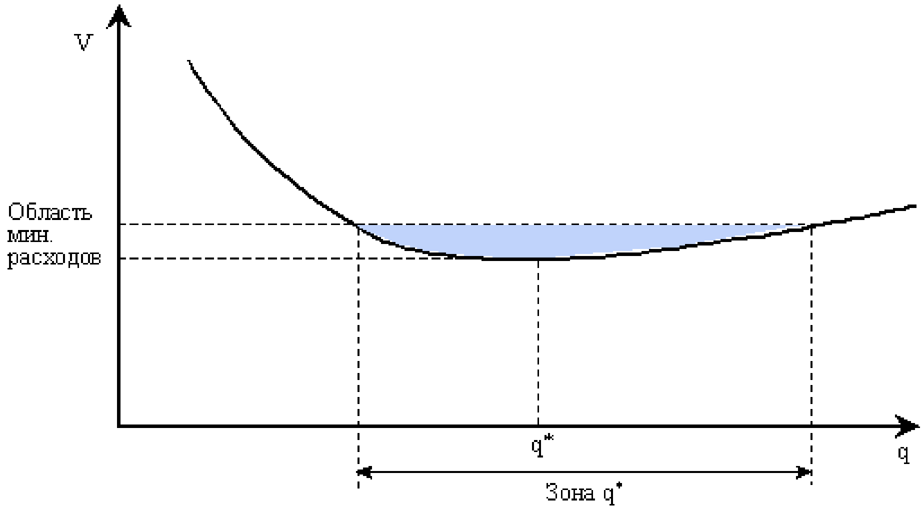


Рис. 4.10. Зона оптимального размера партии

Ответ состоит в том, что кривая издержек в районе точки q^* относительно пологая, особенно справа от данной точки (см. рис. 4.10). Следовательно, показатель экономичного объема партии можно считать достаточно устойчивым.

4.6.2. Однопродуктовая статическая модель, допускающая дефицит

В рассмотренной выше простейшей модели дефицит продукции не допускается. В общем случае, когда потери от дефицита сопоставимы с расходами по содержанию запасов, дефицит допустим.

График движения запаса для такой ситуации приведен на рис. 4.11, где q_θ обозначает количество продукции, потребляемой в течение заготовительного периода.

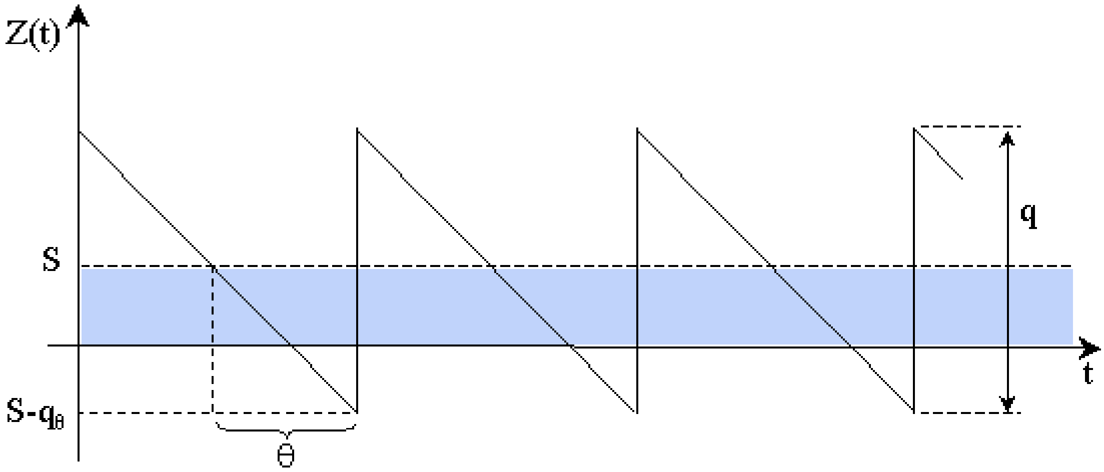


Рис.4.11. Движение запаса в однопродуктовой статической модели, допускающей дефицит

Не производя подробного вывода формул, заметим следующее.

В случае, когда вид минимизируемой функции определяется посредством соотношений (4.1) - (4.3), оптимальные значения параметров q^* и S^* имеют следующий вид:

$$q^* = \sqrt{\frac{2\lambda c_0}{b}}\sqrt{\frac{b+a}{a}}, \tag{4.12}$$

$$S^* = \lambda\theta = \sqrt{\frac{2\lambda c_0\, b}{(a+b)a}}. \tag{4.13}$$

Нетрудно заметить, что при больших издержках от неудовлетворенного спроса, т.е. при недопустимости дефицита ($a \to \infty$), q^* и S^*в формулах (4.12) и (4.13) стремятся к соответствующим значениям в формулах (4.10) и (4.11).

4.6.3. Модель с постепенным пополнением запасов

Простейшая однопродуктовая статическая модель, рассмотренная в пп. 4.6.1, обладала тремя свойствами: достоверно известным спросом, мгновенным пополнением запаса, отсутствием дефицита.

Что происходит с оптимальными параметрами модели при допущении дефицита, выяснили, рассмотрев материалы пп. 4.6.2. А что же будет происходить с параметрами модели в случае, когда процесс пополнения запаса распределен во времени? Исследуем эту ситуацию.

В некоторых случаях, например, когда предприятие одновременно является производителем и потребителем изделий, запасы пополняются постепенно, а не мгновенно. То есть, в данном случае одна часть производственной системы выполняет функцию поставщика для другой части этой системы, выступающей в роли потребителя.

Если темпы производства и потребления одинаковы, то запасы создаваться вообще не будут, поскольку весь объем выпуска сразу же используется. В этом случае вопрос об объеме партии не рассматривается. Чаще бывает, что темп производства превышает темп потребления.

График движения запасов в такой системе будет иметь вид, соответствующий графику, представленному на рис. 4.12.

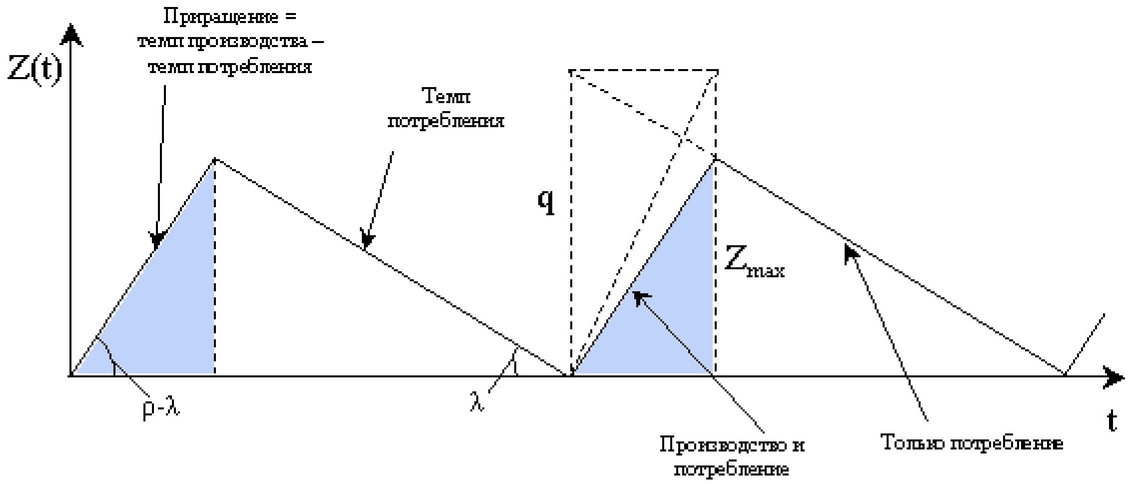


Рис. 4.12. Движение запасов в модели с постепенным пополнением

Приведем обозначения необходимых для дальнейшего анализа величин:

q – объем производимой партии, шт.;

λ – интенсивность потребления, шт./ед. времени;

ρ – темп производства, шт./ед. времени; соответственно, (ρ – λ) - темп прироста запасов (шт./ед. времени), на графике - тангенс соответствующего угла;

Z_{max} – максимальный уровень запасов;

b – расходы на хранение единицы продукции в единицу времени, ед. стоимости;

c_0 – затраты на пуско-наладочные работы, ед. стоимости;

θ– продолжительность пусконаладочных работ, иначе - время упреждения заказа, ед. времени.

Из графика видно, что изделия производятся в течение только части цикла, потому что темп производства выше темпа потребления; потребление же происходит на протяжении всего цикла. Во время производственной стадии цикла создаются запасы. Их уровень равен разнице между уровнем производства и уровнем потребления. Пока продолжается производство, уровень запасов будет повышаться. Когда производство прекращается, уровень запасов начинает снижаться. Следовательно, уровень запасов будет максимальным в момент завершения производственной стадии. Когда наличный запас будет исчерпан, производство возобновляется, и весь цикл повторяется вновь.

Когда компания сама производит изделия, то у нее нет расходов на заказ как таковых. Однако для каждой производственной партии существуют расходы на подготовку - это стоимость подготовки оборудования к данному производственному процессу: наладка, замена инструмента и т.п. По иному такие расходы называются затратами на пусконаладочные работы. Стоимость подготовки в данном случае аналогична стоимости заказа, поскольку она не зависит от размера партии. Аналогично и использование этих величин при расчетах.

Перейдем к определению оптимальных параметров рассматриваемой модели. Для этого используем прием, уже примененный нами в пп. 4.6.1: составим выражение, показывающее зависимость затрат V от параметров модели, отыщем производную и приравняем ее нулю.

На этот раз включим в общие расходы всего два вида издержек: затраты на проведение пусконаладочных работ и затраты на хранение продукции. Расходы, пропорциональные объему партии (компонент, включающий величину c_1), в функцию включать не будем. Во-первых, как показано выше, это слагаемое никак не влияет на итоговые выражения для оптимальных параметров, во-вторых, в условиях, когда предприятие одновременно является и производителем, и потребителем продукции, такие затраты по сути не связаны с функционированием системы хранения запасов.

Итак, суммарные затраты $V(t)$ за период времени $[0, t]$:

$$V(t) = c_0 n(t) + b \cdot Z_{cp} \cdot t \rightarrow min$$

Используя соотношение (4.6), переходим к затратам в единицу времени (для этого разделим предыдущее выражение на t), получим:

$$V = c_0 \frac{\lambda}{q} + b \frac{Z_{max}}{2} \rightarrow min$$

Выразим Z_{max} через q (объем производственной партии). Это легко сделать, используя график движения запаса (рис. 4.12), а именно, рассматривая некоторые треугольники и используя простейшие тригонометрические соотношения:

$$Z_{max} = \frac{q}{p}(p - \lambda)$$

откуда

$$V = c_0 \frac{\lambda}{q} + \frac{bq}{2p}(p - \lambda) \to min$$

Приравняем к нулю производную:

$$\frac{dV}{dq} = -c_0 \frac{\lambda}{q^2} + \frac{b}{2p}(p - \lambda) = 0$$

Выразим q^*:

$$q^* = \sqrt{\frac{2\lambda c_0\, p}{b(p-\lambda)}}\,. \qquad (4.14)$$

Выражение (4.14) используется для определения оптимального размера партии с модели с постепенным пополнением запаса.

Оптимальное значение «точки заказа» S^* в этом случае, как и для однопродуктовой статической модели, находится из соотношения (4.13). «Точка заказа» в данном случае представляет собой уровень запаса, при котором следует начать пуско-наладочные работы.

4.6.4 Модель с постепенным пополнением запасов, допускающая дефицит

В однопродуктовой статической модели (пп. 4.6.1) пополнение запасов происходит мгновенно и дефицит не допускается. В пп. 4.6.2 рассмотрен случай, когда допускается дефицит, в пп. 4.6.3 - ситуация, когда пополнение запасов происходит постепенно. Теперь рассмотрим более общий случай: дефицит допускается и запасы пополняются постепенно.

График движения запасов в такой системе представлен на рис. 4.13.

Не производя вывод формул для оптимальных параметров такой модели, запишем итоговые выражения.

Оптимальный размер партии q^* будет равен:

$$q^* = \sqrt{\frac{2\lambda c_0}{b}} \cdot \sqrt{\frac{l + {}^{b}/_{a}}{l - {}^{\lambda}/_{p}}}\ . \qquad (4.15)$$

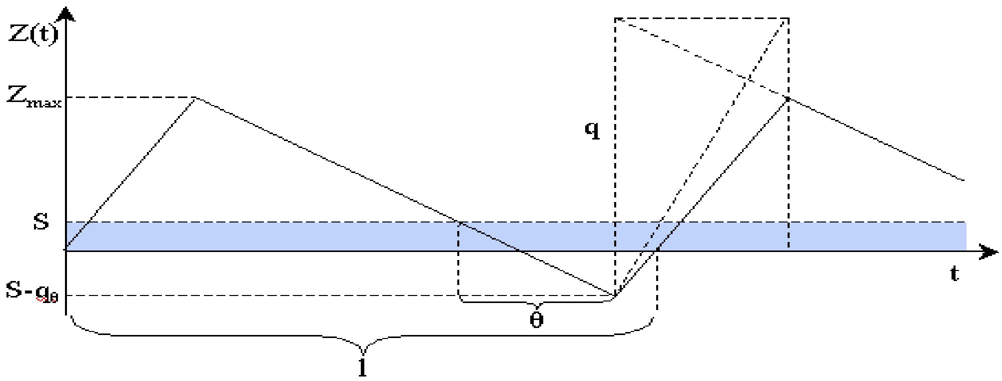


Рис. 4.13. Движение запасов в модели с постепенным пополнением, допускающей дефицит

«Точка заказа» (критический уровень запаса, при достижении которого следует начать пусконаладочные работы):

$$S^* = \lambda\theta - \frac{l}{a}\sqrt{\frac{2\lambda c_0\, l - \lambda/p}{b(l - b/a)}}. \tag{4.16}$$

Оптимальная продолжительность цикла l^*:

$$l^* = \sqrt{\frac{2c_0}{\lambda b}} \cdot \sqrt{\frac{l + b/a}{l - \lambda/p}}. \tag{4.17}$$

При данных значениях параметров достигается минимум суммарных затрат в единицу времени. Его можно рассчитать по формуле:

$$V^* = \sqrt{2\lambda c_0\, b} \cdot \sqrt{\frac{l - \lambda/p}{l + b/a}}. \tag{4.18}$$

Номера формул и характеристики для расчета оптимальных параметров моделей в рассмотренных случаях представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Характеристики моделей и формулы управления запасами

Подраздел	Характеристики модели			Используемые формулы
	Интенсивность спроса	Пополнение запасов	Дефицит	
4.6.1	постоянная	мгновенное	отсутствует	(4.10), (4.11)
4.6.2	постоянная	мгновенное	допускается	(4.11), (4.12)
4.6.3	постоянная	постепенное	отсутствует	(4.13), (4.11)
4.6.4	постоянная	постепенное	допускается	(4.14) - (4.17)

4.7. Вероятностные модели управления запасами

Модели управления запасами, рассмотренные выше, предполагали, что потребность в хранимых изделиях известна и постоянна (вторая графа табл. 4.1). На практике в большинстве случаев потребность является переменной величиной. В связи с этим необходимо иметь и поддерживать так называемый резервный (буферный) запас, обеспечивая определенный уровень защиты от дефицита изделий. *Резервный запас* - это величина запаса, постоянно поддерживаемая дополнительно к ожидаемой потребности.

В случае нормального распределения колебаний спроса будет среднее значение отклонений. Если, например, среднемесячная потребность составляет 100 изделий, и предполагается, что в следующем месяце она останется такой же, а запас составляет 120 единиц, то 20 единиц и будут резервным запасом.

Известно несколько подходов к установлению величины запаса, обеспечивающего защиту от колебаний спроса. Один из них основывается на определении ожидаемого количества изделий, которых может не хватить. Например, можно поставить задачу так: установить такой уровень запаса, чтобы можно было удовлетворить не менее чем 95 % заказов на данную продукцию, т.е. дефицит изделий будет существовать лишь в течение 5 % всего времени. Таким образом, мы подошли к определению понятия «уровень обслуживания».

Уровень обслуживания – доля (процент) от общей величины спроса, которую можно реально получить из наличного запаса. Если, например, годовая потребность в некотором изделии составляет 1000 шт., то 95 %-ный уровень обслуживания означает, что 950 шт. изделий можно получить из запаса, а 50 шт. не хватит.

Концепция уровня обслуживания основана на статистической характеристике, известной как Ожидаемое z или $E(z)$. $E(z)$ – это ожидаемое количество изделий, которых будет не хватать на протяжении каждого интервала времени выполнения заказа. Концепция предполагает, что потребность в хранимой продукции является нормально распределенной случайной величиной.

Чтобы определить уровень обслуживания, необходимо знать, сколько изделий не хватит. Предположим, что среднемесячная потребность в какомлибо изделии составляет 100 шт. ($\lambda = 100$), а среднеквадратическое отклонение - 10 шт. ($\sigma = 10$). Если в начале месяца в запасе имеется 110 ед., сколько изделий нам может не хватить?

Для ответа на этот вопрос придется вычислить сумму произведений:

$$E(z) = 1 \cdot P(\lambda = 111) + 2 \cdot P(\lambda = 112) + 3 \cdot P(\lambda = 113) + ...,$$

где $P(\lambda = 111)$ - вероятность того, что потребуется 111 шт., т.е. не хватит одного изделия;
$P(\lambda = 112)$ - вероятность того, что потребуется 112 шт., т.е. не хватит двух изделий;
$P(\lambda = 113)$ - вероятность того, что потребуется 113 шт., т.е. не хватит трех изделий и т.д.

Такое суммирование даст нам количество изделий, которых может не хватить, если запас в начале месяца составляет 110 шт.

Решение такой задачи - достаточно трудоемкий процесс. Однако в настоящее время значения $E(z)$ табулированы. Соответствующая статистическая таблица (так называемая таблица Брауна, Прил. А) показывает зависимость ожидаемого дефицита изделий ($E(z)$) от резервного запаса, выраженного в стандартных отклонениях спроса (z). При этом табличные значения приведены к стандартному отклонению спроса, равному единице.

Далее рассмотрим обсуждаемый подход применительно к каждой из двух основных стратегий управления запасами.

4.7.1 Модель с фиксированным размером заказа

При использовании такой стратегии уровень запаса отслеживается непрерывно. Опасность исчерпания запаса возникает здесь только в течение времени выполнения заказа (заготовительного периода). В течение периода θ (рис. 4.14) возможны колебания спроса.

Величина резервного запаса в этом случае зависит от требуемого уровня обслуживания. Объем партии заказа q вычисляется обычным способом. Затем устанавливается «точка заказа», которая учитывает ожидаемую потребность в течение заготовительного периода, плюс резервный запас, определяемый требуемым уровнем обслуживания.

Таким образом, важнейшее различие между моделью, в которой потребность известна, и моделью, где потребность является случайной величиной, заключается в определении «точки очередного заказа». Объем заказа в обоих случаях одинаков. При этом элемент неопределенности учитывается в резервном запасе.

«Точка заказа» вычисляется следующим образом:

$$S = \bar{\lambda} \cdot \bar{\theta} + z\sigma_{\lambda\theta} , \tag{4.19}$$

где $\bar{\lambda}$- средняя интенсивность спроса;
$\bar{\theta}$ - средняя продолжительность заготовительного периода;

z - число стандартных отклонений спроса в резервном запасе для заданного уровня обслуживания;

$\sigma\lambda\theta$- стандартное отклонение спроса в течение заготовительного периода.

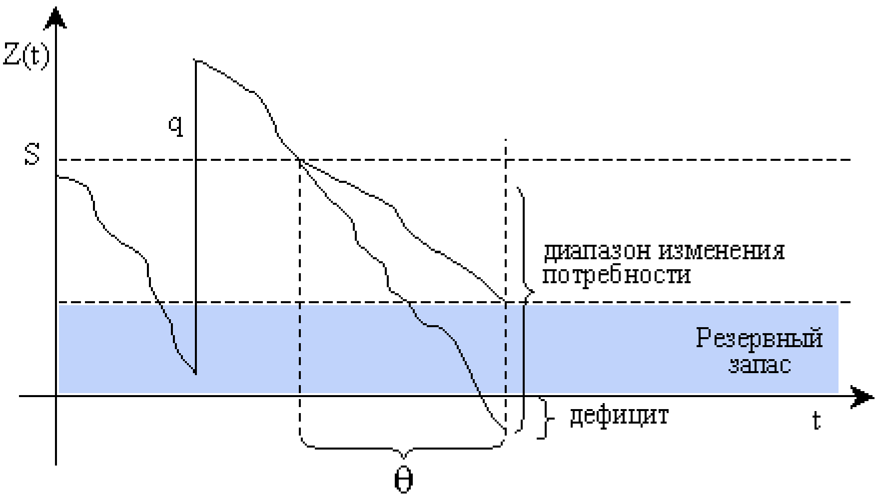


Рис. 4.14. Диапазон отклонений потребности в модели с фиксированным размером заказа

В формуле (4.19) слагаемое $\bar{\lambda} \cdot \bar{\theta}$ TNR определяет ожидаемый спрос в течение заготовительного периода, а слагаемое $z\sigma_{\lambda\theta}$ представляет собой величину резервного запаса. Остановимся на определении величин z и $\sigma_{\lambda\theta}$.

Значение $\sigma_{\lambda\theta}$ определяется в зависимости от условий задачи. Будем рассматривать три случая.

Если изменяется только спрос, а продолжительность заготовительного периода – величина постоянная, то:

$$\sigma_{\lambda\theta} = \sqrt{\theta} \cdot \sigma_{\lambda}, \tag{4.20}$$

гдеσ_{λ} - стандартное отклонение спроса в единицу времени.

Если изменяется только заготовительный период, а спрос остается постоянным, то:

$$\sigma_{\lambda\theta} = \lambda\sigma_{\lambda}, \tag{4.21}$$

где σ_{θ}- стандартное отклонение продолжительности заготовительного периода.

Наконец, если изменяются и спрос, и заготовительный период, то:

$$\sigma_{\lambda\theta} = \sqrt{\bar{\theta}\sigma_{\lambda}^2 + \bar{\lambda}^2\sigma_{e}^2} \tag{4.22}$$

Перейдем к определению z. Для этого вычисляется $E(z)$ - дефицит изделий, который удовлетворяет заданному уровню обслуживания, а затем по таблице Брауна находится соответствующее значение z.

Для вычисления $E(z)$ используется формула:

$$E(z) = \frac{(l-p)q}{\sigma\lambda\theta}, \qquad (4.23)$$

где p - требуемый уровень обслуживания, в долях единицы; соответственно, $(l$ - $p)$ - неудовлетворенная часть потребности;

q - экономичный размер заказа (вычисляется обычным образом);

$E(z)$ - ожидаемый дефицит изделий в каждом цикле заказа, выраженный в стандартных отклонениях спроса.

4.7.2 Модель с фиксированной периодичностью заказа

Модель с фиксированной периодичностью предполагает, что размеры заказов различны для разных циклов. Таким образом, размер запаса регулируется за счет изменения объема партии. Возобновление же заказа определяется временем. Следовательно, модель с фиксированной периодичностью должна иметь защиту от исчерпания запасов (резервный запас) не только на время исполнения заказа, но и на весь последующий цикла заказа (рис. 4.15).

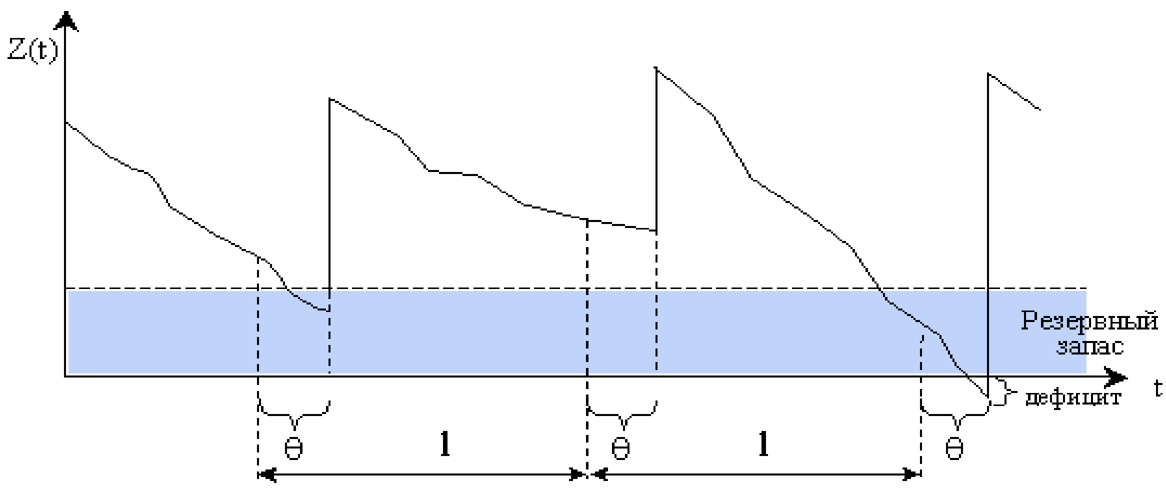


Рис. 4.15. Вероятностная модель с фиксированной периодичностью заказа

Таким образом, модель с фиксированной периодичностью больше нуждается в резервном запасе, чем модель с фиксированным размером партии.

Рассмотрим ситуацию с переменным спросом и постоянной продолжительностью заготовительного периода. Ситуация наиболее частая с точки зрения практики, а также наиболее простая для изучения.

Объем заказа в такой модели будет определяться по следующей схеме:

Объем за каза	=	**Ожидаемый спрос течение цикла зака: и заготовительног периода**	+	**Резервный за пас**	-	**Наличный запас в момен подачи заявки**

Соотношение, представленное на схеме, запишем в виде формулы:

$$q = \bar{\lambda}(l + \theta) + z\sigma_{l+\theta} - Z, \tag{4.24}$$

где q - размер очередного заказа;

$\bar{\lambda}$ - средняя интенсивность спроса;

l - промежуток времени между подачей заявок;

θ - продолжительность заготовительного периода;

z - число стандартных отклонений спроса в резервном запасе для заданного уровня обслуживания;

$\sigma_{l+\theta}$- стандартное отклонение спроса в течение цикла заказа и заготовительного периода;

Z – текущий уровень запаса.

При этом:

$$\sigma_{l+\theta} = \sigma_{\lambda}\sqrt{1+\theta}, \tag{4.25}$$

где σ_{λ} - стандартное отклонение спроса в единицу времени.

Величину z можно получить из таблицы Брауна по E(z), которое для данного случая определяется по формуле:

$$E(z) = \frac{\bar{\lambda}l(l-p)}{\sigma_{1+e}} \ . \tag{4.26}$$

4.8. Специальные модели управления запасами

4.8.1. Модель, учитывающая количественные скидки

Модели управления запасами, рассмотренные нами ранее, несмотря на существенные отличия, все же имели общую особенность - стоимость изделий была постоянной при любом объеме заказа.

Модель, которую мы рассмотрим в данном подразделе, описывает порядок определения оптимальной величины заказа для случая, когда цена единицы изделия меняется в зависимости от объема заказа.

Количественные скидки – снижение закупочной цены при покупке более крупных партий товара.

Скидки предоставляются с тем, чтобы убедить потребителей покупать как можно больше.

Рассмотрим следующий пример.

Компания, занимающаяся производством медицинских препаратов, выпустила прайс-лист на хирургические бинты. Соответствующие данные представлены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Прайс-лист на хирургические бинты

Объем партии, коробки	**Цена за коробку, $**
от 1 до 44 от 45 до 69 70 и выше	2,00 1,70 1,40

Итак, в данном случае, затраты собственно на покупку продукции должны включаться в целевую функцию модели.

Общие расходы складываются из трех составляющих:

$$V(t) = c_0 n(t) = bZ_{cp}t + c_1 d(t) \rightarrow min. \tag{4.27}$$

Напомним, что в данном случае c_1- закупочная цена единицы товара.

В однопродуктовой статической модели (пп. 4.6.1) при определении q^* закупочная цена не учитывалась, поскольку она не оказывала влияния на величину оптимального объема партии.

Когда условия предполагают наличие количественных скидок, для каждой закупочной цены имеется отдельная U-образная кривая зависимости общих расходов (рис. 4.16). Кривые функциональной зависимости располагаются на разных уровнях - меньшая закупочная цена поднимает кривую общих расходов на меньший уровень, большая - на больший уровень.

Однако ни одна кривая зависимости не относится ко всем возможным значениям объема партии; каждая кривая относится только к части диапазона значений. Реальный показатель общих расходов сначала находится на кривой с максимальной закупочной ценой, а затем опускается вниз, последовательно, кривая за кривой, в точках изменения цены. Точка изменения цены - это минимальный объем партии, необходимый для получения скидки. В примере с бинтами - это 45 и 70 коробок. В результате получается кривая общих расходов - ступенчатая в точках изменения цены. На рис. 4.16 такая кривая выделена жирной линией.

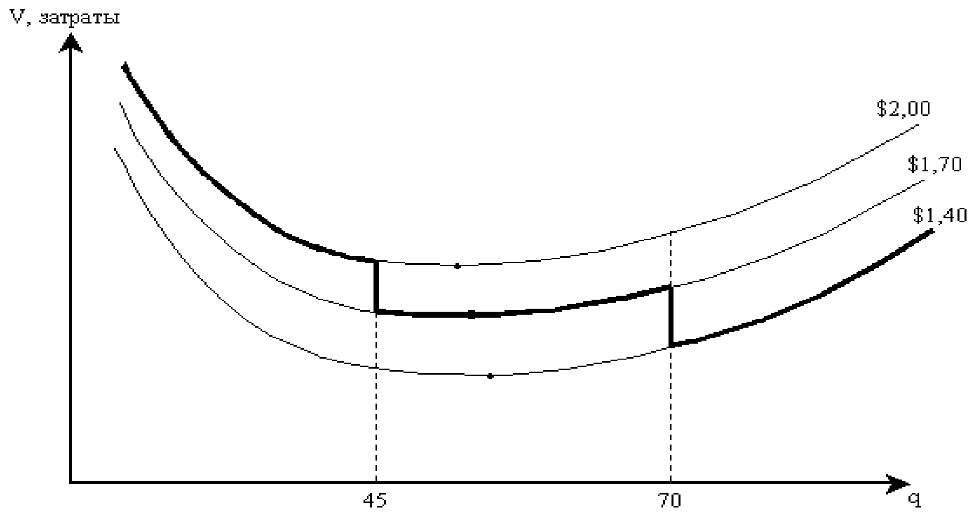


Рис. 4.16. Кривые общих затрат в модели количественных скидок

Как видно из рис. 4.16, каждая кривая имеет свою точку минимума, однако, не все точки реально применимы. Например, минимум для кривой $1,40 находится в точке, соответствующей объему партии ≈55 коробок. Но прайс-лист из таблицы 4.2 показывает, что закупочная цена для заказа объемом 55 коробок будет $1,70 за коробку. Реальная же кривая общих расходов изображена в виде ступенчатой линии.

Цель модели количественных скидок – определение такого объема заказа, который даст минимальный общий расход из всего набора кривых.

Существуют два основных варианта модели количественных скидок. Для них процедура поиска точки q^* несколько отличается.

Особенность первого варианта - стоимость хранения (b) постоянна и не зависит от закупочной цены. В этом случае для всех кривых точка минимума будет единой (рис. 4.17).

Кривые общих расходов отличаются лишь тем, что более низкие закупочные цены отражены на более низкой кривой общих расходов.

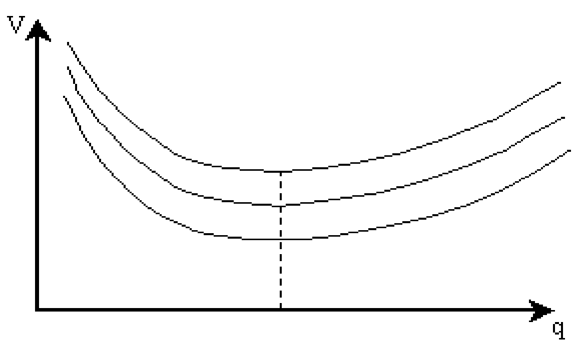


Рис.4.17. Первый вариант модели количественных скидок.
Кривые общих затрат

Для первого варианта модели процедура оптимального объема партии состоит в следующем.

1. По формуле Уилсона (4.9) рассчитать q как единую точку минимума для всех кривых.

2. Поскольку диапазоны цен не перекрываются, только одна закупочная цена будет иметь рассчитанную точку q в своём реальном диапазоне. Если реальный q находится в наименьшем диапазоне цен, то это и будет оптимальный объем заказа q^*.

Если реальное q находится в другом диапазоне, то необходимо рассчитать общие затраты (по формуле (4.27)) для q и для всех точек изменения цены с меньшей закупочной стоимостью. Та точка, для которой расходы окажутся наименьшими, будет являться оптимальным размером партии q^*.

Второй вариант модели. Здесь стоимость хранения определяется как процент от закупочной цены. В этом случае каждая кривая будет иметь свою точку минимума. По мере снижения закупочной цены каждая последующая точка минимума будет располагаться справа от предыдущей точки, находящейся на более высокой кривой. Ситуацию иллюстрирует рис. 4.18.

Процедура определения оптимального объема заказа

1. Начиная с наименьшей цены, по формуле Уилсона рассчитаем точку минимума для каждого диапазона цен, пока не отыщется реальное значение q (т.е. пока полученное значение q не попадет в реальный диапазон объема партии для своей цены).

2. Если значение q реально для самой низкой цены, то оно и будет оптимальным объемом заказа q^*.

3. Если реальное значение q не попадает в диапазон минимальной цены, то необходимо сравнить общие расходы (пользуясь формулой (4.27)) в точках изменения цены для всех меньших цен и общие затраты наименьшего реального q. Тогда объем партии, который даст минимальные общие расходы, и будет оптимальным значением q^*.

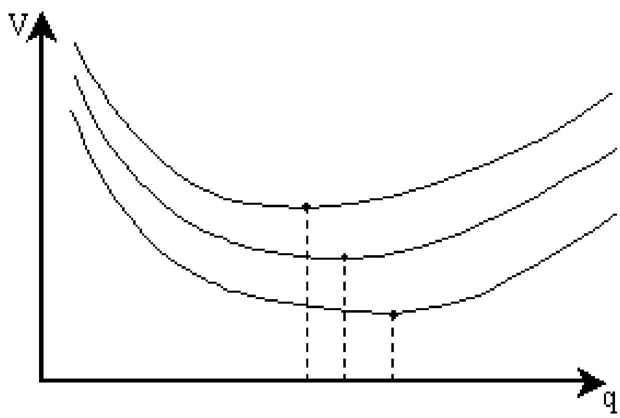


Рис.4.18. Второй вариант модели количественных скидок. Кривые общих затрат

4.8.2. Однопериодная модель

Такая модель применяется при заказе скоропортящихся продуктов и предметов с ограниченным сроком годности: свежие фрукты и овощи, живая рыба, цветы, газеты, журналы и др.

Для данной категории товаров характерной чертой является тот факт, что непроданные (или неиспользованные) товары не хранятся более одного периода. Если такая ситуация возникает, то происходит уценка продукции. Например, вчерашний хлеб может продаваться по сниженным ценам, несвежую рыбу списывают, старые журналы сдают в букинистические магазины или пункты приема макулатуры. Иногда возникают определенные расходы, связанные с избавлением от испорченных или просроченных товаров.

Анализ однопериодной модели сфокусирован на двух видах затрат: а) издержки, связанные с нехваткой запасов; б) издержки, связанные с излишком запасов.

Издержки нехватки включают в себя потери от нереализованных продаж. Эти издержки выражаются как нереализованная прибыль на единицу товара:

$$\mathbf{C_s = \begin{array}{c}\text{Выручка от реализации}\\ \text{единицы продукции}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Закупочная цена}\\ \text{единицы продукции.}\end{array}}$$

Издержки избыточных запасов образуются в случае, если часть товара осталась нереализованной к концу периода.

Издержки избытка – разность между закупочной ценой единицы товара и выручкой от экстренной реализации:

$$\mathbf{C_e = \begin{array}{c}\text{Закупочная цена}\\ \text{единицы продукции}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Выручка от экстренной}\\ \text{реализации единицы товара}\\ \text{по окончании периода.}\end{array}}$$

Если возникают дополнительные расходы, связанные с реализацией или избавлением от избыточных запасов, тогда выручка от экстренной реализации становится величиной отрицательной и повышает издержки от избыточных запасов.

Задача однопериодной модели – определить объем заказа, который обеспечит минимальные издержки, связанные с недостаточными или избыточными запасами.

Будем рассматривать оба случая.

1. Спрос на хранимый товар близок к непрерывному распределению (например, к нормальному или равномерному).

2. Спрос на хранимый товар близок к дискретному распределению.

Примеры непрерывного распределения спроса: спрос на бензин, дизельное топливо, газ. Напротив, спрос на автомобили, компьютеры и т.п. выражается определенными числами, и поэтому может быть описан дискретным распределением.

Непрерывный спрос на товар.

Определение оптимального уровня запаса базируется на понятии «вероятность не исчерпания запаса» (в некоторых источниках эта величина именуется уровнем обслуживания).

«Вероятность не исчерпания» - это вероятность того, что спрос не превысит уровень запаса.

В однопериодной модели оптимальным считается такой уровень запаса, при котором «вероятность не исчерпания» равна соотношению

$$P = \frac{C_s}{C_s + C_e}, \tag{4.28}$$

где P – «вероятность не исчерпания запаса»; C_s – издержки, связанные с недостаточным запасом, на единицу продукции; C_e – издержки, связанные с избыточным запасом, на единицу продукции.

