УДК 621.391

***В.П. Часовских*[1], *В.Г. Лабунец*[1], *Т.С. Федорова*[1], *Е.Остхаймер*[2]**

[1]Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург
[2]Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach, 33062 Florida, USA

СЕМЕЙСТВО ОБОБЩЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ХААРА

   

Введение

В 1909 году знаменитый венгерский математик А. Хаар (Haar, 1910) в своей диссертации построил систему ортогональных функций $\{Haar_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, определенных на интервале $[0,1]$. Это была первая ортогональная система со следующим замечательным свойством: любая непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция $f(t)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям системы $\{Haar_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}F(k)Haar_k(t)$$

Функции $Haar_k(t)$ называют классическими функциями Хаара. В дальнейшем функции Хаара исследовались во многих работах. Большинство из них связано с теорией ортогональных рядов. В последнее десятилетие функции Хаара находят широкое применение в цифровой обработке сигналов. В зависимости от математической модели различают два вида преобразования Хаара – непрерывное и дискретное. В случае непрерывного преобразования говорят о двоичных отрезках.

Определение 1. Двоичными называют такие отрезки, которые могут быть получены путем деления отрезка $[0,1]$ на 2^n равных частей для произвольного $n\in\mathbb{N}$, то есть

$$l_{2^n,j}=\left[\frac{j}{2^n},\frac{j+1}{2^n}\right),$$

где *j* меняется от 0 до 2^n-1, а $n=0,1,2,...$ (в случае $j=2^n-1$ $l_{n,j}$ замкнут также справа).

Функции Хаара кусочно-постоянны на двоичных отрезках. Мы будем считать все эти отрезки замкнутыми слева и открытыми справа, если их правый конец отличен от 1, в противном случае отрезок замкнут также справа. Таким образом, двоичные отрезки - это отрезки следующего вида:

$$\begin{aligned}
&l_{2^0,0}=[0,1], && n=0,\\
&l_{2^1,0}=\left[0,\frac{1}{2}\right),l_{2^1,1}=\left[\frac{1}{2},1\right], && n=1,\\
&l_{2^2,0}=\left[0,\frac{1}{4}\right),l_{2^2,1}=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),l_{2^2,2}=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),l_{2^1,3}=\left[\frac{3}{4},1\right], && n=2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Левую и правую половины двоичного отрезка $l_{2^n,j}$ удобно обозначить $l^0_{2^n,j}$ и $l^1_{2^n,j}$, так что $l^0_{2^n,j}\cup l^1_{2^n,j}=l_{2^n,j}$. Нетрудно проверить, что

$$l^0_{2^n,j} = l_{2^{n+1},2j}, \quad l^1_{2^n,j} = l_{2^{n+1},2j+1}$$

Систему функций Хаара $\left\{Haar_{2^n,j}(t)\right\}_{m=0,\,j=0}^{\infty,2^m-1}$ удобно строить группами: группа с номером m содержит 2^m функций Хаара.

Определение 2. Системой нормированных функций Хаара называется следующая совокупность функций:

$$\overline{Haar}_{0,0}(t) \equiv 1,$$

$$\overline{Haar}_k(t) = \overline{Haar}_{2^n,j}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}}, & при\ t \in l^0_{2^n,j}, \\ -2^{\frac{m-1}{2}}, & при\ t \in l^1_{2^n,j}, \\ 0, & при\ t \in l_{2^n,j} \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. Функции Хаара образуют полные ортонормированную и ортогональную системы функций в пространстве $\mathbb{L}_p[0,1]$:

$$\int_0^1 \overline{Haar}_k(t) Haar_{k'}(t)dt = \delta_{kk'},$$

$$\int_0^1 \overline{Haar}_k(t) Haar_{k'}(t)dt = 2^n \delta_{kk'}.$$

Доказательство: Докажем только ортогональность, доказательство полноты можно найти в работе (Соболь, 1969). Если обе функции принадлежат одной группе, то легко видеть, что произведение $\overline{Haar}_k(t)\overline{Haar}_{k'}(t) = 0$. Если $k' = 1, k > 1$, то

$$\int_0^1 \overline{Haar}_k(t)\overline{Haar}_{k'}(t)dt = \int_0^1 \overline{Haar}_k(t)dt = \int_{l_{2^n}} \overline{Haar}_k(t)dt = 0$$

