УДК 004.93'1; 004.932

В.П. Часовских[1], В.Г. Лабунец[1], Д.Е.Комаров [1], Е.Остхаймер[2]

[1]Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург
[2]Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach, 33062 Florida, USA

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ




Введение

Широкий класс ортогональных вейвлет-преобразований WT характеризуется двумя наборами коэффициентов (Daubechies, 1992; Daubechies, Sweldens, 1998): h_0, h_1, …, h_{L-1} и g_0, g_1, …, g_{L-1}, где $L=2D$ – чётное число. Обычно второе множество коэффициентов выбирается так: $g_0=h_{L-1}$, $g_1=-h_{L-2}$, …, $g_{L-1}=-h_0$. Поэтому, WTa характеризуется только одним набором h-коэффициентов h_0, h_1, …,h_{L-1}. В дальнейшем будем обозначать вейвлет-преобразование так: $\mathrm{WDT}_{16}\left[h_0,h_1,h_2,h_3\right]$. Оно факторизуется в произведение слабо заполненных так называемых атомарных преобразований лестничного типа $\mathrm{LAWT}_{2^n}\left[h_0,h_1,\ldots,h_{L-1}\right]$ с теми же самыми коэффициентами.

Величины h_0, h_1, …, h_{L-1}, называемые коэффициентами, являются зависимыми, поэтому незначительное изменение любого из них требует синхронного изменения всех остальных, если требуется, чтобы полученное при этом преобразование оставалось в классе ортогональных вейвлет-преобразований. По этой причине коэффициенты не являются параметрами. Под параметрами будем подразумевать такие величины, которые можно менять независимо друг от друга и при этом оставаться в классе ортогональных или биортогональных циклических вейвлет-преобразований. Мы доказываем, что такое многопараметрическое представление существует, а любое ортогональное вейвлет-преобразование $\mathrm{WDT}_{16}\left[h_0,h_1,h_2,h_3\right]=$ зависит от D углов-параметров $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{D-1}$: $\mathrm{WT}_{2^n}\left[h_0,h_1,\ldots,h_{L-1}\right]=\mathrm{WT}_{2^n}\left[\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{D-1}\right]$. В дальнейшем многопараметрическую форму вейвлет-преобразования будем обозначать символом $\mathrm{WT}_{2^n}\left[\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{D-1}\right]$.

Третья каноническая форма многопараметрического представления циклических ортогональных вейвлет-преобразований

Многопараметрическое представление атомарного вейвлет-преобразования. Для нахождения многопараметрического представления вейвлет-преобразований будем пользоваться методом вращения Якоби-Гивенса. Для этого введём $(2^n \times 2^n)$ – матрицу вращения на угол φ в плоскости, натянутой на i-ый и j-ый орты:

$$
\mathbf{CS}_{i,j}(\varphi)=
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

где $c=\cos(\varphi)$ и $s=\sin(\varphi)$.

Будем последовательно перемножать атомарную матрицу вейвлет-преобразования $\mathrm{AWT}_{2^n}\left[h_0,h_1,\ldots,h_{L-1}\right]$ с матрицами типа $\mathbf{CS}_{i,j}(\varphi)$ и выбирать значения углов φ таким образом, чтобы произведение

$$
\mathbf{CS}_{i_k,j_k}(\varphi_k)\cdot\ldots\cdot\mathbf{CS}_{i_0,j_0}(\varphi_0)\cdot\mathrm{AWT}_{2^n}\left[h_0,h_1,\ldots,h_{L-1}\right] \qquad (1)
$$

превратилось в единичную или перестановочную матрицу. В качестве примера возьмем атомарную (8×8)-матрицу Добюши-6:

$$
\mathrm{AWT}_8\left[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\right]=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & & \\
 & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5\\
h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3\\
h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1\\
h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & \\
 & & h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0\\
h_1 & -h_0 & & & h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2\\
h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & & h_5 & -h_4
\end{pmatrix}.
$$