Определение оптимального уровня запаса визуально проще всего представить для случая равномерного спроса. Выбор уровня запаса напоминает детские качели, где вместо людей на одном конце доски - издержки (C_e) от избыточных запасов, на другом - издержки от недостатка (C_s). Оптимальный уровень запаса уравновешивает оба вида издержек, как это показано на рис. 4.19.

Если фактический спрос превышает q^*, то возникает нехватка, отсюда C_s - на правом конце распределения. Аналогично, если спрос меньше, чем q^*, то возникает избыток, отсюда C_e - на левой стороне распределения. Когда $C_s = C_e$, оптимальный уровень запаса находится ровно посередине между двумя концами распределения. Если же один показатель больше другого, то q^* для «поддержания равновесия» располагается ближе к большему показателю.

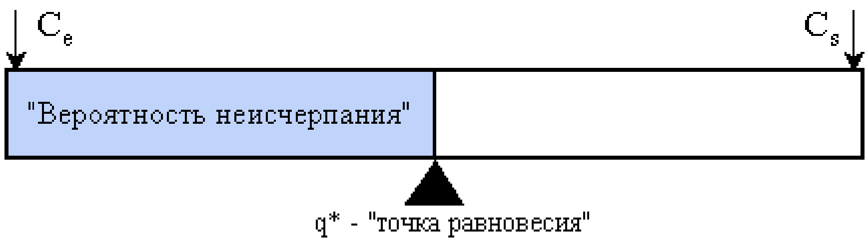


Рис. 4.19.«Вероятность неисчерпания» и оптимальный объем партии в однопериодной модели

Подход, применяемый при нормальном распределении спроса, аналогичен описанному. Для лучшего уяснения методики определения q^* приведем пример.

Пример 4.1. Каждый день в бар поставляется свежее пиво. Спрос равномерно распределяется от 100 до 300 литров в день. Бар платит производителю за литр пива 20 руб., а продает – по 80 руб. за литр. Непроданное пиво не подлежит реализации на следующий день, поскольку оно портится.

Найдите оптимальный уровень запасов.

Решение.

$$C_s = 0{,}80 - 0{,}20 = 0{,}60;$$
$$C_e = 0{,}20 - 0 = 0{,}20.$$

Подставляя полученные данные в формулу (4.28) получим $P = 0{,}75$.

Таким образом, оптимальный уровень запасов должен обеспечивать «вероятность неисчерпания» на уровне 75 %. Для равномерного спроса - это минимальный спрос плюс 75 % от разности между максимальным и минимальным спросом, т.е.:

$$q^* = 100 + 0{,}75\ (300 - 100) = 250\ (\text{литров}).$$

Графическая иллюстрация приведенного решения представлена на рис. 4.20.

Рис. 4.20. Иллюстрация решения задачи о закупках пива

В общем случае для равномерного спроса может быть применена следующая формула:

$$q^* = \lambda_{\min} + P \cdot (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}). \tag{4.29}$$

Ниже приведем еще один пример решения задачи. На этот раз спрос на хранимый продукт будет распределен нормально.

Пример 4.2. Магазин продает хлебный квас. Спрос на него приближен к нормальному со средним значением 200 литров в неделю и стандартным отклонением 10 литров в неделю. C_s = 60 руб. за литр, C_e = 20 руб. за литр.

Найдите оптимальный уровень запасов кваса.

Решение

$$P = \frac{C_s}{C_s + C_e} = \frac{60}{60 + 20} = 0{,}75$$

Это означает, что 75 % площади под кривой нормального распределения должны располагаться слева от точки q^* (рис. 4.21).

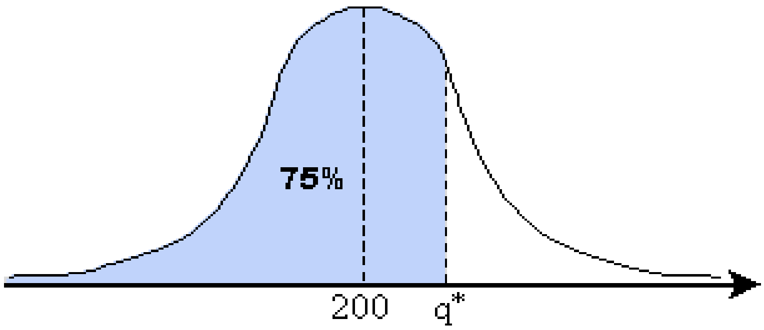


Рис. 4.21. Иллюстрация решения задачи о закупках кваса
(нормальное распределение спроса)

Для нахождения q^* можно использовать формулу:

$$q^* = \bar{\lambda} + \varphi\sigma_\lambda$$

где $\bar{\lambda}$ - средняя величина спроса;

φ - число стандартных отклонений спроса для заданного P;

σ_λ - среднеквадратическое отклонение величины спроса.

Значения φ табулированы, их можно определить по соответствующей статистической таблице (Приложение Б). Кроме того, для разрешения подобных вопросов можно использовать пакет программ «Microsoft Excel», а именно одну из его статистических функций – «НОРМОБР» или «НОРМСТОБР».

Для решаемой нами задачи оптимальный уровень запасов кваса равен:

$$q^* \approx 200 + 0{,}674 \cdot 10 \approx 206{,}75 \text{ (литра).}$$

Дискретный спрос на товар.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда спрос на хранимый товар скорее является дискретным, чем непрерывным. При этом величина запаса, рассчитанная на основе соотношения (4.28), обычно не совпадает с реально возможным уровнем запаса. В этом случае выбирается большее из двух ближайших значений. Схема действий иллюстрируется рис. 4.22.

Ниже приведем пример, поясняющий порядок определения оптимального объема партии.

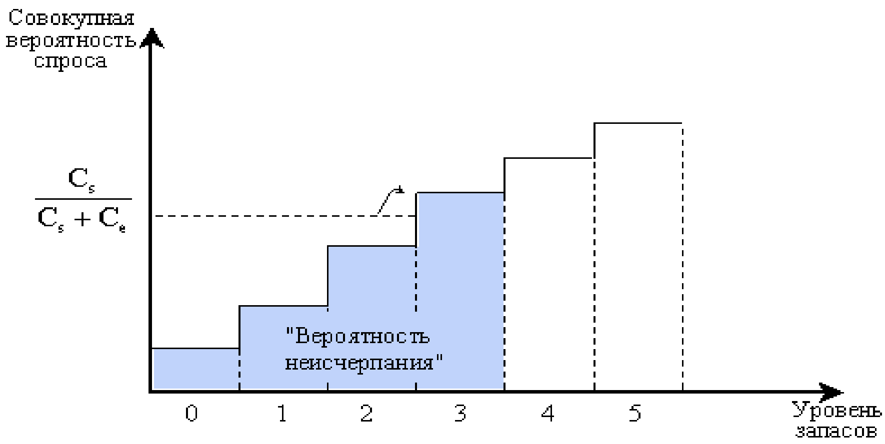


Рис. 4.22. Схема нахождения оптимального объема партии в однопериодной модели с дискретным характером спроса

Пример 4.3. Спрос на цветы в небольшом цветочном магазине близок к распределению, представленному в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Распределение величины спроса в задаче о цветах

Спрос (букетов в день	**Относительная частота**	**Суммарная частота**
0	0,10	0,10
1	0,15	0,25
2	0,30	0,55
3	0,30	0,85
4	0,15	1,00
5 и более	0,00	-

Прибыль от реализации составляет 40 руб. за букет. Непроданные в первый день цветы уцениваются и продаются по цене на 10 руб. ниже закупочной (за букет). Предположим, что все уцененные цветы бывают проданы.

Определим оптимальный уровень запаса:

$$C_s = 40;\ C_e = 10; P = \frac{C_s}{C_s + C_e} = \frac{40}{40 + 10} = 0{,}8$$

Решение.

Чтобы обеспечить «вероятность неисчерпания» на уровне 80 %, нужно хранить три букета цветов. Таким образом, q^* = 3 букета.

В заключение необходимо сделать следующее важное замечание.

Представить реальную систему управления запасами в виде оптимизационной модели удается лишь в относительно простых случаях.

Если же система хранения запасов имеет сложную структуру, используемые вероятностные распределения сложны, а их характеристики изменяются с течением времени, то единственным средством анализа становятся имитационные эксперименты.

5. НЕЛИНЕЙНОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

5.1. Постановка и решение задачи нелинейного программирования

Предположение о возможности описать зависимости между управляемыми переменными с помощью линейных функций далеко не всегда адекватно природе моделируемого объекта. Например, во многих экономических моделях цена товара считается независимой от количества произведенного продукта, однако в повседневной жизни мы постоянно сталкиваемся с тем, что она может зависеть от объема партии товара. Аналогичные замечания могут быть сделаны и по поводу технологических ограничений: расход определенных видов сырья и ресурсов происходит не линейно, а скачкообразно (в зависимости от объема производства). Попытки учесть эти факторы приводят к формулировке более общих и сложных оптимизационных задач. Изучение методов их решения составляет предмет научной области, получившей названия нелинейного программирования (НЛП) [8].

Задачами нелинейного программирования (ЗНЛП) называются задачи математического программирования, в которых нелинейный и (или) целевая функция, и (или) ограничения в виде неравенств или равенств.

Источники нелинейности в задачах НЛП относятся в основном к одной из двух категорий [9]:

1) реально существующие и эмпирически наблюдаемые нелинейные соотношения, например: непропорциональные зависимости между объемом производства и затратами; между количеством используемого в производстве компонента и некоторыми показателями качества готовой продукции; между затратами сырья и физическими параметрами (давление, температура и т.п.) соответствующего производственного процесса; между выручкой и объемом реализации и др.;

2) установленные (постулируемые) руководством правила поведения или задаваемые зависимости, например: формулы или правила расчета с потребителями энергии или других видов услуг; эвристические правила определения страховых уровней запаса продукции; гипотезы о характере вероятностного распределения рассматриваемых в модели случайных величин; различного рода договорные условия взаимодействия между партнерами по бизнесу и др.

Задачи нелинейного программирования можно классифицировать в соответствии с видом функции *F(x)*, функциями ограничений и размерностью вектора **x** (вектора решений).

В самом общем виде классификация представлена в табл. 5.1.

Общих способов решения, аналогичных симплекс-методу линейного программирования, для нелинейного программирования не существует. В каждом конкретном случае способ выбирается в зависимости от вида функции *F(x)*. Задачи нелинейного программирования на практике возникают довольно часто, когда, например, затраты растут непропорционально количеству закупленных или произведённых товаров.

Таблица 5.1

Классификация задач НЛП

Вид *F(x)*	Вид функции ограничений	Число переменных	Название задачи
Нелинейная	Отсутствуют	1	Безусловная однопараметрическая оптимизация
Нелинейная	Отсутствуют	Более 1	Безусловная многопараметрическая оптимизация
Нелинейная или линейная	Нелинейные или линейные	Более 1	Условная нелинейная оптимизация

Многие задачи нелинейного программирования могут быть приближены к задачам линейного программирования, и найдено близкое к оптимальному решению. Встречаются задачи квадратичного программирования, когда функция есть *F(x)* полином 2-ой степени относительно переменных, а ограничения линейны. В ряде случаев может быть применён метод штрафных функций, сводящей задачу поиска экстремума при наличии ограничений к аналогичной задаче при отсутствии ограничений, которая обычно решается проще.

Но в целом *задачи нелинейного программирования* относятся к трудным вычислительным задачам. При их решении часто приходится прибегать к приближенным *методам оптимизации*. Мощным средством для решения задач нелинейного программирования являются численные методы. Они позволяют найти решение задачи с заданной степенью точности.

Общая формулировка нелинейных задач:

Найти переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m \tag{5.1}$$

и обращающие в максимум (минимум) целевую функцию

$$Z = f\,(x_1, x_2\,, \dots, x_n\,). \tag{5.2}$$

Примером типичной и простой нелинейной задачи является следующая:

Данное предприятие для производства какого-то продукта расходует два средства в количестве x_1 и x_2 соответственно. Это факторы производства, например, машины и труд, два различных сырья и т.п., а величины x_1 и x_2 – затраты факторов производства. Факторы производства впредь будем считать взаимозаменяемыми. Если это «труд» и «машины», то можно применять такие методы производства, при которых величина затрат машин в сопоставлении с величиной затрат труда оказывается больше или меньше (производство более или менее трудоемкое).

Объем производства (выраженный в натуральных или стоимостных единицах) является функцией затрат производства $Z = f\,(x_1\,, x_2\,)$. Эта зависимость называется *производственной функцией*. Издержки зависят от расхода обоих факторов (x_1 и x_2) и от цен этих факторов (c_1 и c_2). Совокупные издержки выражаются формулой $b = c_1 x_1 + c_2 x_2$. Требуется при данных совокупных издержках определить такое количество факторов производства, которое максимизирует объем продукции Z.

Математическая модель этой задачи имеет вид: определить такие переменные x_1 и x_2, удовлетворяющие условиям

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = b \tag{5.3}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \tag{5.4}$$

при которых функция

$$Z = f\,(x_1, x_2\,) \tag{5.5}$$

достигает максимума. Как правило, функция (5.5) может иметь произвольный нелинейный вид.

Используя классические методы оптимизации, следует четко представлять себе различие между *локальным* экстремумом функции, *глобальным* и *условным* экстремумом. Понятие условного экстремума вводится для случая, когда число переменных $n \geq 2$. Будем полагать, что функция $Z = f\,(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n\,) = f(X)$ дважды дифференцируема в точке $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\,)$, $(X^* \in D(f))$ и в некоторой ее окрестности.

Если для всех точек X этой окрестности $f(X^*) \geq f\,(X)$ или $f\,(X^*) \leq f(X)$, то говорят, что функция $f(X)$ имеет экстремум в X^* (соответственно максимум или минимум).

Точка X^* , в которой все частные производные функции $Z = f\,(X)$ равны 0, называется *стационарной точкой*.

Необходимое условие экстремума.

Если в точке X^* функция $Z = f(X)$ имеет экстремум, то частные производные функции в этой точке равны нулю:

$$f'_{x1}(X^*) = 0,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Следовательно, точки экстремума функции $Z = f(X)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} f'x_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f'x_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'x_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Для получения достаточных условий следует определить в стационарной точке знак дифференциала второго порядка. Дифференциал второго порядка обозначается $d^2f(x_1, x_2, ..., x_n)$ $f'_{x1}(X)$ найти частную производную по переменной x_j, то получим частную производную второго порядка по переменным x_i, x_j, которая обозначается $f''_{xi,\,xj}(X)$. В этом случае

$$d^2 f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_J}(X) \Delta x_i \Delta x_j\ . \quad (5.7)$$

Достаточные условия экстремума.

Для двух переменных:
если $\Delta > 0$ и $a_{11} < 0$ $(a_{22} < 0)$, то в точке X^0 функция имеет максимум: если $\Delta > 0$ и $a_{11} > 0$ $(a_{22} > 0)$,то в точке X^0 – минимум (в этих случаях $X^0 = X^*$);
если $\Delta < 0$, то экстремума нет;
если $\Delta = 0$, то вопрос об экстремуме остается открытым.

В общем виде задача НЛП описывается с помощью следующей модели *нелинейного программирования:*

$$\begin{gathered} f(x) \to max; \\ g_i(x) \le b_i, i = 1, \dots, m; \\ x \ge 0, \end{gathered} \quad (5.8)$$

где x = $(x_1, x_2, ..., x_n)$ — вектор переменных задачи.

Задача (5.8) называется задачей НЛП *в стандартной форме на максимум.* Можно так же сформулировать и задачу НЛП *на минимум.* Вектор x = $(x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненты x_j которого удовлетворяют ограничениям $g_i(x) \le b_i$, называется *допустимым решением* или *допустимым планом* задачи НЛП. Совокупность всех допустимых планов называется *множеством допустимых планов.* Допустимое решение задачи НЛП, на котором целевая функция $f(\mathbf{x})$ достигает максимального значения, называется *оптимальным решением* ЗНЛП.

С точки зрения экономической интерпретации $f(\mathbf{x})$ может рассматриваться как доход, который получает фирма (предприятие) при плане выпуска **x**, а $g_i(x) \le 0$ как технологические ограничения на возможности выпуска продукции. В данном случае они являются обобщением ресурсных ограничений в ЗЛП $(a_i x - b_i \le 0)$.

Эффективность алгоритма решения ЗНЛП может существенно зависеть от постановки задачи, от изменения масштабов измерения тех или иных переменных. Поэтому алгоритмы ориентируются на решение определенного класса задач, и как правило, они не гарантируют правильность решения задач.

Перечислим основные свойства ЗНЛП, которые существенно усложняют процесс их решения по сравнению с задачами линейного программирования:

1. Множество допустимых планов **x** может иметь очень сложную структуру (например, быть невыпуклым или несвязным).

2. Оптимум задачи может находиться как внутри области допустимых решений, так и на её границах (где он, вообще говоря, не будет совпадать ни с одним из локальных экстремумов).

3. Целевая функция может быть недифференцируемой, что затрудняет применение классических методов математического анализа.

В силу названных факторов задачи нелинейного программирования настолько разнообразны, что для них не существует общего метода решения.

5.2. Динамическое программирование. Принципы построения динамических моделей

В отличие от статических, независимых от времени моделей динамические модели описывают экономические или управленческие процессы или системы в движении, то есть, в зависимости от временных периодов.

Динамическое программирование (ДП) - это метод оптимизации многошаговых или многоэтапных процессов, критерий эффективности которых обладает аддитивным свойством (т.е. общий доход процесса равен сумме локальных доходов на отдельных этапах). В задачах динамического программирования критерий эффективности называется доходом.

Динамическое моделирование – многошаговый процесс, каждый шаг которого, соответствует поведению экономической системы в определенный временный период. Каждый текущий шаг получает результаты предыдущего шага, который по определенным правилам определяет текущий результат и формирует данные для следующего шага [10, 11].

Таким образом, динамическая модель позволяет исследовать развитие сложной экономической системы, например, предприятия, на протяжении определенного периода планирования в условиях изменения ресурсного обеспечения (сырья, кадров, финансов, техники), и полученные результаты представить в плане развития предприятия на заданный период.

Для решения динамических задач в математическом программировании сформировался соответствующий класс моделей под названием «Динамическое программирование», его основателем стал известный американский математик Р. Беллман. Им предложен специальный метод решения задач этого класса на основе «принципа оптимальности», согласно которому оптимальное решение задачи находится путем ее разбиения на n этапов, каждый из которых представляет подзадачу относительно одной переменной. Расчет выполняется таким образом, чтобы оптимальный результат одной подзадачи являлся исходным для следующей подзадачи с учетом уравнений и ограничений связи между ними, а результат последней из них является результатом всей задачи. Данный метод по существу определяет порядок поэтапного решения задачи допускающей её декомпозицию (это более приемлемый путь, чем непосредственное решение задачи, в исходной постановке) с помощью рекуррентных вычислительных процедур [11].

Общим для всех моделей этой категории является то, что текущие управляющие решения «проявляются» как в период, относящийся непосредственно к моменту принятия решения, так и в последующие периоды. Следовательно, наиболее важные экономические последствия проявляются в разные периоды, а не только в течение одного периода. Такого рода экономические последствия, как правило, оказываются существенными в тех случаях, когда речь идет об управляющих решениях, связанных с возможностью новых капиталовложений, увеличением производственных мощностей или обучением персонала с целью создания предпосылок для увеличения прибыльности или сокращения издержек в последующие периоды.

Принцип оптимальности Беллмана. Еще раз подчеркнем, что смысл подхода, реализуемого в динамическом программировании, заключен в замене решения исходной многомерной задачи последовательностью задач меньшей размерности.

Перечислим основные требования к задачам, выполнение которых позволяет применить данный подход [11]:

1) объектом исследования должна служить управляемая система (объект) с заданными допустимыми состояниями и допустимыми управлениями;

2) задача должна позволять интерпретацию как многошаговый процесс, каждый шаг которого состоит из принятия решения о выборе одного из допустимых управлений, приводящих к изменению состояния системы;

3) задача не должна зависеть от количества шагов и быть определенной на каждом из них;

4) состояние системы на каждом шаге должно описываться одинаковым (по составу) набором параметров;

5) последующее состояние, в котором оказывается система после выбора решения на k-м шаге, зависит только от данного решения и исходного состояния к началу k-го шага; это свойство является основным с точки зрения идеологии динамического программирования и называется отсутствием последействия.

Типичными областями применения моделей динамического программирования при принятии решений являются:

● разработка правил управления запасами, устанавливающих момент пополнения запасов и размер пополняющего заказа;

● разработка принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию;

● определение необходимого объема запасных частей, гарантирующего эффективное использование дорогостоящего оборудования;

● распределение дефицитных капитальных вложений между возможными новыми направлениями их использованием;

● выбор методов проведения рекламной кампании, знакомящей покупателя с продукцией фирмы.

В задачах, решаемых методом динамического программирования, значение целевой функции (оптимизируемого критерия) для всего процесса получают простым суммированием частных значений $f_i\,(x)$ того же критерия на отдельных шагах. То есть в задачах, решаемых методом динамического программирования, значение целевой функции (оптимизируемого критерия) для всего процесса получают простым суммированием частных значений $f_i\,(x)$ того же критерия на отдельных шагах:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x). \tag{5.9}$$

Во многих практических задачах критерий $F(x)$ аддитивен. Если в первоначальной постановке задачи критерий не аддитивен, то постановку задачи надо изменить так, чтобы он стал аддитивным. К примеру, если рассматривается критерий F (x), представленный в виде произведения выигрышей, достигаемых на отдельных этапах $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot ,..., \cdot f_m(x)$ (такой критерий называют мультиплексным), то можно просто преобразовать его к аддитивному, прологарифмировав выражение для $F(x)$

$$lgF(x) = \sum_{i=1}^{m} lg\, f_i(x). \tag{5.10}$$

Обозначим $V = lgF(x)$, $V_j = lgf_i(x)$. Получим новый критерий

$$V = \sum_{i=1}^{m} V_i, \tag{5.11}$$

обладающий свойством аддитивности и имеющий тот же оптимум, что и $F(x)$.

Рассмотрим общую схему решения задач с аддитивным критерием. Процесс управления состоит из m шагов. На каждом i-том шаге управление x_i переводит систему из состояния S_{i-1}, достигнутого в результате (i-1)-го шага, в новое состояние S_i, которое зависит от состояния S_{i-1} и выбранного управления x_i,:

$$S_i = S_i(S_{i-1}, x_i) \tag{5.12}$$

Здесь существенно, чтобы новое состояние S_i, зависело только от состояния S_{i-1} и управления x_i и не зависело от того, каким образом система пришла в состояние S_{i-1}. В крайнем случае, это достигается увеличением числа состояний системы (в понятие «состояние системы» входят те параметры, от которых зависит будущий результат).

Принцип оптимальности. Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что, каковы бы ни были первоначальное состояние и решение, последующее решение должно определять оптимальную стратегию относительно состояния, полученного в результате предыдущего решения.

Рассмотрим задачу о максимизации целевой функции $F(x)$ на m-шаговом процессе. Под влиянием управлений $x_1, x_2, \ldots, x_m$ система переходит из начального состояния S_0 в конечное $S_{кон}$. За m шагов получают выигрыш (значение целевой функции)

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i\,(S_{i-1}, x_i), \tag{5.13}$$

где $f_i\,(S_{i-1}, x_i)$ - выигрыш на i-том шаге.

Принцип оптимальности позволяет заключить, что при любом начальном управлении x_i имеет место соотношение

$$F(x) = f_1(S_0, x_1) + [f_2(S_1, x_2) + \cdots + f_m(S_{m-1}, x_m)] = f_1(S_0, x_1) + \\ + f_{m-1}[S_{m-1}(S_0, x_0)\,]. \tag{5.14}$$

Поскольку это соотношение справедливо для всех начальных решений x_1, то, чтобы найти максимальный выигрыш, надо найти максимум по x_1 значения $F(x)$. Это приводит к основному функциональному уравнению - к рекуррентной формуле динамического программирования (РДП):

$$f_m(S_0) = maxF(x) = max\big[f_1(S_0, x_1) + f_{m-1}[S_{m-1}(S_0, x_0)]\big]; m \geq 1. \tag{5.15}$$

Представленное выше выражение означает, что, зная $f_0(S)$, можно вычислить $f_1(S)$, зная $f_1(S)$, вычислить $f_2(S)$ и т.д. Такая вычислительная процедура именуется рекуррентным алгоритмом, а выражение - рекуррентной формулой или рекуррентным соотношением.

Согласно этому алгоритм получения решения можно определить как последовательность функций выигрыша, или же, как последовательность стратегий $\{x_n(S_0)\}$. Эти последовательности определяют друг друга - в этом и состоит смысл рекуррентных соотношений. Причем имеется только одна последовательность оптимальных значений целевой функции, хотя могут быть различные стратегии, которые приводят к тому же максимальному выигрышу.

В динамическом программировании, планируя многоэтапную операцию, управление на каждом шаге выбирают с учетом будущего. И только на одном шаге - последнем - такой необходимости нет. Этот последний шаг можно спланировать так, чтобы он приносил наибольшую выгоду.

Планируя оптимальным образом последний шаг, к нему присоединяют предпоследний и находят согласно основной рекуррентной формуле наибольший выигрыш на этих двух шагах и т.д. Поэтому в динамическом программировании процесс разворачивается от конца к началу.

А как спланировать последний шаг, если мы не знаем, каков результат предпоследнего шага? Для этого делают различные предположения о том, чем закончится предпоследний шаг, и для каждого предположения выбирают управление на последнем, которое запоминают до конца решения задачи. Такое оптимальное управление, выбранное при определенном условии о том, каков результат предыдущего шага, называют условным оптимальным управлением.

5.3. Алгоритм динамического программирования

1. На выбранном шаге задаем набор (определяемый условиями-ограничениями) значений переменной, характеризующей последний шаг, возможные состояния системы на предпоследнем шаге. Для каждого возможного состояния и каждого значения выбранной переменной вычисляем значения целевой функции. Из них для каждого исхода предпоследнего шага выбираем оптимальные значения целевой функции и соответствующие им значения рассматриваемой переменной. Для каждого исхода предпоследнего шага запоминаем оптимальное значение переменной (или несколько значений, если таких значений больше одного) и соответствующее значение целевой функции.

2. Переходим к оптимизации на этапе, предшествующем предыдущему (движение «вспять»), отыскивая оптимальное значение новой переменной при фиксированных найденных ранее оптимальных значениях следующих переменных. Оптимальное значение целевой функции на последующих шагах (при оптимальных значениях последующих переменных) считываем из предыдущей таблицы. Если новая переменная характеризует первый шаг, то переходим к п. 3. В противном случае повторяем п. 2 для следующей переменной.

3. При данном в задаче исходном условии для каждого возможного значения первой переменной вычисляем значение целевой функции. Выбираем оптимальное значение целевой функции, соответствующее оптимальному/оптимальным значению/значениям первой переменной.

4. При известном оптимальном значении первой переменной определяем исходные данные для следующего (второго) шага и по последней таблице - оптимальное(ые) значение(ия) следующей (второй) переменной.

5. Если следующая переменная не характеризует последний шаг, то переходим к п. 4. Иначе – переходим к п. 6.

6. Формируем (выписываем) оптимальное решение.

5.4. Метод динамического программирования в задаче оптимального управления запасами

Постановка задачи. Предприятие разрабатывает календарный план выпуска изделий на плановый период, состоящий из нескольких этапов. Текущая деятельность предприятия характеризуется следующими параметрами:

1) длительностью одного этапа планового периода;
2) выпуском продукции в течение этапа;
3) спросом на продукцию в конце этапа;
4) уровнем запасов изделий на конец этапа;
5) максимально возможным выпуском изделий на одном этапе;
6) максимально возможным уровнем запасов на одном этапе.

Известны затраты на каждом этапе планового периода, связанные с выпуском изделий и хранением запасов изделий. Также известны затраты на формирование начального запаса.

Необходимо определить план производства изделий для заданного спроса продукции при минимальных затратах.

Математическая постановка задачи.

Введем следующие обозначения: N – число календарных этапов из которых состоит плановый период; при этом каждый n-й этап ($n = 1, N$) характеризуется следующими параметрами:

i_{n-1} – запас, оставшийся после окончания (n-1)-го этапа;

x_n – объем производства предприятия на n-м этапе;

d_n – величина спроса на продукцию предприятия на n-м этапе;

x_{max} – максимальный объем производства на одном этапе;

i_{max} – максимальный объем запасов на одном этапе;

$C_n(x_n, i_{n-1})$ – затраты на n-м этапе функционирования, связанные с выпуском x_n деталей и хранением i_{n-1} запасов деталей.

Тогда критерий оптимизации имеет вид:

$$F = \sum_{n=1}^{N} C_n(x_n i_{n-1}) \rightarrow min, \qquad (5.16)$$

при ограничениях:

1) ограничение на удовлетворение спроса на каждом этапе:

$$d_n \le i_{n-1} + x_n, \ n = 1, \ N; \qquad (5.17)$$

2) установление объема запаса в конце n-го периода:

$$i_n = i_{n-1} + x_n - d_n; \ n=1,N; \ x_n = 0, x_{max}; \ i_n = 0, i_{max}. \qquad (5.18)$$

Выбор метода решения.

В изложенной задаче необходимо учитывать изменение моделируемого процесса во времени и влияние времени на критерий оптимальности. Для решения таких задач используется метод динамического планирования (динамическое программирование).

Определим основные компоненты и понятия:

1) этап - календарный период деятельности предприятия, n=1,N;

2) состояние - объем запасов i_n в конце n периода;

3) управление - планируемый объем производства x_n на n-м периоде;

4) локальный доход - затраты на n-м этапе, связанные с хранением запасов и производством новой продукции $C_n(x_n,i_{n-1})$;

5) оператор перехода – устанавливает связь между объемом запасов в конце n-1-го и n-го этапов: $i_n = i_{n-1} + x_n - d_n$.

Введем функцию:

$$f_n(i_n) = \min\sum C_n(\boldsymbol{x}_n,i_{n-1}). \qquad (5.19)$$

Функциональное уравнение Беллмана для такой задачи:

$$f_n(i_n) = \min(f_n(i_{n-1}) + C_n(x_n,i_{n-1})). \qquad (5.20)$$

Если

$$C_n(x_n,i_{n-1}) = c_n(\mathrm{x}_n) + h^* i_{n-1}, \qquad (5.21)$$

где $c_n(x_n)$ – затраты на производство продукции на n-ном этапе в x_n объеме;

$h^* i_{n-1}$ – затраты на хранение продукции на n-ном этапе в объеме i_0.

Пусть известны $c_0(x_0)$ - затраты на формирование начального запаса.

Тогда на шаге 1 принятия решения уравнение Беллмана (5.20) примет вид:

$$f_1(i_1) = \min(f_1(i_0) + C_1(x_1,i_0)) = \min(f_1(i_0) + c_0(x_0) + h^* i_0) \qquad (5.22)$$

Все переменные в уравнении известны, а значит его можно решить.

На шаге n уравнение (5.20) имеет вид:

$$f_n(i_n) = \min(f_n(i_{n-1}) + c_n(\mathrm{x}) + h^* i_{n-1}) \qquad (5.23)$$

Алгоритм решения задачи.

Для получения оптимального решения нам необходимо разработать алгоритм решения уравнения Беллмана (5.12) на произвольном шаге принятия решения n.

Для этого целесообразно воспользоваться двумя таблицами. Заполнение таблицы 1 проводится так: столбцы – величина запаса c предыдущего шага, строки – объем производства на текущем этапе. Число столбцов ограничивается i_{max}, а число строк x_{max}. Клетка таблицы делится на две части. В одной части записываются значения состояния в конце текущего этапа ($i_n = i_{n-1} + x_n - d_n$). Если $i_n < 0$,то это недопустимое состояние, клетка вычеркивается из рассмотрения. Во второй части клетки записывается значение функции

$$f_n(i_n) = c_{n-1}(x_{n-1}) + c_n(x_n) + h^* i_{n-1} \ . \qquad (5.24)$$

Среди допустимых клеток находятся клетки с одинаковыми значениями состояний, и выбирается клетка, для которой функция $f_n(i_n)$ минимальна, для нее фиксируется оптимальный объем производства. Эти результаты записываются в таблицу 2.

Такие шаги повторяются N раз.

Для нахождения оптимальных объемов производства x_n и оптимальных уровней запасов i_n производится решение задачи в обратном порядке. На последнем этапе ($n = N$) из таблицы 2 выбирается x_n и i_n , соответствующие оптимальной (минимальной) функции затрат $f_n(i_n)$. На этапах $n < N$ из таблицы 2 выбираются строки для которых x_n и i_n такие, что бы $|d_n - x_{n+1}| = i_n$. Обратное решение задачи производится до этапа $n = 1$.

6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Как прикладная дисциплина теория графов позволяет описывать и исследовать многие технические, экономические, биологические и социальные системы[1]. Задача настоящего материала заключается в том, чтобы изложить основные понятия и результаты теории графов, необходимые для постановки и решения задач управления экономическими системами.

6.1. Основные понятия теории графов

Граф – система, которая интуитивно может быть рассмотрена как множество вершин и множество соединяющих их линий (геометрический способ задания графа – на рис. 6.1). Например, атлас автодорог, где населенные пункты – кружки, а соединяющие линии – автодороги.

Кружки называются *вершинами* графа, линии со стрелками – *дугами*, без стрелок – *ребрами*. Граф, в котором направление линий не выделяется (все линии являются ребрами), называется *неориентированным*; граф, в котором направление линий принципиально (линии являются дугами) называется *ориентированным*.

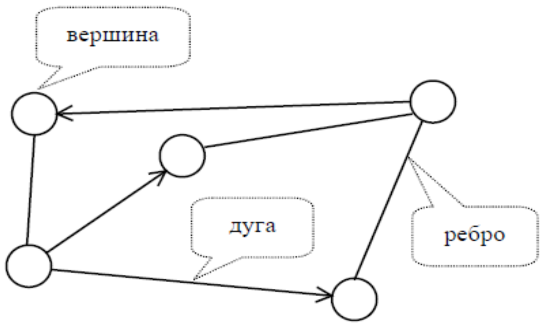


Рис.6.1. Образец графа

Исходя из теории множеств, можно дать следующее определение графа: задано конечное множество X, состоящее из n элементов (X = {1, 2, ..., n}), называемых вершинами графа, и подмножество V декартова произведения $X\times X$, то есть $V \subseteq X_2$, множеством дуг. Тогда ориентированным графом G называется совокупность (X, V). Неориентированным графом называется совокупность множества X и множества неупорядоченных пар элементов, каждый из которых принадлежит множеству X.

[1] Начало теории графов датируют 1736 г., когда Л. Эйлер решил популярную вто время «задачу о кенигсбергских мостах». Термин «граф» впервые был введен спустя 200 лет (в 1936 г.) Д. Кенигом.

Дугу между вершинами *i и j,* $i, j \in X$, будем обозначать (i, j). Число дуг графа будем обозначать m ($V = (v_1, v_2, ..., v_m)$).

Подграфом называется часть графа, образованная подмножеством вершин вместе со всеми ребрами (дугами), соединяющими вершины из этого множества. Если из графа удалить часть ребер (дуг), то получим *частичный граф*.

Две вершины называются *смежными*, если они соединены ребром (дугой). Смежные вершины называются граничными вершинами соответствующего ребра (дуги), а это ребро (дуга) – *инцидентным* соответствующим вершинам.

Путем называется такая последовательность дуг (в ориентированном графе), когда конец одной дуги является началом другой дуги. *Простой путь* – путь, в котором ни одна дуга не встречается дважды. *Элементарный путь* – путь, в котором ни одна вершина не встречается дважды. *Контур* – путь, у которого конечная вершина совпадает с начальной вершиной. *Длиной пути* (контура) называется число дуг пути (или сумма длин его дуг, если последние заданы).

Граф, для которого из $(i, j) \in V$ следует $(j, i) \in V$ называется симметрическим. Если из $(i, j) \in V$ следует, что $(j, i) \notin V$, то соответствующий граф называется *антисимметрическим.*

Цепью называется множество ребер (в неориентированном графе), которые можно расположить так, что конец (в этом расположении) одного ребра является началом другого. Другое определение: *цепь* – последовательность смежных вершин. Замкнутая цепь называется *циклом*. По аналогии с простыми элементарным путем, можно определить соответственно *простые и элементарные цепь и цикл*. Любой элементарный цикл является простым, обратное утверждение в общем случае неверно. Элементарная цепь (цикл, путь, контур), проходящая через все вершины графа называется *гамильтоновой цепью* (соответственно – циклом, путем, контуром). Простая цепь (цикл, путь, контур), содержащая все ребра (дуги) графа называется *эйлеровой цепью* (соответственно – циклом, путем, контуром).

Если любые две вершины графа можно соединить цепью, то граф называется *связным*. Если граф не является связным, то его можно разбить на связные подграфы, называемые *компонентами*.

Связностью графа называется минимальное число ребер, после удаления которых граф становится несвязным. Для ориентированных графов, если любые две вершины графа можно соединить путем, то граф называется *сильно связным.* Связность графа не может быть больше, чем $[2m / n]$, где $[x]$ – целая часть числа x; существуют графы с n вершинами и m ребрами, имеющие связность $[2m / n]$; в сильно связном графе через любые две вершины проходит контур.

Связный граф, в котором существует эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом.*

В неориентированном графе *степенью вершины* i называется число d_i инцидентных ей ребер. Очевидно, $d_i \le n - 1$, $i \in X$. Граф, степени всех вершин которого равны $n - 1$, называется *полным*. Граф, все степени вершин которого равны, называется *однородным*.