Пусть теперь обе функции принадлежат разным группам: $k = (2^n, j), k' = (2^{n'}, j')$. Если $l_{2^n,j}$ не содержится в $l_{2^{n'},j'}$, то снова $\overline{Haar}_k(t)\overline{Haar}_{k'}(t) = 0$. Если же $l_{2^n,j} \subset l_{2^{n'},j'}$, то либо $l_{2^n,j} \subset l^0_{2^{n'},j'}$ либо $l_{2^n,j} \subset l^1_{2^{n'},j'}$. И тогда

$$\int_0^1 \overline{Haar}_k(t)\overline{Haar}_{k'}(t)dt = \int_{l_{2^n,j}} \overline{Haar}_{2^n,j}(t)\overline{Haar}_{2^{n'},j'}(t)dt =$$

$$= \pm 2^{\frac{m-1}{2}} \int_{l_{2^n,j}} \overline{Haar}_{2^n,j}(t)dt = 0.$$

Докажем теперь, что функции Хаара $\overline{Haar}_k(t)$ нормированы:

$$\int_0^1 \overline{Haar}_k^2(t)dt = 1$$

При $k = 1$ это очевидно. Если же $k > 1$, то из (2) следует

$$\int_0^1 \overline{Haar}^2_{mj}(t)dt = \int_{l_{mj}} \overline{Haar}^2_{mj}(t)dt = 2^m \left|l_{mj}\right| = 1.$$

Таким образом, любую функцию $f(t) \in \mathbb{L}_2(0,1)$ можно разложить в ряд Хаара.

$$f(t) = \sum_{m=0} \sum_{j=0}^{2^m-1} F_{m,j} Haar_{2^m,j}(t) + F_{0,0} Haar_{0,0}(t), \tag{3}$$

где

$$F_{m,j} = \int_0^1 f(t) Haar_{2^m,j}(t)dt. \tag{4}$$

Довольно часто функции Хаара определяют не на конечном целочисленном отрезке $[0, 2^n - 1]$, а на группе $\mathbf{Z}_2^n = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2 \oplus ... \oplus \mathbf{Z}_2$, которая считается вложенной в этот отрезок. Таким путем получают дискретные преобразования Хаара.

Целочисленные двоичные отрезки можно ввести по аналогии с (1):
$l^n_{m,j} = \left[j2^{n-m+1}, (j+1)2^{n-m+1} - 1 \right],\ m = 1,2,\ldots,n,\ j = 0,1,\ldots,2^m - 1$

Рассмотрим теперь двоичные разложения чисел от 0 до 2^n. Для наглядности возьмем конкретный пример. Пусть $n = 3$. Тогда все числа $t \in \{0,1,2,\ldots,7\}$ можно записать в виде трехразрядных двоичных чисел $t = (t_3, t_2, t_1)$:

	0	1	2	3	4	5	6	7
t_3	0	1	0	1	0	1	0	1
t_2	0	0	1	1	0	0	1	1
t_1	0	0	0	0	1	1	1	1

Из этого представления видно, что двоичные отрезки совпадают с периодами разрядов t_3, t_2, t_1, т.е.

$$l_{mj} = T^j(t_m),$$

где $T^j(t_m) - j$-ый период m-го разряда, состоящий из двух полупериодов ${}^0T^j(t_m)$ и ${}^1T^j(t_m)$:

$$T^j(t_m) = {}^0T^j(t_m) + {}^1T^j(t_m).$$

Дискретные функции Хаара можно определить следующим образом:

$$haar_{0,0}(t) = 1$$

$$haar_{m,j}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}}, & t \in l^0_{mj} = {}^0T^j(t_m), \\ -2^{\frac{m-1}{2}}, & t \in l^1_{mj} = {}^1T^j(t_m). \end{cases}$$

При каждом фиксированном значении n можно построить квадратную $2^n \times 2^n$ -матрицу Хаара, записав функции $haar_{m,j}(t)$ в виде ее строк.

Ниже перечислены некоторые свойства системы Хаара:

1) Система Хаара полна в $\mathbb{L}_p[0,1]$ при любом $p \in [0,\infty]$, где $\mathbb{L}_p[0,1]$ – пространство всех функций с нормой

$$\| f \|_p = \left[\int_0^1 | f(t) |^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Это означает, что в $\mathbb{L}_p[0,1]$ нет такой функции, которая была бы ортогональна ко всем $Haar_{m,j}(t)$ и не равнялась бы почти во всех точках нулю.