Умножим эту матрицу слева на матрицу $\mathbf{CS}_{0,4}(\varphi_0)$ и выберем угол φ_0 так, чтобы обнулился элемент h_5 в нулевой и четвертой строках. Оказывается, что в этом случае автоматически обнуляется и элемент h_4, т.е. элементы обнуляются парами. Следовательно,

$$
\mathbf{CS}_{0,4}(\varphi_0)\cdot\mathrm{AWT}_8\left[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\right]=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
c_0 & & & & s_0 & & & \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
-s_0 & & & & c_0 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & 1
\end{pmatrix}\cdot
\begin{pmatrix}
h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \boldsymbol{h}_4 & \boldsymbol{h}_5 & & \\
 & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5\\
h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3\\
h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1\\
\boldsymbol{h}_5 & -\boldsymbol{h}_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & \\
 & & h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0\\
h_1 & -h_0 & & & h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2\\
h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & & h_5 & -h_4
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
h'_0 & h'_1 & h'_2 & h'_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\
 & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5\\
h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3\\
h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & h'_3 & -h'_2 & h'_1 & -h'_0 & & \\
 & & h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0\\
h_1 & -h_0 & & & h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2\\
h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & & h_5 & -h_4
\end{pmatrix},
$$

если выбрать углы так, что $c_0 h_5 - s_0 h_0 = 0$, где $c_0 = \cos(\varphi_0)$ и $s_0 = \sin(\varphi_0)$, т.е. если $\varphi_0 = \mathrm{arctg}(h_5/h_0)$. При таком выборе угла обнуляются сразу два коэффициента h_5 и h_4 в нулевой и четвертой строках. Последовательное умножение $\mathrm{AWT}_8[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5]$ на матрицы $\mathbf{CS}_{0,4}(\varphi_0)$, $\mathbf{CS}_{1,5}(\varphi_0)$, $\mathbf{CS}_{2,6}(\varphi_0)$ и $\mathbf{CS}_{3,7}(\varphi_0)$ дает

$$
\begin{gathered}
\mathbf{CS}_{3,7}(\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{2,6}(\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{1,5}(\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{0,4}(\varphi_0)\cdot \\
\cdot\mathrm{AWT}_8[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5]= \\
=\begin{pmatrix}
c_0 & & & & s_0 & & & \\
 & c_0 & & & & s_0 & & \\
 & & c_0 & & & & s_0 & \\
 & & & c_0 & & & & s_0 \\
-s_0 & & & & c_0 & & & \\
 & -s_0 & & & & c_0 & & \\
 & & -s_0 & & & & c_0 & \\
 & & & -s_0 & & & & c_0
\end{pmatrix}\cdot \\
\cdot\begin{pmatrix}
h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \boldsymbol{h}_4 & \boldsymbol{h}_5 & & \\
 & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \boldsymbol{h}_4 & \boldsymbol{h}_5 \\
\boldsymbol{h}_4 & \boldsymbol{h}_5 & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\
h_2 & h_3 & \boldsymbol{h}_4 & \boldsymbol{h}_5 & & & h_0 & h_1 \\
\boldsymbol{h}_5 & -\boldsymbol{h}_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & \\
 & & \boldsymbol{h}_5 & -\boldsymbol{h}_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 \\
h_1 & -h_0 & & & \boldsymbol{h}_5 & -\boldsymbol{h}_4 & h_3 & -h_2 \\
h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & & \boldsymbol{h}_5 & -\boldsymbol{h}_4
\end{pmatrix}= \\
=\begin{pmatrix}
h'_0 & h'_1 & h'_2 & h'_3 & & & & \\
 & & h'_0 & h'_1 & h'_2 & h'_3 & & \\
 & & & & h'_0 & h'_1 & h'_2 & h'_3 \\
h'_2 & h'_3 & & & & & h'_0 & h'_1 \\
 & & h'_3 & -h'_2 & h'_1 & -h'_0 & & \\
 & & & & h'_3 & -h'_2 & h'_1 & -h'_0 \\
h'_1 & -h'_0 & & & & & h'_3 & -h'_2 \\
h'_3 & -h'_2 & h'_1 & -h'_0 & & & &
\end{pmatrix}= \\
=\mathrm{AWT}_8[h'_0,h'_1,h'_2,h'_3].
\end{gathered}
\tag{2}
$$