Вершина, для которой не существует инцидентных ей ребер ($d_i = 0$) называется *изолированной*. Вершина, для которой существует только одно инцидентное ей ребро ($d_i = 1$) называется *висячей*.

Известно, что $\sum_{i \epsilon X} d_i = 2m$ (данное выражение называется «леммой о рукопожатиях» – поскольку в каждом рукопожатии участвуют две руки, то при любом числе рукопожатий общее число пожатых рук четно (при условии, что каждая рука учитывается столько раз, во скольких рукопожатиях она участвовала)); в любом графе число вершин нечетной степени четно [13].

Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны (теорема Эйлера). Обозначим n_k –число вершин, имеющих степень k, $k = 0,1,2,...$ Тогда: $\sum_{k:n_{k>0}} k\, n_k = 2m$.

Для ориентированных графов для каждой вершины можно ввести два числа – полустепень исхода di^+ (число выходящих из нее вершин) и полустепень захода d_i^-(число входящих в нее вершин). В дальнейшем, если не оговорено особо, будем рассматривать графы без петель, то есть без дуг, у которых начальная и конечная вершины совпадают. Известно, что: $\sum_{i \epsilon X} d_i{}^- = \sum_{i \epsilon X} d_i{}^+ = m$ для эйлерова графа имеет место: $d_i{}^+ = d_i{}^-; i = \overline{1,n}$; эйлеров граф является объединением контуров, попарно не имеющих общих ребер.

Определим матрицу смежности графа как квадратную матрицу $n \times n$, элемент a_{ij} которой равен единице, если $(i, j) \epsilon V$, и нулю, если $(i, j) \epsilon V$, $i, j \epsilon X$. Для неориентированного графа матрица смежности всегда симметрическая.

Определим *матрицу инциденций* для ребер графа как прямоугольную матрицу n × m, элемент r_{ij} которой равен единице, если вершина i инцидентна ребру j, и нулю в противном случае, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Аналогично определяется матрица инциденций для дуг графа – как прямоугольная матрица $m \times n$, элемент r_{ij} которой равен плюс единице, если дуга U_j исходит из вершины i, минус единице, если дуга U_j заходит в вершину i, и нулю в остальных случаях, $i = 1,\ldots,$ n, $j = 1,\ldots, m$.

Деревом называется связный граф без простых циклов, имеющий не менее двух вершин (дерево можно также понимать как связный граф, не содержащий связного частичного графа, состоящего из всех его вершин). Для дерева $m = n - 1$, а число висячих вершин равно
$n_j = 2 + \sum_{i \ge 2} (i-2) n_i$. Легко показать, что в дереве любые две вершины связаны единственной цепью.

Прадеревом называется ориентированное дерево, у которого одна из вершин, называемая *корнем*, не имеет заходящих дуг, а степени захода остальных вершин равны единице.

Плоским (планарным) называется граф, который можно изобразить на плоскости так, что различным вершинам соответствуют различные кружки и ни какие два ребра не имеют общих точек, отличных от их границ (не пересекаются). Для плоского графа существует понятие *грани* – части плоскости, ограниченной ребрами и не содержащей внутри себя ни вершин, ни ребер. Для простоты определения грани в дальнейшем в основном будем рассматривать графы без висячих вершин. Например, дерево имеет всего одну внешнюю грань – всю плоскость. *Степенью грани* называется число ее граничных ребер (висячие ребра считаются дважды).

Язык графов оказывается удобным для описания многих технических, экономических, биологических, социальных и других систем.

Используя приложения теории графов можно решать многие задачи (примеры указаны ниже)

1. *Транспортные задачи*, в которых вершинами графа являются пункты, а ребрами – дороги (автомобильные, железные и др.) и / или другие транспортные (например, авиационные) маршруты. Другой пример – сети снабжения (энерго-, газоснабжения, снабжения товарами и т.д.), в которых вершинами являются пункты производства и потребления, а ребрами – возможные маршруты перемещения (линии электропередач, газопроводы, дороги и т.д.). Соответствующий класс задач оптимизации потоков грузов, размещения пунктов производства и потребления и т. д., иногда называется *задачами обеспечения* или *задачами о размещении*. Их подклассом являются *задачи о грузоперевозках* [12].

2. *«Технологические задачи»*, в которых вершины отражают производственные элементы (заводы, цеха, станки и т.д.), а дуги – потоки сырья, материалов и продукции между ними – заключаются в определении оптимальной загрузки производственных элементов и обеспечивающих эту загрузку потоков [13].

3. *Обменные схемы*, являющиеся моделями таких явлений, как бартер, взаимозачеты и т.д. Вершины графа при этом описывают участников обменной схемы (цепочки), а дуги – потоки материальных и финансовых ресурсов межу ними. Задача заключается в определении цепочки обменов, оптимальной с точки зрения, например, организатора обмена и согласованной с интересами участников цепочки и существующими ограничениями [12-14].

4. *Управление проектами*. С точки зрения теории графов проект – совокупность операций и зависимостей между ними. Хрестоматийным примером является проекты строительства некоторого объекта. Совокупность моделей и методов, использующих языки результаты теории графов и ориентированных на решение задач управления проектами, получила название *календарно-*

сетевого планирования и управления (КСПУ) [12]. В рамках КСПУ решаются задачи определения последовательности выполнения операций и распределения ресурсов между ними, оптимальных с точки зрения тех или иных критериев (времени выполнения проекта, затрат, риска и др.).

5. *Модели коллективов и групп*, используемые в социологии, основываются на представлении людей или их групп в виде вершин, а отношений между ними (например, отношений знакомства, доверия, симпатии и т.д.) – в виде ребер или дуг. В рамках подобного описания решаются задачи исследования структуры социальных групп, их сравнения, определения агрегированных показателей, отражающих степень напряженности, согласованности взаимодействия, и др.

6. *Модели организационных структур*, в которых вершинами являются элементы организационной системы, а ребрами или дугами – связи между ними (информационные, управляющие, технологические и др.) [15, 16].

6.2. Экстремальные пути и контуры на графах

Задачи поиска кратчайших и длиннейших путей на графах возникают в различных областях управления. Сначала рассмотрим задачи о кратчайшем пути, затем – задачи об экстремальных контурах.

Задача о кратчайшем пути. Пусть задана *сеть* из $n + 1$ вершин, то есть ориентированный граф, в котором выделены две вершины – вход (нулевая вершина) и выход (вершина с номером n). Для каждой дуги заданы числа, называемые длинами дуг. *Длиной пути* (*контура*) называется сумма длин входящих в него дуг (если длины дуг не заданы, то длина пути (контура) определяется как число входящих в него дуг). Задача заключается в поиске кратчайшего пути (пути минимальной длины) от входа до выхода сети[2].

Для существования кратчайшего пути необходимо и достаточно отсутствия в сети контуров отрицательной длины.

Предположим, что в сети нет контуров. Тогда всегда можно пронумеровать вершины таким образом, что для любой дуги (i, j) имеет место $j > i$. Такая нумерация называется *правильной*. Легко показать, что в сети без контуров всегда существует правильная нумерация.

Обозначим l_{ij} – длину дуги $(i; j)$. Кратчайший путь в сети, имеющей правильную нумерацию, определяется следующим алгоритмом.

Алгоритм 1

Шаг 0: помечаем нулевую вершину индексом $\lambda_0 = 0$;

[2] В дальнейшем будем предполагать, что в любую вершину сети можно попасть из входа и из любой вершины можно попасть в выход (вершины, не удовлетворяющие этому требованию, можно удалить).

Шаг k: помечаем вершину k индексом $\lambda_k = \min(\lambda_i + l_{ik})$ при $i < k$.

Индекс выхода λ_n будет равен длине кратчайшего пути. На рис. 6.2 показан пример применения алгоритма для определения кратчайшего пути (числа у дуг равны длинам дуг, индексы вершин помещены в квадратные скобки, кратчайший путь выделен двойными линиями).

Когда индексы (называемые в некоторых задачах *потенциалами вершин*) установятся, кратчайший путь определяется методом обратного хода от выхода к входу, то есть кратчайшим является путь $\mu = (0; i_1; i_2; \ldots; i_{n-1}; n)$, такой, что $l_{i_{n-1}n} = \lambda_n - \lambda_{n-1}$ и т.д.

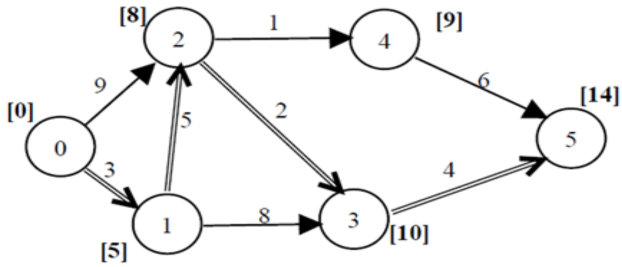


Рис. 6.2. Поиск кратчайшего пути

Следующий алгоритм дает возможность определять кратчайший путь в общем случае (то есть при произвольной нумерации вершин).

Алгоритм 2 (алгоритм Форда)

Шаг 0: помечаем нулевую вершину индексом $l_0 = 0$, все остальные вершины индексами $l_i = +\infty$, $i = 1, \ldots, n$;

Шаг k: рассматриваем все дуги. Для дуги $(i; j)$, если $\lambda_j - \lambda_i > l_{ij}$, то вычисляем новое значение $'\lambda_j = \lambda_i + l_{ij}$.

Индексы устанавливаются за конечное число шагов. Обозначим $\{\lambda_i^*\}$ – установившиеся значения индексов, которые обладают следующим свойством: величина λ_i^* равна длине кратчайшего пути из нулевой вершины в вершину i. Кратчайший путь из вершины 0 в вершину i определяется методом обратного хода.

Если длины всех дуг не отрицательны, то для поиска кратчайшего пути применим следующий алгоритм.

Алгоритм 3

Шаг 0: помечаем нулевую вершину индексом $\lambda_0 = 0$;

Шаг k: пусть уже помечено некоторое множество вершин. Обозначим Q множество непомеченных вершин, смежных с помеченными. Для каждой вершины $k \in Q$ вычисляем величину $\xi_k = min(\lambda_k + l_{ki})$, где минимум берется по всем помеченным вершинам i, смежным с вершиной k. Помечаем вершину k, для которой величина ξ_k минимальна, индексом $\lambda_k = \xi_k$.

Подобную процедуру повторяем до тех пор, пока не будет помечена вершина n. Длина кратчайшего пути равна λ_n, а сам кратчайший путь определяется так, как это было описано выше.

Запишем задачу о кратчайшем пути как задачу линейного программирования (ЛП). Пусть $x_{ij} = 0$, если дуга ($i; j$) входит в путь[3] μ, $x_{ij} = 0$, если дуга ($i; j$) не входит в путь μ, $i, j = 0, \ldots, n$.

Задачу о минимальном пути можно записать в виде:

$$L(x) = \sum_{i,j=1}^{n} l_{ij} x_{ij} = min_x; \qquad (6.1)$$

$$\sum_j x_{0j} = 1, \sum_j x_{jn} = 1 \qquad (6.2)$$

$$\sum_j x_{kj} = \sum_j x_{jk}, k = \overline{1, n-1} \qquad (6.3)$$

Любое решение системы (6.2) - (6.3) определяет путь в сети без контуров (но не в сети с контурами). Пусть все контуры имеют строго положительную длину, т. е. нет контуров отрицательной и нулевой длины. Тогда решение задачи (6.1) - (6.3) определяет путь кратчайшей длины. Ограничение (6.2) отражает требование того, что в искомом пути из входа выходит одна дуга и в выход заходит одна дуга. Ограничение (6.3) обеспечивает равенство числа заходящих и выходящих в любую промежуточную вершину дуг.

Сформулируем задачу ЛП, двойственную задаче (6.1) - (6.3), поставив в соответствие ограничениям (6.2) двойственные переменные λ_0 и λ_n, а ограничениям (6.3) – двойственные переменные $\{\lambda_i\}$, $i = 1, \ldots, n - 1$:

$$\lambda_n - \lambda_0 \rightarrow max \qquad (6.4)$$

$$\lambda_j - \lambda_i \le l_{ij},\ i, j = 0, \ldots, n\ . \qquad (6.5)$$

По теореме двойственности линейного программирования [13], для оптимальных решений задач (6.1) - (6.3) и (6.4) - (6.5) значения целевых функций совпадают.

Задача (6.4) - (6.5) называется задачей о потенциалах вершин графа. Общая ее формулировка такова: найти потенциалы вершин $\{\lambda_i\}$, удовлетворяющие системе неравенств (6.5) и максимизирующие некоторую функцию $F(\lambda)$, где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Примером является задача о ближайших потенциалах, в которой $F(\lambda) = \sum_j \left|\lambda_j - \lambda_j^0\right|$ где $\left\{\lambda_j^0\right\}$ могут интерпретироваться как желательные потенциалы.

Аналогично задаче о кратчайшем пути формулируется и решается задача о максимальном пути – достаточно изменить знаки дуг на противоположные и решить задачу о кратчайшем пути. Для существования решения задачи

[3] Будем считать, что имеются две дуги между каждой парой вершин, так как, если их нет в исходном графе, то, положив их длину равной бесконечности, мы заведомо исключим их из решения.

о максимальном пути необходимо и достаточно отсутствия контуров положительной длины.

В задаче поиска пути максимальной надежности длины дуг интерпретируются, например, как вероятности того, что существует связь между соответствующими двумя пунктами. При замене длины дуг их логарифмами, взятыми с обратными знаками, получается, что путь максимальной надежности в исходном графе будет соответствовать кратчайшему пути в новом графе.

К таким же сложным задачам относятся и задачи поиска кратчайших или длиннейших путей или контуров, проходящих через все вершины графа (элементарный путь (контур), проходящий через все вершины графа, называется гамильтоновым путем (контуром)). Классическим примером задачи поиска гамильтонова контура является задача коммивояжера, заключающаяся в следующем. Коммивояжер (бродячий торговец) должен посетить n городов, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться в исходный пункт своего путешествия. Заданы неотрицательные длины дуг, интерпретируемые как расстояние между городами или стоимость проезда. Требуется найти гамильтонов контур минимальной длины (в графе из n вершин существует $n!$ (число перестановок) гамильтоновых контуров).

Алгоритмы решения задачи о кратчайшем пути позволяют решать широкий класс задач дискретной оптимизации. В качестве примера приведем задачу целочисленного линейного программирования – задачу о ранце (о рюкзаке), к которой сводятся многие практически важные задачи определения оптимальной комбинации факторов при ограничениях на общий вес, площадь, объем, финансирование и т.д.

Задача о ранце. Пусть имеется n предметов, которые могут быть полезны в походе. Полезность i-го предмета оценивается числом a_i, вес предмета (или его объем) – b_i. Суммарный вес, который может нести турист (объем рюкзака), ограничен величиной R. Требуется найти набор предметов, обладающий максимальной суммарной полезностью и удовлетворяющий ограничению.

Обозначим x_i – переменную, принимающую значение ноль (если i-й предмет не кладется в ранец) или единица (если i-й предмет кладется в ранец). Тогда задача о ранце имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to max_x, \qquad (6.6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \le R. \qquad (6.7)$$

Верхняя оценка числа возможных комбинаций – 2^n. Однако для решения задачи о ранце существует эффективный алгоритм – *метод динамического программирования*. При его использовании строится сеть (см. примеры в [12]) по следующим правилам. По оси абсцисс будем последовательно откладывать номера предметов, по оси ординат – их вес. Из каждой точки (начиная с точки (0; 0)) выходят две дуги – горизонтальная (соответствующая альтернативе «не брать предмет») и наклонная (соответствующая альтернативе «взять предмет»), вертикальная проекция которой равна весу предмета. Длины наклонных дуг положим равными ценности предметов, длины горизонтальных дуг – нулю. Полученная сеть (конечная вершина является фиктивной и вес любой дуги, соединяющей ее с другими вершинами, равен нулю) обладает следующими свойствами: любому решению задачи (6.6) - (6.7) соответствует некоторый путь в этой сети; любому пути соответствует некоторое решение задачи. Таким образом, задача свелась к нахождению пути максимальной длины.

Задача поиска контура минимальной длины решается следующим образом. Если известно, что искомый контур содержит некоторую вершину, то нужно определить кратчайший путь от этой вершины до нее же, применяя описанные выше алгоритмы. Так как в общем случае контур минимальной длины может проходить через любую вершину графа, то находятся контуры минимальной длины, проходящие через каждую вершину, и среди них выбирается кратчайший.

Более простым является ***алгоритм 4***: берется первая вершина (в произвольном их упорядочении) графа и рассматривается сеть, в которой эта вершина является одновременно конечной и начальной вершиной. Для этой сети (применением описанного выше алгоритма) ищется путь μ_1 минимальной длины $L(\mu_1)$. Затем первая вершина отбрасывается, и минимальный путь μ_2 ищется для сети, в которой начальной и конечной вершиной является вторая вершина. Затем отбрасывается вторая вершина и т.д. для всех вершин исходного графа, для которых существует контур, проходящий через них и через вершины с большими номерами. Контуром минимальной длины будет контур μ_{min}, длина которого равна $L(\mu_{min}) = \min\{L(\mu_1), L(\mu_2), ..., L(\mu_n)\}$.

Задача поиска контура минимальной средней длины заключается в поиске контура, для которого минимально отношение его длины к числу содержащихся в нем дуг.

Для решения этой задачи используется ***алгоритм 5***:

1. Определяем произвольный контур. Пусть L – длина этого контура, k – число его дуг. Вычисляем $l_{cp} = L / k$ и добавляем $(-l_{cp})$ к длинам l_{ij} всех дуг.

Затем определяем контур отрицательной длины, повторяем шаг 1, и т.д. до тех пор, пока на очередном шаге таких контуров не найдется.

Так как на каждом шаге длины всех дуг изменялись на одно и то же число, то на последнем шаге длина каждой дуги равна $l_{ij} - h$, где h – суммарное изменение длины каждой дуги на всех шагах.

Значение h равно минимальной средней длине дуг контуров графа. При этом контуром минимальной средней длины является контур, определенный на предпоследнем шаге.

Путь максимальной эффективности. Пусть задана сеть, в которой для каждой дуги $(i; j)$ определены два числа $(Э_{ij}; S_{ij})$, интерпретируемые как эффект при осуществлении соответствующей операции – $Э_{ij}$ и затраты на эту операцию – S_{ij}. Эффективность $K(\mu)$пути μ определяется как отношение его эффекта $Э(\mu) = \sum_{\mu} Э_{ij}$ к затратам $S(\mu) = \sum_{\mu} S_{ij}$, то есть $K(\mu) = \quad = Э(\mu) / S(\mu)$. Задача заключается в поиске пути μ^* максимальной эффективности: $K(\mu) \to \max$.

Если решение $K^* = K(\mu^*)$ этой задачи известно, то по определению K^* выполнено:

$$Э(\mu) - K^* S(\mu) \le 0 \;\forall \mu . \tag{6.8}$$

Следовательно, задача свелась к поиску минимального значения K^*, для которого имеет место (6.8). Другими словами, необходимо найти минимальное K^*, такое, что все пути (длина которых определяется как $l_{ij}(K^*) = Э_{ij} - K^* S_{ij}$) в сети имеют неположительную длину (неравенство (6.8) должно выполняться, в том числе, и для пути максимальной длины).

Алгоритм 6

1. Положим $K^* = 0$. Находим путь μ_1максимальной длины. Положим $K_1 = Э(\mu_1) / S(\mu_1)$ (заметим, что при $K = K_1$ длина пути $\mu(K_1)$ равна нулю).

2. Находим максимальный путь μ_2 при $K = K_1$. Если длина пути μ_2, которую мы обозначим $L(K_1)$, равна нулю, то задача решена.

Если $L(K_1) > 0$, то вычисляем $K_2 = Э(\mu_2) / S(\mu_2)$ и находим максимальный путь μ_2 при $K = K_2$ и т.д.

Путь максимальной эффективности с учетом штрафов. Пусть для каждой дуги $(n + 1)$ – вершинной сети заданы два числа: эффект $Э_{ij}$ и время t_{ij}. Каждый путь μ из начальной вершины в конечную вершину характеризует некоторый процесс (проект). Под продолжительностью пути будем понимать сумму времен его дуг. Если продолжительность процесса отличается от заданного времени T, то налагаются штрафы $\chi(\mu)$, пропорциональные отклонению, т. е. $\chi(\mu)$ равно:

$$\begin{cases} \alpha(T - T(\mu), T(\mu) \le T; \\ \beta(T(\mu) - T, T \le T(\mu); \end{cases} \tag{6.9}$$

где коэффициенты α и β могут быть как положительными, так и отрицательными.

Задача заключается в том, чтобы найти путь μ^*, максимизирующий разность между эффектом и штрафами, то есть $\mu^* = arg\ max\ [Э(\mu) - \chi(\mu)]$.

Обозначим $l_{ij}(\lambda) = Э_{ij} - \lambda t_{ij}$, где λ – некоторый параметр, $T(\lambda)$ – продолжительность оптимального пути при параметре λ, т. е. пути, имеющего максимальную длину, измеряемую в $l_{ij}(\lambda)$. Легко показать, что с ростом λ величина $T(\lambda)$ не возрастает.

Обозначим $T(\alpha)$, $T(\beta)$ – продолжительности оптимального пути λ при β равном α (соответственно, β), $\mu(\alpha)$, $\mu(\beta)$ – эти пути (для их нахождения необходимо решить две задачи на поиск пути максимальной длины). Рассмотрим шесть случаев (исходную задачу можно разбить на две подзадачи – поиска максимума $Э(\mu)-\chi(\mu)$ при $T(\mu) \le T$ и при $T(\mu) \ge T$).

Пусть $\alpha \geq \beta$, тогда $T(\beta) \ge T(\alpha)$ и:

1) если $T(\beta) \ge T(\alpha) \ge T$, то $\mu(\beta)$ – оптимальное решение;

2) если $T \ge T(\beta) \ge T(\alpha)$, то $\mu(\alpha)$ – оптимальное решение;

3) если $T(\beta) \ge T \ge T(\alpha)$, то, сравнивая $\mu(\alpha)$ и $\mu(\beta)$ по длинам $l = Э - \chi$, выбираем путь, имеющий максимальную длину.

Пусть $\alpha \le \beta$, тогда $T(\beta) \le T(\alpha)$ и:

4) если $T(\alpha) \ge T(\beta) \ge T$, то $\mu(\beta)$ – оптимальное решение;

5) если $T \ge T(a) \ge T(\beta)$, то $\mu(\alpha)$ – оптимальное решение;

6) если $T(\alpha) \ge T \ge T(\beta)$, то задача не имеет эффективных методов решения (возможные подходы описаны в работе [7]).

6.3. Задачи о максимальном потоке

Рассмотрим сеть из $(n + 1)$ вершин. Пусть каждой дуге поставлено в соответствие число c_{ij}, называемое *пропускной способностью дуги (i; j).*

Потоком x в сети называется совокупность чисел $\{x_{ij}\}$, *где* x_{ij} – поток по дуге $(i; j)$, удовлетворяющий условиям $0 \le x_{ij} \le c_{ij}, i, j = 0,\dots, n$. Величиной потока x называется $F(x) = \sum_i x_{0i} = \sum_i x_{in}$.

Задача о максимальном потоке заключается в определении потока максимальной величины.

Разрезом W в сети называется любое множество вершин, обязательно содержащее выход и несодержащее вход. Пропускной способностью $C(W)$ разреза W называется сумма пропускных способностей дуг, заходящих в разрез.

Известно [18], что величина любого потока не превышает пропускной способности любого разреза (*теорема Форда-Фалкерсона*).

Следовательно, если удастся найти поток, величина которого равна пропускной способности некоторого разреза, то этот поток максимален, а разрез минимален.

Алгоритм *7* (*алгоритм Форда-Фалкерсона*). Применение алгоритма проиллюстрируем примером сети, приведенной на рис. 6.3, в которой пропускные способности всех дуг равны единице.

Шаг 0. Берем произвольный поток (например, поток $x_{01} = x_{12} = x_{25} = 1$). Помечаем начальную вершину индексом «0».

Обозначим Z – множество помеченных вершин.

Общий шаг. Первое действие. Помечаем вершину j индексом $+\,i$, если, во-первых, существует дуга $(i; j)$, и, во-вторых, $i \in Z$, j *не* $\in Z$, $x_{ij} < C_{ij}$.

Если в результате этого типа пометок мы пометили выход, то поток можно увеличить хотя бы на единицу (если c_{ij} – целые числа). Двигаясь обратно, можно найти путь, поток по которому можно увеличить. Однако, как видно из примера, этого недостаточно для нахождения максимального потока.

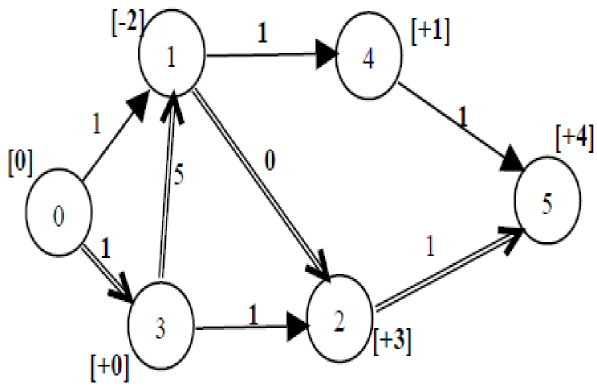


Рис. 6.3. Поиск максимального потока

Второе действие. Помечаем вершину i индексом $-j$, если, во-первых, существует дуга $(j; i)$, и, во-вторых, $j \in Z$, i не $\in Z$, $x_{ij} > 0$ (легко видеть, что пометки первого типа увеличивают поток по дуге, а пометки второго типа – уменьшают).

Если в результате этого типа пометок мы пометили выход, то поток можно увеличить. Двигаясь обратно, можно найти цепь, в которой каждая вершина помечена номером предыдущей (знак пометки не важен).

Рассмотрим цепь μ = (0; 3; 2; 1; 4; 5), приведенную на рис. 6.3. Полученные в результате второго действия потоки обозначены жирным шрифтом.

Критерий остановки алгоритма следующий [12]: если, применяя пометки обоих типов, вершину n пометить не удалось, то полученный поток имеет максимальную величину.

Поток минимальной стоимости. Предположим, что задана сеть с пропускными способностями дуг c_{ij}. Пусть так же для каждой дуги $(i; j)$ заданы число s_{ij}, интерпретируемое как затраты (например, затраты на перевозку единицы груза из вершины i в вершину j). Задача поиска потока минимальной стоимости заключается в нахождении для заданной величины j суммарного потока ее распределения по дугам, минимизирующего сумму затрат. Общие методы решения задачи о потоке минимальной стоимости рассматриваются в работах, указанных в библиографическом списке к данному пособию [14, 18].

Частным случаем задачи о потоке минимальной стоимости является *транспортная задача*, в которой имеется *двудольный граф* (двудольным называется граф, множество вершин которого может быть разбито на два непересекающихся подмножества, причем ребра (дуги) графа соединяют вершины только из разных подмножеств), представленный на рис. 6.4 вершины сети разбиты на две группы – m поставщиков и n потребителей.

Граф является *двудольным* тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины, или когда в нем все простые циклы имеют четную длину (*теорема Кенига*).

Для поставщиков заданы имеющиеся у них количества единиц товара (груза и т.д.) a_i, $i = 1,\ldots, m$, для потребителей – требуемые им количества единиц товара b_i, $i = 1,\ldots, n$. Также известны затраты s_{ij} перевозки единицы товара от i-го поставщика j-му потребителю. Пусть задача является замкнутой, тогда:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i. \tag{6.10}$$

Суммарное предложение равно суммарному спросу (вводя фиктивного поставщика или фиктивного потребителя, любую незамкнутую задачу можно свести к замкнутой). Требуется определить потоки товаров от потребителей к поставщикам, минимизирующие суммарные затраты.

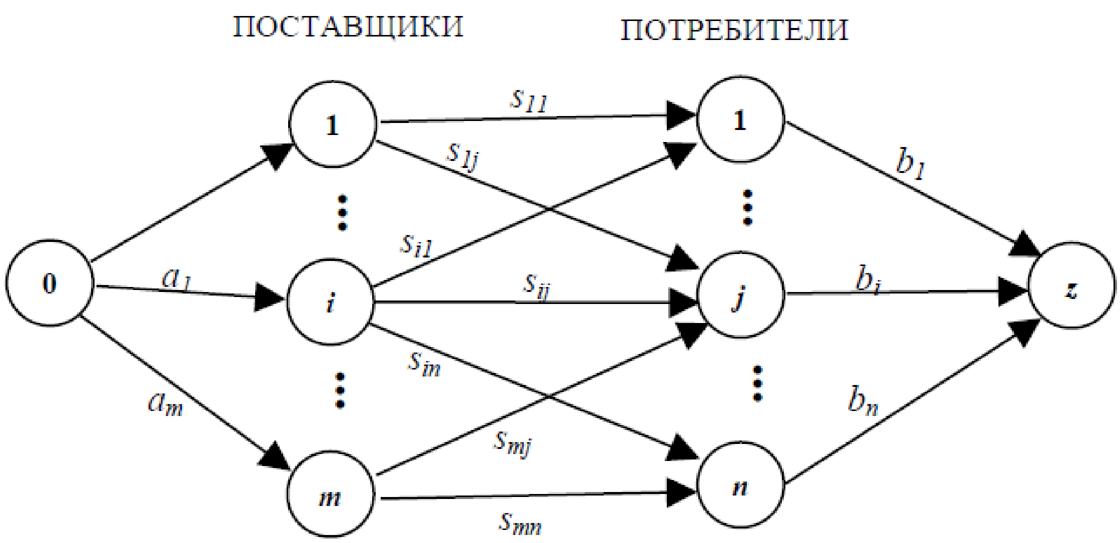


Рис. 6.4. Транспортная задача

Формально транспортную задачу можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} S_{ij} \to min_{\{x_{ij} \geq 0\}} \tag{6.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m} \tag{6.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n} \tag{6.13}$$

Добавляя к двудольному графу вход «0» и выход «z» и соединяя вход и выход с остальными вершинами дугами с потоком $x_{0i} = a_i$, $i = 1,\ldots, m$, $x_{jz} = b_j$, $j = 1,\ldots, n$, получаем задачу о потоке минимальной стоимости. Алгоритмы решения транспортной и двойственной к ней задач описаны в [13].

Частным случаем транспортной задачи является *задача о назначении*, заключающаяся в следующем: имеются n человек (работников), которые могут выполнять различные работы (занимать различные должности), число работ равно числу работников (введя фиктивные должности и/или фиктивные работы, всегда можно незамкнутую задачу привести к рассматриваемой замкнутой форме). Известны затраты s_i на назначение i-го работника на j-ю должность (например, минимальная зарплата, за которую он согласится работать на этой должности). Требуется найти назначение работников на должности (каждого работника на одну и только одну должность), минимизирующее суммарные затраты (если s_{ij} интерпретируется как эффективность от работы i-го работника на j-ой должности, то оптимальное назначение должно максимизировать суммарную эффективность). Формально задачу о назначении можно записать в виде :

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}S_{ij} \to min_{\{x_{ij\in\{0;1\}}\}}; \tag{6.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n} \tag{6.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n} \tag{6.16}$$

Рассмотрим один из методов решения задачи о назначении на следующем примере. Пусть имеются $n = 3$ работника и столько же работ. Матрица затрат имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Алгоритм 8

Шаг 0. Назначаем каждого человека на самую дешевую для него работу (назначение выделено на рис. 6.5 тонкими дугами), т. е. положим:

$$x_{ij}^{0} = \begin{cases} 1, & \text{если } s_{ij} = \min\limits_{k} s_{ik} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}. \tag{6.17}$$

Если при этом назначение является допустимым (т. е. все работы выполняются), то решение получено. Если имеется «дисбаланс», т. е. не все работы выполняются ($\exists_{j_1}: \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{0} > 1$), то переходим к следующему шагу.

Шаг k. Введем два подмножества множества дуг:

$$P_1 = \{(i; j) \mid x_{ij} = 1\},\ P_2 = \{(i; j) \mid x_{ij} = 0\}.$$

Примем множество вершин-работ, на которых назначено несколько работников за вход сети, множество вершин-работ, которые не выполняются – за выход сети. Изменим направления дуг из множества P_1 на обратные и примем их длины равными $-s_{ij}$, длины дуг из множества P_2 примем равными s_{ij}. Найдем путь μ^k минимальной длины в полученной сети (потенциалы вершин, вычисляемые при нахождении кратчайшего пути в рассматриваемом примере, приведены в квадратных скобках).

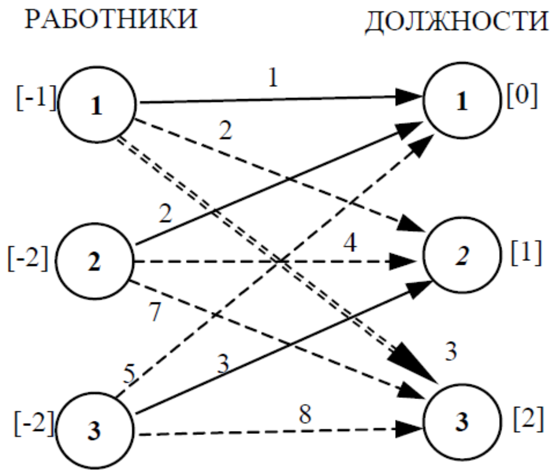


Рис. 6.5. Задача о назначении

Далее полагаем $x_{ij}^k = \begin{cases} x_{ij}^{k-1}, & \text{если } (i;\ j) \notin \mu^k \\ 1 - x_{ij}^{k-1}, & \text{если } (i;\ j) \in \mu^k \end{cases}$. (6.18)

В результате в рассматриваемом примере за один шаг получим оптимальное назначение, отличающееся от найденного на нулевом шаге тем, что первому работнику назначается третья работа (см. дугу, обозначенную двойными линиями на рис. 6.5).

На каждом шаге число «дисбалансов» уменьшается на единицу. Следовательно, число шагов алгоритма не превышает числа «дисбалансов», которое конечно.

Аналогичным способом можно решить любую транспортную задачу (искать кратчайший путь из множества вершин, в которые доставили товара больше, чем требуется, во множество вершин, где товара не хватает).

Решение общего случая задачи о потоке минимальной стоимости основывается на рассмотрении двойственной задачи.

6.4. Задачи календарно-сетевого планирования и управления

Рассмотрим *проект*, состоящий из набора *операций* (работ). Технологическая зависимость между операциями задается в виде сети (*сетевого графика*). При этом дуги сети соответствуют операциям, а вершины – событиям (моментам окончания одной или нескольких операций). Для каждой операции ($i; j$) задана ее продолжительность t_{ij}. Методы описания и исследования сетевых графиков изучаются в теории календарно-сетевого планирования и управления (КСПУ) [12, 19, 20].

Задача определения продолжительности проекта (управление временем). Легко видеть, что продолжительность проекта определяется путем максимальной длины, называемым *критическим путем*. Методы поиска пути максимальной длины описаны выше. Критический путь в сети на рис. 6.6 выделен двойными дугами и равен 16.

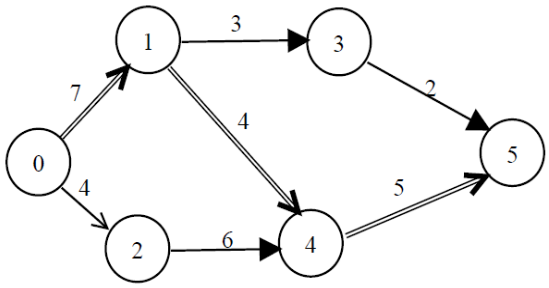


Рис. 6.6. Поиск критического пути

Операции, принадлежащие критическому пути, называются *критическими*. Остальные (некритические) операции имеют *резерв времени*, характеризуемый максимальной задержкой операции, при которой продолжительность проекта не изменяется. Критические операции имеют нулевой резерв. Приведем соответствующие формулы.

Алгоритм 9. Предположим, что выполнение комплекса операций (проекта) начинается в нулевой момент времени. Обозначим Q_0 – множество событий, не требующих выполнения ни одной из операций, т. е. входы сети; Q_i – множество событий, непосредственно предшествующих событию i, т. е. множество вершин j сети, для которых существует дуга ($j; i$).

Положим:

$$t_i^- = max_{j \in Q_0} t_{ji}, t_i^- = max_{j \in Q_i}\left(t_j^- + t_{ji}\right). \qquad (6.19)$$

Величина – t_i называется ранним моментом (временем) свершения i-го события и характеризует время, раньше которого это событие произойти не может. Длина критического пути

$$T = max_i t_i^- \tag{6.20}$$

Определяется ранним временем свершения конечного события, то есть события, заключающегося в завершении всех операций.

Поздним моментом t_i^+ *свершения события* называется максимальное время его наступления, не изменяющее продолжительности проекта. Обозначим R_i – множество событий, непосредственно следующих за событием i, то есть множество вершин j сети, для которых существует дуга $(i; j)$. Вычислим для каждой вершины-события i длину l_i максимального пути от этой вершины до выхода сети – события, заключающегося в завершении всего комплекса операций:

$$l_i = max_{j \in R_i}(l_j + t_{ij}) \tag{6.21}$$

Положим $t_i^+ = T - l_i i = \overline{1, n}$. Тогда для завершения проекта за время T необходимо и достаточно, чтобы событие i произошло не позднее момента $t_i^+, i = \overline{1, n}$.

Полным резервом Δt_i события i называется разность между его поздним и ранним моментами свершения, т. е.

$$\Delta t_i = t_i^-, i = \overline{1, n} \tag{6.22}$$

Очевидно, полный резерв критических событий (событий, принадлежащих критическому пути) равен нулю.