2) Система Хаара образует базис в $\mathbb{L}_p[0,1]$ при любом $p \in [0,\infty]$. Это означает, что для каждой функции $f(t) \in \mathbb{L}_p[0,1]$ ряд Фурье-Хаара сходится к ней по норме:

$$\lim_{k\to\infty} \left\| f(t) - \sum_{k=0} F_k Haar_k(t) \right\|_p = 0 \tag{6}$$

3) Для каждой функции $f(t) \in \mathbb{L}_p[0,1]$ справедливо равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k^2 = \int_0^1 f^2(t) dt. \tag{7}$$

4) Система Хаара является системой сходимости. Это означает, что если числа $\{F_k\}$ удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{\infty} F_k^2 < \infty$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} F_k Haar_k(t)$ сходится почти всюду во всех точках отрезка $[0,1]$.

5) Через функции Хаара довольно просто выражаются некоторые системы функций.

Пример 1. Система Радемахера $\{Rd_m(t)\}$, $m \in \mathbb{N}$ состоит из функций

$$Rd_m(t) = sign\left(\sin 2^m \pi t\right),\ \text{где} 0 \le t \le 1,\ \ m = 1,2,\ldots$$

и при $m \ge 1$ во всех точках непрерывности

$$Rd_m(t) = 2^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=0}^{2^{m-1}} Haar_{m,j}(t) - \frac{m-1}{2}.$$

В целом, если сравнивать матрицы Уолша, Хаара и Радемахера, то можно найти связь между этими функциями:

$$Haar_{m,j}(t) = \begin{cases} Wal_{0\ldots\alpha_m\ldots 0}(t), & t \in l_{mj} = T^j(t), \\ 0, & t \notin l_{mj} = T^j(t), \\ Wal_{0\ldots\alpha_m\ldots 0}(t) = Rd_m(t). \end{cases}$$

Такое определение функций Хаара допускает их естественное обобщение на тот случай, когда вместо функций Радемахера и Уолша берутся обобщенные функции Радемахера и Уолша.

K-функции Хаара и k-преобразование Хаара

Наиболее простое обобщение функций Хаара получается в том случае, когда мы начинаем рассматривать $\boldsymbol{k}$-ичные отрезки и функции Радемахера группы $\boldsymbol{k}$-ичных чисел. $\boldsymbol{K}$-ичные отрезки – это такие отрезки, которые могут быть получены путем деления отрезков $[0,1]$ и $[0,k^n-1]$ на k^m равных частей. Например,

$$\begin{array}{ll} [0,1], & m=0 \\ \left[0,\frac{1}{k}\right), \ \left[\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right),\ldots,\left[\frac{k-1}{k},1\right], & m=1 \\ \left[0,\frac{1}{k^2}\right), \ \left[\frac{1}{k^2},\frac{2}{k^2}\right),\ldots,\left[\frac{k^2-1}{k^2},1\right], & m=2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

$\boldsymbol{k}$-ичные отрезки единичного отрезка и

$$\begin{array}{ll} \left[0,k^n-1\right], & m=0 \\ \left[0,k^{n-1}-1\right],\left[k^{n-1},2k^{n-1}-1\right],\ldots,\left[(k-1)\cdot k^{n-1},k\cdot k^{n-1}-1\right], & m=1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

$\boldsymbol{k}$-ичные отрезки дискретного отрезка $[0,k^n-1]$.

Для $\boldsymbol{k}$-ичных отрезков введем следующие обозначения:

$$_kL_{m,j} = \left[jk^{-m+1},(j+1)k^{-m+1}\right],$$

$$_{k^n}l_{m,j} = \left[jk^{n-m+1},(j+1)k^{n-m+1}-1\right],$$

где j меняется от 0 до $k^{m-1}-1$, а $m=1,2,\ldots,n$ в первом и $m=1,2,\ldots,n$ - во втором случаях.

Легко видеть, что при каждом m

$$_kL_{m,0} \cup {_kL_{m,1}} \cup {_kL_{m,2}} + \ldots + {_kL_{m,k^m-1}} = [0,1],$$

$$_{k^n}l_{m,0} \cup {_{k^n}l_{m,1}} \cup {_{k^n}l_{m,2}} + \ldots + {_{k^n}l_{m,k^m-1}} = \left[0,k^n-1\right].$$