В результате получается атомарная матрица $\mathrm{AWT}_8[h'_0,h'_1,h'_2,h'_3]$ с четырьмя, а не с шестью, новыми коэффициентами. Повторяя вышеизложенную процедуру с новой матрицей, получаем следующую матрицу с двумя коэффициентами:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{CS}_{0,7}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{3,6}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{2,5}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{1,4}(\varphi_1)\cdot \\
\cdot\mathrm{AWT}_8[h'_0,h'_1,h'_2,h'_3]=\mathrm{AWT}_8[h''_0,h''_1].
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Повторяем с ней все выше описанные преобразования:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{CS}_{1,7}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{0,6}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{3,5}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{2,4}(\varphi_2)\cdot \\
\cdot\mathrm{AWT}_8[h''_0,h''_1]=\mathbf{P}_8,
\end{gathered}
\tag{4}
$$

где $\mathbf{P}_8$ - квазиперестановочная матрица (в каждой строке и каждом столбце которой стоит либо $+1$ либо -1). В качестве искомого результата получаем:

$$
\begin{gathered}
\left[\mathbf{CS}_{1,7}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{0,6}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{3,5}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{2,4}(\varphi_2)\right]\cdot\\
\cdot\left[\mathbf{CS}_{0,7}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{3,6}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{2,5}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{1,4}(\varphi_1)\right]\cdot\\
\cdot\left[\mathbf{CS}_{3,7}(\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{2,6}(\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{1,5}(\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{0,4}(\varphi_0)\right]\cdot\\
\cdot\mathrm{AWT}_8\left[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\right]=\mathbf{P}_8.
\end{gathered}\tag{5}
$$

Отсюда получаем многопараметрическое представление атомарной матрицы:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{AWT}_8\left[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\right]=\\
=\left[\mathbf{CS}_{3,7}(-\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{2,6}(-\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{1,5}(-\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{0,4}(-\varphi_0)\right]\cdot\\
\cdot\left[\mathbf{CS}_{0,7}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{3,6}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{2,5}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{1,4}(\varphi_1)\right]\cdot\\
\cdot\left[\mathbf{CS}_{1,7}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{0,6}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{3,5}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{2,4}(\varphi_2)\right]\cdot\mathbf{P}_8=\\
=\begin{pmatrix}
c_0 & & & & -s_0 & & & \\
 & c_0 & & & & -s_0 & & \\
 & & c_0 & & & & -s_0 & \\
 & & & c_0 & & & & -s_0\\
+s_0 & & & & c_0 & & & \\
 & +s_0 & & & & c_0 & & \\
 & & +s_0 & & & & c_0 & \\
 & & & +s_0 & & & & c_0
\end{pmatrix}\cdot\\
\cdot\begin{pmatrix}
c_1 & & & & & & & -s_1\\
 & c_1 & & & -s_1 & & & \\
 & & c_1 & & & -s_1 & & \\
 & & & c_1 & & & -s_1 & \\
 & +s_1 & & & c_1 & & & \\
 & & +s_1 & & & c_1 & & \\
 & & & +s_1 & & & c_1 & \\
+s_1 & & & & & & & c_1
\end{pmatrix}\cdot\\
\cdot\begin{pmatrix}
c_2 & & & & & & -s_2 & \\
 & c_2 & & & & & & -s_2\\
 & & c_2 & & -s_2 & & & \\
 & & & c_2 & & -s_2 & & \\
 & & +s_2 & & c_2 & & & \\
 & & & +s_2 & & c_2 & & \\
+s_2 & & & & & & c_2 & \\
 & +s_2 & & & & & & c_2
\end{pmatrix}\cdot\mathbf{P}_8=\\
=\mathbf{T}_8^0\left(-\varphi_0\right)\cdot\mathbf{T}_8^1\left(-\varphi_1\right)\cdot\mathbf{T}_8^2\left(-\varphi_2\right)\cdot\mathbf{P}_8,
\end{gathered}\tag{6}
$$