Задачи распределения ресурса на сетях удобно рассматривать, изображая операции вершинами сети, а зависимости – дугами (представления «операции-дуги, события-вершины» и «зависимости-дуги, операции-вершины» эквивалентны.

Пунктиром могут быть обозначены ресурсные зависимости – когда для выполнения одних и тех же операций должны быть использованы одни и те же ресурсы. Примером могут являться сети, изображенные на рис. 6.6 и 6.7. Полным резервом операции $(i; j)$ называется величина $\Delta_{ij} = t_{ij}^n - t_{ij}^p$ где t_{ij}^n– поздний срок начала (окончания) операции, а t_{ij}^p– ранний срок начала (окончания) операции.

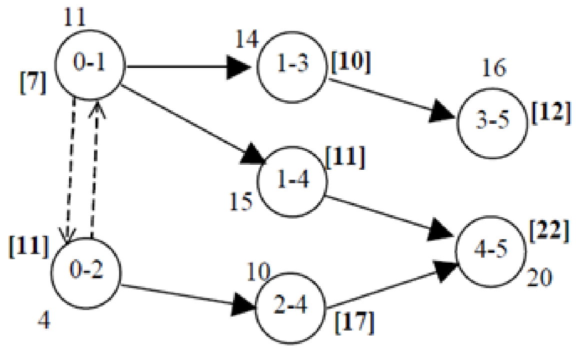


Рис. 6.7. Представление «операции-вершины» для сети рис. 6.6

Для определения оптимального распределения ресурса необходимо найти критические пути для каждого из вариантов распределения ресурса и сравнить длины этих путей (в сети, приведенной на рис. 6.7, существует общий для операций «0-1» и «0-2» ресурс; потенциалы вершин, соответствующие различным способам использования этого ресурса – сначала выполняется операция «0-1», затем «0-2» и наоборот, приведены на рис. 6.7 соответственно в квадратных скобках и без скобок).

Универсальных эффективных точных методов решения задач распределения ресурсов на сетях не существует. В качестве частного случая, для которого существует простой алгоритм, приведем следующий пример.

В сети, изображенной на рис. 6.8, для трех операций известны поздние времена окончания τ_i. Требуется определить очередность выполнения этих трех операций при условии, что все они выполняются одной единицей ресурса и поэтому не могут определяться одновременно.

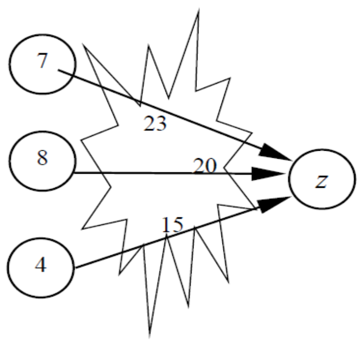


Рис. 6.8. Вариант распределения ресурса

Легко показать, что в рассматриваемом примере оптимально выполнять первой операцию с минимальным τ_i.

Если для выполнения проекта выделено ограниченное количество ресурса, то возникает задача наилучшего его использования.

Обозначим w_i – объем i-ой операции, $f_i(v_i)$ – скорость ее выполнения в зависимости от количества ресурса v_i. Предположим, что $f_i(\cdot)$ – непрерывная справа неубывающая функция, причем $f_i(0) = 0$. Если $v_i(t)$ – количество ресурса на i-ой операции в момент времени t, то момент t_i ее окончания определяется как минимальное время, удовлетворяющее уравнению:

$$\int_0^{t_i} f_i\big(v_i(t)\big)dt = w_i \qquad (6.23)$$

Если количество ресурса, используемое при выполнении некоторой операции, не изменяется во времени, то говорят, что она выполняется с *постоянной интенсивностью*. Тогда продолжительность операции определяется выражением

$$t_i(v_i) = w_i / f_i(v_i). \qquad (6.24)$$

В настоящее время общих алгоритмов поиска распределения ограниченных ресурсов между операциями, минимизирующего время завершения проекта, не существует. Поэтому рассмотрим несколько частных случаев.

Пусть все операции независимы и выполняются ресурсом одного вида, количество которого равно R, а $f_i(v_i)$ – непрерывные строго монотонные вогнутые функции. Тогда существует оптимальное решение, в котором каждая операция выполняется с постоянной интенсивностью и все операции заканчиваются одновременно в момент времени T, определяемый как минимальное время, удовлетворяющее следующему неравенству:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^{-1}\left(\frac{w_i}{T}\right) \le R \tag{6.25}$$

где $f_i^{-1}(\cdot)$ - функция, обратная функции $f_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, n$ [9, 17].

Эвристические алгоритмы определения оптимального распределения ресурса для ряда случаев «невогнутых» функций интенсивности рассматриваются в работе [21].

7. МОДЕЛИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА

Основная задача математической микроэкономики заключается в построении математических моделей поведения агентов экономической деятельности.

Агент - субъект экономической деятельности, выступающий с единой позицией и имеющий единую систему предпочтений (лицо, группа лиц, фирма, домохозяйство).

Основным инструментом моделирования систем микроэкономики является теоретико-игровой подход. Предполагается, что агент строит свое поведение таким образом, чтобы в любой ситуации максимизировать свой выигрыш (полезность).

Теория потребительского выбора изучает поведение потребителя на рынке. Потребитель характеризуется своими предпочтениями и доходом, который он готов потратить на приобретение товаров, а рынок – наборами товаров (потребительскими наборами) и ценами единиц товаров. При этом потребитель может выбирать материальные услуги, различные виды товаров присутствующие на рынке.

7.1. Пространство товаров. Предпочтения потребителя

Предположим, что в распоряжении потребителя имеются n различных видов товаров. Обозначим через x_i – количество i-го товара, который приобретает потребитель, при $i = 1,\dots, n$. Результатом выбора потребителя является приобретаемый им набор товаров (потребительский набор), представляющий собой вектор $X= (x_1, x_2,\dots, x_n)^T$, где x_i – количество i-го товара, который приобретает потребитель, при $i = 1,\dots, n$. При этом предполагается, что товары обладают свойством безграничной делимости, т.е. потребителю доступно любое неотрицательное количество любого вида товара.

Множество всех возможных потребительских наборов, доступных потребителю образуют так называемое пространство товаров.

Пространство товаров представляет собой множество всех возможных потребительских наборов: $C = \{(x_1, x_2,\dots, x_n)^T, i= 1,\dots, n\}$.

Предполагается, что потребитель может выбирать между различными наборами товаров. Это означает, что на пространстве товаров задана система предпочтений потребителя.

Рассмотрим два набора товаров x и y: $X = (x_1, x_2,\dots, x_n)^T$; $У = (y_1, y_2,\dots, y_n)^T$.

Введем следующие обозначения:

$x > y$ обозначает, что набор x для потребителя более предпочтителен, чем набор y.

$x \sim y$ обозначает, что наборы x и y для потребителя являются эквивалентными (равноценными).

Считаем, что система предпочтений потребителя является стандартной, т.е. эта система предпочтений удовлетворяет трем основным аксиомам:

1) *аксиоме полноты:* любые два потребительских набора потребитель может сравнить и сказать, что он либо предпочитает один набор другому, либо для него эти наборы являются равноценными.

$$\forall x.y \in \begin{cases} x > y \\ x \sim y \end{cases} . \quad (7.1)$$

2) *аксиоме рефлексивности:* для потребителя любой потребительский набор не хуже себя самого $x >\sim x$ (не хуже).

3) *аксиоме транзитивности:* для любых потребительских наборов x, y, z из пространства товаров $x > y$ и $y > z$ всегда будет следовать, что $x > z$, $x > y, y > z, \Rightarrow x > \sim z$.

Кроме того, стандартные предпочтения потребителя могут обладать свойствами непрерывности, свойством не насыщаемости и выпуклости.

Свойство непрерывности предполагает, что бесконечно малое изменение количества товара того или иного вида в потребительском наборе не изменяет оценку данного набора потребителем.

Свойство ненасыщаемости предполагает, что увеличение количества того или иного вида товара в потребительском наборе приводит лишь к улучшению оценки данного набора потребителем.

Свойство выпуклости предполагает, что если потребитель предпочитает набор x набору y т.е., $x > y$, то смесь этих наборов будет предпочтительней набора y:

$$\forall x, y, x > y \rightarrow \alpha x + (1-\alpha) y > y; 0 \leq \alpha \leq 1 . \quad (7.2)$$

7.2. Функция полезности потребителя

Припишем каждому потребительскому набору $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, принадлежащему пространству товаров, некоторую количественную оценку данного набора со стороны потребителя $U(x) = U(x_1, x_2, \dots x_n)$. Таким образом на пространстве товаров мы зададим функцию полезности потребителя.

Функцией полезности потребителя называют функцию $U(x) = U(x_1, x_2, \ldots x_n)$ которая удовлетворяет следующим условиям:

1. Для любых двух наборов товаров X и Y, таких, что $X > Y$ выполняется

$$u(x) > u(y), \ \forall x, y; x \succ y \Rightarrow u(x) > u(y). \tag{7.3}$$

2. Для любых двух наборов товаров X и Y, таких, что $X \sim Y$ выполняется

$$u(x) = u(y), \ \forall x, y; x \sim y \Rightarrow u(x) = u(y). \tag{7.4}$$

Значение, которое принимает функция полезности на конкретном наборе товаров, называют полезностью данного набора.

Всегда ли на пространстве товаров можно задать функцию полезности? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема Дебре: *для стандартных предпочтений потребителя всегда можно построить функцию полезности*.

С понятием функции полезности связано понятие предельной полезности какого-либо вида товара.

Предельной полезностью i-го вида товара (MU_i – «marginal utility») называют дополнительную полезность, которую получит потребитель от потребления каждой дополнительной единицы i-го вида товара

$$MU_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{U(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots x_n) - U(x_1, \ldots, x_n)}{\Delta x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \tag{7.5}$$

Свойства функции полезности

1. С увеличением объема потребления, какого-либо вида товара значение функции полезности потребителя возрастает:

$$MU_i = \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i} \geq 0 \tag{7.6}$$

2. С увеличением потребления какого-либо товара предельная полезность данного вида товара убывает (*закон Госсена*):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} MU_i = \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i{}^2} \leq 0. \tag{7.7}$$

3. Если с увеличение потребления i-го вида товара увеличивается потребление j-го вида товара, то MU i-го вида товара увеличивается:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial j} = \frac{\partial}{\partial x_j} MU_i \geq 0. \tag{7.8}$$

Замечание: данное свойство имеет место лишь в том случае, когда i-й и j-й товары являются взаимозаменяемыми.

7.3. Основные виды функций полезности

1. *Линейная функция полезности* (ФП).

Данная ФП описывает товары, являющиеся совершенными товарозаменителями, и выглядит следующим образом:

$$u(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i. \tag{7.9}$$

Линейная ФП описывает ситуацию, когда определенное количество единиц одного вида товаров может быть компенсировано потреблением дополнительных единиц любого другого товара без изменения полезности данного набора товаров для потребителя. Коэффициенты $a_1,\ldots, a_n$ представляют собой пропорции, в которых один товар может быть заменен другим.

Пример: рассмотрим пространство товаров, включающее в себя два вида товара:

x_1 – количество карандашей синего цвета,

x_2 – количество карандашей красного цвета.

Очевидно, что эти товары являются полностью взаимозаменяемыми. Функция полезности потребителя $u(x) = 2x_1 + 3x_2$ показывает, что в наборе товаров каждые 2 единицы синих карандашей могут быть заменены 3 единицами красных (и наоборот) без изменения полезности набора для данного потребителя.

2. *ФП Леонтьева:*

Эта ФП соответствует ситуации, когда все товары являются взаимодополняемыми

$$u(x) = min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \ldots, \frac{x_n}{a_n}\right\} \tag{7.10}$$

Данная ситуация означает, что для потребителя важно приобретение товаров в какой-либо определенной пропорции. Коэффициенты $a_1,\ldots,a_n$ представляют собой пропорции, согласно которым потребитель осуществляет потребление товаров.

Пример: рассмотрим пространство товаров, включающее в себя два вида товара:

x_1- количество левых ботинок.

x_2- количество правых ботинок.

Очевидно, что полезность набора товара для потребителя будет изменяться лишь в том случае, когда количество левых ботинок будет соответствовать количеству правых. Функция полезности потребителя в данном случае имеет вид: $u(x) = min\{x_1, x_2\}$.

3. *Неоклассическая ФП (ФП Кобба-Дугласа):*

$$u(x) = Ax_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots a_n^{a_n} \ , \quad (7.11)$$

$$A > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, a_1 \geq 0, i = \overline{1, n};$$

где A – представляет собой масштабирующий множитель.

Неоклассическая ФП описывает предпочтения потребителя, обладающие свойством выпуклости, т.е. ситуацию, когда потребителю важно иметь в своем наборе какое-либо количество единиц каждого вида товара, при этом уменьшение потребления какого-либо товара может быть скомпенсировано за счет увеличения потребления других товаров. Здесь величины $a_1, \dots, a_n$ представляют весовые коэффициенты, описывающие предпочтения потребителя между различными видами товаров, т.е. чем больше веса приписано тому или иному виду товаров, тем больше потребитель склонен к приобретению данного товара.

Пример: рассмотрим пространство товаров, включающее в себя два вида товара:

x_1 - количество минут мобильной связи,

x_2 - количество мегабайт потребляемого трафика сети Интернет.

Очевидно, что потребителю необходимо как наличие мобильной связи, так и наличие доступа в Интернет. ФП потребителя $u(x) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ в данном случае соответствует ситуации, когда эти товары одинаково важны для потребителя.

7.4. Кривые зависимости безразличия

Множество наборов товаров, обеспечивающих потребителю заданный уровень полезности (являющихся одинаково полезными для потребителя) называют кривой безразличия.

Пусть на пространстве товаров задана ФП $U(x)$ и U^* - выбранный потребителем уровень полезности, тогда кривой безразличия уровня U^* называют множество наборов товаров:

$$R_{U^*} = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T | U(x) = U^*\} \quad (7.12)$$

Свойства кривых безразличия:

Для простоты будем предполагать, что в распоряжении потребителя имеются два вида товара:

x_1 - количество единиц первого товара, x_2 - количество единиц второго товара.

Функция полезности потребителя $u(x) = u(x_1, x_2)$.

Рассмотрим основные свойства кривых безразличия.

1. Кривые безразличия, соответствующие различным уровням полезности, не пересекаются и не имеют общих точек. Это утверждение непосредственно следует из определения кривой безразличия.

2. В случае, когда предпочтения потребителя обладают свойством ненасыщаемости, тогда чем дальше на северо-восток на координатной плоскости располагается кривая безразличия, тем более высокому уровню полезности она соответствует.

3. Кривая безразличия представляет собой график убывающей функции.

4. В случае стандартных предпочтений потребителя, кривая безразличия представляет собой график выпуклой вниз функции.

Вспомним, что функция у = $f(x)$ называется выпуклой вниз, если для любых значений аргумента x_1 и x_2 имеет место следующее соотношение:

$$f(ax_1+(1-a)\,x_2) \le af(x_1)+(1-a)\,f(x_2). \quad (7.13)$$

Достаточным условием выпуклости функции вниз является то, что

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \ge 0 \quad (7.14)$$

7.5. Основные виды кривых безразличия

1. *Совершенные товарозаменители.*

В этом случае функция полезности имеет вид: $u(x_1,x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$.

Следовательно, уравнение кривой безразличия: $u^* = a_1x_1 + a_2x_2$.

$$x_2 = \frac{u^*}{a_2} - \frac{a_1}{a_1}x_1 \quad (7.15)$$

Таким образом, в случае совершенных товарозаменителей кривые безразличия представляют собой прямые параллельные линии с отрицательным коэффициентом наклона к положительному направлению оси абсцисс (рис. 7.1).

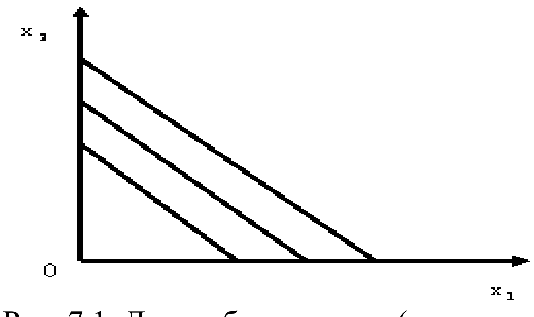


Рис. 7.1. Линии безразличия (изокосты)

2. *Выпуклые предпочтения потребителя*

Вспомним, что данные предпочтения описываются ФП *Кобба-Дугласа:*

$$u(x) = Ax_1^{a_1} \tag{7.16}$$

Отсюда получаем уравнение кривой безразличия: $Ax_1^{a1}x_2^{a2} = u^*;\ A \geq 0;$ $a_1, a_2 \geq 0;\ a_1 + a_2 = 1$,

$$x_2 = \left(\frac{u^*}{A}\right)^{1/a_1} x_1^{-\frac{b_1}{b_2}} \tag{7.17}$$

Кривые безразличия представляют собой семейство гипербол, расположенных в первой координатной четверти (рис. 7.2).

3. *Взаимодополняемые товары.*

В этом случае функция полезности имеет вид:

$$u(x_1, x_2) = min\left\{\frac{x_1}{a_1}; \frac{x_2}{a_2}\right\} \tag{7.18}$$

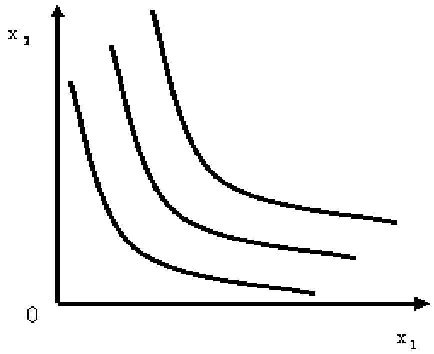


Рис. 7.2. Кривые безразличия (изокванты) в виде семейства гипербол

Вспомним определение функции: $min\{x, y\}$

$$min\{x, y\} = \begin{cases} x, x < y; \\ y, y \leq x. \end{cases} \tag{7.19}$$

Отсюда получаем, что уравнения кривых безразличия имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 u^*, \text{если } \dfrac{x_1}{a_1} < \dfrac{x_2}{a_2}; \\ x_2 = a_2 u^*, \text{если } \dfrac{x_1}{a_1} < \dfrac{x_2}{a_2}; \end{cases} \tag{7.20}$$

Графически семейство кривых безразличия можно представить следующим образом (рис. 7.3).

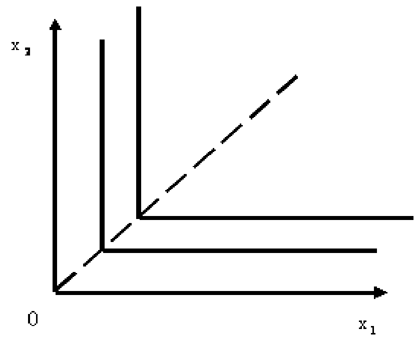


Рис. 7.3. Кривые безразличия (семейство изоквант)

7.6. Задача потребительского выбора

Предположим, что у потребителя имеется некий доход размером I, который он собирается потратить на приобретение набора товаров.

Через $p_1,\dots p_n$ обозначим цены единиц соответствующих видов товаров, $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ – вектор цен товаров. В этом случае стоимость набора товаров $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, приобретаемого потребителем, будет равна:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p^T x\,. \qquad (7.21)$$

Каждому потребителю доступны лишь те наборы товаров, чья стоимость не превышает дохода потребителя, т.е. $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq 1$. Множество наборов товаров, удовлетворяющих данному условию образуют бюджетное множество потребителя. Бюджетным множеством потребителя называется множество наборов товаров:

$$C_I = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T | p^T \leq 1\} \qquad (7.22)$$

где I – доход потребителя.

Те наборы товаров, чья стоимость в точности соответствует доходу потребителя, образуют бюджетную линию. Бюджетной линией потребителя называется множество наборов товаров

$$B_I = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T | p^T \leq I\} \qquad (7.23)$$

где I – доход потребителя.

В качестве примера рассмотрим случай, когда в распоряжении потребителя имеются два вида товара. Введем следующие обозначения:

x_1 – количество единиц первого товара,

x_2 – количество единиц второго товара,

I – доход потребителя;

p_1 – цена 1-го товара;

p_2 – цена 2-го товара;

$x = (x_1,x_2)^T$ – потребительский набор,

$P = (p_1, p_2)^T$ – вектор цен.

В этом случае, бюджетная линия будет представлять собой прямую, удовлетворяющую уравнению

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

или

$$x_2 = \frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

Бюджетным множеством потребителя будет часть первой четверти координатной плоскости (x_1, x_2), которая лежит ниже бюджетной линии (см. рис.7.4):

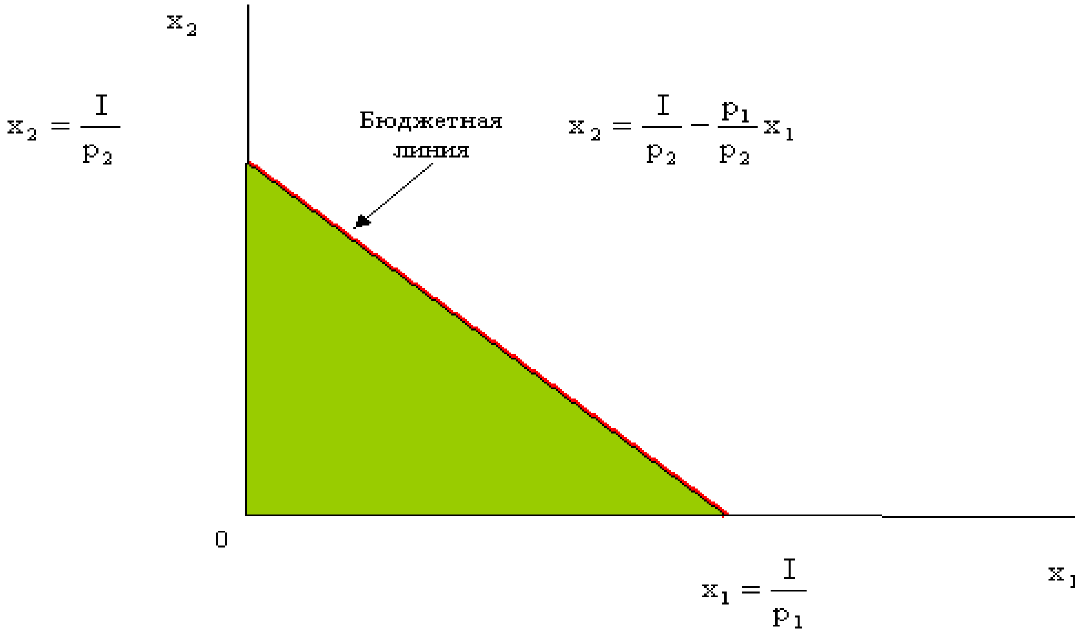


Рис. 7.4. График бюджетной линии

При этом задача потребительского выбора формулируется так: *среди множества наборов товаров, доступных потребителю, потребитель стремится выбрать тот, который обеспечит ему наибольший уровень полезности.*

Математическая формулировка задачи потребительского выбора имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u(x_1, \dots, x_n) \to max_{x_1,\dots,x_n;} \\ \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i \le I. \end{cases} \qquad (7.24)$$

7.7. Свойства решения задачи потребительского выбора

Из аксиом предпочтений потребителя и свойств функции полезности следует, что решение задачи потребительского выбора должно обладать свойствами описанными ниже:

1. *Решение задачи потребительского выбора не должно изменяться при любом монотонном преобразовании функции полезности потребителя.* К монотонным преобразованиям относятся: умножение ФП потребителя на положительное число, логарифмирование по основанию больше единицы, возведение в положительную степень.

$$U(x) > U(y) \Rightarrow f(U(x)) > f(U(y)); \quad U(x) = U(y) \Rightarrow f(U(x)) = f(U(y)). \quad (7.25)$$

2. *Решение задачи потребительского выбора не должно изменяться при увеличении в одинаковой пропорции всех цен товаров и дохода потребителя*, поскольку цены товаров и размер дохода не входят в максимизируемую функцию полезности, а лишь в бюджетное ограничение, которое в этом случае сохраняет прежний вид (рис. 7.5).

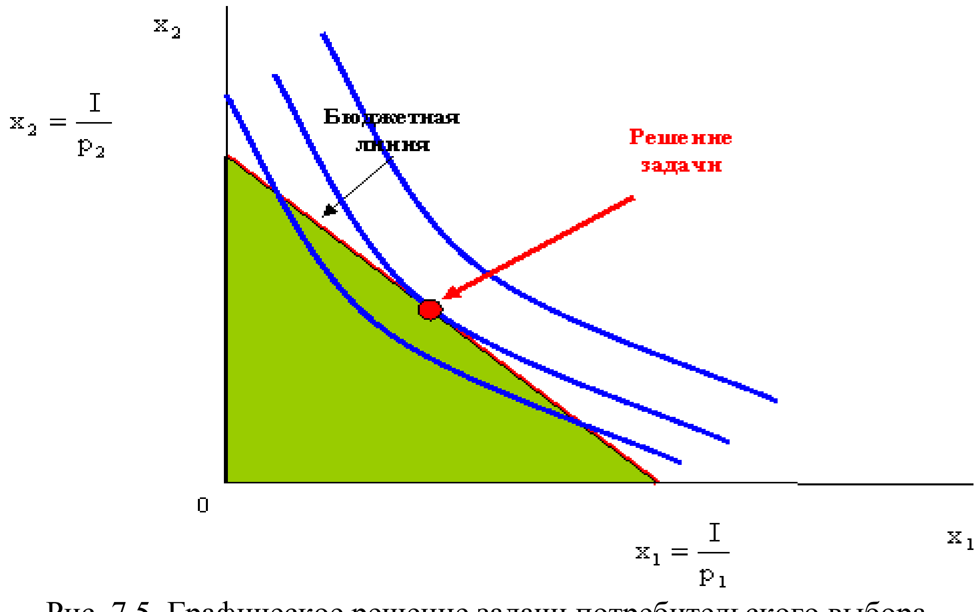


Рис. 7.5. Графическое решение задачи потребительского выбора

3. *Решение задачи потребительского выбора всегда находится на границе бюджетной линии*. Предположим, что точка потребительского выбора располагается внутри бюджетного множества. Значит потребитель израсходовал не весь свой доход и у него есть средства, которые он может потратить на приобретение дополнительных единиц товаров, тем самым, увеличив полезность приобретаемого набора. Приобретение дополнительных единиц то-

го или иного товара без уменьшения количества единиц других товаров в наборе соответствует перемещению кривой безразличия в северо-восточном направлении координатной плоскости. Поэтому точкой выбора потребителя всегда будет служить точка касания кривой безразличия с бюджетной линией. В условиях стандартных предпочтений потребителя это решение всегда существует и является единственным.

7.8. Аналитическое решение задачи потребительского выбора

В новой формулировке задача потребительского выбора представляет собой задачу нелинейного программирования.

В силу выявленных свойств, которыми должно обладать решение задачи потребительского выбора, переформулируем задачу следующим образом:

$$\begin{cases} u(x_1,...,x_n) \to \max\limits_{x_1,...,x_n} \\ s.t. \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i = \mathrm{I} \end{cases} \tag{7.26}$$

где *s.t.* – «subjectto» – с учетом ограничений.

Для решения данной задачи составим функцию Лагранжа и найдем ее точки максимума:

$$L(x_1, \dots, x_n) = u(x_1, \dots, x_n) - \lambda(\sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i x_i - I \tag{7.27}$$

где $\lambda = MU_i \,/\, p_i$.

Точки, в которых функция Лагранжа достигает своего максимума, находятся среди стационарных точек, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0, i = \overline{1,n}; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - I = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MU_i - \lambda p_i = 0, i = \overline{1,n}; \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{MU_i}{p_i} = \lambda, i = \overline{1,n}; \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I, \end{cases} \tag{7.28}$$

Последнее выражение в (7.28) является условием первого порядка решения задачи потребительского выбора.

Из свойств функции полезности следует, что условия первого порядка определяют точку максимума функции Лагранжа, и следовательно – решение задачи потребителя. Заметим, что в точке решения задачи потребителя отношение предельных полезностей любых двух товаров должно совпадать с отношением цен этих товаров.

Решение задачи потребительского выбора записывается в виде *функций спроса Маршалла:*

$$\begin{cases} x_1^* = M_1(p_1, \dots, p_n, I), \\ x_2^* = M_2(p_1, \dots, p_n, I), \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^* = M_n(p_1, \dots, p_n, I) \end{cases} \tag{7.29}$$

Эти функции позволяют определить количество приобретаемого потребителем товара, в зависимости от цен товаров и дохода потребителя.

Предположим, что в распоряжении потребителя имеется два вида товаров x_1 и x_2. Тогда функция полезности потребителя имеет следующий вид: $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Задача потребительского выбора будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} U(x_1 x_2) = x_1 x_2 \to max, \\ s.t. \sum p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases} \tag{7.30}$$

Условия первого порядка приобретают следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{p_1}{p_2} \\ s.t. \sum p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases} \tag{7.31}$$

В этом случае, предельные полезности товаров $MU_1 = x_2$, $MU_2 = x_1$ и, следовательно, функции спроса Маршалла имеют вид:

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{I}{2p_1}, \\ x_2^* = \frac{I}{2p_2}. \end{cases} \tag{7.32}$$

Выясним экономический смысл множителя Лагранжа λ.

Для этого определим полный дифференциал функции полезности в окрестности точки потребительского выбора $du(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т.е. приращение, которое получает функция при бесконечно малом изменении ее аргументов.

$$du(x_1^*, \ldots x_n^*) = \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x=x^*} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x=x^*} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\bigg|_{x=x^*} dx_n =$$
$$= MU_1|_{x=x^*} dx_1 + MU_2|_{x=x^*} dx_2 + \cdots + MU_n|_{x=x^*} dx_n =$$
$$= \lambda p_1 dx_1 + \lambda p_2 dx_2 + \cdots + \lambda p_n dx_n = \lambda d(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n) = \lambda dI$$

Следовательно, множитель Лагранжа представляет собой предельную полезность, которую получает потребитель от каждой дополнительной единицы дохода:

$$\lambda = \frac{du(x_1^*, \ldots x_n^*)}{d\mathrm{I}} \quad . \tag{7.33}$$

7.9. Модель Стоуна

Ранее предполагалось, что потребитель свободен в выборе количества потребляемых единиц того или иного товара. Усложним нашу модель. Будем предполагать, что определенное количество единиц каждого вида товара необходимо потребителю в любом случае, и вопрос относительно их приобретения не является предметом выбора. Оставшиеся средства потребитель использует для приобретения дополнительных единиц товаров в соответствии со своими предпочтениями.

Обозначим через $b_1, b_2, \ldots, b_n$ минимальные количества единиц соответствующих видов товара, необходимые потребителю. При этом предполагается, что минимальная потребительская корзина не превышает дохода потребителя, т.е. $\sum_{i=1}^{n} p_1 b_1 < I$.

Считаем, что предпочтения потребителя относительно дополнительных единиц товаров описываются функцией полезности Кобба-Дугласа:

$$u(x) = (x_1 - b_1)^{a_1} (x_2 - b_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (x_n - b_n)^{a_n},$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i, a_i \geq 0, i = \overline{1, n}. \tag{7.34}$$

Задача потребительского выбора принимает следующий вид:

$$\begin{cases} u(x) = (x_1 - b_1)^{a_1}(x_2 - b_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (x_n - b_n)^{a_n} \to max_{x_1 \ldots x_n} \\ s.t. \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i < I \end{cases} \tag{7.35}$$

Задачу потребительского выбора в такой постановке называют *моделью Стоуна*. Решим данную задачу. Так как предполагается, что минимальная потребительская корзина всегда меньше дохода потребителя, то модель Стоуна можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} u(x) = (x_1 - b_1)^{a_1}(x_2 - b_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (x_n - b_n)^{a_n} \to max_{x_1 \ldots x_n} \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I \end{cases} \tag{7.36}$$

Данная задача представляет собой задачу нелинейного программирования. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, \ldots x_n) = (x_1 - b_1)^{a_1}(x_2 - b_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (x_n - b_n)^{a_n} - \lambda(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - I) \tag{7.37}$$

Условия первого порядка принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = (x_1 - b_1)^{a_1}(x_2 - b_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (x_n - b_n)^{a_n} - p_i = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - I = 0, i = \overline{1, n}; \end{cases} \Rightarrow \tag{7.38}$$

$$\begin{cases} a_i \frac{u(x)}{x_i - b_i} - \lambda p_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I, i = \overline{1, n}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_i u(x) - \lambda p_i x_i + \lambda p_i b_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I, i = \overline{1, n}; \end{cases} \tag{7.39}$$

Просуммируем первые *n* уравнений. Получаем:

$$u(x) \sum_{i=1}^{n} a_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i b_i = 0, u(x) = \lambda(I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i), \tag{7.40}$$

где a_i – переходит в *I*.

Получаем чему равно λ, и, подставив полученное выражение в условия первого порядка, получаем следующие функции спроса Маршалла:

$$x_i = b_i + a_i \frac{I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i)}{p_i} \tag{7.41}$$

Можно дать следующую интерпретацию полученному решению задачи потребительского выбора в условиях модели Стоуна: сначала приобретается минимально необходимое количество $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц соответствующего вида товара. После приобретения минимальной потребительской корзины рассчитывается оставшаяся сумма, которая распределяется между различными видами товаров в соответствии с весовыми коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и определяется количество дополнительных единиц каждого вида товара, которое необходимо приобрести потребителю.

7.10. Двойственная задача потребительского выбора

Теперь предположим, что потребитель не стремится приобрести набор товаров, обеспечивающий ему максимальную полезность. Теперь потребитель выбрал уровень полезности u^*, который должен обеспечить ему приобретаемый набор товаров и среди одинаково полезных наборов он стремится приобрести как можно более дешевый.

В данной ситуации мы говорим о задаче потребительского выбора в двойственной постановке (двойственной задаче потребительского выбора). Графически эту задачу можно проиллюстрировать следующим образом (рис. 7.6):

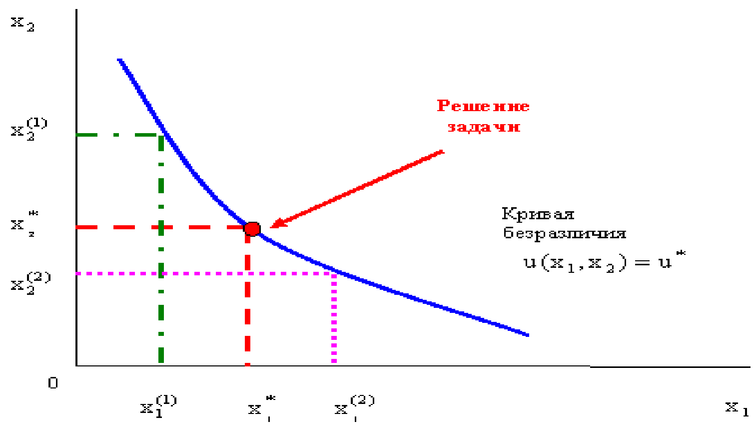


Рис. 7.6. Решение двойственной задачи потребительского выбора

На кривой безразличия, соответствующей выбранному потребителем уровню полезности u^*, отыскивается набор товаров с минимальной стоимостью.

Математическая формулировка двойственной задачи потребительского выбора имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to max_{x_1,\dots,x_n}\ ; \\ u(x_1,\dots,x_n) = u^*. \end{cases} \tag{7.42}$$

Данная задача является задачей нелинейного программирования. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \lambda(u(x_1,\dots,x_n) - u^*). \tag{7.43}$$

где $\lambda = MU_i / p_i$.

Запишем условия первого порядка для $i = \overline{1,n}$ и преобразуем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = p_i - \lambda \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = u(x_1,\dots,x_n) - u^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_i - \lambda MU_i = 0 \\ u(x_1,\dots,x_n) = u^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{MU_i}{p_i} = \dfrac{1}{\lambda} \\ u(x_1,\dots,x_n) = u^* \end{cases}$$

После преобразований получаем условия первого порядка для решения двойственной задачи потребительского выбора, где λ – это постоянное число.

Из свойств функции полезности следует, что условия первого порядка определяют точку максимума функции Лагранжа и, следовательно, решение задачи потребителя в двойственной постановке.

Решение двойственной задачи потребительского выбора записывается в виде функций спроса Хикса:

$$\begin{cases} x_1^* = H_1(p_1,\dots,p_n,u^*), \\ x_2^* = H_2(p_1,\dots,p_n,u^*), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^* = H_n(p_1,\dots,p_n,u^*). \end{cases} \tag{7.44}$$

Эти функции позволяют определить количество единиц каждого вида товара, приобретаемого потребителем в зависимости от цен товаров и выбранного потребителем уровня полезности.

Пример: Пусть функция полезности потребителя имеет следующий вид: $u(x_1,x_2)= x_1 x_2$.

Сформулируем и решим двойственную задачу потребительского выбора. Пусть u^* - выбранный потребителем уровень полезности, тогда двойственная задача будет иметь следующий вид:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \to min, s.t. x_1x_2 = u^*$$

В этом случае, предельные полезности товаров $MU_1 = x_2$, $MU_2 = x_1$.

Условия первого порядка приобретают следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ x_1 x_2 = u^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{x_1 p_1}{p_2} \\ \frac{{x_1}^2 x_2}{p_2} = u^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \sqrt{u^*/p_2} \\ x_2^* = \sqrt{u^*/p_2} \end{cases}, \qquad (7.45)$$

где последнее выражение соответствует функции спроса Хикса.

7.11. Эластичность функции

В ходе анализа различных экономических процессов очень часто используется понятие эластичности функции, которое тесно связано с понятием производной функции.