Отрезки $_kL_{m,j}$ и $_{k^n}l_{m,j}$ бывает удобно разбить на k равных частей $\left\{_kL^s_{m,j}\right\}_{s=0}^{k-1}$ и $\left\{_{k^n}l^s_{m,j}\right\}_{s=0}^{k-1}$ так, что

$$_kL^0_{m,j} + {_kL^1_{m,j}} + \ldots + {_kL^{k-1}_{m,j}} = \sum_{s=0}^{k-1} {_kL^s_{m,j}} = {_kL_{m,j}},$$

$$_{k^n}l^0_{m,j} + {_{k^n}l^1_{m,j}} + \ldots + {_{k^n}l^{k-1}_{m,j}} = \sum_{s=0}^{k-1} {_{k^n}l^s_{m,j}} = {_{k^n}l_{m,j}}.$$

Систему k-функций Хаара $\left\{_kHaar^r_{m,j}(t)\right\}_{j=0,r=0}^{k^{m-1}-1,k-1}$ удобно строить группами: группа с номером m содержит $k^{m-1}(k-1)$ функций $_kHaar^r_{m,j}(t)$, где индекс j означает сдвиг носителя $_kL_{m,j}$ функции $_kHaar^r_{m,0}(t)$ на расстояние $\frac{j}{k^{m-1}}$ от начала координат.

Определение 3. K-базисом ортогональных непрерывных функций Хаара называется следующая совокупность функций

$$\begin{cases} {}_kHaar_0(t) = {}_kHaar_{0,1}^0(t) \equiv 1 \\ {}_kHaar_{m,j}^r(t) = \begin{cases} \varepsilon^{rs}, \ t \in {}_kL_{m,j}^s, \\ 0, \quad t \notin {}_kL_{m,j}^s, \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

где $\varepsilon = \sqrt[k]{1}$, а r меняется от 1 до $k-1$.

Очевидно, что

$${}_kHaar_{m,j}^r(t) = {}_kHaar_{m,0}^r\left(t + \frac{j}{k^{m-1}}\right).$$

Теорема 2. Множество функций ${}_kHaar_{m,j}^r(t)$ образуют в пространстве $\mathbb{L}_p[0,1]$ ортогональную систему функций:

$$\int_0^1 {}_kHaar_{m,j}^r(t)\, {}_kHaar_{m_1,j_1}^{r_1}(t)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{k^{m-1}}\delta_{mm_1}\delta_{jj_1}\delta_{\alpha\alpha_1}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Для построения дискретных функций Хаара воспользуемся конечными группами $\mathbf{Z}_k^n = \mathbf{Z}_k \oplus \mathbf{Z}_k \oplus ... \oplus \mathbf{Z}_k$ и целочисленными $\boldsymbol{k}$-ичными отрезками

$${}_{k^n}l_{m,j} = {}_{k^n}T_j(t_m), \quad m = 1,2,...,n, \quad j = 0,1,...,k^{m-1}-1,$$

представленными j-ми периодами m-ых разрядов t_m числа t в k-ичной системе счисления.

Определение 4. K-базисом ортогональных дискретных функций Хаара называется следующая совокупность функций

$$\begin{cases} {}_khaar_{0,0}^0(t) \equiv haar_0(t) \equiv 1, \\ {}_{k^n}haar_{m,j}^r(t) = \begin{cases} \varepsilon^{rt_m}, \ t \in {}_{k^n}T_j(t_m), \\ 0, \quad t \notin {}_{k^n}T_j(t_m). \end{cases} \end{cases} \tag{9}$$

Всю совокупность дискретных функций Хаара удобно представить в виде квадратной $(k^n \times k^n)$-матрицы Хаара, записав функции ${}_{k^n}haar_{m,j}^r(t)$ в виде ее строк.

Пример 2. При $n = 2$ и $k = 3$, $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$ матрица Хаара имеет вид

$$H_{3^2} = \left[{}_{k^n}haar_{m,j}^r(t)\right] = \begin{bmatrix} haar_{0,0}^0(t) \\ haar_{1,0}^1(t) \\ haar_{1,0}^2(t) \\ haar_{2,0}^1(t) \\ haar_{2,1}^1(t) \\ haar_{2,2}^1(t) \\ haar_{2,0}^2(t) \\ haar_{2,1}^2(t) \\ haar_{2,2}^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ 1 & 1 & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & & & & & & \\ & & & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & & & \\ & & & & & & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & & & & & & \\ & & & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & & & \\ & & & & & & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Из приведенного примера ясна роль индексов m, j, r, а именно: групповой номер m определяет длину дискретного интервала ${}_kT_j(t_m) = \frac{k^n}{k^{m-1}}$, на котором функция не равна нулю, а j - его положение на целочисленном отрезке$[0, k^n-1]$. Наконец, последний подрупповой индекс r означает степень экспоненты.