где $c_i=\cos\left(\varphi_i\right)$, $s_i=\sin\left(\varphi_i\right)$, $i=0,1,2$ и каждая матрица $\mathbf{T}_8\left(\varphi_i\right)$ является произведением следующих $\sin/\cos$ – матриц вращения

$$
\begin{gathered}
\mathbf{T}_8^0(\varphi_0)=\mathbf{CS}_{3,7}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{2,6}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{1,5}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{0,4}(\varphi_0),\\
\mathbf{T}_8^1(\varphi_0)=\mathbf{CS}_{0,7}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{3,6}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{2,5}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{1,4}(\varphi_0),\\
\mathbf{T}_8^2(\varphi_0)=\mathbf{CS}_{1,7}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{0,6}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{3,5}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{2,4}(\varphi_0).
\end{gathered}\tag{7}
$$

Выясним закономерность в последовательностях двойных индексов у матриц $\mathbf{CS}$ -преобразований. Имеем

0, 4	1, 4	2, 4
1, 5	2, 5	3, 5
2, 6	3, 6	0, 6
3, 7	0, 7	1, 7
(k) $(k+4)$	$\left(k \underset{4}{\oplus} 1\right)$ $(k+4)$	$\left(k \underset{4}{\oplus} 2\right)$ $(k+4)$

Если r - количество итераций внутри атомарной функции в ее многопараметрической форме, а i – номер итерации по матрицам $\mathbf{T}^i_{2^n}\left(-\varphi_i\right)$, то закон формирования парных индексов можно записать в следующей форме: $\left(k \underset{2^{n-r}}{\oplus} i, k+2^{n-r}\right)$.

Аналогичные результаты получатся, если в качестве исходной атомарной матрицы взять (16×16) - матрицу $\mathrm{AWT}_{16}\left[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\right]$ с тем же набором коэффициентов. Применяя к ней изложенную выше процедуру обнуления коэффициентов, получим аналогичный результат:

$$\mathbf{T}^2_{16}(\varphi_2)\mathbf{T}^1_{16}(\varphi_1)\mathbf{T}^0_{16}(\varphi_0)\mathrm{AWT}_{16}\left[h_0,h_1,\ldots,h_5\right]=\mathbf{P}_{16}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{AWT}_{16}\left[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\right]=\\&=\mathbf{T}^0_{16}(-\varphi_0)\mathbf{T}^1_{16}(-\varphi_1)\mathbf{T}^2_{16}(-\varphi_2)\mathbf{P}_{16},\end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathbf{T}$– матрицы представляют собой произведение $\mathbf{CS}$ -матриц.

Этот результат носит общий характер и верен для любой $\left(2^r\times2^r\right)$ атомарной матрицы:

$$\mathbf{P}_{2^r}=\left(\prod_{i=D-1}^{0}\mathbf{T}^i_{2^r}\left(\varphi_i\right)\right)\cdot\mathrm{AWT}\left[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}\right] \tag{10}$$

и, следовательно,

$$\mathrm{AWT}\left[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}\right]=\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}^i_{2^r}\left(-\varphi_i\right)\right)\mathbf{P}_{2^r}. \tag{11}$$

что является многопараметрическим представлением атомарной матрицы.