Точно так же, как и производная функции, эластичность функции позволяет определить скорость роста функции в данной точке, но при этом значение эластичности не зависит от выбора единиц измерения как функции, так и ее аргументов (что важно для решения экономических задач).

Эластичностью функции *f(x)* по аргументу *x* (обозначается $\varepsilon_x^{f(x)}$) называют предел отношения относительного приращения функции в данной точке к относительному приращению аргумента, когда относительное приращение аргумента стремится к нулю.

$$\varepsilon_x^y = \varepsilon_x^{f(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x}{x} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} y'_x \frac{x}{f(x)} = \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{Mf}{Af},$$

где $M f = f\,'(x)$ - предельное значение функции в данной точке, $A f = f(x)/x$ - среднее значение функции в данной точке.

Эластичность позволяет оценить на сколько процентов изменит свое значение функция при изменении значения аргумента на один процент.

Основные свойства эластичности функции:

1. Эластичность функции представляет собой безразмерную величину (это непосредственно следует из определения).

2. Эластичности двух взаимно обратных функций представляют собой обратные величины. Функции *f (x), φ(x)* обратные, если *f (φ(x))= x*.

Доказательство:

$$\varepsilon_x^y = \frac{xy'_x}{y} = \frac{xdy}{ydx} = 1\bigg/\frac{ydx}{xdy} = 1\bigg/\frac{yx'_y}{x} = 1/\varepsilon_y^x.$$

3. Эластичность произведения двух функций равна сумме эластичностей этих функций. Доказательство: пусть имеются две функции *f(x)* и *g(x)*. Тогда:

$$\varepsilon_x^{fg} = \frac{x}{f(x)g(x)}\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = \frac{x}{f(x)g(x)}[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] =$$

$$= \frac{x}{f(x)}f' + \frac{x}{g(x)}g'(x) = \varepsilon_x^f + \varepsilon_x^g.$$

4. Эластичность частного двух функций равна разности эластичностей числителя и знаменателя. Доказательство: пусть имеются две функции *f(x) и g(x)*. Тогда:

$$\varepsilon_x^{f/g} = \frac{x}{f(x)/g(x)}\frac{d(f(x)/g(x))}{dx} = \frac{x}{f(x)/g(x)}\left[\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x}{g^2(x)})\right] =$$

$$= \frac{x}{f(x)}f' - \frac{x}{g(x)}g'(x) = \varepsilon_x^f - \varepsilon_x^g.$$

5. Эластичность суммы двух функций вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_x^{f+g} = \frac{x}{f(x)+g(x)}\frac{d(f(x)+g(x))}{dx} = \frac{x}{f(x)+g(x)}[f'(x) + g'(x)] =$$

$$= \frac{1}{f(x)+g(x)}\left[f(x)\frac{xf'(x)}{f(x)} + g(x)\frac{xg'(x)}{g(x)}\right] = \frac{f(x)\varepsilon_x^f + g(x)\varepsilon_x^g}{f(x)+g(x)}. \qquad (7.46)$$

Пример: Определим эластичность функции $y = x^n/e^x$. Из свойства 4 следует, что эластичность данной функции будет равна разности эластичностей числителя и знаменателя. Обозначим $f(x)=x^n$ и $g(x) = e^x$. Имеем:

$$\varepsilon_x^f = \frac{x}{x^n}(x^n)' = n\frac{xx^{n-1}}{x^n} = n, \varepsilon_x^g = \frac{x}{e^x}(e^x)' = \frac{xe^x}{e^x} = x.$$

,

В итоге, получаем: $\varepsilon_x^y = \varepsilon_x^f - \varepsilon_x^g = n - x.$

7.12. Свойства функций спроса Маршалла

1. В силу свойств решения задачи потребительского выбора, что при пропорциональном увеличении всех цен товаров и дохода потребителя решение ЗП не изменится, функции спроса Маршалла являются однородными функциями нулевой степени, т. е. имеет место:

$$\begin{cases} x_1^* = M_1(p_1, \dots, p_n, I) = M_1(ap_1, \dots, ap_n a, I); \\ x_2^* = M_2(p_1, \dots, p_n, I) = M_2(ap_1, \dots, ap_n a, I); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^* = M_n(p_1, \dots, p_n, I) = M_n(ap_1, \dots, ap_n a, I). \end{cases} \quad (7.47)$$

Для любого $\alpha > 0$, если в одинаковой пропорции увеличить все аргументы, то функция не изменится. Таким образом, мы можем сделать вывод, что объемы потребления товаров не зависят непосредственно от самих цен товаров и дохода потребителя, а зависят лишь от отношения цен и отношения дохода к цене какого-либо товара, выбранного в качестве базового. Получается, что аргументами функции спроса Маршала являются относительные цены и относительный доход. Выбирая цену первого товара p_1 в качестве единицы измерения, получаем следующее:

$$\begin{cases} x_1^* = M_1\left(1, {}^{p_2}/_{p_1}, \dots, {}^{p_n}/_{p_1}, {}^{I}/_{p_1}\right); \\ x_2^* = M_2\left(1, {}^{p_2}/_{p_1}, \dots, {}^{p_n}/_{p_1}, {}^{I}/_{p_1}\right); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i^* = M_i\left(1, {}^{p_2}/_{p_1}, \dots, {}^{p_n}/_{p_1}, {}^{I}/_{p_1}\right). \end{cases} \quad (7.48)$$

2. Используя понятие эластичности, выясним, как реагирует спрос на тот или иной товар в ответ на изменение цены того или иного товара и дохода потребителя:

если $\left|\varepsilon_{p_1}^{x_1^*}\right| < 1$, то говорят о том, что спрос на данный товар не эластичен по отношению к цене данного товара (однопроцентное увеличение цены изменяет спрос на товар меньше, чем на один процент);

если $\left|\varepsilon_{p_1}^{x_1^*}\right| = 1$, то говорят о спросе с единичной эластичностью по отношению к цене данного товара (однопроцентное увеличение цены изменяет спрос на товар на один процент);

если $\left|\varepsilon_{p_1}^{x_1^*}\right| > 1$, то говорят о эластичном спросе по отношению к цене данного товара (однопроцентное увеличение цены изменяет спрос на товар больше, чем на один процент);

если $\left|\varepsilon_{p_1}^{x_1^*}\right| = \infty$, то говорят о совершенно эластичном спросе по отношению к цене данного товара;

если $\left|\varepsilon_{p_1}^{x_1^*}\right| = 0$, то говорят о спросе с нулевой эластичностью по отношению к цене данного товара (изменение цены никак не влияет на изменение спроса на данный товар).

Аналогично можно классифицировать изменение спроса на тот или иной товар по отношению к изменению дохода потребителя.

Эластичность спроса на i-й товар по отношению к цене j-го товара называют перекрестной эластичностью спроса по цене:

$$\varepsilon_{p_j}^{x_i^*} = \lim_{\Delta p_j \to 0}\left(\frac{\Delta x_i^*}{x_i^*}\Big/\frac{\Delta p_j}{p_j}\right) = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\frac{p_j}{x_i^*} \quad . \tag{7.49}$$

Возможны следующие варианты:

Если $\varepsilon_{p_j}^{x_i^*} > 0$, то говорят о том, что i-й и j-й являются взаимозаменяемыми (однопроцентное увеличение цены одного товара вызывает рост спроса на другой товар);

Если $\varepsilon_{p_j}^{x_i^*} < 0$, то говорят о том, что i-й и j-й являются взаимодополняемыми (однопроцентное увеличение цены одного товара вызывает снижение спроса на другой товар).

7.13. Кривые зависимости «доход-потребление» и «цена-потребление»

Рассмотрим ситуацию, когда в распоряжении потребителя имеются два вида товара. Ранее мы показали, что в точке потребительского выбора происходит касание линии кривой безразличия и бюджетной линии. Если мы будем увеличивать доход потребителя, сохраняя неизменными цены товаров, то при этом бюджетная линия будет двигаться в северо-восточном направлении координатной плоскости параллельно самой себе. При этом новая бюджетная линия будет касаться новой кривой безразличия в точке, соответствующей новому решению задачи потребительского выбора.

Соединив все полученные точки потребительского выбора, мы получаем кривую линию зависимости «доход-потребление» (рис. 7.7).

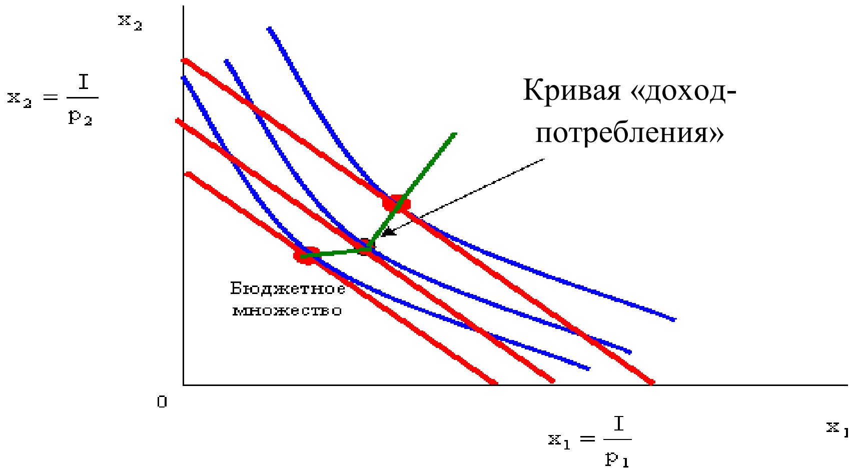


Рис. 7.7. График кривой зависимости «доход-потребление»

Данная кривая зависимость показывает, каким образом будет изменяться соотношение потребления товаров с ростом дохода потребителя. Если, используя эту кривую, мы выразим объем потребления второго товара в зависимости от объема потребления первого товара, то получим уравнение кривой Энгеля $x_2^* = f(x_1^*)$.

Если будем изменять цену первого товара, сохранив неизменным доход потребителя, то бюджетная линия будет поворачиваться вокруг точки $(0, I/p_2)$. При этом новая бюджетная линия будет касаться новой кривой безразличия в точке, соответствующей новому решению задачи потребительского выбора.

Соединив все полученные точки потребительского выбора, получим кривую зависимости «цена-потребление» (рис. 7.8).

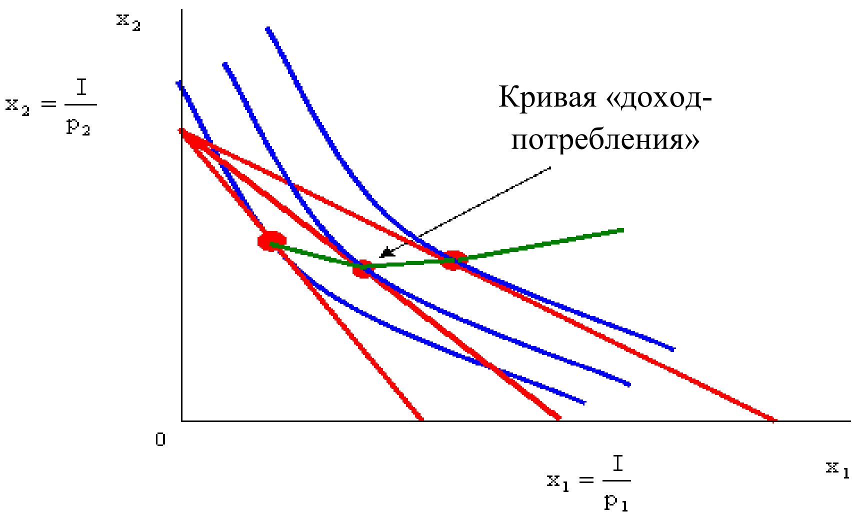


Рис. 7.8. График кривой зависимости «цена-потребление»

Данная кривая показывает каким образом будет изменяться соотношение потребления товаров с изменением цены первого товара. Аналогичным образом можно получить кривую «цена-потребление» для цены второго товара.

7.14. Уравнение Слуцкого

При изменении цены какого-либо товара происходит изменение спроса как на данный товар, так и на все остальные товары, входящие в потребительский набор. Влияние изменения цены зависит от того, являются ли товары из потребительского набора взаимозаменяемыми или взаимодополняемыми. Если при повышении цен одного товара растет спрос на другой товар, то товары называются взаимозаменяемыми. Если при повышении цен одного товара падает спрос на другой товар, то товары называются взаимодополняемыми.

На самом деле изменение спроса на товары зависит не только от того, являются ли данные товары взаимозаменяемыми или взаимодополняемыми, но и от изменения дохода потребителя, связанного с ростом цен.

Предположим, существует два вида товаров : x_1 и x_2 – их количество.

Предположим, что цена одного товара увеличилась: $\overline{p_1} > p_1$.

Тогда, чтобы выяснить, являются ли товары взаимозаменяемыми или нет, необходимо определить, как изменяется спрос на товар, если мы компенсируем потребителю его потери, связанные с ростом цен.

Компенсация потерь потребителя означает, что необходимо передвинуть бюджетную линию таким образом, чтобы она касалась прежней кривой безразличия, т.е. в результате роста цен полезность набора для потребителя не должна измениться.

Из предыдущего решения задачи:

A – старый потребительский набор;

B – выбор потребителя при отсутствии компенсации;

C – выбор потребителя при компенсации его потерь.

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} \tag{7.50}$$

$\overline{AB}$ - общее изменение спроса, связанное с ростом цен.

$\overline{AC}$ - эффект замены одного товара другим. Изменение спроса в результате взаимозаменяемости или взаимодополняемости товаров.

$\overline{CB}$ - эффект дохода (изменение спроса в связи с изменением дохода потребителя).

ОБЩИЙ ЭФФЕКТ = ЭФФЕКТ ЗАМЕНЫ + ЭФФЕКТ ДОХОДА .

Как количественно определить взаимозаменяемость или взаимодополняемость благ? Для этого необходимо рассчитать эффект замены 1-го товара другим в условиях компенсации потерь потребителя. Сделать это позволяет *уравнение Слуцкого:*

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial x_j}{\partial I}\right)^* x_i, \tag{7.51}$$

где $\frac{\partial x_j}{\partial p_i}$ – изменение спроса на j-ый товар, вызванное ростом цен на i-ый товар (общий эффект);

$\left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{comp}$ – изменение спроса в условиях компенсации потерь (эффект замены одного товара другим);

- эффект дохода – изменение спроса на j-ый товар, вызванное изменением дохода потребителя.

Следовательно эффект замены:

$$\left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{comp} = \left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right) + \left(\frac{\partial x_j}{\partial I}\right)^* x_i\ . \tag{7.52}$$

Если с ростом цен товаров изменяется спрос на другой товар, то есть $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right) < 0$, то другой товар называется нормальным;

Если с повышением цен товара спрос на другой товар увеличивается, $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right) > 0$, то это товар Гиффена;

Если с повышением цены на товар возрастает спрос на данный товар $\left(\frac{\partial x_i}{\partial I}\right) > 0$, то товар называется ценным.

Если с ростом дохода спрос на товар снижается $\left(\frac{\partial x_i}{\partial I}\right) < 0$, то товар называется малоценным или низкого качества.

Если в условиях компенсации потерь потребителя с ростом цен i-го товара возрастает спрос на j-ый товар $\left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{comp} > 0$, то товары взаимозаменямые.

Если с ростом цен i-го товара падает спрос на j-ый товар в условиях компенсации $\left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0$, то товары взаимодополняемые.

Пример. Дана функция полезности $U(x_1,x_2)$.
Тогда функция спроса Маршала будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{I}{2p_1}, \\ x_2^* = \frac{I}{2p_2}. \end{cases} \tag{7.53}$$

Классифицируем эти товары, используя уравнение Слуцкого.

Предположим, что возрастает цена второго товара p_2. Тогда общий эффект будет равен 0, т.е. $\left({}^{\partial x_1}\!/_{\partial p_2}\right) = 0$.

Определим эффект дохода:

$$-\left(\frac{\partial x_1}{\partial I}\right) x_2 = -\frac{I}{4p_1p_2} \Rightarrow \text{эффект замены;} \tag{7.54}$$

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\right)_{сорт} = \frac{I}{4p_1p_2} > 0 \Rightarrow \text{ товары взаимозаменяемые;} \tag{7.55}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial I} = \frac{I}{2p_1} > 0 \Rightarrow \text{товары высокого качества;} \tag{7.56}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0 \Rightarrow \text{товары являются нормальными.} \tag{7.57}$$

8. МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА

8.1. Производство, пространство затрат, производственная функция

Производством называют процесс взаимодействия экономических факторов (факторов производства), завершаемый выпуском какой-либо продукции. Современное общественное производство включает в себя не только материальное производство, но также и нематериальную сферу — производство нематериальных благ и услуг (новые научные открытия, технические изобретения, народное образование, культура, искусство, здравоохранение, бытовое обслуживание, управление, финансирование и кредитование, спорт и др.).

Производство можно представить как систему «затраты-выпуск» (рис. 8.1), в которой выпуском является то, что фактически произведено фирмой (продукция), а затратами - то, что потребляется для осуществления выпуска – ресурсы (капитал, труд, энергия, сырье и др.). Формально можно сказать, что производство - это функция, которая определенному набору затрат и заданной технологии производства ставит в соответствие определенный объем выпуска. Конечной целью фирмы является получение наибольшей прибыли от реализации своей продукции.

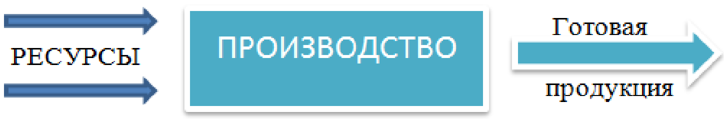


Рис. 8.1. Простейшая модель производства

Прибыль представляет собой разность выручки от реализации произведенной продукции и издержек производства. Издержки представляют собой общий объем выплат за все виды затрат и (в общем случае) складываются из двух составляющих: постоянных издержек и переменных издержек.

Постоянные издержки представляют собой издержки, которые фирма несет независимо от объема выпуска (расходы на приобретение оборудования, различные регистрационные сборы и т.д.), т.е. расходы, связанные с началом производства продукции.

Переменные издержки касаются использования имеющихся в распоряжении фирмы факторов производства и изменяются в соответствии с объемом выпуска продукции.

Задача фирмы сводится к поиску такого сочетания между затратами факторов производства и выпуском продукции, который обеспечил бы ей наибольшую прибыль. Двойственной к этой задаче является задача минимизации издержек фирмы при сохранении заданного объема выпуска продукции. Таким образом, основными факторами, которые должны быть учтены при решении задачи фирмы являются: выпуск продукции, затраты факторов производства, цены выпуска, цены затрат факторов производства, существующая технология производства продукции.

Будем предполагать, что фирма производит n различных видов продукции. Обозначим через $q = (q_1, q_2,..., q_n)^T$ вектор выпуска, компонентами которого являются выпуски каждого конкретного вида продукции. Предположим, что для осуществления выпуска используется m видов факторов производства. Обозначим через $X = (x_1, x_2,..., x_n)^T$ вектор затрат факторов производства, компонентами которого являются объемы потребления каждого конкретного фактора.

Множество векторов выпуска продукции образуют так называемое *пространство выпуска:*

$$S = \{q_1 = (q_1, \dots, q_n)^T | q_i \geq 0, i = \overline{1,n}\}. \qquad (8.1)$$

Множество векторов затрат факторов производства образуют так называемое *пространство затрат:*

$$S = \{x_1 = (x_1, \dots, x_m)^T | x_1 \geq 0, i = \overline{1,m}\}. \qquad (8.2)$$

Технологическая связь между затратами факторов производства и объемом выпуска продукции описывается с помощью производственной функции. Функция, $q=f(x)$, которая каждому вектору затрат из пространства затрат ставит в соответствие максимальный выпуск, который может быть произведен при данных затратах факторов производства, называется *производственной функцией фирмы.*

В общем случае производственную функцию можно записать в неявной форме

$F(x, q, A) = 0$,где Aпредставляет собой технологическую матрицу размерами n x m.

Производственную функцию можно интерпретировать двояко.

Если в качестве независимых аргументов рассматриваются затраты, то производственную функцию называют *функцией выпуска*. Если в качестве независимых аргументов рассматриваются объемы выпуска, то производственную функцию называют *функцией затрат*. В дальнейшем, для простоты выкладок будем предполагать, что фирма выпускает только один вид продукции.

С понятием производственной функции связано понятие предельного продукта. Предельным продуктом i-го фактора производства (MP_i - «marginal product») называют дополнительный объем выпуска продукции, который будет получен при увеличении потребления каждой дополнительной единицы данного фактора производства.

$$MP_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_i+\Delta x_i,\ldots,x_m) - u(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_m)}{\Delta x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}. \qquad (8.3)$$

Производственная функция обладает следующими свойствами:

1) с увеличением потребления какого-либо фактора производства выпуск продукции возрастает:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = MP_i(x) \geq 0. \qquad (8.4)$$

2) с увеличением объема потребления какого-либо фактора скорость выпуска продукции убывает:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \leq 0. \qquad (8.5)$$

3) производственная функция является однородной функцией своих аргументов, т.е. если объем потребления всех факторов производства увеличится в одинаковых пропорциях, то выпуск продукции не должен упасть:

$$f(tx) = t^{\beta} f(x), \qquad (8.6)$$

где β представляет собой степень однородности.

Рассмотрим основные виды производственных функций

1. *Линейная производственная функция*:

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i. \qquad (8.7)$$

Данное семейство производственных функций описывает ситуацию, когда факторы производства являются полностью взаимозаменяемыми. Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_m$ представляют собой пропорции, в которых один фактор может быть заменен другим.

2. *Производственная функция Кобба-Дугласа* имеет вид:

$$y = x_1^{a_1} x_x^{a_2} b \qquad (8.8)$$

Для выполнения всех требований к производственным функциям необходимо выполнение условий:

$$0 < a_1 < 1, 0 < a_2 < 1, b > 0. \qquad (8.9)$$

Найдем средние и предельные производительности, эластичности, технологическую норму замены для линейной функции Кобба-Дугласа.

Для линейной функции $y = a_1x_1 + a_2x_2 + b$ это будет выглядеть так:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + b}{x_1}; A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + b}{2};$$

$$M_1 = y'_{x_1} = a_1; M_2 = y'_{x_2};$$

$$E_1 = \frac{M_1}{A_1} = \frac{a_1x_1}{a_1x_1 + a_2x_2 + b}; E_2 = \frac{M_2}{A_2} = \frac{a_2x_2}{a_1x_1 + a_2x_2 + b};$$

$$E = \frac{a_1x_1a_2 2}{a_1x_1 + a_2x_2 + b};\ R_{12} = \frac{E_1x_2}{E_2x_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

Таким образом, коэффициенты *a₁* и *a₂* линейной производственной функции имеют смысл предельных производительностей и их можно вычислять по формулам:

$$a_1 \approx {}^{\Delta y}/_{\Delta x_1}; a_2 \approx {}^{\Delta y}/_{\Delta x_2} \tag{8.10}$$

Для производственной функции Кобба-Дугласа $y = x_1^{a_1}x_2^{a_2}b$ будет:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot b}{x_1} = x_1^{a_1 - 1} \cdot x_x^{a_2} \cdot b;$$

$$A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot b}{x_2} = x_1^{a_1 - 1} \cdot x_2^{a_{2-1}} \cdot b;$$

$$M_1 = y'_{x_1} = a_1 \cdot x_1^{a_1 - 1} \cdot x_2^{a_2} \cdot b;$$

$$M_2 = y'_{x_2} = a_1 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2 - 1} \cdot b;$$

$$E_1 = \frac{M_1}{A_1} = a_1; E_2 = \frac{M_2}{A_2} = a_2; E = a_1 + a_2;$$

$$R_{12} = \frac{E_1x_2}{E_2x_1} = \frac{a_1x_2}{a_2x_1}$$

Таким образом, коэффициенты a_1 и a_2 производственной функции Кобба-Дугласа имеют смысл частных эластичностей и их можно вычислять по формулам:

$$a_1 \approx \frac{\Delta y/_y}{\Delta x_1/_{x_1}};\ a_2 \approx \frac{\Delta y/_y}{\Delta x_2/_{x_2}} \tag{8.11}$$

Пример. Некоторое предприятие, расходуя для производства 65 единиц материальных затрат и 17 трудовых, выпускало 120 единиц продукции. В результате расширения и увеличения материальных затрат до 68 единиц выпуск возрос до 124 единицы, а при увеличении трудозатрат до 19 единиц выпуск вырос до 127 единиц. Составить линейную производственную функцию и функцию Кобба-Дугласа.

Решение. Записав для удобства исходные данные в виде вспомогательной таблицы и применив формулы (8.10) и (8.11), рассчитываем параметры производственных функций.

Таблица 8.1

Исходные данные

x_1	65	68	-
x_2	17	-	19
y	120	124	127

Для линейной производственной функции $y = a_1x_1 + a_2x_2 + b$ находим параметры a_1 и a_2 используя формулу (8.10):

$$a_1 \approx {}^{\Delta y}/_{\Delta x_1} = \frac{124 - 120}{68 - 65} = \frac{4}{3};\ a_2 \approx {}^{\Delta y}/_{\Delta x_2} = \frac{127 - 124}{619 - 17} = \frac{3}{2};$$

Получаем функцию в виде $y = \frac{4}{3}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + b$. Для нахождения параметра b подставляем в уравнение исходные данные из 2-го столбца таблицы 8.1 и решаем уравнение относительно b, получаем:

$$120 = \frac{4}{3} \cdot 65 + \frac{3}{2} \cdot 17 + b, b = -17{,}7.$$

В итоге получаем линейную производственную функцию:

$$y = \frac{4}{3}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 17{,}7.$$

Если производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид

$y = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot b$то для неё по формуле (8.11) находим коэффициенты уравнения:

$$a_1 \approx \frac{(124-120)/_{124}}{(68-65)/_{68}} = 0{,}73; a_1 \approx \frac{(127-124)/_{127}}{(19-17)/_{19}} = 0{,}22$$

Получаем уравнение: $y = x_1^{0,73} \cdot x_2^{0,22} \cdot b$. Для нахождения параметра b подставляем в уравнение исходные данные из второго столбца табл. 8.1 и получим $120 = x_1^{0,73} \cdot x_2^{0,22} \cdot b$. Далее решая уравнение относительно параметра b, получаем b = 3,05. В результате, получается производственная функция вида:. $y = x_1^{0,73} \cdot x_2^{0,22} \cdot 3{,}05$.

3. *Производственная функция «затраты-выпуск» (функция Леонтьева)*:

$$f(x) = min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \dots, \frac{x_m}{a_m}\right\} \tag{8.12}$$

Эта функция задает пропорции, в которых осуществляется потребление затрат факторов производства для осуществления выпуска одной единицы продукции. Величины $a_1, a_2, \dots, a_m$ представляют собой пропорции объемов потребления соответствующих факторов производства.

8.2. Модель совершенной конкуренции

Модель совершенной конкуренции (СК) предполагает, наличие на рынке большого числа фирм, производящих данную продукцию и потребляющих одинаковые факторы производства. Это означает, что ни один из участников рынка не может за счет выбранной им стратегии повлиять ни на цену единицы выпуска, ни на цены факторов производства, следовательно, модель СК предполагает, что цена единицы выпуска и цена факторов производства являются постоянными величинами. Задача производителя может рассматриваться как в условиях краткосрочного периода, так и в условиях долгосрочного периода [22].

Краткосрочный период предполагает, что период производства продукции является недостаточно длительным для того, чтобы фирма могла полностью задействовать все ресурсы производства продукции, и, следовательно, фирма ограничена в потреблении того или иного фактора производства. Кроме того, в этом периоде следует учитывать постоянные издержки производства.

Долгосрочный период предполагает, что производство осуществляется в течение достаточно длительного промежутка времени, что позволяет фирме не быть ограниченной в объемах потребления того или иного фактора производства. При этом, в долгосрочном периоде отсутствуют фиксированные издержки, связанные с началом производства продукции.

8.3. Решение задачи производителя в долгосрочном периоде

Пусть p- цена единицы продукции, выпускаемой фирмой, и w_j - цена единицы затрат j-го фактора производства, так что $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ - вектор цен факторов производства, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – издержки производства данного выпуска. Предполагается, что цель фирмы заключается в максимизации прибыли путём выбора объема выпуска продукции, а также выбора объема потребления производственных ресурсов. При этом цены факторов производства и выпускаемой продукции предполагаются равными *const*.

Математически задачу производителя в долгосрочном периоде можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \Pi(q) = R - C \to max_{q,x_1,\ldots,x_m}, \\ \qquad f(x_1, \ldots, x_m) = q \end{cases} \tag{8.13}$$

где $R = pq$ – выручка от реализации произведенной продукции

$$C = w^T x = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i \tag{8.14}$$

В качестве ограничения выступает существующая технология производства продукции (производственная функция).

Решение задачи производителя осуществляется в два этапа: минимизация издержек производства; максимизация прибыли производителя.

1. *Минимизация издержек производства.*

На данном этапе необходимо определить, с какими минимальными издержками фирма может осуществить заданный объем выпуска продукции q. Минимизация издержек осуществляется за счет выбора объемов потребления факторов производства. Задача минимизации издержек может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} w_i x_i \to max_{q,x_1,\ldots,x_m} \\ \quad s.t. q = f(x_1, \ldots, x_m) \end{cases} \tag{8.15}$$

Данная задача представляет собой задачу нелинейного программирования. Для решения этой задачи составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, \ldots, x_m, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i - \lambda f(x_1, \ldots, x_m) - q) \tag{8.16}$$

и найдем ее точки минимума. Точки, в которых функция Лагранжа достигает своего минимума, находятся среди стационарных точек, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, i = \overline{1,m} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad (8.17)$$

В итоге получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = w_i - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = f(x_1, \dots, x_m) - q = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_i - \lambda MP_i = 0 \\ f(x_1, \dots, x_m) = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{MP_i}{w_i} = \frac{1}{\lambda} \\ f(x_1, \dots, x_m) = q \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = MP_i(x). \quad (8.18)$$

Отсюда получаем условия первого порядка минимизации издержек производства: *в точке, где издержки производства минимальны, отношение предельных продуктов любых двух факторов производства должно совпадать с отношением цен этих факторов*:

$$\begin{cases} \frac{MP_i}{MP_j} = \frac{w_i}{w_j}, i, j = \overline{1,m}, \\ f(x_1, \dots, x_m) = q \end{cases} \quad (8.19)$$

Решением данной системы уравнений являются функции спроса на факторы производства и зависит от цен факторов производства и заданного объема выпуска продукции:

$$\begin{cases} x_1^* = f_1(w_1, \dots, w_m, q); \\ x_2^* = f_2(w_1, \dots, w_m, q); \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_m^* = f_m(w_1, \dots, w_m, q). \end{cases} \quad (8.20)$$

Из свойств производственной функции следует, что данные соотношения определяют точку, в которой функция Лагранжа достигает своего минимума, т.е. данные соотношения являются решениями задачи минимизации издержек фирмы и функции спроса позволяют определить объемы потребления факторов производства в зависимости от их цен и объема выпуска продукции.

Функция издержек в этом случае равна совокупной стоимости потребляемых факторов производства:

$$C(q, w_1, \dots, w_m) = \sum_{i=1}^{n} w_i {x_i}^* = \sum_{i=1}^{n} w_i f_i\,(w_1, \dots, w_n, q). \quad (8.21)$$

И она показывает минимальные издержки, с которыми производитель может осуществить заданный объем выпуска продукции q.

Введем понятия средних и предельных издержек.

Средними издержками производства АС («averagecost») называют издержки приходящиеся, в среднем, на выпуск одной единицы продукции при общем объеме выпуска q:

$$AC(q) = \frac{1}{q} C(q, w_1, \dots, w_m) \tag{8.22}$$

Предельными издержками производства называют издержки, приходящиеся на выпуск каждой дополнительной единицы продукции при общем объеме выпуска q:

$$MC(q) = \frac{\partial}{\partial q} C(q, w_1, \dots, w_m) \tag{8.23}$$

2. *Максимизация прибыли производителя*

На втором этапе, зная с какими минимальными издержками, можно осуществить выпуск заданного объема продукции, производитель выбирает такой объем выпуска q, который бы обеспечивал ему максимальную прибыль.

Задача максимизации прибыли имеет следующий вид:

$$\text{п}(q) = p \cdot q - C(q, w_1, \dots, w_m) \to max_q \tag{8.24}$$

Точкой максимума прибыли будет стационарная точка функции П(q), которая определяется из условия:

$$\frac{\partial}{\partial q} \text{п}(q) = p - C(q, w_1, \dots, w_m) - 0 \tag{8.25}$$

Отсюда мы получаем, что максимум прибыли производителя обеспечивает такой объем выпуска продукции q^*, при котором цена единицы выпуска совпадает с предельными издержками данного объема выпуска:

$$p = MC(q^*) \tag{8.26}$$

Данное уравнение называют *решением производителя в условиях совершенной конкуренции*.

Пример. Предположим, что для производства продукции используются два фактора и производственная функция имеет вид: $q = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, w_1, w_2 – цены факторов производства, p – цена единицы выпуска.

1. Минимизация издержек. Условия первого порядка – вместо x_1 и x_2, MP_1 и MP_2. Тогда, предельные продукты факторов производства $MP_1 = x_2$, $MP_2 = x_1$ и условия минимума издержек производства приобретают следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{w_1}{w_2} \\ q = x_1 x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^* = \sqrt{\dfrac{q w_2}{w_1}} \\ x_2^* = \sqrt{\dfrac{q w_1}{w_2}} \end{cases}$$

Отсюда получаем, что функция издержек:

$$C(q, w_1, w_2) = w_1 x_1^* + w_2 x_2^* = 2\sqrt{q \cdot w_1 \cdot w_2}$$

2. *Максимизация прибыли.* Предельные издержки производства:

$$.MC(q^*) = \frac{\partial}{\partial q} C(q, w_1, w_2) = \sqrt{w_1 \cdot w_2 / q}$$

Отсюда определяем оптимальный объем выпуска:

$$p = MC(q^*)\sqrt{w_1 \cdot w_2 / q}$$

$$P^2 = w_1 w_2 / q \ \ => q* = w_1 w_2 / p^2 .$$

8.4. Решение задачи производителя в краткосрочном периоде

Напомним, что в краткосрочном периоде у производителя могут возникнуть ограничения в объеме потребления того или иного фактора производства. Кроме того, при решении задачи производителя в краткосрочном периоде следует учитывать фиксированные издержки, связанные с организацией производства.

В силу изложенного, задача фирмы в условиях краткосрочного периода будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \Pi(q) = R - C \rightarrow max_{q, x_1, \dots, x_m}, \\ g_1(x_1, \dots, x_m) \le b_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ g_k(x_1, \dots, x_m) \le b_k \\ f(x_1, \dots, x_m) = q \end{cases} \tag{8.27}$$

Здесь неравенства $g_1(x_1, \dots, x_m) \le b_1, i = \overline{\imath, k}$ представляют собой ограничения на объемы потребления факторов производства. Точно так же, как и в долгосрочном периоде, решение задачи фирмы разбивается на два этапа:

1) нахождение функции издержек (решение задачи минимизации издержек);

2) нахождение объема выпуска, максимизирующего прибыль производителя.

Следует отметить, что в условиях краткосрочного периода производитель несет большие издержки, чем в долгосрочном периоде (при одинаковых ценах выпуска и факторов производства).

8.5. Изокванты и изокосты

По аналогии с решением задачи потребительского выбора представим геометрическую интерпретацию решения задачи производителя. С этой целью введем понятия изокванты и изокосты.

Изоквантой уровня q^* для производственной функции $q = f(x_1,\ldots, x_m)$ называется множество всех векторов затрат факторов производства $x = (x_1,\ldots, x_m)^T$, использование которых приводит к выпуску q^* единиц продукции

$$QA_{q^*} = \{x = (x_1, \ldots, x_m)^T | f(x_1, \ldots, x_m) = q*\}. \quad (8.28)$$

Предположим, что в производстве продукции задействовано два фактора: x_1, x_2 - количество единиц первого и второго, соответственно товара.

Тогда изокванты рассмотренных нами производственных функций выглядят следующим образом.

1. Линейная производственная функция.

Вспомним, что в этом случае производственная функция имеет вид:

$$. \quad f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 \quad (8.29)$$

Следовательно, уравнение изокванты:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = q^* \qquad x_2 = \frac{q^*}{a_2} - \frac{a_1}{a_2}x_1 \quad (8.30)$$

Таким образом, в случае линейной производственной функции изокванты представляют собой прямые линии с отрицательным коэффициентом наклона к положительному направлению оси абсцисс (см. рис. 7.1).

2. Производственная функция Кобба-Дугласа.

Вспомним, что функция полезности Кобба-Дугласа имеет вид: $f(x_1, x_2) = Ax_1^{a_1}x_2^{a_2}$

Отсюда получаем уравнение изокванты:

$$Ax_1^{a_1}x_2^{a_2} = q^*, \qquad x_2 = \left(\frac{q^*}{A}\right)^{1/a_2} x_1^{-\frac{a_1}{a_2}} \quad (8.31)$$

Эти изокванты представляют собой семейство гипербол, расположенных в первой координатной четверти прямоугольной системы координат (см. рис. 7.2).

3. Производственная функция Леонтьева.