Матрица H_{3^2} строится достаточно просто по числам (t_1, t_2) троичного разложения чисел $t = 0,1,2,...,3^2-1$:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
t_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
t_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Первая функция $haar_{1,0}^{1}(\mathrm{t})$ из группы функций с номером $m=1$ имеет у ε в качестве показателя числа $1 \cdot t_1$ (когда t меняется от 0 до 8). Вторая функция $haar_{1,0}^{2}(\mathrm{t})$ имеет в качестве показателей числа $2 \cdot t_1$. Числа t_2 повторяются периодически три раза при изменении t от 0 до 8. Вторая группа функций Хаара $(m=2)$ отличается от нуля только на одном периоде: первая функция первой подгруппы $haar_{2,0}^{1}(t)$ - на первом периоде, вторая функция $haar_{2,1}^{1}(t)$ этой подгруппы – на втором, третья $haar_{2,2}^{1}(t)$ - на третьем и т.д. Причем в качестве показателей степеней у ε в данной группе функций выступают числа $1 \cdot t_2$. Затем идет аналогичная тройка функций с подгрупповым номером $r=2$, имеющих в качестве показателей у ε числа $2 \cdot t_2$.

Если бы мы взяли значения $k=3$ и $n=3$, то в таком случае матрица Хаара имела бы размерность $\left(3^3 \times 3^3\right)$. Аналогично, как и в предыдущем случае $(n=2,\ k=3)$, такую матрицу можно построить по числам (t_1, t_2, t_3) троичного разложения числа $t=0,1,2,\ldots,3^3-1$.

Наряду с тройной нумерацией (m, r, j) функций Хаара используют и одноиндексную нумерацию: функции $haar_{m,j}^{r}(t)$ приписывают один номер, который записывают в виде n-разрядного числа в системе счисления с основанием k:

$$\alpha = k^{m-1} \cdot r + j = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \qquad (10)$$

Напомним, что здесь m меняется от *1* до *n*, r от *1* до $k-1$ и j от 0 до $k^{m-1}-1$. Для примера 2 соответствие (10) имеет вид:

$(m$	r	$j)$	$\to$	α	$=$	$(\alpha_1$	$\alpha_2)$
0	*0*	*0*		*0*		*0*	*0*
1	*1*	*0*		*1*		*0*	*1*
1	*2*	*0*		*2*		*0*	*2*
2	*1*	*0*		*3*		*1*	*0*
2	*1*	*1*		*4*		*1*	*1*
2	*1*	*2*		*5*		*1*	*2*
2	*2*	*0*		*6*		*2*	*0*
2	*2*	*1*		*7*		*2*	*1*
2	*2*	*2*		*8*		*2*	*2*

При такой нумерации можно дать следующее определение функциям Хаара.

Определение 5. Функции

$$\begin{cases} haar_{00\ldots0}(t) \equiv 1, \\ haar_{0\ldots\alpha_{n-m+1}\ldots\alpha_n}(t) = \begin{cases} \chi_{0\ldots\alpha_{n-m+1}\ldots0}\left(t_1,\ldots,t_n\right) = \varepsilon^{\alpha_{n-m+1}t_m}, & t \in T_j(t_m), \text{ или, что то же самое,} \\ 0, & t \notin T_j(t_m). \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} haar_0(t) \equiv 1, \\ haar_\alpha(t) = \begin{cases} \chi_{0\ldots\alpha_{n-m+1}\ldots0}\left(t_1,\ldots,t_n\right) = \varepsilon^{\alpha_{n-m+1}t_m}, & \left(\alpha_{n-m+2},\ldots,\alpha_n\right) = \left(t_1,\ldots,t_{m-1}\right), \\ 0, & \left(\alpha_{n-m+2},\ldots,\alpha_n\right) \neq \left(t_1,\ldots,t_{m-1}\right). \end{cases} \end{cases}$$

называются дискретными k-функциями Хаара, где $\chi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\left(t_1,t_2,\ldots,t_n\right)$ - характеры группы $\boldsymbol{Z}_k^n$, α_{n-m+1} - первый слева ненулевой разряд n-разрядного k-ичного числа $\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)=\alpha$ и $t=(0,\ldots,\alpha_{n-m+2},\ldots,\alpha_n,\alpha_{n-1})$ - k-ичное разложение числа j в $T_j(t_m)$. В этом определении подразумевается существование *n+1*-го разряда $\alpha_{n+1}=0$ у числа $\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)$ и нулевого $t_0=0$ у $t=\left(t_0,t_1,t_2,\ldots,t_n\right)=\left(0, t_1, t_2,\ldots, t_n\right)$

Довольно часто в литературе функциями Хаара называют несколько иные функции. Будем называть их функциями Хаара с меткой π для того, чтобы отличать от классических функций Хаара.