Многопараметрическое представление вейвлет-преобразований и вейвлет-пакетов. Для начала рассмотрим пример (16×16) – вейвлет-преобразования Добюши – 4. В матричной форме оно является произведением следующих атомарных матриц:
$\mathrm{WDT}_{16}\left[h_0,h_1,h_2,h_3\right]=\left[\mathrm{AWT}_4\oplus\mathbf{I}_{12}\right]\left[\mathrm{AWT}_8\oplus\mathbf{I}_8\right]\left[\mathrm{AWT}_{16}\right]$.

Каждая атомарная матрица AWT_4, AWT_8, AWT_{16} может быть представлена в параметрической форме:

$$\begin{aligned}\mathrm{AWT}_4&=\mathbf{T}^0_4\left(-\varphi_0\right)\mathbf{T}^1_4\left(-\varphi_1\right)\mathbf{P}_4,\\\mathrm{AWT}_8&=\mathbf{T}^0_8\left(-\varphi_0\right)\mathbf{T}^1_8\left(-\varphi_1\right)\mathbf{P}_8,\\\mathrm{AWT}_{16}&=\mathbf{T}^0_{16}\left(-\varphi_0\right)\mathbf{T}^1_{16}\left(-\varphi_1\right)\mathbf{P}_{16}.\end{aligned}$$

Поэтому:

$$\begin{aligned}&\mathrm{WDT}_{16}\left[h_0,h_1,h_2,h_3\right]=\\&=\left[\mathbf{T}^0_4(-\varphi_0)\mathbf{T}^1_4(-\varphi_1)\mathbf{P}_4\oplus\mathbf{I}_{12}\right]\cdot\left[\mathbf{T}^0_8(-\varphi_0)\mathbf{T}^1_8(-\varphi_1)\mathbf{P}_8\oplus\mathbf{I}_8\right]\\&\cdot\left[\mathbf{T}^0_{16}(-\varphi_0)\mathbf{T}^1_{16}(-\varphi_1)\mathbf{P}_{16}\right]=\\&=\left[\left(\prod_{i=0}^{1}\mathbf{T}^i_4(-\varphi_i)\right)\mathbf{P}_4\oplus\mathbf{I}_{12}\right]\cdot\left[\left(\prod_{i=0}^{1}\mathbf{T}^i_8(-\varphi_i)\right)\mathbf{P}_8\oplus\mathbf{I}_8\right]\cdot\\&\cdot\left[\left(\prod_{i=0}^{1}\mathbf{T}^i_{16}(-\varphi_i)\right)\mathbf{P}_{16}\right].\end{aligned} \tag{12}$$

что и представляет собой двухпараметрическую форму представления Добюши - 4 вейвлет-преобразования. Меняя углы φ_0 и φ_1, можно получить все преобразования типа $\mathrm{WDT}_{16}\left[h_0,h_1,h_2,h_3\right]$. Все атомарные матрицы в многопараметрическом представлении характеризуются одним и тем же набором углов. Все они имеют одинаковые значения во всех атомарных матрицах и должны меняться синхронно. Конечно, можно сделать углы в разных атомарных матрицах разными и менять их не синхронно. В этом случае получающиеся вейвлет-преобразования будут неоднородными в том смысле, что, переходя с одного уровня разрешения на другой, будут получаться различные вейвлет-функции, в то время как в первом случае преобразование будет однородным, и при переходе с одного уровня разрешения на другой вейвлет-функции будут иметь ту же самую форму.