В этом случае функция полезности имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right\} \tag{8.32}$$

Отсюда получаем, что уравнения изоквант, графический вид которых представлен ранее на рис.7.3:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 q^*, & \text{если } \frac{x_1}{a_1} < \frac{x_2}{a_2} \\ x_2 = a_2 q^*, & \text{если } \frac{x_1}{a_1} \geq \frac{x_2}{a_2} \end{cases} \tag{8.33}$$

Изокостой уровня C^* называется множество всех векторов затрат факторов производства $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$, стоимость которых равна C^* (обеспечивается одинаковый уровень издержек производства)

$$CS_{c^*} = \{x = (x_1, \ldots, x_m)^T \,|\, \sum_{i=1}^{m} w_i x_i = C^*\} \tag{8.34}$$

Предположим, что в производстве продукции задействовано два фактора:

x_1 - количество единиц первого товара,

x_2 - количество единиц второго товара.

Тогда уравнение семейства изокост и изокосты имеют следующий вид:

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = C^*, \qquad x_2 = \frac{C^*}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1. \tag{8.35}$$

Изокосты представляют собой параллельные прямые, расположенные в 1-й четверти и имеющие отрицательный наклон к положительному направлению оси абсцисс (представлены ранее на рис.7.3).

8.6. Графическая интерпретация решения задачи фирмы

Предположим, что в производстве продукции задействовано два фактора: x_1 - количество единиц первого товара, x_2 - количество единиц второго товара.

Тогда производственная функция имеет следующий вид: $q = f(x_1, x_2)$. Рассмотрим уравнение изокванты уровня q^*: $f(x_1, x_2) = q^*$

Продифференцируем по переменной x_1 обе части равенства. Используя правило дифференцирования неявной функции получаем:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\text{изокванта}} = -\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Bigg/ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -\frac{MP_1}{MP_2} = TRS_{12} \qquad (8.36)$$

Величина TRS_{12} называется технологической нормой замещения факторов производства. Она показывает, в какой пропорции один фактор может быть заменен другим без изменения объема выпуска

Рассмотрим уравнение изокосты $C^*: \ w_1 x_1 + w_2 x_2 = C^*$

Рассмотрим x_2 как неявную функцию от переменной x_1. Продифференцируем по переменной x_1 обе части равенства. Получаем:

$$w_1 + \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\text{изокоста}} w_2 = 0$$

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\text{изокоста}} = -\frac{w_1}{w_2} \qquad (8.37)$$

Вспомним, что условия первого порядка для решения задачи минимизации издержек фирмы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{MP_1}{MP_2} = \frac{w_1}{w_2} \\ f(x_1, x_2) = q \end{cases} \qquad (8.38)$$

Таким образом получим:

$$-\frac{MP_1}{MP_2} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\text{изокванта}} = -\frac{w_1}{w_2} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\text{изокоста}} \qquad (8.39)$$

Это означает, что в точке, соответствующей минимальной стоимости затрат для производства заданного объема выпуска, наклон касательной к изокванте соответствующего уровня совпадает с наклоном изокосты, т.е. этой точкой является точка касания изокванты и изокосты.

Чем северо-восточней на координатной плоскости находится изокванта, тем большему объему выпуска она соответствует. Поскольку изокванты и изокосты заполняют собой все пространство затрат, то соединив их точки касания, мы получаем непрерывную линию. Данную линию называют *долгосрочной линией развития производства* (рис. 8.2).

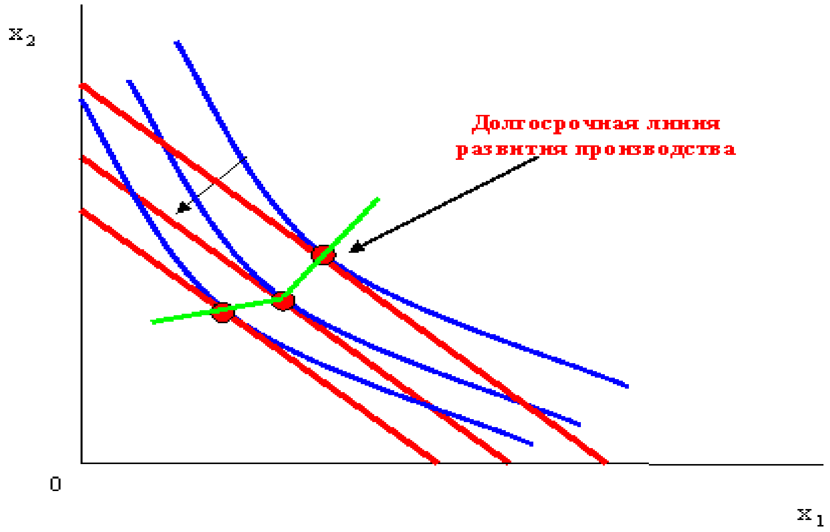


Рис. 8.2.Долгосрочная линия развития производства

Эта линия показывает, каким образом должно изменяться соотношение потребления факторов производства для увеличения выпуска продукции минимальными издержками.

9. МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ

9.1. Сущность и виды рыночной монополии и конкуренции

Монополия (греч. «monos» — один, «poleo» — продаю) — крупный собственник, который захватывает подавляющую часть рыночного пространства в целях своего обогащения.

В экономической литературе дается следующая классификация видов монополий.

1. С учетом степени охвата экономики выделяются такие виды монополистических организаций:

а) в масштабе определенной отрасли — чистая монополия; в этом случае действует один продавец, доступ на рынок для возможных конкурентов закрыт, продавец имеет полный контроль над количеством товаров, предназначенных для продажи, и их ценой.

б) в масштабе национального хозяйства образуется абсолютная монополия. Она находится в руках государства или его хозяйственных органов (например, государственная монополия внешней торговли и т.п.).

Монопсония (чистая и абсолютная) — один покупатель ресурсов, товаров.

2. В зависимости от характера и причин возникновения различают следующие виды монополий.

а) *естественная монополия:* ею обладают собственники и хозяйственные организации, имеющие в своем распоряжении редкие и свободно не воспроизводимые элементы производства (например, редкие металлы, особые земельные участки под виноградники); сюда также относятся целые отрасли инфраструктуры, имеющие особо важное и стратегическое значение для всего общества (железнодорожный транспорт, военно-промышленный комплекс и т.п.); существование естественных монополий оправдывается тем, что они дают огромный экономический выигрыш от больших масштабов производства; здесь создают товары с меньшими затратами по сравнению с расходами ресурсов, которые были бы на множестве аналогичных фирм.

б) легальные монополии образуются на законном основании; к ним можно причислить такие формы монополистических организаций:

- патентная система: под патентом подразумевается свидетельство, выданное правительством страны гражданину на право исключительного пользования сделанным, изобретением. Патентом также именуется документ, дающий право на занятие промыслом, торговлей;

- авторские права, согласно которым интеллектуальные собственники получают исключительное право продавать или размножать свои произведения в течение всей жизни или в какой-то период;

- торговые знаки — специальные рисунки, названия, символы, которые позволяют идентифицировать (отождествить) товар, услугу или фирму (конкурентам запрещается использовать зарегистрированные торговые знаки).

Искусственные монополии. Под этим условным названием (которое отделяет эти организации от естественных монополий) имеются в виду объединения предприятий, создаваемые ради получения монополистических выгод. Эти монополии преднамеренно меняют структуру рынка: создают барьеры для вхождения на отраслевой рынок новых фирм; ограничивают аутсайдерам (предприятиям, которые не вошли в монополистическое объединение) доступ к источникам сырья и энергоносителям; создают очень высокий (по сравнению с новыми фирмами) уровень технологии; применяют более крупный капитал (дающий больший эффект от роста масштаба производства); «забивают» новые фирмы хорошо поставленной рекламой.

Искусственные монополии образуют: *картель, синдикат, трест и концерн.*

Картель - союз нескольких предприятий одной отрасли промышленности, в котором его участники сохраняют свою собственность на средства и продукты производства, а созданные изделия сами реализуют на рынке, договариваясь квоте - доле каждого в общем выпуске продукции, о продажных ценах, распределении рынков и др.

Синдикат - объединение ряда предприятий, изготавливающих однородную продукцию; здесь собственность на материальные условия хозяйствования сохраняется за участниками объединения, а готовая продукция реализуется как их общее достояние через созданную для этого контору.

Трест - монополия, в которой создается совместная собственность данной группы предпринимателей на средства производства и готовую продукцию.

Концерн - союз формально независимых предприятий (обычно из разных отраслей промышленности, торговли, транспорта и банков), в рамках которого головная фирма организует финансовый (денежный) контроль за всеми участниками.

Консорциум - временное соглашение между несколькими банками или предприятиями для совместного проведения финансовых или коммерческих операций большого масштаба.

Сущность и особенности всех видов монополистических объединений ярко проявляются в целях и характере их поведения.

Правила поведения фирм-монополистов

Монополистические объединения сами и по своему усмотрению устанавливают рыночную цену на продаваемую ими продукцию. В условиях свободной конкуренции при определении равновесной цены учитывается взаимодействие спроса и предложения (соответственно кривой спроса и кривой предложения). Однако монополистические объединения совершенно не принимают во внимание объективно необходимый объем производства благ. Эти организации воздействуют на объем спроса в своих интересах, устанавливая выгодную цену.

Американские экономисты С. Фишер, Р. Дорнбуш и Р. Шмалензи раскрывают механизм монополистического ценообразования так: «монополисты не принимают цену как данную. Их можно охарактеризовать как ценопроизводителей, ибо они принимают рыночную кривую спроса как данную и сами выбирают как цену, так и объем выпуска. Поскольку между ценой монополиста и уровнем выпуска не существует никаких взаимосвязей, то для монополиста не существует кривой предложения»[23].

Когда на рынке действует монопсония, скупающая продукцию у производителей, то монопольная цена имеет своим ориентиром кривую предложения. Но при господстве и монополии, и монопсонии имеется только одна кривая, а поэтому не образуется равновесная цена. Правила поведения фирм-монополистов зависят от того, как они ведут свое «ценопроизводство».

Первое правило. Фирмы устанавливают монопольно высокие цены на свою продукцию, превышающую общественную стоимость или возможную равновесную цену. Это достигается тем, что монополисты преднамеренно создают зону дефицита, сокращая объемы производства и искусственно создавая повышенный покупательский спрос. Такое поведение можно проследить на графике (рис. 9.1).

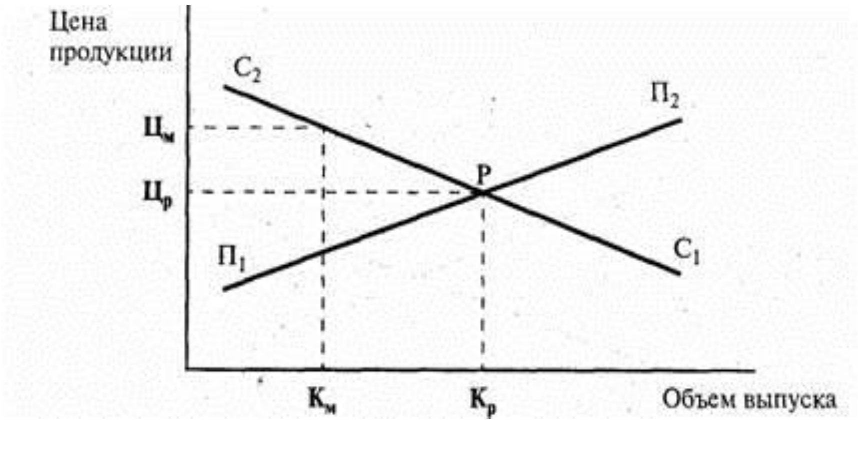


Рис. 9.1. Цена и выпуск продукции в условиях конкуренции и монополии

Предположим, что в какой-то отрасли до захвата ее рынка монополией (т.е. в условиях конкуренции) цена равновесия образовалась на уровне точки равновесия (*Р*), где пересеклись кривая спроса (C_1 - C_2) и кривая предложения ($П_1$ - $П_2$). При этом равновесный объем выпуска продукции составил величину $К_р$. Но затем монополия, учитывая эластичный спрос, сокращает уровень выпуска продукции до величины $К_м$. В результате это позволяет установить монопольно высокую цену $Ц_м$.

При каждом возобновлении процедуры повышения цен монополия, разумеется, учитывает потери, которые она несет от уменьшения объема производства и продажи товаров. Чтобы перекрыть такую утрату дохода, она устанавливает новые цена на более высоком уровне. При этом монополия следит, чтобы выручка от продажи меньшего количества изделий покрывала упущенную выгоду и давала возросшую сумму дохода.

Второе правило. Монопсония устанавливает монопольно низкие цены на товары, закупаемые у аутсайдеров. Понижение цены по сравнению с общественной стоимостью или возможной равновесной ценой достигается посредством искусственного создания зоны избытка продукции. В этом случае монопсония преднамеренно уменьшает закупки товаров, из-за чего их предложение превышает монополистический спрос. Так обычно поступают монопсонии, которые занимаются переработкой сельскохозяйственной продукции, скупаемой у массы мелких ферм. Наглядно представить их поведение можно на рис. 9.2.

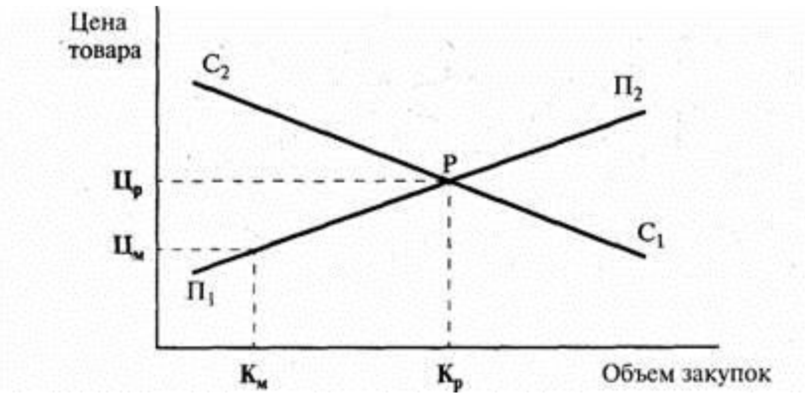


Рис. 9.2. Цена и закупки товаров при конкуренции и монопсонии

Допустим, что в отрасли, перерабатывающей сельскохозяйственное сырье, в условиях конкуренции равновесная цена ($Ц_р$) устанавливается на уровне точки равновесия (*Р*) при пересечении кривой спроса (C_1 - C_2) и кривой предложения ($П_1$ - $П_2$). Тогда равновесное количество продаваемого сырья составляет величину $К_р$. Но когда монопсония уменьшает закупки продукции у фермеров до уровня $К_м$, устанавливается монопольно низкая цена $Ц_м$,. Такая цена дает монопсонии желаемую выгоду. Ее выигрыш возрастает с каждым новым снижением закупочных цен, что является результатом преднамеренного создания зоны избытка реализуемой продукции.

Характерен такой пример: монопсонии западных стран издавна закупают дешевое сырье у предпринимателей и мелких товаропроизводителей стран Азии, Африки и Латинской Америки; низкие цены устанавливаются на ряд товаров традиционного африканского экспорта (чай, кофе, какао-бобы).

Третье правило. Фирма, одновременно являющаяся монополией и монопсонией, удваивает собираемую «дань» посредством так называемых ножниц цен. Речь идет о монопольно высоких и монопольно низких ценах, уровни которых удаляются друг от друга подобно расходящимся лезвиям ножниц. Такое движение цен основывается на расширении зон избытка и дефицита товаров. Оно характерно для многих предприятий обрабатывающей промышленности, которые особенно в условиях инфляции повышают цены на свои готовые изделия в несколько раз больше, чем увеличиваются цены в отраслях добывающей промышленности.

В нашей стране «ножницы цен» использовались особенно широко в период индустриализации народного хозяйства. Государство, выполняя роль монополии и монопсонии, устанавливало относительно высокие цены на промышленные изделия и очень низкие закупочные цены на сельскохозяйственное сырье, чем нанесло большой ущерб экономике села.

Совершенно очевидно, что с помощью произвольно устанавливаемых цен монополии собирают своего рода дань с других предпринимателей и населения. Чтобы удерживать столь выгодное положение на рынке, монополистические объединения экономическими и другими методами решительно расправляются с конкурентами. Вот некоторые из этих способов.

1. *Хозяйственный бойкот* - частичный или полный отказ от экономических связей с аутсайдерами (предприятиями, не входящими в монополистическое объединение). Монополии предлагают зависимым от них покупателям не приобретать товары других фирм, так как они якобы худшего качества.

2. *Демпинг* - преднамеренная продажа товаров по «бросовым» ценам с целью разорения конкурента.

3. *Ограничение продажи товаров* самостоятельным (независимым от монополий) фирмам (например, уменьшение поставок нефти нефтеперерабатывающим заводам).

4. *Маневрирование ценами:* монополия повышает цены на продукты, сбываемые мелким собственникам, и одновременно применяет тайные скидки и уступки в этом отношении для крупных покупателей.

5. *Использование финансовых средств борьбы с конкурентами* (например, спекуляция ценными бумагами на фондовой бирже).

6. *Разорение конкурентов* с помощью дозволенных и недозволенных законом средств с целью их поглощения и присоединения к монополии. Последние применяют широкий арсенал жестоких приемов: подделывают про-

дукцию конкурентов, нарушают патенты, копируют товарные и фирменные знаки, обманывают потребителей. Против своих рыночных противников многие фирмы применяют промышленный шпионаж (тайно выведывают производственные секреты, используя для этого электронные средства, услуги «перебежчиков» с предприятий конкурентов и т.п.).

В ответ на такие отрицательные действия в правовых и демократических государствах создаются соответствующие противодействия. Во многих странах государство проводит антимонопольную политику и регулирование конкурентного рынка по следующим основным направлениям.

Первое направление: ограничивается монополизация рынка. При этом под монополизацией подразумевается не укрупнение производства, а только серьезное ограничение торговли. Так, в США в принятом в 1890 г. антитрестовском законе монополизацией рынка признано обладание рыночной долей, равной или превышающей 60 %.

Второе направление: запрещается слияние конкурирующих компаний. Такое слияние усиливает монополизацию и ослабляет конкуренцию. Правда, антимонопольное законодательство не приостанавливает процесс централизации производства (объединение предприятий в крупные фирмы или хозяйственные объединения).

Третье направление: запрещается установление монопольных цен (в том числе лидерство фирм в повышении цен и другие подобные виды сговора).

Четвертое направление: сохраняется и поддерживается конкуренция в ее цивилизованных формах. В связи с этим воспрещаются «нечестные» или «обманные» способы соперничества - демпинг, применение фальшивой рекламы продовольственных продуктов, лекарств и косметических средств, медицинских инструментов и т. п.

Сущность и виды конкуренции

Конкуренция (лат. «concurrere» - состязаться) - соперничество между участниками рыночного хозяйства за лучшие условия производства, купли и продажи товаров. Такое неизбежное столкновение порождается объективными условиями: полной хозяйственной обособленностью каждого субъекта рынка, его полной зависимостью от хозяйственной конъюнктуры и противоборством с другими претендентами за наибольший доход. Борьба частных товаровладельцев за экономическое выживание и процветание — закон рынка.

Чтобы лучше понять конкуренцию, ее нужно сравнить с монополией. Дело в том, что как один, так и другой вид взаимоотношений участников рынка являются несимметричными. Противоположность их свойств коренится в совершенно разных параметрах (показателях) состояния рынка. Наглядное представление об этом мы получим в табл. 9.1, которая характеризует положение продавцов благ. По данным таблицы нетрудно сделать следующее заключение: конкуренция представляет собой нормальное состояние рынка.

Таблица 9.1

Конкуренция и монополия

Параметры состояния рынка	Конкуренция	Монополия
Число продавцов	Много	Один
Барьеры входа и выхода из рынка	Нет	Есть (нет вхождения)
Участие товаровладельцев в контроле над ценами	Нет	Полный контроль

Конкуренцию можно классифицировать по нескольким основаниям:

а) по масштабам развития;

б) по своему характеру;

в) по методам соперничества.

По масштабам развития конкуренция может быть:

1) *индивидуальной* (один участник рынка стремится занять «свое место под солнцем» - выбрать наилучшие условия купли-продажи товаров и услуг);

2) *местной* (ведется среди товаровладельцев);

3) *отраслевой* (в одной из отраслей рынка идет борьба за получение наибольшего дохода);

4) *межотраслевой* (соперничество представителей разных отраслей рынка за привлечение на свою сторону покупателей в целях извлечения большего дохода);

5) *национальной* (состязание отечественных товаровладельцев внутри данной страны);

6) *глобальной* (борьба предприятий, хозяйственных объединений и государств разных стран на мировом рынке).

По характеру развития конкуренция подразделяется на *свободную* и *регулируемую*.

По методам ведения рыночное соперничество делится: на *ценовое* (рыночные позиции соперников подрываются посредством снижения цен) и *неценовое* (победу одерживают путем повышения качества продукции, лучшего обслуживания покупателей и т.п.).

Свободная конкуренция означает, во-первых, что на рынке имеется множество независимых товаровладельцев, самостоятельно решающих, что создавать и в каких количествах. Во-вторых, никем и ничем не ограничен доступ на рынок и такой же выход из него всех желающих. Это предполагает возможность каждому гражданину стать свободным предпринимателем и применять свой труд и материальные средства в интересующей его отрасли хозяйства. В-третьих, предприятия никак не участвуют в контроле за рыночными ценами.

Индивидуальная конкуренция. Как известно, особенностью свободной конкуренции является то, что продавцы и покупатели являются мелкими собственниками. Никто из них, естественно, не может в одиночку захватить рыночное пространство и установить для всех свою цену. Это решающее обстоятельство предопределяет правила конкурентной «игры», ведущие соперников к победе или поражению.

Первое правило. Товаровладельцы должны учитывать уровень равновесной цены (отражающей равенство спроса и предложения) как норматив (лат. «notmatio» — упорядочение) рационального, разумно обоснованного хозяйствования. Если, допустим, продавец установил очень высокую цену на свою продукцию, превышающую равновесный уровень, то он неизбежно столкнется с затовариванием продуктов, не нашедших сбыта. Тогда через какое-то время придется снижать цену или даже распродавать товары по ценам, приемлемым для покупателей. А это сопряжено с непредвиденными убытками.

Второе правило. Чтобы, как говорится, «обхитрить» равновесную цену, товаропроизводитель старается затратить на единицу продукции меньше ресурсов и создавать товары по более низкой индивидуальной цене. Однако он продает эти изделия по общей для всех равновесной цене. В итоге образуется дополнительный доход в виде разницы между равновесной и индивидуальной ценой.

Смелые и дальновидные предприниматели, рискуя своим имуществом, делают открытия большого хозяйственного значения: изобретают и внедряют новинки техники и технологии, находят более эффективные формы организации труда и производства, способы экономного использования ресурсов. Тем самым для всех прокладывается дорога к научно-техническому и экономическому прогрессу. Лауреат Нобелевской премии Ф. Хайек (Великобритания) сделал важное обобщение: общества, полагающиеся на конкуренцию, успешнее других достигают своих целей. Конкуренция показывает, как можно эффективнее производить вещи [24].

Третье правило. При обострении борьбы соперники прибегают к методу ценовой конкуренции. Если позволяют средства, то иногда применяется демпинг. О подобном соперничестве рассказал А. Куприн в романе «Яма»: «Возникли два новых пароходства, и они вместе со старыми неистово конкурировали друг с другом. В конкуренции они дошли до того, что понизили цены за рейсы с семидесяти копеек для пассажиров третьего класса до пяти, трех и даже одной копейки. Наконец, изнемогая в непосильной борьбе, одно из пароходных обществ предложило всем пассажирам третьего класса даровой проезд. Тогда его конкурент тотчас же к даровому проезду присовокупил еще полбулки белого хлеба» [25]. Добившись разорения соперника, победитель, как правило, восстанавливает прежнюю цену и скупает имущество неудачника.

Национальная конкуренция

Прежде всего важно уяснить, кто участвует в национальной конкуренции, которая может развертываться внутри отдельных отраслей рынка или во всей рыночной системе. Широко распространено представление о том, что в рыночном соперничестве принимают участие только отдельные продавцы товаров. Но на самом деле на рыночной арене часто разыгрывается «война всех против всех». Такое всеобщее сражение ведется на трех фронтах. Один фронт мы обнаруживаем среди продавцов. Все они стремятся к выгоде от продажи товаров и одновременно не упускают возможности «отбить» покупателей у своих соперников.

Другой фронт развертывается среди покупателей, которые заинтересованы выгодно приобрести продукты и вместе с тем готовы «потеснить» других претендентов на нужный им товар.

Наконец, главный фронт «сражения» проходит между армией продавцов и армией покупателей, стоящих на противоположных позициях в отношении уровня цены. Первая из них стремится продать свои изделия подороже, а вторая - купить вещи по меньшей цене.

Конкуренция как рыночный регулятор закономерно воздействует на три явления:

- *во-первых,* она воздействует на цены, предлагаемые продавцами и покупателями;

- *во-вторых,* конкуренция устраняет нестабильное и неравное соотношение спроса и предложения в масштабе национального рынка;

- *в-третьих,* она приводит общую рыночную цену к точке равновесия. Поле конкурентного противоборства армий продавцов и покупателей, ход их сражения наглядно представлен на рис. 9.3

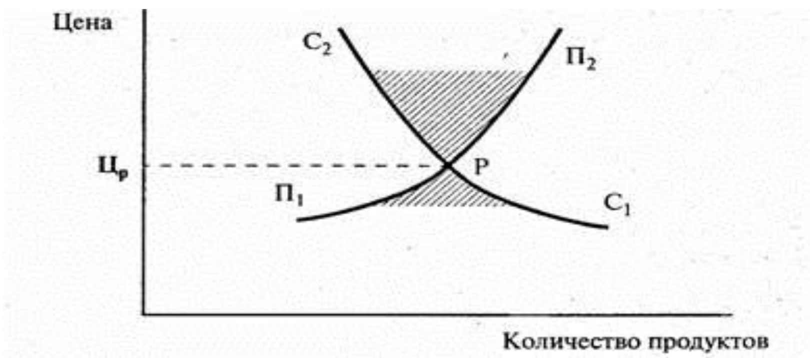


Рис. 9.3. Кривые спроса (С) и предложения (П)

На рис. 9.3 отображены три основных уровня рыночной цены. Они характеризуют свойственное свободному рынку стихийное колебание спроса, предложения и цен.

Первый уровень: нормальная цена. Это равновесная цена, которая устанавливается, когда спрос и предложение уравновешиваются в точке «Р». Спрашивается: происходит ли в данном случае конкурентное сражение среди всех продавцов и покупателей? Вполне очевидно, что такого сражения нет. Ибо цены, предлагаемые всеми субъектами рынка, совпадают.

Второй уровень: выше величины равновесной цены. В этом случае предложение благ превышает спрос на них. В итоге в рыночном пространстве образуется зона избытка товаров (сектор $П_2$ – Р – $С_2$ на рис. 9.3). В данный момент конкуренция обостряется в рядах продавцов, что раскалывает их единство. Кто может победить в этом междоусобном сражении? Очевидно, «выигрывает» тот продавец, который реализует продукты по ценам, более близким к равновесной цене. Удешевление продукции расширит сбыт его изделий. Тогда возникает своеобразная «цепная реакция»: расширяется продажа товаров по более низким ценам все возрастающим числом продавцов, т.е., усиление конкуренции среди продавцов способствует понижению чрезмерно высоких цен, увеличивает сбыт продукции, что приводит рыночную цену к равновесному уровню.

Третий уровень: ниже величины равновесной цены. Это означает, что спрос превышает предложение. Следствием того является возникновение зоны дефицита товаров (сектор $С_1$ – Р – $П_1$ на рис. 9.3). В этом случае усиливается конкуренция среди покупателей. Верх среди них одерживает тот, кто станет покупать товары по более дорогой цене. И тогда возникает «цепная реакция», но другого характера. Увеличивается приобретение продуктов все возрастающим числом покупателей за более высокую цену. Значит, обострение конкуренции среди покупателей влечет за собой повышение очень низких цен, устраняет товарный дефицит, что с иной стороны приводит рыночную цену к уровню равновесной цены.

Можно сделать обобщающие выводы об экономической роли конкуренции.

Закон конкуренции оказывает более сильное воздействие на поведение субъектов рынка по сравнению с законами спроса и предложения. Свободная конкуренция заставляет чрезмерно высокие и очень низкие цены двигаться к точке равновесия. Это центростремительное движение, в конечном счете, ведет к равенству противоборствующих сторон. Прямая причастность рыночной состязательности к образованию равновесной цены и равновесного количества товаров связана с правилами конкурентной игры.

Конкуренция выполняет тройную роль. *Во-первых,* благодаря соперничеству утверждаются общественно нормальные условия производства и обращения. *Во-вторых*, рыночная состязательность прокладывает дорогу всему новому, передовому. *В-третьих*, разрушаются и устраняются с рыночной арены все неэффективные и отсталые хозяйства. Вследствие всего этого в обществе происходит определенное расслоение. Выделяются те, кто преуспевает, опираясь на технические, организационные и экономические достижения.

Закон спроса

Спрос - это платежеспособная потребность, то есть сумма денег, которую покупатели могут и намерены заплатить за какие-то нужные им изделия. На спрос воздействует ряд рыночных факторов, например, доходы покупателей, их вкусы и предпочтения. Рассмотрим на известном примере о яблоках количественную зависимость спроса от уровня цен [26]. Предположим, на каком-то местном рынке люди приобретут разное количество яблок, если их цена будет повышаться так, как показано в шкале спроса (табл. 9.2).

Таблица 9.2

Зависимость спроса от уровня цен на товар[25]

Цена 1 кг яблок, руб.	Покупатели готовы купить, т.
2	25
5	15
8	9
10	6
15	4
20	2

Шкала спроса показывает, сколько товаров можно купить по различным ценам за данный период. Анализ этой шкалы позволяет легче выявить зависимость спроса от цены. Такая количественная зависимость представлена в виде графика (рис. 9.4).

Кривая $С_1 – С_2$ на графике показывает: при повышении цены платежеспособная потребность людей сокращается и, наоборот, когда цена снижается, спрос на продукты увеличивается.

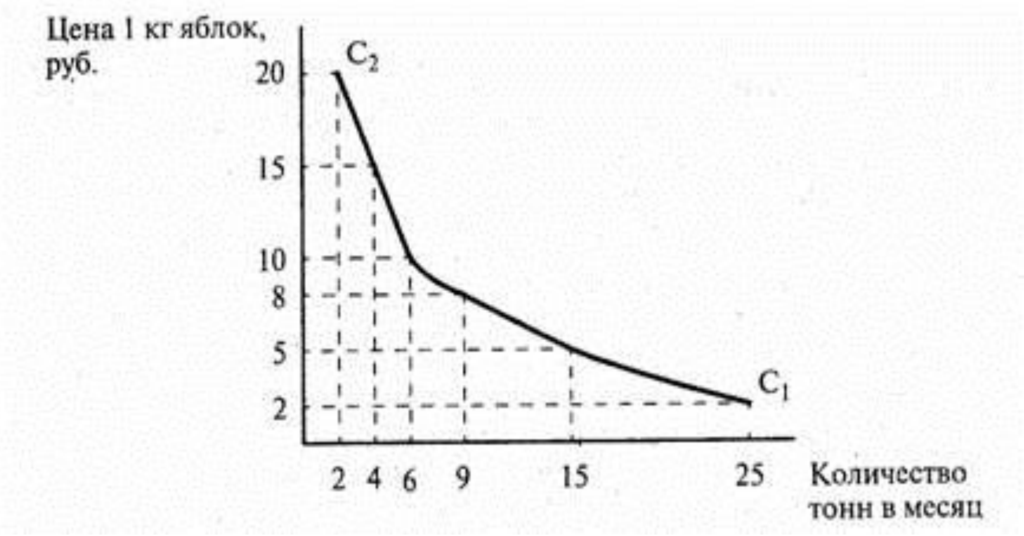


Рис. 9.4. График зависимости шкалы спроса

Степень количественного изменения спроса в ответ на динамику цен характеризует эластичность (или неэластичность) спроса. Под эластичностью спроса подразумевается степень изменения спроса («чувствительность» его объема) в зависимости от цены. Мерой такого изменения служит коэффициент эластичности спроса (K_g):

$$K_g = \text{Рост объема спроса (в \%)} / \text{Снижение цен (в \%)} \qquad (9.1)$$

Эластичным спрос бывает тогда, когда величина спроса изменяется на больший процент, чем цена. Величина эластичности спроса по цене всегда отрицательное число, ибо числитель и знаменатель дроби всегда имеют разные знаки. В США опытным путем были получены такие оценки эластичности по цене (за долгосрочный период, со знаком «минус»): канцелярские принадлежности - 0,6, бензин - 1,5, жилье - 1,9, кино - 3,9.

Неэластичный спрос проявляется, если платежеспособная потребность покупателей не чувствительна к изменению цен. Скажем, как бы ни возрастали или ни понижались цены на соль, спрос на нее неизменен. Знание коэффициента эластичности спроса имеет важное значение для прогнозирования объема спроса населения при изменении уровня рыночных цен.

Закон предложения

Предложение - это сумма товаров, которые продавцы готовы продать при разной динамике рыночной цены. По мере увеличения цены количество предлагаемых для продажи тех же яблок будет возрастать. Это иллюстрируется на условном примере в шкале предложения (табл. 9.3).

Таблица 9.3

Шкала предложения

Цена 1 кг яблок, руб.	Продавцы готовы продать, т.
20	25
15	15
13	9
10	6
8	4
5	2

Шкала предложения показывает, сколько товаров продавцы готовы продать по разным ценам. Приводимые цифры раскрывают зависимость предложения от цены.

Закон предложения характеризует следующую функциональную зависимость предложения (П) от цены: П = F(U). Чем выше цена, тем в большей мере растет предложение продуктов со стороны продавцов. И наоборот: чем ниже цена, тем ниже предложение. Данная взаимосвязь наглядно представлена на графике (рис. 9.5). Кривая $П_1$ – $П_2$ на графике показывает, как с ростом цены производители увеличивают объем продажи, и, наоборот, предложение с их стороны уменьшается при снижении цены.

Степень изменения объема предложения в ответ на увеличение цены характеризует эластичность предложения. Под эластичностью предложения понимается степень его изменения в зависимости от динамики цены. Мерой этого изменения является коэффициент эластичности предложения ($К_п$):

$$К_п = \frac{\text{объем предложения}(\%)}{\text{рост цен}(\%)} \tag{9.2}$$

Предложение (по цене) бывает эластичное и неэластичное. Это различие особенно важно для производителей продукции, которые заранее прогнозируют степень эластичности новых изделий.

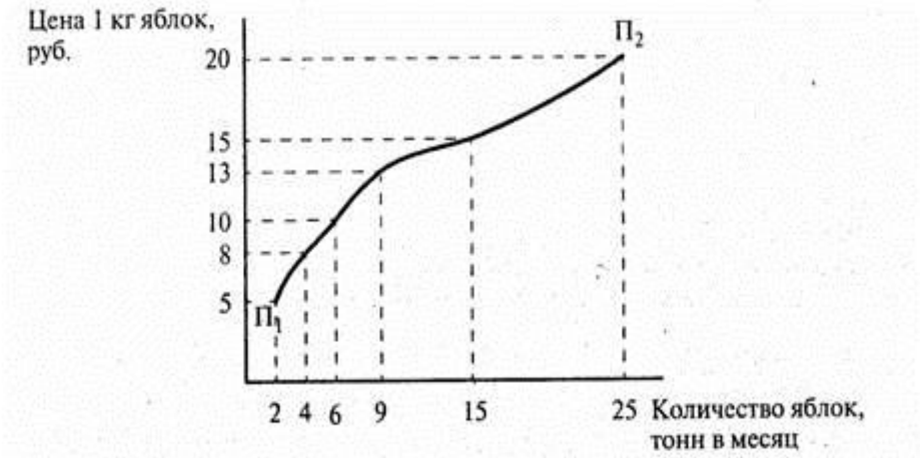


Рис. 9.5.Зависимость предложения от цены товара

Эластичным предложение становится, когда его величина изменяется на больший процент, чем цена. Как показывает опыт западных стран, коэффициент эластичности предложения - при условии равновесия цен и за длительный период - имеет тенденцию к возрастанию (т.е. рост цен на определенную величину в несколько большей степени вызывает увеличение производства).

Неэластичным предложение бывает, если оно не изменяется при повышении или снижении цен. Это характерно для многих товаров в краткосрочном периоде. Например, низка эластичность для скоропортящихся продуктов, которые невозможно хранить в больших количествах (скажем, клубнику). К тому же предложение более инертно (по сравнению со спросом). Ведь довольно трудно переключать производство на выпуск новых изделий, перераспределять в связи с этим ресурсы для изменения количества выпускаемых товаров. Стало быть, знание динамики коэффициента эластичности предложения полезно для прогнозирования объема производства в зависимости от изменения цен.

Таким образом, известна прямая зависимость спроса и предложения от *рыночной цены*. Эта зависимость проявляется в регулирующем воздействии цены на соотношение спроса и предложения, и на экономическое положение продавцов и покупателей. Существует два варианта такого регулирования, при которых одна сторона рыночной сделки выигрывает, а другая - проигрывает.

Первый вариант: *рыночная цена* возрастает, а это ведет, с одной стороны, к снижению спроса а, с другой стороны, – к увеличению предложения. В результате экономический выигрыш оказывается у производителей и продавцов (они увеличивают выпуск и реализацию товаров, получая больше дохода).

Второй вариант: цена на товары снижается, что способствует, с одной стороны, расширению спроса а, с другой стороны, – сокращению предложения. В итоге экономически выигрывают покупатели (на ту же сумму денег они приобретают больше благ). Спрашивается: имеется ли третий вариант, по которому экономические интересы продавцов и покупателей совпадают?

Равновесная цена

Если одновременно совместить кривые спроса и предложения, то в точке пересечения Р получим равновесие спроса и предложения (рис. 9.6).