Определение 6. Функции

$$\begin{cases} {}_{\pi}Haar_{00\ldots0}(t) \equiv 1, \\ {}_{\pi}Haar_{\alpha}(t) = {}_{\pi}Haar_{0\ldots\alpha_{n-m+1}\ldots\alpha_n}(t) = \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \varepsilon^{\alpha_m t_m}, (t_1,\ldots,t_n), (\alpha_{n-m+2},\ldots,\alpha_{n+1}) = (t_{n-m+2},\ldots,t_{n+1}), \\ 0, \quad (t_1,\ldots,t_n), (\alpha_{n-m+2},\ldots,\alpha_{n+1}) \neq (t_{n-m+2},\ldots,t_{n+1}). \end{cases}$$

называются k-функциями Хаара с меткой π. Здесь $\alpha_{n+1} \equiv t_{n+1} \equiv 0.$

Функции Хаара, ассоциированные с группой перестановок

Наряду с системами k-функций Хаара можно определить еще целый ряд ортогональных функций, обладающих схожими свойствами. Пусть S_n - симметрическая группа подстановок, действующая на номерах разрядов числа $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, т.е. на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Если $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$, то положим $\sigma t = \sigma(t_1, t_2, \ldots, t_n) = (t_{j_1}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_n})$.

Пусть $x(t)$ - функция, заданная на группе $\boldsymbol{Z}_k^n$. Тогда преобразование аргумента t под действием σ порождает некоторое линейное преобразование $P(\sigma)$ функции $x(t)$:

$$x(\sigma t) = P(\sigma) x(t).$$

Ясно, что $P(\sigma)$ является k^n-мерным представлением S_n.

Если функции Хаара представлены матрицей Хаара, то действие группы S_n порождает некоторую перестановку ее столбцов. Пусть, например, $k = 3$ и $n = 2$. Тогда все числа от 0 до 8 представляются в виде двухразрядного числа $t = (t_1, t_2)$. Если, например, $\sigma(t) = \sigma(t_1, t_2) = (t_2, t_1)$, то такая перестановка разрядов порождает следующую перестановку столбцов

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Для каждого $\sigma \in S_n$ множество $\{haar_{\alpha}(\sigma t)\} = \{{}_{\sigma}haar_{\alpha}(t)\}$ является полной системой ортогональных функций на отрезке $[0, k^n - 1]$. Эти функции обладают следующими свойствами:

1. ${}_{\sigma}haar_{\alpha}(t) \equiv 1,$
2. Все функции ${}_{\sigma}haar_{\alpha}(t)$ принимают значения из множества $\{0, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{k-1}\}$,
3. Норма функции ${}_{\sigma}haar_{\alpha}(t)$ равна k^j, где j - номер первой слева нулевой компоненты вектора $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$,
4. Система функций $\{{}_{\sigma}haar_{\alpha}(t)\}$ является ортогональным базисом пространства $\mathbb{L}(Z_k^n, C)$, поэтому любая функция $x(t) \in \mathbb{L}(Z_k^n, C)$ может быть представлена в виде линейной комбинации базисных функций:

$$x(t) = \sum_{\alpha=0}^{k^n-1} X(\alpha)\, {}_{\sigma}haar_{\alpha}(t), \tag{11}$$

где

$$X(\alpha) = k^{-n} \sum_{t=0}^{k^n-1} x(t)\, {}_{\sigma}haar_{\alpha}(t). \tag{12}$$

Множество функций $\{_{\sigma}haar_{\alpha}(t)\}$ для некоторого $\sigma \in S_n$ называют k-системой функций Хаара с отметкой σ.