В самом общем случае формула для многопараметрического представления вейвлет-преобразования имеет следующий вид:

$$\mathrm{WDT}_{2^n}[h_0,h_1,\dots,h_{2D-1}]=$$
$$=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}^i_{2^{n-r+1}}(-\varphi_i)\right)\mathbf{P}_{2^{n-r+1}}\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-r+1}}\right], \quad (13)$$

где $\underset{2^{n-r}}{\oplus}$ - сложение по модулю 2^{n-r}, а $m=]\log_2 2D[$ - наименьшее целое положительное число, что $2^{m-1}\le 2D\le 2^m$. Последнее выражение представляет собой третью каноническую форму вейвлет-преобразований $\mathrm{WDT}_{2^m}[h_0,h_1,\dots,h_{2D-1}]$ в многопараметрической форме. Классическое вейвлет-преобразование с коэффициентами $h_0,h_1,\dots,h_{2D-1}$ строится из атомарных вейвлет-преобразований в соответствии со следующим выражением:

$$\mathrm{WDT}_{2^n}[h_0,h_1,\dots,h_{2D-1}]=$$
$$=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}[h_0,h_1,\dots,h_{2D-1}]\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-r+1}}\right]. \quad (14)$$

Здесь в каждой итерации атомарное преобразование появляется один раз. В действительности, его можно повторить максимальное $2^n/2^{n-r+1}=2^{r-1}$ или меньшее число, скажем $s_r\le 2^{r-1}$, раз в виде прямой суммы $s_r\le 2^{r-1}$ слагаемых. Пусть $\mathbf{s}^r=(s_1^r,s_2^r,\dots,s_t^r,\dots,s_{2^{r-1}}^r)$ - двоичное 2^{r-1} разрядное число, каждый бит s_t^r которого управляет t^{th} позицией матрицы $\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}$ в r^{th} итерации с слабо заполненными матрицами:

$$\mathrm{AWT}^{s_t^r}_{2^{n-r-1}}=\begin{cases}\mathrm{AWT}_{2^{n-r-1}}, & s_t^r=1,\\ I_{2^{n-r-1}}, & s_t^r=0.\end{cases}$$

Все такие матрицы формируют пакет атомарных матриц:

$$\mathrm{AWP}^{\mathbf{s}^r}_{2^n}=\bigoplus_{t=1}^{2^{r-1}}\mathrm{AWT}^{s_t^r}_{2^{n-r+1}}=$$
$$=\mathrm{AWT}^{s_1^r}_{2^{n-r+1}}\oplus\mathrm{AWT}^{s_2^r}_{2^{n-r+1}}\oplus\dots\oplus\mathrm{AWT}^{s^r_{2^{r-1}}}_{2^{n-r+1}}. \quad (15)$$

Используя пакеты $\mathrm{AWT}^{s_t^r}_{2^{n-r-1}}$ атомарных матриц (15), мы формируем дискретно управляемые вейвлет-пакеты

$$\mathrm{WDP}^{\mathbf{s}^1,\mathbf{s}^2,\dots,\mathbf{s}^{n-m+1}}_{2^n}[h_0,h_1,\dots,h_{2D-1}]=$$
$$=\prod_{r=n-m+1}^{1}\mathrm{AWP}^{\mathbf{s}^r}_{2^n}=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\bigoplus_{t=1}^{2^{r-1}}\mathrm{AWT}^{s_t^r}_{2^{n-r+1}}\right]= \quad (16)$$
$$=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\mathrm{AWT}^{s_1^r}_{2^{n-r+1}}\oplus\dots\oplus\mathrm{AWT}^{s^r_{2^{r-1}}}_{2^{n-r+1}}\right]$$

с дискретными двоичными параметрами $\mathbf{s}^1=\left(s_1^1\right)$, $\mathbf{s}^2=\left(s_1^2,s_2^2\right)$, $\mathbf{s}^3=\left(s_1^3,s_2^3,s_3^3,s_4^3\right)$, …, $\mathbf{s}^{n-m}=\left(s_2^{n-m},s_2^{n-m},\dots,s^{n-m}_{2^{n-m-1}}\right)$. Следовательно,

$$\mathrm{AWT}^{s_t^r}_{2^{n-r+1}}=\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}^i_{2^{n-r+1}}(-\varphi_i)\right)^{s_t^r}\mathbf{P}^{s_t^r}_{2^{n-r+1}}.$$