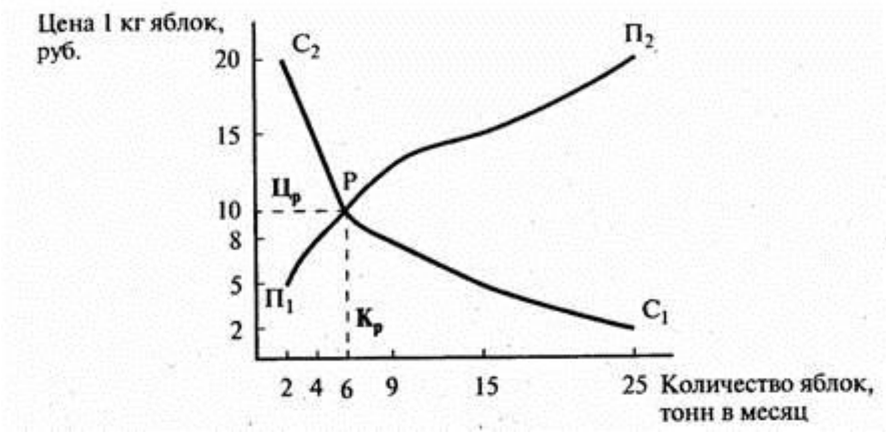


Рис. 9.6. Установление равновесной цены

Эта точка равновесия свидетельствует о единстве экономических интересов покупателей и продавцов. Если из точки Р опустить перпендикуляр на ось абсцисс, то в точке $К_р$ получим равновесное количество. Оно показывает величину товарной массы (в данном случае количество яблок), которая удовлетворяет желание покупателей и продавцов. Проекция точки Р на ось ординат - точка $Ц_р$ определяет равновесную цену. Это тот уровень рыночной цены, который одинаково приемлем для участников рыночной сделки. Сказанное свидетельствует о том, что равновесная цена и равновесное количество обладают следующими свойствами:

1) товаров представлено на рынке не больше и не меньше, чем нужно для потребления людей; все затраты на производство благ окупаются их продажей по равновесной цене, стало быть, достигнутое равновесие свидетельствует о наибольшей экономической эффективности сложившейся рыночной ситуации.

Нобелевский лауреат французский экономист М. Алле вывел теоремы с такими фундаментальными положениями: «…всякая равновесная ситуация рыночной экономики является ситуацией максимальной эффективности, и, наоборот, всякая ситуация максимальной эффективности является равновесной ситуацией рыночной экономики» [27];

2) в точке равновесия выражен и наибольший социальный эффект; за равновесную цену потребитель приобретает предельное (для его дохода) количество полезностей;

3) на рынке не обнаруживается ни избытка товаров (количества, которое излишне для продажи при данном объеме доходов населения), ни дефицита (нехватки) благ.

9.2. Модель дуополии Курно

Данная модель была предложена французским математиком А.О. Курно, который исходил из того, что:

1) обе фирмы производят однородный товар;

2) им известна кривая рыночного спроса;

3) обе фирмы принимают решения о производстве одновременно, причем самостоятельно и независимо друг от друга;

4) каждая из фирм предполагает выпуск конкурента постоянным;

5) продавцы не могут иметь точной информации о своих ошибках относительно выбранных объемов производства.

Рассмотрим данную модель с помощью кривых реагирования (рис. 9.7).

Кривые реагирования показывают максимизирующие прибыль размеры выпуска, который будет осуществляться одной фирмой, если даны объемы выпуска фирмы-соперницы. Если бы фирма А выпускала 30 ед., то выпуск фирмой Б был бы равен нулю. Если бы $Q_Б = 30$, то $Q_А = 0$.

Фирма А начинает производство первой. До того, как фирма Б начнет производство, фирма А обладает всем рынком и чувствует себя монополистом, выбирая объем производства 15 ед, максимизирующий его прибыль. Затем на рынке появляется фирма Б, предполагая, что фирма А не будет отвечать изменением выпуска. Фирма Б сможет обслужить всех тех покупателей, которые купили бы продукцию, если бы цена упала ниже текущей цены фирмы А. В этом случае объем выпуска фирмы Б составит 7,5 ед.

Рис. 9.7. Кривые реагирования в дуополии Курно

Падение цены товара, вызванное дополнительным производством фирмы Б, приводит к изменению кривой спроса фирмы А. Теперь уже А предполагает, что Б будет производить 7,5 ед продукции. Она отрегулирует свой выпуск до 11,25 ед.

Теперь очередь фирмы Б отвечать снова. Она увеличивает объем до 9,4 ед. В следующих периодах выпуск фирмы А будет продолжать снижаться, в то время как выпуск фирмы Б – увеличиваться (правда, на все меньшую величину). Процесс приспособления продолжается. Конечный равновесный выпуск каждой фирмы достигает 1/3 конкурентного выпуска (общий рыночный выпуск равен 2/3 равновесного конкурентного выпуска при данном спросе на товар).

Пересечение кривых реагирования двух фирм – точка Е – показывает равновесие Курно: каждая фирма правильно угадывает поведение конкурента и принимает самое оптимальное для себя решение. При равновесии Курно каждый дуополист устанавливает объем производства, который максимизирует его прибыль при данном объеме производства своего конкурента, и поэтому ни у одного дуополиста нет стимула менять свой объем производства.

Модель равновесия Курно предполагает, что фирмы-дуополисты конкурируют друг с другом.

Ситуация принципиально изменится, если дуополисты достигнут соглашения и будут коллективно намечать объем производства таким образом, чтобы максимизировать совокупную прибыль, а затем разделить ее пополам. Тогда множество возможных решений придется на контрактную линию.

И если они будут делить прибыль пополам, то и будут производить каждую половину продукции (в нашем примере по 7,5 ед). Сравнение показывает, что при равновесии Курно общий объем производства выше, чем при дуополистическом сговоре (20 > 15), но ниже, чем он был бы при конкурентном равновесии (20 < 30).

9.3. Модель общего экономического равновесия

Предметом исследования данной темы является общее равновесие или равновесие, возникающее в результате взаимодействия всех рынков, когда изменение спроса или предложения на одном рынке влияет на равновесные цены и объемы продаж на всех рынках.

Равновесие называется общим, если система взаимосвязанных цен обеспечивает одновременное равенство спроса и предложения на всех рынках. Естественно, что модели общего экономического равновесия, по сравнению с моделями частичного равновесия, являются более сложными.

Рыночное равновесие - состояние, при котором ни у кого из экономических субъектов не возникает побуждений к его изменению. Применительно к спросу и предложению точка равновесия будет находиться в точке пересечения кривых спроса и предложения (рис. 9.8).

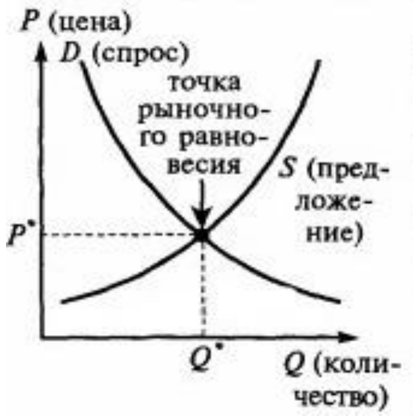


Рис. 9.8. Рыночное равновесие в результате взаимодействия спроса и предложения

Равновесные модели в статике. Для статических моделей равновесия характерны следующие моменты: представление и сопоставление различных равновесных состояний рынка; механизм перехода от одного состояния к другому не исследуется; время учитывается лишь косвенным образом.

Метод сравнительной статики позволяет анализировать сдвиги спроса, предложения и точек равновесия под воздействием экзогенных факторов.

Общая теория равновесия базируется на следующих постулатах:

1) основным инструментом жизни общества служит регулируемый рынок, а важнейшим видом деятельности является производство товаров и услуг;

2) экономическая деятельность осуществляется в условиях свободной конкуренции под контролем государства, а цены складываются под влиянием спроса и предложения;

3) цель производителей - получение максимальной прибыли;

4) цель потребителей - получение максимальной полезности при минимальных затратах в удовлетворении своих потребностей;

5) макроэкономическое равновесие выступает как результат совместных действий государства и бизнеса, факторов производства, спроса и предложения.

В настоящее время существует достаточно много моделей макроэкономического равновесия, специфику которым придают авторские взгляды на проблему и попытки кристаллизовать в них главные экономические интересы субъектов экономической деятельности. Из всей их совокупности можно выделить некоторые основополагающие модели.

Как правило, в статических моделях рассматривают мгновенный, краткосрочный, долгосрочный периоды деятельности экономических субъектов.

Мгновенный период – характеризуется следующими факторами:

1) количество произведенных ресурсов (факторов производства) не меняется, т.е. все факторы являются постоянными;

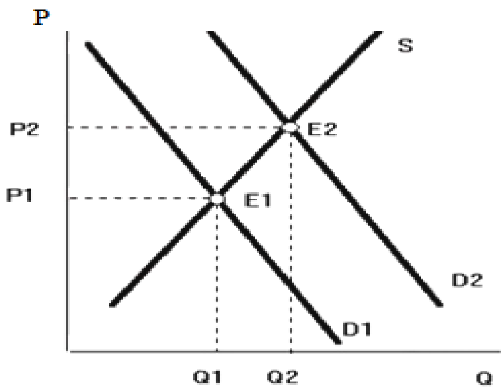
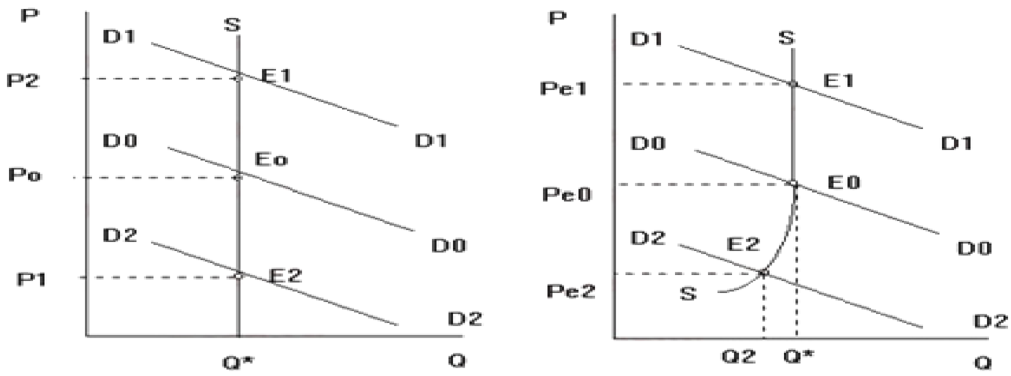


Рис. 9.9. Зависимость рыночного объема спроса Q

2) продавец лишен возможности приспосабливать величину предложения к объему спроса и равновесная цена определяется только кривой спроса;

3) как следствие, кривая предложения, является либо строго вертикальной линией (рис. 9.10, а - для товаров, не подлежащих хранению), либо имеет возрастающий отрезок (рис. 9.10, б - для скоропортящихся товаров).



а б

Рис. 9.10. Рыночное равновесие для мгновенного периода времени

Краткосрочный период. В краткосрочном периоде часть факторов производства является постоянной, а часть переменной (рис. 9.11).

Продавец может приспосабливать величину предложения в соответствии с рыночным спросом, но только в пределах производственных мощностей предприятия: кривая предложения состоит из двух участков, где Q^* – максимально возможный объем производства при данных мощностях; рыночная цена определяется взаимодействием спроса и предложения на возрастающем отрезке кривой предложения, и только спросом — на вертикальном отрезке кривой SS.

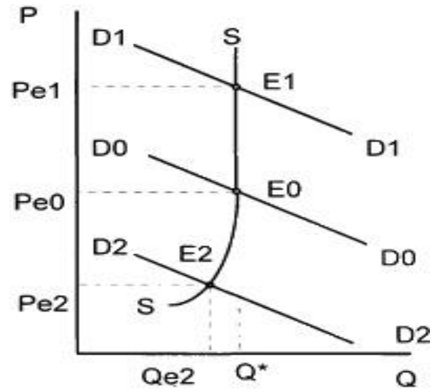
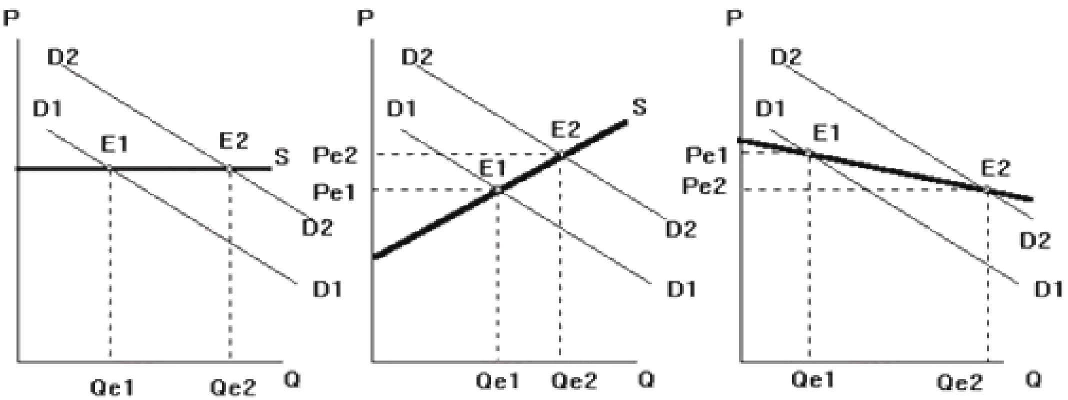


Рис. 9.11. Рыночное равновесие для краткосрочного периода времени

Долгосрочный период. Для долгосрочного периода характерно то, что все факторы производства являются переменными, это предполагает возможность изменения масштабов производства (рис. 9.12).



а б в

Рис. 9.12. Рыночное равновесие для долгосрочного периода:
а – с постоянными, б – возрастающими в – убывающими издержками

В зависимости от динамики издержек (затрат) производственная кривая предложения может иметь вид:

а) горизонтальной линии - издержки являются постоянной величиной, и рост равновесного объема происходит без изменения равновесной цены;

б) возрастающей линии - издержки увеличиваются, например, из-за роста цен на ресурсы, и рост равновесного объема сопровождается ростом равновесной цены;

в) убывающей линии - издержки сокращаются, и рост равновесного объема сопровождается ростом равновесных цен.

Равновесные модели в динамике

Динамические модели непосредственно учитывают фактор времени.

Все переменные в подобных моделях являются функциями времени (например: скорость изменения цены или скорость изменения объема).

Стабильность равновесия означает способность рынка, выведенного из состояния равновесия, вновь возвращаться к нему под влиянием лишь своих внутренних факторов.

Стабильность или нестабильность рыночного равновесия может быть проанализирована при помощи так называемой паутинообразной модели.

Паутинообразная модель описывает динамический процесс: траекторию корректировки цен и объема производства при движении от одного состояния равновесия к другому. Используется эта модель для описания колебаний цен на рынках сельскохозяйственной продукции, на биржевом рынке, где предложение реагирует на изменения цен с некоторым запозданием.

Рассмотрим вариант динамической модели рынка одного продукта. Предположим, что объем спроса зависит от уровня цен текущего периода, а объем предложения - от уровня цен предшествующего периода:

$$Q_i^D = Q_i^D(P_t); \qquad Q_i^D = Q_i^S(P_{t-1}), \tag{9.3}$$

где t - определенный период (t = 0, 1, 2,..., T).

Это значит, что производители определяют объем производства, предполагая, что цены периода $t - 1$ сохраняются и в период t, т.е. $P_{t-1} = P_t$. В таком случае график спроса и предложения будет иметь вид паутинообразной модели.

В зависимости от угла наклона линий спроса d и предложения b возможны три варианта изменения рыночной цены во времени:

1. Если наклон линии предложения более крутой, чем наклон линии спроса ($d < b$), то со временем отклонение от равновесия уменьшается, равновесие восстанавливается (рис. 9.13).

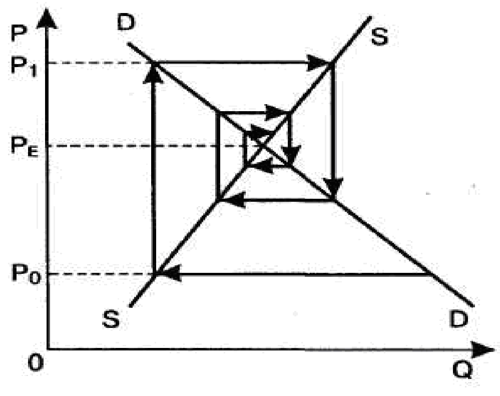


Рис. 9.13. Состояние равновесия рынка при $d<b$

2. Если наклон линии предложения более пологий, чем наклон линии спроса ($d > b$) , отклонение от равновесия увеличивается (рис. 9.14).

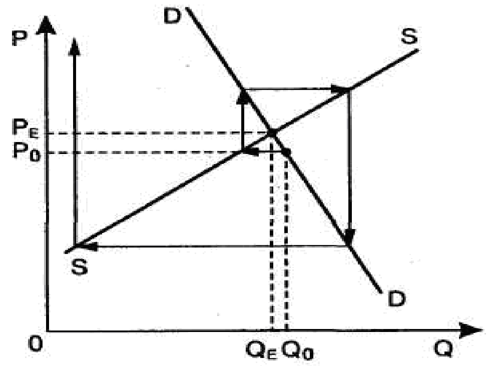


Рис. 9.14. Состояние равновесия рынка при $d > b$

3. При одинаковом наклоне линий предложения и спроса ($d = b$) рынок колеблется вокруг точки равновесия (рис. 9.15). Этот вариант рассмотрим несколько подробнее.

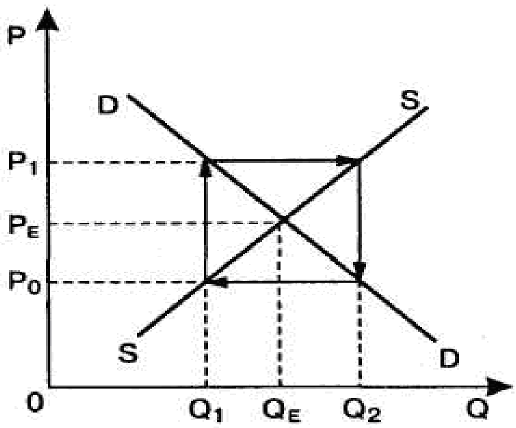


Рис. 9.15. Состояние равновесия рынка при $d = b$

Допустим, что начальная цена P_o. На эту цену ориентируются производители в период $t = 1$, предлагая продукцию в объёме Q_1, что ниже равновесного уровня Q_E. Тогда возникает дефицит, в результате чего цены повышаются до P_1. В ответ на это производители увеличат объем предложения до Q_2, надеясь, что уровень цен сохранится и в период $t = 2$. Избыток предложения приведет к понижению цены до P_o и т. д.

Все три варианта допускают неизменность функций спроса и предложения во времени. Несмотря на то, что линии спроса и предложения имеют нормальный наклон, запаздывание в реакции предложения на изменение цен может привести к нестабильности равновесного состояния.

Если рынок обладает стабильностью равновесия, то это означает, что его дополнительное регулирование со стороны государства необязательно, ибо рынок — это саморегулирующийся механизм. Если же рыночное равновесие нестабильно, то государственное регулирование необходимо.

Государственное воздействие может осуществляться через использование мер описанных ниже.

1. *Введение потоварного налога* - *T*. Данная мера может вызвать сдвиг кривой предложения *SS* вверх влево и установление новой более высокой цены равновесия $P^* = P_в + T$, а также нового меньшего равновесного объема продаж $Q^* < Q_в$.

2. *Государственные дотации* - *T*. Вызывают сдвиг кривой предложения вниз вправо, установление новой более низкой цены равновесия $P^* = P_в - T$ и нового большего равновесного объема $Q^* > Q_в$.

3. *Установление фиксированных цен*. Последствия государственного вмешательства в рыночные цены зависит от того, фиксируются ли цены выше или ниже точки равновесия:

а) ниже цены равновесия (на социально значимые товары, чтобы не допустить их чрезмерного роста) - в результате возникает дефицит, ибо при цене $P^* < P_в$ величина спроса превышает величину предложения и возникает товарный дефицит;

б) выше цены равновесия (защита производителей какой-либо отрасли, сельского хозяйства) - избыток предложения, поскольку при цене $P^* > P_в$ величина спроса меньше величины предложения. Данный избыток покрывается государственными закупками, финансируемыми, в конечном счете, за счет налогов.

Паутинообразная модель рыночного равновесия может с достаточной степенью вероятности применяться лишь к определенной продукции, так как не учитывает ряд важных факторов (климатические условия, изменения спроса потребителей). Однако, она показывает зависимость функционирования рынка от времени реакции в сфере предложения и формы кривой предложения и спроса. Достижение устойчивого равновесия не означает остановки в развитии производства, поэтому устойчивость рыночного равновесия носит относительный характер.

Равновесие по Маршаллу[4]. При альтернативном подходе исследуются обратные функции спроса (предложения):

$$P_d = P_d(Q); \qquad P_s = P_s(Q), \tag{9.4}$$

то есть упор делается на ценах спроса и ценах предложения при заданном объеме.

Пусть реальный объем продаж Q_1 ниже равновесного уровня $Q_в$, тогда цена спроса P_d, отражающая готовность покупателей приобрести этот товар,

[4] Альфред Маршалл (1842-1924) английский экономист, профессор Кембриджского университета, основатель Кембриджской школы в экономической теории.

будет выше цены предложения P_s. Это будет стимулировать продавцов увеличивать объем продаж.

И наоборот, если объем продаж Q_2 выше равновесного уровня Q_e, то цена спроса P_d, будет меньше цены предложения P_s.

Подобная рыночная ситуация заставит продавцов сократить объем продаж до точки равновесия.

Рыночное равновесие по Маршаллу (объем продаж выше рыночного объема) представлено на рис. 9.16.

Условие равновесия по Маршаллу представляет собой равенство цен спроса и предложения:

$$P_d(Q) = P_s(Q). \tag{9.5}$$

Рассмотрим модель Леона Вальраса - общего экономического равновесия, изложенную им в работе «Элементы чистой политической экономии» (1889 г.) [28].

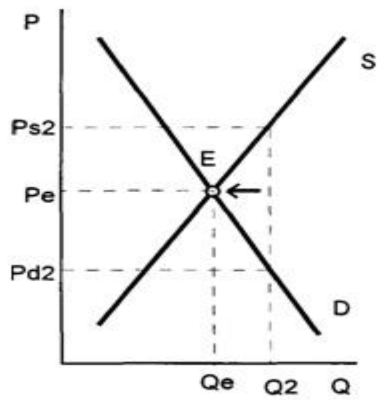


Рис. 9.16. Условие равновесия по Маршаллу

В этой экономической системе производится n товаров с помощью m видов ресурсов или факторов производства. Обозначим через r_i количество i-го ресурса, а через x_j – количество j-го товара. Техническая характеристика производственных возможностей дается при помощи mn фиксированных коэффициентов затрат a_{ij}, показывающих расход i-го ресурса для производства единицы j-го товара. Предполагая равенство спроса и предложения по каждому виду ресурсов, получаем m уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = r_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = r_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = r_n . \end{cases} \tag{9.6}$$

Введем в качестве $m + n$ переменных цены товаров ($P_1, P_2, \dots, P_n$) и цены факторов производства ($V_1, V_2, \dots, V_m$).

Уравнения рыночного спроса на товары представляются в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = F_1(P_1, P_2, \dots, P_n; V_1, V_2, \dots, V_m), \\ x_2 = F_2(P_1, P_2, \dots, P_n; V_1, V_2, \dots, V_m), \\ \dots \\ x_n = F_n(P_1, P_2, \dots, P_n; V_1, V_2, \dots, V_m). \end{cases} \qquad (9.7)$$

Цены факторов производства вводятся в функции спроса для того, чтобы учесть изменения спроса на товары в связи с изменением уровня и распределения доходов. Удвоение всех цен на товары и факторы производства не меняет положения участников рыночного обмена и, следовательно, не влияет на индивидуальный и совокупный спрос. И если рассматриваются условия конкурентного равновесия применительно к длительному периоду, сохраняется классическая предпосылка о равенстве цены товара издержкам его производства:

$$P_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} V_j. \qquad (9.8)$$

А так как промежуточные продукты в модели отсутствуют, полные издержки производства единицы товара сводятся к оплате производственных факторов в соответствии с их ценами. Это условие выражается следующими n условиями:

$$\begin{cases} a_{11}V_1 + a_{21}V_2 + \dots + a_{m1}V_m = P_1 \\ a_{12}V_1 + a_{22}V_2 + \dots + a_{m2}V_m = P_2 \\ \dots \\ a_{1n}V_1 + a_{2n}V_2 + \dots + a_{mn}V_m = P_n \end{cases} \qquad (9.9)$$

Для завершения системы следует определить условие предложения факторов производства. Предполагается, что оно зависит от рыночных цен на эти факторы, а также от цен на конечные товары. Последняя группа уравнений представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} r_1 = G_1(P_1, P_2, \dots, P_n; V_1, V_2, \dots, V_m), \\ r_2 = G_2(P_1, P_2, \dots, P_n; V_1, V_2, \dots, V_m), \\ \dots \\ r_m = G_m(P_1, P_2, \dots, P_n; V_1, V_2, \dots, V_m). \end{cases} \qquad (9.10)$$

Подобно функциям спроса (уравнение 9.7), функции предложения являются однородными нулевой степени. Более того, сумма расходов каждого участника обмена ограничена суммой его доходов от факторов производства, и это условие справедливо для системы в целом. Стало быть, функции совокупного рыночного спроса и предложения не являются независимыми и удовлетворяют тождествам:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j\, x_j \equiv \sum_{i=1}^{m} V_i\, r_i \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{n} P_j\, F_j \equiv \sum_{i=1}^{m} V_i\, G_i \ . \qquad (9.11)$$

При условии постоянства технологических коэффициентов это отношение вытекает из (9.6) и (9.9). Умножив первое уравнение из (9.6) на V_1 , второе – на V_2 и так далее, и суммируя эти m уравнений, получим в левой части $\sum a_{ij} V_i x_j$, а в правой - $\sum V_i\, r_i$.

Умножив первое уравнение из (9.10) на x_1, второе – на x_2 и так далее и суммируя эти n уравнений, получим в левой части $\sum a_{ij} V_i x_j$, а в правой - $\sum P_j x_j$.

Таким образом:

$$\sum V_i\, r_i \equiv \sum P_j x_j \ . \qquad (9.12)$$

Решение модели Вальраса определяет одновременно равновесные цены и объемы производства по всем отраслям.

Основное равенство, так называемый закон Вальраса, утверждает, что общая величина спроса должна быть при соответствующей системе цен равна общей величине предложения. На этой основе доказывается, что необходимое число уравнений в системе не равно общему числу рассматриваемых товаров и ресурсов, как можно было бы предположить, а на единицу меньше: последнее уравнение обязательно вытекает из совокупности остальных.

Конечно, модель Л. Вальраса несколько идеализировала действительность. В ней предусматривалось, что потребители знают свои функции спроса и предложения, технические коэффициенты и многие другие данные. Модель общего равновесия исходит из совершенной конкуренции, предполагающей идеальную мобильность всех ресурсов, полную информированность участников, абсолютизирует состояние равновесия, тогда как в действительности гораздо чаще встречаются диспропорции и дисбалансы.

Исследование модели Л. Вальраса, сводится, таким образом, к решению трех основных вопросов:

1) существует ли решение данной системы уравнений, т.е., возможна ли система цен, товаров и ресурсов, совместных друг с другом;

2) единственно ли это решение в том смысле, что для каждой переменной существует только одно значение, совместное с общим решением;

3) стабильна ли система, способна ли она возвращаться к равновесию при его нарушении.

Ответы на эти вопросы возможны при введении ряда экономически приемлемых ограничений.

10. МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИКИ

В отличие от микроэкономики и теории общего равновесия макроэкономика рассматривает такие параметры национальной экономики, как валовой внутренний продукт, фискальную политику, занятость, экономический рост и др.

Макроэкономические модели представляют собой формализованные (логически, графически и алгебраически) описания различных экономических явлений и процессов с целью выявления функциональных взаимосвязей между ними.

В качестве внешних (экзогенных) переменных, величина которых определяется вне модели, нередко выступают основные инструменты фискальной политики правительства и денежно-кредитной политики национального банка – изменения в величинах государственных издержек, налогов и денежной массы.

С помощью моделей обеспечивается многовариантность способов разрешения экономических проблем, которая позволяет добиваться необходимой альтернативности и гибкости макроэкономической политики.

Наиболее перспективными с этой точки зрения являются модели, учитывающие динамику инфляционных ожиданий экономических агентов. Их использование в макроэкономическом прогнозировании позволяет снизить риск возникновения феномена неожиданной инфляции, которая оказывает наиболее разрушительное влияние на экономику, а также смягчить являющуюся одной из самых сложных в макроэкономике проблему недоверия к политике правительства и Центрального банка [29, 30].

Чтобы определить состояние экономики в целом, необходимо суммировать (агрегировать) состояние экономики каждой компании. Агрегирование позволяет получить статистические показатели, характеризующие совокупное производство федерации. Такие показатели называются *макроэкономическими*. Совокупность макроэкономических показателей называется *системой национальных счетов*.

В отличие от теоретико-игрового подхода, на основе которого строились математические модели микроэкономики и модели общего равновесия, для моделирования макроэкономических систем используется эконометрический подход [29 - 32].

10.1. Статическая модель Леонтьева

Предположим, что вся экономика состоит из n отраслей, каждая из которых производит свой вид продукции, x_i - это общий выпуск i-й отрасли.

Определенная доля выпуска каждой отрасли расходуется, во-первых, в непроизводственной сфере, а, во-вторых, используется в качестве ресурсов производства в других отраслях экономики.

Введём обозначения: c_i – объем потребления продукции i-ой отрасли в непроизводственной сфере, a_{ij} - доля выпуска i-й отрасли потребляемая j-й отраслью.

Из условия рыночного равновесия следует, что спрос на продукцию отрасли должен равняться предложению отрасли. Таким образом, мы имеем следующие n уравнений:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + c_i\ . \tag{10.1}$$

Здесь левая часть отражает выпуск, а правая – затраты и конечный спрос.

Перейдём к векторно-матричным обозначениям.

$X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – вектор выпуска, $C = (c_1, \ldots,\ c_n)^T$ – вектор потребления в непроизводственной сфере, $A = [a_{ij}]$ – технологическая матрица прямых затрат.

Тогда условие равновесия примет вид:

$$X = AX + C. \tag{10.2}$$

Данную систему уравнений называют статической моделью экономики Леонтьева. При этом следует учитывать, что вектор выпуска X и вектор потребления продукции C должны быть неотрицательными величинами.

Предположим, что у нас заданы технологическая матрица и потребление продукции в непроизводственной сфере, тогда:

$$\begin{gathered} X - AX = C, \\ (I - A)X = C, \\ X = (I - A)^{-1}C, \end{gathered} \tag{10.3}$$

где I – единичная матрица.

Если для любого неотрицательного объема потребления в непроизводственной сфере соответствует неотрицательное значение вектора выпуска X, то в этом случае говорят о том, что модель Леонтьева является продуктивной.

Модель Леонтьева «затраты – выпуск» строится на основе схемы межотраслевого баланса в предположении о том, что каждая отрасль выпускает один и только свой продукт с использованием продуктов остальных отраслей и посредством линейной технологии. Она помогает анализировать перетоки товаров между отраслями и отвечает на вопрос: можно ли в условиях данной технологии удовлетворить конечный спрос населения на товары? С помощью двойственных оптимизационных задач доказывается существование равновесия, которое является частным случаем конкурентного равновесия Вальраса.

10.2. Продуктивность модели Леонтьева

Пусть имеется матрица Y_{n+n}. Говорят, что матрица Y является неотрицательно определенной $Y \geq 0$ в том случае, когда для любого ненулевого вектора z соответствующей размерности $z \neq 0$ выполняется соотношение $z^T Yz \geq 0$.

Число λ – собственное число матрицы $Y_{n \times n}$, если оно удовлетворяет соотношениям $det(Y - I\lambda) = 0$.

Модель Леонтьева является продуктивной в том случае, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

а) матрица $(I - A)^{-1} \geq 0$ является неотрицательно определенной;

б) бесконечный матричный ряд $I + A + A^2 + \ldots = (I - A)^{-1}$ сходится и равен $(I - A)^{-1}$;

в) наибольшее собственное число матрицы A по модулю: $|\lambda_{max}| < 1$.

Тогда из условий матрица A является продуктивной, а следовательно, и модель Леонтьева является продуктивной.

10.3. Рыночное равновесие в модели Леонтьева

Как и модель Вальраса, модель Леонтьева может использоваться для нахождения параметров общего рыночного равновесия. Более того, все состояния равновесия, которые будут получены с помощью модели Леонтьева, всегда будут экономически значимыми.

Будем предполагать, что экономика включает в себя n различных отраслей и каждая из них производит свой вид продукции.

Обозначим через x_j выпуск j-ой отрасли, x_{ij} количество единиц продукции i-ой отрасли используемых для функционирования j-ой отрасли.

Будем предполагать, что помимо продукции других отраслей для производства в каждой отрасли используются m видов ресурсов производства:

$y_1, \ldots, y_m$ – первоначальные факторы производства;

r_{ij} – количество единиц i-го ресурса, используемого для производства продукции в j-ой отрасли.

Обозначим через $a_{ij}(t)$ количество единиц i-ой отрасли, необходимый для производства одной единицы продукции в j-ой отрасли, b_{ij} количество единиц i-го ресурса, используемого для выпуска одной единицы продукции j-ой отрасли.

$$\begin{cases} x_{ij} = a_{ij} x_j \\ r_{ij} = b_{ij} x_j \end{cases} \qquad (10.4)$$

В этом случае производственная функция экономики Леонтьева принимает следующий вид:

$$x_j = \min\left\{\frac{x_{1j}}{a_{1j}}, \frac{x_{2j}}{a_{2j}}, ..., \frac{x_{nj}}{a_{nj}}, \frac{r_{1j}}{b_{1j}}, ..., \frac{r_{mj}}{b_{mj}}\right\} \qquad (10.5)$$

Просуммируем равенство $r_{ij} = b_{ij}x_j$ по j и получим:

$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j$ - спрос на i-ый фактор производства.

Обозначим через $r_1, ..., r_m$ – объем предложения факторов производства.

Поскольку спрос на каждый фактор производства (в условиях рыночного равновесия) не должен превышать его предложения, то должно выполняться следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j \le r_i \qquad (10.6)$$

Введем векторно-матричное обозначение $B_x \le r$.

$B_{mxn} = [b_{ij}]$ – технологическая матрица факторов производства, r – вектор начальных запасов факторов производства, $w = (w_1, w_2, ..., w_m)^T$ - вектор цен факторов производства, $p = (p_1, p_2, ..., p_n)^T$– вектор цен товаров.

Определим предельные издержки, которые связаны с выпуском единицы продукции j-ой отрасли:

$$\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} w_i b_{ij} \ge p_j \quad . \qquad (10.7)$$

Предположим, что экономика функционирует в условиях совершенной конкуренции, тогда предельные издержки, связанные с выпуском одной единицы продукции каждой отрасли, не должны превышать рыночную цену единицы продукции отрасли.

Переписав эти выражения в векторно-матричной форме, получаем:

$$P^T A + w^T B \ge p^T <=> p^T (I-A)^{-1} \le w^T B \qquad (10.8)$$

Таким образом, задача поиска общего рыночного равновесия может быть сформулирована следующим образом.

$$\begin{cases} p^T C \xrightarrow[X]{} \max \\ X = AX + C \\ Bx \le r \\ X \ge 0 \end{cases} \qquad (10.9)$$

Максимизация осуществляется за счет выбора вектора выпуска отрасли X.

$$X=(I\text{-}A)^{-1}C\ ;\ \ C=(I\text{-}A)X\ .$$

$$\begin{cases} p^T(I-A)X \xrightarrow[X]{} \max \\ Bx \le r \\ X \ge 0 \end{cases} \qquad (10.10)$$

Здесь переменными для определения общего рыночного равновесия является объем выпуска отрасли, а цены предполагаются заданными.

Задача нахождения общего рыночного равновесия может быть сформулирована также в двойственной постановке. В этом случае объем выпуска отрасли считается заданным, а переменными, по которым осуществляется нахождение общего рыночного равновесия, выступают цены.

Предполагается, что критерием оптимальности функционирования экономики является минимизация стоимости первоначальных факторов производства (минимизация национального дохода)

$$\begin{cases} w^T r \xrightarrow[w]{} \max \\ Bw \ge p(I-A) \\ W \ge 0 \end{cases} \qquad (10.11)$$

В этом и заключается задача нахождения общего рыночного равновесия в двойственном виде. При этом все найденные соотношения в результате решения задачи будут иметь экономическую интерпретацию.

10.4. Динамическая модель Леонтьева

Рассмотрим, как будет развиваться ситуация с течением времени. Время t измеряется дискретно, с временным лагом, равным 1, т.е. t = 0, 1, 2, … Предполагается, что в каждый момент времени t каждая отрасль осуществляет инвестиции в другие отрасли экономики.

Обозначим через $K_{ij}(t)$ объем инвестиций i-ой отрасли в j-ю в момент времени t.

$x_j(t)$ - $x_j(t$ - 1) – прирост производства j-ой отрасли в момент времени t.

$k_{ij}(t) = \dfrac{K_{ij}(t-1)}{x_j(t) - x_j(t-1)}$ - доля инвестиций i-ой отрасли в прирост производства продукции j-ой отрасли.