Пример 3. Рассмотрим все функции Хаара с отметкой σ для случая $k = 2$ и $m = 3$. Так как $|S_3| = 6$, то будем иметь шесть различных систем функций:

$$_{\sigma_0}H_{2^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$_{\sigma_1}H_{2^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & & & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 & & & 1 & -1 \\ 1 & & & & -1 & & & \\ & 1 & & & & -1 & & \\ & & 1 & & & & -1 & \\ & & & 1 & & & & -1 \end{bmatrix},$$

$$_{\sigma_2}H_{2^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & & -1 & & -1 & \\ & 1 & & 1 & & -1 & & -1 \\ 1 & & -1 & & & & & \\ & & & & 1 & & -1 & \\ & 1 & & -1 & & & & \\ & & & & & 1 & & -1 \end{bmatrix},$$

$$_{\sigma_3}H_{2^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & -1 & & & & & \\ & 1 & & -1 & & & & \\ & & & & 1 & & -1 & \\ & & & & & 1 & & -1 \end{bmatrix},$$

$$_{\sigma_4}H_{2^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & -1 & & 1 & & -1 & \\ & 1 & & -1 & & 1 & & -1 \\ 1 & & & & -1 & & & \\ & & 1 & & & & -1 & \\ & 1 & & & & -1 & & \\ & & & 1 & & & & -1 \end{bmatrix},$$

$$
{}_{\sigma_5}H_{2^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & & & -1 & -1 & & \\ & & 1 & 1 & & & -1 & -1 \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix},
$$

записанных соответственно для перестановок

$$
\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},
$$
$$
\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.
$$

Функции Хаара, ассоциированные с абелевыми группами

Пусть $\boldsymbol{H}_{h_1,h_2,\ldots,h_n} = \boldsymbol{Z}_{h_1} \oplus \boldsymbol{Z}_{h_2} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{Z}_{h_n}$ - произвольная конечная коммутативная группа, а

$$
\chi_\beta(t) = \chi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(t_1t_2\ldots t_n) = \varepsilon_1^{\beta_1t_1}\varepsilon_2^{\beta_2t_2}\ldots\varepsilon_n^{\beta_nt_n}
$$

ее характеры.

Определим $\boldsymbol{H}_{h_1,h_2,\ldots,h_n}$-функции Хаара, подобные классическим $\boldsymbol{k}$-функциям Хаара (см. определения 3, 4). Для этого необходимо ввести понятие $\boldsymbol{H}_{h_1,h_2,\ldots,h_n}$ -отрезка.

Определение 7. $\boldsymbol{H}_{h_1,h_2,\ldots,h_n}$ -отрезками будем называть отрезки, которые могут быть получены путем деления отрезка $[0,1]$ на h_1 разных частей, или на h_1h_2 частей, или на $h_1h_2h_3$ частей и т.д. вплоть до деления на $h_1h_2\ldots h_{n-1}$ частей.

Аналогично можно делить целочисленный отрезок $[0,h-1]$.

Для $\boldsymbol{H}_{h_1,h_2,\ldots,h_n}$ -отрезков введем следующие обозначения:

$$
{}_{h_1,h_2,\ldots,h_n}\ell_{mj} = \left[\frac{jN}{h^{[1,m-1]}}, \frac{(j+1)N}{h^{[1,m-1]}}\right] =
$$
$$
= \left[jh^{[n,m-1]}, (j+1)h^{[n,m-1]}\right] = T^j(t_m)
$$

где $h^{[1,0]} \equiv 1,\ h^{[1,m-1]} := h_1, h_2, \ldots, h_{m-1},$

$j = 0,1,\ldots,h^{[1,m-1]}-1,\quad m = 1,2,\ldots,n.$

Пример 4. Пусть к примеру $\boldsymbol{H}_{2,3,\ldots,4} = \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_3 \oplus \boldsymbol{Z}_4$. Тогда целочисленные отрезки:

$$
[0,23];
$$
$$
[0,11],\quad [12,23];
$$
$$
[0,\ 3],\quad [4,\ 7],\quad [8,\ 11],\quad [12,15],\quad [16,19],\quad [20,23],
$$

и т.д. Их связь с периодами разрядов t_1, t_2, t_3 можно увидеть из следующих равенств:

$$
{}_{2,3,4}\ell_{1,0} = [0,23] = T^0(t_1);
$$
$$
{}_{2,3,4}\ell_{2,0} = [0,11] = T^0(t_2),\quad {}_{2,3,4}\ell_{2,1} = [12,23] = T^1(t_2);
$$
$$
{}_{2,3,4}\ell_{3,0} = [0,\ 3] = T^0(t_3),\quad {}_{2,3,4}\ell_{3,1} = [4,\ 7] = T^1(t_3),
$$
$$
{}_{2,3,4}\ell_{3,2} = [8,11] = T^2(t_3),\quad {}_{2,3,4}\ell_{3,3} = [12,15] = T^3(t_3),
$$
$$
{}_{2,3,4}\ell_{3,4} = [16,19] = T^4(t_3),\quad {}_{2,3,4}\ell_{3,5} = [20,23] = T^5(t_3),
$$