Обозначим через $a_{ij}(t)$ объем продукции i-ой отрасли, необходимый для функционирования j-ой отрасли в момент времени t.

Через $c_i(t)$- потребление продукции i-ой отрасли в непроизводственной сфере в момент времени t.

$$x_j(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(t)(x_j(t) - x_j(t-1)) + c_i(t) \quad . \qquad (10.12)$$

10.5. Динамическая модель экономики Неймана

Модель экономики Джона фон Неймана является замкнутой. Все выпуски предыдущего периода становятся затратами следующего периода, и наличие первоначальных факторов производства не предполагается. Кроме того, модель Неймана предполагает, что осуществляется сбалансированный рост экономики с течением времени (пропорциональное увеличение объемов выпуска каждой из отраслей).

Предполагается, что экономика производит $\in n$ видов товара. Производство товаров осуществляется с помощью p отраслей производства. Каждая отрасль способна производить любой из n товаров.

Обозначим через $y_i(t)$ интенсивность функционирования i-ой отрасли в момент времени t.

Обозначим через $y(t) = (y_1(t), \ldots y_p(t))^T$ – вектор интенсивности – показатель значимости функционирования отрасли в данный момент времени t.

$$\Sigma\, y_i(t)=1; \;\; 1 \geq y_i \geq 0.$$

Обозначим через вектор $p(t)= (p_1(t), \ldots p_n(t))^T$ - вектор цен товаров.

Предположим, что цены являются относительными, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1.$$

Технология производства в модели Неймана описывается с помощью 2-х матриц:

$A = [a_{ij}]_{nxp}$ – матрица затрат, где a_{ij}– затраты продукции i-го вида, которые используются при функционировании j-ой отрасли с интенсивностью, равной единице.

$B = [b_{ij}]_{nxp}$ – матрица выпуска, где b_{ij}– выпуск i-го вида продукции, которая получится при функционировании j-ой отрасли с интенсивностью, равной единице.

$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}(t) y_j(t)$ – общие затраты i-ого вида продукции в момент времени t за счет *функционирования* j-ой отрасли;

$A(t)\, y(t)$ - общие затраты в экономике в момент времени t.

$B(t)\, y(t)$ – общий выпуск в экономике в момент времени t.

Предполагается, что время t измеряется дискретно, с временным лагом равным одному, т.е. $t = 0, 1, 2,\ldots$ Тогда длительность периода производства продукции равна 1 временному циклу.

Поскольку мы предполагаем замкнутость экономики, то общие затраты в каждый следующий момент времени не могут превышать общего выпуска в предшествующий момент времени: $A(t+1)\,y(t+1) \le B(t)\,y(t)$ =>

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}(t+1)y_i(t+1) \le \sum_{j=1}^{p} b_{ij}(t)y_i(t) \tag{10.13}$$

Если для какого-либо ресурса выполняется неравенство объем S > объема D, то рыночная цена на данный ресурс снижается до нуля. Поэтому имеет место следующее соотношение:

$$p^T(t+1)\,A(t+1)\,y(t+1) = p^T(t+1)\,B(t)\,y(t). \tag{10.14}$$

Предположим, что в экономике имеет место совершенная конкуренция. В этом случае при условии, что в экономике имеет место состояние рыночного равновесия, то ни по какому виду товаров не может быть получена прибыль, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(t+1)b_{ij}(t+1) \le \sum_{j=1}^{n} p_j(t)a_{ij}(t)\,. \tag{10.15}$$

Предельная выручка не может превышать предельных издержек.

Если для какого-либо вида ресурсов выполняется строгое неравенство объем S > объема D, то прибыль становится отрицательной от данной продукции и интенсивность выпуска становится равной нулю, производство прекращается.

$$p^T(t+1)\,A(t+1)\,y(t+1) = p^T(t+1)\,B(t)\,y(t) \tag{10.16}$$

Экономика функционирует в состоянии рыночного равновесия, и с течением времени не может быть получена прибыль, т.е. должно выполняться следующее соотношение:

$$p^T(t+1)\,B(t+1) \le p^T(t+1)\,A(t). \qquad (10.16)$$

Интенсивность функционирования отрасли становится равной нулю, тогда:

$$p^T(t+1)\,B(t+1)\,y(t+1)= p^T(t+1)\,A(t)\;\,y(t+1). \tag{10.17}$$

Будем считать, что в экономике имеет место сбалансированный рост производства, т.е. интенсивность выпуска всех отраслей возрастает с одинаковым темпом роста λ :

$$y(t+1) = (1+\lambda)\,y(t) = (1+\lambda)^T y(0). \tag{10.18}$$

В экономике существует процентная ставка и дисконтирование цен, тогда:

$$
\begin{gathered}
p_i(t+1) = p_i\ (t) / 1+ p_o;\ (p_o \text{ – норма \%});\\
p(t+1) = p_i\ (t) / 1+ p_o = (1+ p_o)^{-t} p(0);\\
A(t+1)\, y(t+1) \le B(t)\, y(t);\\
\begin{cases} (1+\lambda)A(t+1)y(t) \le B(t)y(t) \\ (1+\lambda)\, p^T(t+1)A(t+1)y(t) = p^T(t+1)B(t)y(t); \end{cases}\\
\begin{cases} p^T(t+1)B(t+1)y(t+1) = p^T(t+1)A(t)y(t+1) \\ 1+\rho^{-1} p^T(t)A(t+1)y(t+1) \ge p^T(t)B(t) \end{cases} .
\end{gathered}
\tag{10.19}
$$

Будем предполагать, что компоненты матрицы выпуска и матрицы затрат не зависят от времени. В этом случае максимальной темп сбалансированного роста и минимальная норма (%) будут равны между собой:

$$
\lambda_{\max} = \rho_{\min} = \frac{p^T(t)By(t)}{p^T(t)Ay(t)} - 1 \ . \tag{10.20}
$$

В результате получаем дискретный луч, т.е. траекторию максимального пропорционального сбалансированного роста.

Модель Неймана является обобщением модели Леонтьева. Это линейная динамическая модель расширяющейся экономики, когда каждая отрасль выпускает не один, а несколько товаров. Процесс совместного выпуска формализуется как линейная комбинация исходных производственных процессов, функционирующих с единичными интенсивностями (базисных процессов).

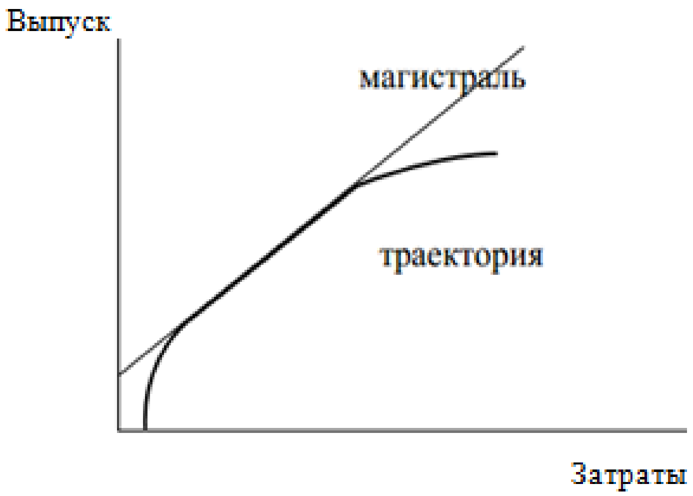


Рис.10.1.Траектория максимального пропорционального сбалансированного роста

В случае сбалансированного (с одним и тем же темпом) роста производства всех товаров и сбалансированного снижения цен всех товаров модель Неймана описывает траекторию равновесного роста. Наиболее эффективное развитие экономики соответствует максимальному темпу сбалансированного роста производства. В этом случае равновесная траектория называется лучом Неймана или магистралью.

Желательно, чтобы оптимальные (в том или ином смысле) траектории в моделях экономики обладали «магистральными» характеристиками. Поэтому основным вопросом магистральной теории является анализ близости траекторий оптимизационных моделей к соответствующим магистралям. Оптимальные траектории в динамических моделях Леонтьева и Неймана обладают такими свойствами при выполнении некоторых дополнительных условий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленном учебном пособии были рассмотрены наиболее важные задачи экономико-математического моделирования, которые необходимы в подготовке специалистов по экономическим специальностям. Применение математического моделирования в экономике и управлении позволяет углубить количественный экономический анализ, расширить область использования экономической информации, интенсифицировать экономические расчёты. Разработка ЭМММ не является окончательной продукцией экономико-математического моделирования. Это пособие нельзя рассматривать только как ориентацию на использование математических и статистических средств. Его целесообразно рассматривать как средство, позволяющее изучать связь между экономическими явлениями с помощью моделей, решение которых основано на комплексном рассмотрении наиболее распространённых экономико-математических методов.

Пособие знакомит студента с основными проблемами экономики и управления, при решении которых полезно применение математических методов и моделей: приводятся примеры обоснования решений по планированию производства, управлению запасами, изучению потребительского выбора, рыночного равновесия и конкуренции, управлению экономикой на макроуровне.

Предлагаемые модели и методы также помогут студентам в выполнении курсовых и дипломных работ, позволят им усилить практику использования персональных компьютеров для развития творческих и аналитических навыков. Овладение курсом ЭМММ поможет полнее и глубже обосновывать и использовать современные экономико-математические методы и способы их реализации в современной экономической практике.

Освоение представленного материала поможет студенту научиться ориентироваться в математических методах, чтобы уметь самому сформулировать задачу, перейти от ее экономической постановки к математической модели, провести анализ модели, доведя их до конкретных количественных результатов и содержательной интерпретации.

Данное пособие нельзя считать полным, тем не менее, в нём рассмотрены наиболее важные темы, которые помогут овладеть методами построения экономических моделей при решении экономических и управленческих задач.

Автор выражает надежду, что книга оказалась полезной студентам, аспирантам и специалистам, интересующимся как методами, так и теорией экономико-математического моделирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов. М.: ЮНИТИ, 2006.

2. Новиков А.М. Методология образования. 2-е изд. М.: «Эгвес», 2006.

3. Экономико-математическое моделирование. Учебник для вузов / под общ. ред. И.Н. Дрогобыцкого. М.: Изд. «Экзамен», 2004.

4. Орехов Н.А., Левин А.Г., Горбунов Е.А. Математические методы и модели в экономике. Учебное пособие для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

5. Емельянов А.А. Имитационное моделирование экономических процессов: учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2002.

6. Леонтьев В.В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика: Пер. с англ. М.: Политиздат, 1990.

7. Пелих А.С. Экономико-математические методы и модели в управлении производством: учеб. пособие. Ростов н/Д: «Феникс», 2005.

8. Колемаев В.А. Математическая экономика. Учебник для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012.

9. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: учеб. пособие. М.: ИНФРА-М, 2003.

10. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию: 2-е изд., перераб. и доп. Мн.: Выш. Шк., 2001.

11. Таха Х.А. Введение в исследование операций: 7-е изд.: Пер. с англ. М., 2005.

12. Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001.

13. Бурков В.Н., Зинченко В.Н., Сочнев С.В., Хулап Г.С. Механизмы обмена в экономике переходного периода. М.: ИПУРАН, 1999.

14. Коргин Н.А. Механизмы обмена в активных системах. М.: ИПУРАН, 2003.

15. Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры. М.: ИПУРАН, 2003.

16. Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. М.: ИПУРАН, 2003.

17. Черноморов Г.А. Теория принятия решений. Российский Государственный Технический университет. Новочеркасск, 2002.

18. Оре О. Теория графов. 2-е изд. М.: Наука, 1980.

19. Баркалов С.А., Бурков В.Н. Минимизация упущенной выгоды в задачах управления проектами. М.: ИПУ РАН, 2001.

20. Колосова Е.В., Новиков Д.А., Цветков А.В. Методика освоенного объема в оперативном управлении проектами. М.: Апостроф, 2001.

21. Баркалов С.А., Бурков В.Н., Новиков Д.А., Шульженко Н.А. Модели и механизмы в управлении организационными системами. В 3 т. М.: Издательство «Тульский полиграфист», 2003.

22. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах и бизнесе: учеб. пособие для вузов. М. 2000.

23. Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика: пер. со 2-го англ. изд. М.: Дело ЛТД, 1995.

24. Хайек Ф. Конкуренция как процедура открытия // Мировая экономика и международные отношения, 1989. № 12. С. 7.

25. Куприн А.Н. Яма. М., 2007.

26. Конкуренция. Её виды и экономическая роль [Электронный ресурс]. URL:http://studyspace.ru/ekonomicheskaya-teoriya/konkurentsiya.-eyo-vidyi-i-ekonomicheskaya-rol-4.html.

27. Алле М. Единственный критерий истины — согласие с данными опыта // Мировая экономика и международные отношения. 1989. № 11. С. 28.

28. Вальрас Л. Элементы чистой политической экономии, или Теория общественного богатства [Электронный ресурс]. URL:http://www.financepro.ru/econjmy/6939-valras-leon-jelementy-distojj-politicheskojj.htme.

29. Кремер Н.Ш. Эконометрика: учебник для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008.

30. Малыхин В.И. Математика в экономике: учеб. пособие. М.: ИНФРА-М, 2002.

31. Самаров К.Л., Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике и математическим методам в экономике: учеб. пособие. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2009.

32. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике: учебник: в 2-х ч. Ч. 2. М.: Финансы и статистика, 2000.

Приложение А

Таблица Брауна

Показывает зависимость ожидаемого дефицита изделий E(z) от резервного запаса, выраженного в стандартных отклонениях спроса (z). Значения приведены к стандартному отклонению спроса, равному единице.

z	E(z)	z	E(z)	z	E(z)	z	E(z)
-4,50	4,500	-1,56	1,586	0,12	0,342	1,80	0,014
-4,40	4,400	-1,52	1,548	0,16	0,324	1,84	0,013
-4,30	4,300	-1,48	1,511	0,20	0,307	1,88	0,012
-4,20	4,200	-1,44	1,474	0,24	0,290	1,92	0,010
-4,10	4,100	-1,40	1,437	0,28	0,275	1,96	0,009
-4,00	4,000	-1,36	1,400	0,32	0,256	2,00	0,008
-3,90	3,900	-1,32	1,364	0,36	0,237	2,04	0,008
-3,80	3,800	-1,28	1,328	0,40	0,230	2,08	0,007
-3,70	3,700	-1,24	1,292	0,44	0,217	2,12	0,006
-3,60	3,600	-1,20	1,256	0,48	0,204	2,16	0,005
-3,50	3,500	-1,16	1,221	0,52	0,192	2,20	0,005
-3,40	3,400	-1,12	1,186	0,56	0,180	2,24	0,004
-3,30	3,300	-1,08	1,151	0,60	0,169	2,28	0,004
-3,20	3,200	-1,04	1,117	0,64	0,158	2,32	0,003
-3,10	3,100	-1,00	1,083	0,68	0,148	2,36	0,003
-3,00	3,000	-0,96	1,049	0,72	0,138	2,40	0,003
-2,90	2,901	-0,92	1,017	0,76	0,129	2,44	0,002
-2,80	2,801	-0,88	0,984	0,80	0,120	2,48	0,002
-2,70	2,701	-0,84	0,952	0,84	0,112	2,52	0,002
-2,60	2,601	-0,80	0,920	0,88	0,104	2,56	0,002
-2,50	2,502	-0,76	0,889	0,92	0,097	2,60	0,001
-2,40	2,403	-0,72	0,858	0,96	0,089	2,64	0,001
-2,36	2,363	-0,68	0,828	1,00	0,083	2,68	0,001
-2,32	2,323	-0,64	0,798	1,04	0,077	2,72	0,001
-2,28	2,284	-0,60	0,769	1,08	0,071	2,76	0,001
-2,24	2,244	-0,56	0,740	1,12	0,066	2,80	0,0008
-2,20	2,205	-0,52	0,712	1,16	0,061	2,84	0,0007
-2,16	2,165	-0,48	0,684	1,20	0,056	2,88	0,0006
-2,12	2,126	-0,44	0,657	1,24	0,052	2,92	0,0005
-2,08	2,087	-0,40	0,630	1,28	0,048	2,96	0,0004
-2,04	2,048	-0,36	0,597	1,32	0,044	3,00	0,0004
-2,00	2,008	-0,32	0,576	1,36	0,040	3,04	0,0003
-1,96	1,969	-0,28	0,555	1,40	0,038	3,08	0,0003
-1,92	1,930	-0,24	0,530	1,44	0,034	3,12	0,0002
-1,88	1,892	-0,20	0,507	1,48	0,031	3,16	0,0002
-1,84	1,853	-0,16	0,484	1,52	0,028	3,20	0,0002
-1,80	1,814	-0,12	0,462	1,56	0,026	3,24	0,0001
-1,76	1,776	-0,08	0,440	1,60	0,023	3,28	0,0001
-1,72	1,737	-0,04	0,419	1,64	0,021	3,32	0,0001
-1,68	1,699	0,00	0,399	1,68	0,019	3,36	0,0001
-1,64	1,661	0,04	0,379	1,72	0,017	3,40	0,0001
-1,60	1,623	0,08	0,360	1,76	0,016	-	-
						-	-

Приложение Б

Площади под кривой нормального распределения от - ∞ до φ

Приведены значения площадей F(φ), накопленные от отрицательного «хвоста» кривой стандартного нормального распределения.

φ	F(φ)	φ	F(φ)	φ	F(φ)	φ	F(φ)
-4,00	0,00003	-1,95	0,02559	0,10	0,53983	2,15	0,98422
-3,95	0,00004	-1,90	0,02872	0,15	0,55962	2,20	0,98610
-3,90	0,00005	-1,85	0,03216	0,20	0,57926	2,25	0,98778
-3,85	0,00006	-1,80	0,03593	0,25	0,59871	2,30	0,98928
-3,80	0,00007	-1,75	0,04006	0,30	0,61791	2,35	0,99061
-3,75	0,00009	-1,70	0,04457	0,35	0,63683	2,40	0,99180
-3,70	0,00011	-1,65	0,04947	0,40	0,65542	2,45	0,99286
-3,65	0,00013	-1,60	0,05480	0,45	0,67364	2,50	0,99379
-3,60	0,00016	-1,55	0,06057	0,50	0,69146	2,55	0,99461
-3,55	0,00019	-1,50	0,06681	0,55	0,70884	2,60	0,99534
-3,50	0,00023	-1,45	0,07353	0,60	0,72575	2,65	0,99598
-3,45	0,00028	-1,40	0,08076	0,65	0,74215	2,70	0,99653
-3,40	0,00034	-1,35	0,08851	0,70	0,75804	2,75	0,99702
-3,35	0,00040	-1,30	0,09680	0,75	0,77337	2,80	0,99744
-3,30	0,00048	-1,25	0,10565	0,80	0,78814	2,85	0,99781
-3,25	0,00058	-1,20	0,11507	0,85	0,80234	2,90	0,99813
-3,20	0,00069	-1,15	0,12507	0,90	0,81594	2,95	0,99841
-3,15	0,00082	-1,10	0,13567	0,95	0,82894	3,00	0,99865
-3,10	0,00097	-1,05	0,14686	1,00	0,84134	3,05	0,99886
-3,05	0,00114	-1,00	0,15866	1,05	0,85314	3,10	0,99903
-3,00	0,00135	-0,95	0,17106	1,10	0,86433	3,15	0,99918
-2,95	0,00159	-0,90	0,18406	1,15	0,87493	3,20	0,99931
-2,90	0,00187	-0,85	0,19766	1,20	0,88493	3,25	0,99942
-2,85	0,00219	-0,80	0,21186	1,25	0,89435	3,30	0,99952
-2,80	0,00256	-0,75	0,22663	1,30	0,90320	3,35	0,99960
-2,75	0,00298	-0,70	0,24196	1,35	0,91149	3,40	0,99966
-2,70	0,00347	-0,65	0,25785	1,40	0,91924	3,45	0,99972
-2,65	0,00402	-0,60	0,27425	1,45	0,92647	3,50	0,99977
-2,60	0,00466	-0,55	0,29116	1,50	0,93319	3,55	0,99981
-2,55	0,00539	-0,50	0,30854	1,55	0,93943	3,60	0,99984
-2,50	0,00621	-0,45	0,32636	1,60	0,94520	3,65	0,99987
-2,45	0,00714	-0,40	0,34458	1,65	0,95053	3,70	0,99989
-2,40	0,00820	-0,35	0,36317	1,70	0,95543	3,75	0,99991
-2,35	0,00939	-0,30	0,38209	1,75	0,95994	3,80	0,99993
-2,30	0,01072	-0,25	0,40129	1,80	0,96407	3,85	0,99994
-2,25	0,01222	-0,20	0,42074	1,85	0,96784	3,90	0,99995
-2,20	0,01390	-0,15	0,44038	1,90	0,97128	3,95	0,99996
-2,15	0,01578	-0,10	0,46017	1,95	0,97441	4,00	0,99997
-2,10	0,01786	-0,05	0,48006	2,00	0,97725	-	-
-2,05	0,02018	0,00	0,50000	2,05	0,97982	-	-
-2,00	0,02275	0,05	0,51994	2,10	0,98214	-	-

Приложение В

Процентные точки распределения t-статистики Стьюдента

Степени свободы *n*	Вероятность									
	40 %	25 %	10 %	5 %	2,5 %	1 %	0,5 %	0,25 %	0,1 %	0,05 %
1	0,3249	1,0000	3,0777	6,3138	12,706	31,820	63,656	127,321	318,308	636,619
2	2887	0,8561	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	14,0890	22,3271	31,5991
3	2767	7649	6377	3534	3,1824	4,5407	5,8409	7,4533	10,2145	12,9240
4	2707	7407	5332	1318	2,7764	3,7469	4,6041	5,5976	7,1732	8,6103
5	2672	7267	4759	2,0150	5706	3649	4,0321	4,7733	5,8934	6,8688
6	0,2648	0,7176	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	4,3168	5,2076	5,9588
7	2632	7111	4149	8946	3646	2,9980	4995	4,0293	4,7854	4079
8	2619	7064	3968	8595	3060	8965	3554	3,8325	5008	5,0413
9	2610	7027	3830	8331	2622	8214	2498	6897	2968	4,7809
10	2602	6998	3722	8125	2281	7638	1693	5814	1437	5869
11	0,2696	0,6974	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	3,4966	4,0247	4,4370
12	2590	6955	3562	7823	1788	6810	0554	4284	3,9296	3178
13	2586	6934	3502	7709	1604	6503	3,0123	3725	8520	2208
14	2582	6924	3450	7613	1448	6245	2,9768	3257	7874	1405
15	2579	6912	3406	7530	1314	6025	9467	2860	7328	0728
16	0,2576	0,6901	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,2520	3,6862	4,0150
17	2573	6892	3334	7396	1098	5696	8982	2224	6458	3,9651
18	2571	6884	3304	7341	1009	5524	8784	1966	6105	9216
19	2569	6874	3277	7291	0930	5395	8609	1737	5794	8834
20	2567	6870	3253	7247	0860	5280	8453	1534	5518	8495

Приложение Г

Значения критерия Дарбина-Уотсона

В таблице приведены значения критерия Дарбина-Уотсона для уровня значимости 5 % (m - число независимых переменных уравнения регрессии)

Число наблюдений (n)	m = 1		m = 2		m = 3		m = 4		m = 5	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,47
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

Приложение Д

Критические границы отношения R / S

Объем выборки (n)	Нижние границы						Верхние границы					
	Вероятность ошибки											
	0,000	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,000
3	1,732	1,735	1,737	1,745	1,758	1,782	1,997	1,999	2,000	2,000	2,000	2,000
4	1,732	1,83	1,87	1,93	1,98	2,04	2,409	2,429	2,439	2,445	2,447	2,449
5	1,826	1,98	2,02	2,09	2,15	2,22	2,712	2,753	2,782	2,803	2,813	2,828
6	1,826	2,11	2,15	2,22	2,28	2,37	2,949	3,012	3,056	3,095	3,115	3,162
7	1,821	2,22	2,26	2,33	2,40	2,49	3,143	3,222	3,282	3,338	3,369	4,465
8	1,821	2,31	2,35	2,43	2,50	2,59	3,308	3,399	3,471	3,543	3,585	3,742
9	1,897	2,39	2,44	2,51	2,59	2,68	3,449	3,552	3,634	3,720	3,772	4,000
10	1,897	2,46	2,51	2,59	2,67	2,76	3,57	3,685	3,777	3,875	3,935	2,243
11	1,915	2,53	2,58	2,66	2,74	2,84	3,68	3,80	3,903	4,012	4,079	4,472
12	1,915	2,59	2,64	2,72	2,80	2,90	3,78	3,91	4,02	4,134	4,208	4,690
13	1,927	2,64	2,70	2,78	2,86	2,96	3,87	4,00	4,12	4,244	4,325	4,899
14	1,927	2,70	2,75	2,83	2,92	3,02	3,95	4,09	4,21	4,34	4,431	5,099
15	1,936	2,74	2,80	2,88	2,97	3,07	4,02	4,17	4,29	4,44	4,53	5,292
16	1,936	2,79	2,84	2,93	3,01	3,12	4,09	4,24	4,37	4,52	4,62	5,477
17	1,944	2,83	2,88	2,97	3,06	3,17	4,15	4,31	4,44	4,60	4,70	5,657
18	1,944	2,87	2,92	3,01	3,10	3,21	4,21	4,37	4,51	4,67	4,78	5,831
19	1,949	2,90	2,96	3,05	3,14	3,25	4,27	4,43	4,57	4,74	4,85	6,000
20	1,949	2,94	2,99	3,09	3,18	3,29	4,32	4,49	4,63	4,80	4,91	6,164

Приложение Е

Тесты для проверки полученных знаний

Выберите правильный ответ.

1. Модель - это:
   a - частичное представление реальности;
   b - абстракция;
   c - приближение;
   d - идеализация;
   e - все вышеперечисленное.
2. Решения в реальных бизнес- ситуациях обычно основываются на:
   a - оценке числовых данных;
   b- числовых значениях, полученных с помощью модели;
   c- использовании интуитивных представлений;
   d- всем вышеперечисленном.
3. Модель:
   a - не может быть полезной, если она не отражает реальную ситуацию во всех подробностях,
   b - является вспомогательным средством для человека, принимающего решения;
   c - после разработки редко пересматривается;
   d - обладает всеми вышеперечисленными свойствами.
4. Модель:
   a - заставляет менеджера явно указать поставленные цели;
   b - заставляет менеджера явно указать типы решений, влияющих на цели;
   c - заставляет менеджера четко указать ограничения, налагаемые на значения, которые могут принимать переменные;
   d - обладает всеми вышеперечисленным и качествами.
5. Модели:
   a - играют различные роли на разных уровнях управления компанией,
   b - редко используются в процессе стратегического планирования;
   c - дорогостоящий способ принятия рутинных ежедневных решений,
   d - все вышеперечисленное.
6. Условная оптимизация подразумевает:
   a - лежащая в основе модель является очень точным представлением реальности,
   b - достижение наилучшего возможного (в математическом смысле) результата с учетом ограничений;
   c - истинны оба приведенные выше высказывания.

7. В результате анализа «Что - если» можно гарантированно найти:
a - оптимальное решение,
b - хорошее решение;
c - возможное решение (если такие решения существуют);
d - ничего из вышеперечисленного.

8. В вероятностной модели некоторый элемент проблемы:
a - является случайной величиной с известным распределением;
b - является случайной величиной, о которой ничего не известно;
c - принимает различные значения, которые необходимо точно оценить до начала вычислений;
d - не будет известен до тех пор, пока модель не будет четко формализована.

9. Менеджер, который желает максимизировать прибыль и минимизировать издержки:
a - должен задать две цели в своей модели;
b - может получить желаемый результат при решении задачи максимизации (доход минус издержки);
c - поставил перед собой недостижимую задачу и должен выбрать одну цель;
d - должен использовать вероятностную модель.

10. Каждая количественная модель:
a - представляет данные в числовой форме;
b - требует использования компьютера для нахождения полного решения;
c - должна быть детерминированной;
d - обладает всеми вышеуказанными свойствами.

11. Использование моделей принятия решений.
a - возможно только тогда, когда все переменные достоверно известны;
b - снижает роль суждений и интуиции в принятии управленческих решении;
c - требует от менеджеров высокой степени профессионализма в работе с компьютером;
d - не обладает ни одним из вышеуказанных качеств.

12. В хорошей модели на основе электронных таблиц:
a - четко определены результаты;
b - для переменных указаны единицы измерения;
c - входные переменные отделены от внутренних переменных,
d - четко видно, как внутренние переменные вычисляются на основании входных переменных;
e - все вышеперечисленное.

13. Оптимизационная модель содержит:
a - переменные решения;

b - целевую функцию;

c - и то и другое.

14. Оптимизационная модель:

a - предлагает наилучшее решение в математическом смысле;

b - предлагает наилучшее решение с учетом ограничений модели;

c - может служить средством оценки различных вариантов возможных управленческих решений;

d - все вышеперечисленное.

15. Анализ «Что - если» позволяет найти:

a - оптимальное решение;

b - хорошее решение;

c - возможное решение (если оно существует);

d - ничего из указанного выше.

16. При создании таблицы подстановки с одним входом:

a - требуется задать диапазон значений для одной внешней переменной;

b - можно указывать несколько внутренних переменных;

c - и то, и другое;

d - ни то, ни другое.

17. При создании таблицы подстановки с двумя входами:

a - требуется задавать диапазоны значений для двух внешних переменных;

b - можно указывать несколько внутренних переменных;

c - и то, и другое;

d - ни то, ни другое.

18. Анализ чувствительности:

a - определяет степень изменения внутренних переменных в зависимости от изменений внешних переменных;

b - не может применяться к переменным решения;

c - не может применяться для сравнения значений двух параметров;

d - a и b;

e - a и c.

19. Ограничение сужает диапазон значений, которые:

a - может принимать целевая функция;

b - могут принимать переменные решения;

c - ни одно из вышеуказанных;

d - a и b.

20. Ограничения могут отображать:

a - требования;

b - условия баланса;

c - все вышеперечисленное.

21. Модель линейного программирования — это:

a - модель условной оптимизации;

b - модель принятия решений при наличии ограничений;

c - модель математического программирования,

b - все перечисленное.

22. В модели максимизации:

a - находится максимум целевой функции;

b - находится максимум целевой функции, а затем определятся, является ли данное решение допустимым;

c - находится максимум целевой функции на множестве допустимых решений;

d - все вышеперечисленное.

23. Отличительной особенностью моделей линейного программирования (выделяющей их из более общего класса моделей математического программирования) является то, что:

a - модель ЛП имеет целевую функцию и ограничения;

b - все рассматриваемые функции линейны;

c - находятся оптимальные значения переменных решения.

24. При переходе от реальной проблемы к символической модели полезно:

a - словесно описать все ограничения;

b - дать словесное описание цели;

c - словесно определить переменные решения;

d - сделать все вышеуказанное.

25. Математическая формулировка модели важна потому, что:

a - позволяет использовать математические методы,

b - большинство менеджеров предпочитает работать с символическими моделями;

c - заставляет менеджера четко решить поставленную задачу;

d - позволяет менеджеру отложить принятие решения, делая вид, что он занят.

26. Требование неотрицательности включается в модель ЛП, поскольку:

a - такую модель легче решать;

b - такая модель больше соответствует реальной ситуации;

c - ни первое, ни второе;

d - и первое, и второе.

27. Ограничение, выражающее требование к объему проверенных препаратов, записывается как 300X + 200X + 350X = 2000?

a – да;

b - нет.

28. Графический метод полезен тем, что:

a - предлагает общий способ решения задач ЛП;

b - предлагает геометрическую интерпретацию модели;

c - a и b.

29. Термин неограниченная модель означает, что:

a - все переменные решения могут принимать неограниченно большие значения, не выходя за пределы допустимой области;

b - прямая целевой функции может перемещаться в оптимизирующем направлении сколь угодно далеко, касаясь допустимой области по меньшей мере в одной точке;

c - не все ограничения могут быть удовлетворены.

30. Рассмотрим оптимальное решение некой задачи ЛП. Какие из следующих высказываний верны?

a - в точке оптимальности по крайней мере одно ограничение (не считая условий неотрицательности) является лимитирующим;

b - в точке оптимальности только одно ограничение (не считая условий неотрицательности) является лимитирующим;

c - ни одно из этих утверждений.

31. Какие из следующих утверждений об оптимальном решении задачи ЛП являются истинными?

a - все задачи ЛП имеют оптимальное решение;

b - оптимальное решение всегда находится в крайней точке;

c - оптимальное решение использует все имеющиеся ресурсы;

d- если оптимальное решение существует, всегда найдется хотя бы одно угловое решение;

e - верны все вышеперечисленные утверждения.

32. Каждая угловая точка допустимой области определяется:

a - пересечением двух линий, соответствующих каким-либо ограничениям,

b - некоторым подмножеством линий ограничений и условий неотрицательности;

c - ни тем, ни другим.

33. Неограниченная допустимая область:

a - получается в результате неверной формулировки задачи,

b - означает, что целевая функция является неограниченной;

c - ни одно из этих высказываний не верно;

d - верны оба высказывания.

34. Анализ чувствительности:

a - позволяет более содержательно интерпретировать оптимальное решение;

b - осуществляется после получения оптимального решения;

c - иногда называется параметрическим анализом;

d - все вышеперечисленное.

35. Анализ чувствительности:

a - в двухмерном случае может проводиться графически;

b - может укрепить наше доверие к модели;

c - может ослабить доверие к рекомендациям модели;
d - все вышеперечисленное;
e - ничего из вышеперечисленного.

36. В линейном программировании анализ чувствительности:
a - позволяет исследовать изменения коэффициентов целевой функции;
b - позволяет исследовать изменения правых частей ограничений;
c - и то, и другое.

37. Изменение коэффициента в формуле целевой функции:
a - приводит к новому оптимальному решению;
b - изменяет угол наклона прямой целевой функции;
c - дает новое оптимальное значение целевой функции;
d - все вышеперечисленное.

38. Усиление ограничения-неравенства:
a - улучшает оптимальное значение целевой функции;
b - не может улучшить оптимальное значение целевой функции;
c - ухудшает оптимальное значение целевой функции.

39. Избыточное ограничение:
a - нелегко распознать до оптимизации модели;
b - всегда следует удалять из модели;
c - может перестать быть избыточным при изменении параметров модели;
d - все вышеперечисленное;
e - a и c;
f - a и b;
g - b и c.

40. Вырожденное оптимальное решение:
a - содержит менее m положительных переменных (m — число лимитирующих ограничений);
b - не дает информации об альтернативных оптимумах;
c - может не предоставить информацию о диапазоне допустимых коэффициентов увеличения и уменьшения целевой функции;
d - все вышеперечисленное.

41. Термин улучшение в линейном программировании означает:
a - увеличение оптимального значения целевой функции в модели максимизации,
b - уменьшение оптимального значения целевой функции в модели минимизации,
c - a и b.

42. Если коэффициент C_1 целевой функции в модели максимизации увеличивается на значение, в точности равное допустимому увеличению, то:
a - оптимальное значение целевой функции может измениться;
b - предыдущее оптимальное решение останется оптимальным;

c - появится новое оптимальное решение с большим значением переменной x;

d - все вышеперечисленное.

43. Предположим, что первое ограничение некой задачи ЛП в точке P_0 имеет нулевое значение резерва. В этом случае:

a - точка P_0 лежит на границе допустимой области;

b - точка P_0 лежит на прямой первого ограничения;

c – a и b.

44. Какие из следующих утверждений верны?

a - ограничение с нулевой теневой ценой является нелимитирующим;

b - ограничение с положительной теневой ценой является лимитирующим;

c - оба утверждения.

45. Транспортную модель можно использовать только в том случае, когда:

a - спрос превышает предложение;

b - предложение превышает спрос;

c - спрос и предложение равны,

d - во всех вышеперечисленных случаях.

46. Модель назначений:

a - это частный случай транспортной модели;

b - может быть решена с помощью средства «Поиск решения»;

c - всегда имеет целочисленное оптимальное решение;

d - обладает всеми вышеперечисленными свойствами.

47. Положительная правая часть уравнения баланса потоков для любого узла модели перевозки грузов означает, что:

a - данный узел является источником;

b - данный узел является пунктом назначения;

c - данный узел является промежуточным пунктом;

d - ничего из вышеперечисленного.

48. Выполнение каких условий гарантирует, что существует целочисленное оптимальное решение задачи перевозки грузов?

a - правые части всех уравнений баланса потоков должны быть целыми числами;

b - целыми должны быть значения пропускных способностей дуг

c - или a, или b;

d - и a, и b.

49. Кратчайший путь:

a - должен проходить через каждый узел;

b - это множество всех дуг, составляющих кратчайший маршрут от начального узла до данного узла назначения;

c - и то, и другое.

50. Какой из применяемых методов планирования товарных запасов является наиболее точным?

а - экономико-статистический;

б - технико-экономических расчетов.

51. Как изменятся товарные запасы магазина, если план товарооборота выполнен на 101 %, а план поступления товаров на 98 %?

а - увеличатся;

b - уменьшатся;

с - не изменятся.

Учебное издание

Леонид Александрович Чернышев

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

ISBN 978-5-94984-444-1

9 785949 844441

Редактор Е.А. Назаренко
Компьютерная верстка О.А. Казанцевой

Подписано в печать		Формат 70×100 1/16
	Печать офсетная	Уч.-изд. л.
Усл. печ. л.12,09	Тираж 100 экз.	Заказ №

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет»
620100, Екатеринбург, Сибирский тракт, 37
Тел.: 8(343)262-96-10. Редакционно-издательский отдел

Отпечатано с готового оригинал-макета
Типография ООО ИЗДАТЕЛЬСТВО «УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР УПИ»
620062, РФ, Свердловская область, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2