где периоды $T^i(t_m)$ можно увидеть из следующей таблицы:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
t_3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
t_2	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
t_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Определение 8. Множество функций

$$\begin{cases} haar_{0,0}^{0}(t) \equiv 1, \\ haar_{m,j}^{\alpha}(t) = \begin{cases} \chi_{0\ldots\alpha_m\ldots 0}(t) = \varepsilon_m^{\alpha_m, t_m}, & t \in \ell_{mj} = T^j(t_m), \\ 0, & t \notin \ell_{mj} = T^j(t_m), \end{cases} \end{cases}$$

где j меняется от 0 до $h^{[1,m-1]}$, $m = 1,2,\ldots,n$, $\alpha = 1,2,\ldots,h_{m-1}$, $\varepsilon = \sqrt[h_m]{1}$ назовем **Н**-функциями Хаара.

Из определения **Н**-функций Хаара следует их ортогональность:

$$\sum_{t=0}^{N-1} haar_{m_1,j_1}^{r_1}(t) haar_{m_2,j_2}^{r_2}(t) = \begin{cases} \dfrac{N}{h[1,m-1]}, & r_1 = r_2,\ m_1 = m_2,\ j_1 = j_2 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример 5. Пусть $\boldsymbol{H}_{2,3,4} = \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_3 \oplus \boldsymbol{Z}_4$. Чтобы построить матрицу Хаара, воспользуемся числами $t = 0,1,\ldots,23$ в системе счисления со смешанными основаниями 2,3,4 (см. пример 4) и заполним строки функциями Хаара.

$$H_{(2,3,4)} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc|cccc|cccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1 \\
\hline
1&1&1&1&\gamma&\gamma&\gamma&\gamma&\gamma^2&\gamma^2&\gamma^2&\gamma^2&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&1&1&1&1&\gamma&\gamma&\gamma&\gamma&\gamma^2&\gamma^2&\gamma^2&\gamma^2 \\
1&1&1&1&\gamma^2&\gamma^2&\gamma^2&\gamma^2&\gamma&\gamma&\gamma&\gamma&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&1&1&1&1&\gamma^2&\gamma^2&\gamma^2&\gamma^2&\gamma&\gamma&\gamma&\gamma \\
\hline
1&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon^3&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&1&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon^3&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&1&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon^3&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&1&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon^3&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&1&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon^3&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&1&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon^3 \\
\hline
1&\varepsilon^2&1&\varepsilon^2&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&1&\varepsilon^2&1&\varepsilon^2&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&1&\varepsilon^2&1&\varepsilon^2&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&1&\varepsilon^2&1&\varepsilon^2&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&1&\varepsilon^2&1&\varepsilon^2&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&1&\varepsilon^2&1&\varepsilon^2 \\
\hline
1&\varepsilon^3&\varepsilon^2&\varepsilon&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&1&\varepsilon^3&\varepsilon^2&\varepsilon&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&1&\varepsilon^3&\varepsilon^2&\varepsilon&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&1&\varepsilon^3&\varepsilon^2&\varepsilon&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&1&\varepsilon^3&\varepsilon^2&\varepsilon&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&1&\varepsilon^3&\varepsilon^2&\varepsilon
\end{array}\right]$$

Структура данной матрицы и периодика чисел t_1, t_2, t_3 указывает на ту же связь между видом **Н**-функций и поведением чисел t_1, t_2, t_3, что и в случае *k*-функций Хаара. Следует отметить, что порядок слагаемых в группе $\boldsymbol{H}_{h_1,h_2,\ldots,h_n}$ существенным образом влияет на вид **Н**-функций Хаара.

Заключение

Разработаны новые теоретические основы непрерывных и дискретных преобразований Хаара, основанных на различных математических моделях. Главная цель работы – показать, что существует целое множество обобщенных преобразований Хаара, которые обладают теми же замечательными свойствами, что и классические функции Хаара, и в дальнейшем могут быть использованы для решения проблем цифровой обработки сигналов в эффективной манере.

Список использованной литературы

Соболь И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969. 288 с.

Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. Vol. 69. No. 3. P. 331-371 (doi: 10.1007/bf01456326).

Рецензент статьи: кандидат технических наук, доцент Института экономики и управления Уральского государственного лесотехнического университета М.П. Воронов.