Подставляя это выражение в (16), получим третью многопараметрическую форму вейвлет-пакетов

$$\mathrm{WDP}_{2^n}^{\mathbf{s}^1,\mathbf{s}^2,\dots,\mathbf{s}^{n-m+1}}[h_0,h_1,\dots,h_{2D-1}]=$$
$$=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\bigoplus_{t=1}^{2^{r-1}}\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}^i_{2^{n-r+1}}(-\varphi_i)\right)^{s_t^r}\mathbf{P}^{s_t^r}_{2^{n-r+1}}\right]. \quad (17)$$

Обратное многопараметрическое вейвлет-преобразование. Прямое многопараметрическое вейвлет-преобразование имеет форму

$$\mathrm{WDT}_{2^n}[h_0,h_1,\dots,h_{2D-1}]=$$
$$=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\left(\prod_{i=D-1}^{0}\mathbf{T}^{D-i-1}_{2^{n-r+1}}(-\varphi_{D-i-1})\right)\mathbf{P}_{2^{n-r+1}}\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-r+1}}\right]. \quad (18)$$

Эта матрица ортогональна, поэтому ее обратная совпадает с транспонированной. Транспонирование правой и левой частей (18) дает выражение для обратной матрицы. Для того чтобы выполнить эту операцию, перепишем (18) в более компактной форме:

$$\mathrm{WDT}_{2^n}=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-r+1}}\right]. \quad (19)$$

Тогда

$$\mathrm{WDT}^t_{2^n}=\left(\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-r+1}}\right]\right)^t=$$
$$=\prod_{r=m}^{n}\left[\mathrm{AWT}^t_{2^r}\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^r}\right].$$

Но $\mathrm{AWT}_{2^r}=\left[\prod_{i=D-1}^{0}\mathbf{T}^{D-i-1}_{2^r}(-\varphi_{D-i-1})\right]\mathbf{P}_{2^r}$, поэтому

$$\mathrm{AWT}^t_{2^r}=\mathbf{P}^t_{2^r}\prod_{i=D-1}^{0}\mathbf{T}^i_{2^r}(\varphi_i), \quad (20)$$

так как $[\mathbf{T}(-\varphi)]^t=\mathbf{T}(\varphi)$. Подставляя полученное выражение (20) в (19), получаем

$$\mathrm{WDT}^{-1}_{2^n}=\mathrm{WDT}^t_{2^n}=\prod_{r=m}^{n}\left[\mathbf{P}^t_{2^r}\prod_{i=D-1}^{0}\mathbf{T}^i_{2^r}(\varphi_i)\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^r}\right]. \quad (21)$$

В прямом вейвлет-преобразовании каждая матрица $\mathbf{T}^i_{2^{n-r+1}}(-\varphi_i)$ является произведением коммутативных матриц вращения $\mathbf{CS}$:

$$\mathbf{T}^{D-i-1}_{2^{n-r+1}}(-\varphi_{D-i-1})=\prod_{k=0}^{2^{n-r}-1}\mathbf{CS}_{k\underset{2^{n-r}}{\oplus}i,k+2^{n-r}}(-\varphi_{D-i-1}).$$

Поэтому

$$\mathbf{T}^i_{2^r}(\varphi_i)=\prod_{k=0}^{2^{r-1}-1}\mathbf{CS}_{k\underset{2^{r-1}}{\oplus}(D-i-1),k+2^{r-1}}(\varphi_i). \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21), получаем окончательное выражение для обратного вейвлет-преобразования

$$\mathrm{WDT}^{-1}_{2^n}[h_0,h_1,\dots,h_{2D-1}]=\mathrm{WDT}^{-1}_{2^n}[\varphi_0,\dots,\varphi_{D-1}]=$$
$$=\prod_{r=m}^{n}\left[\mathbf{P}^t_{2^r}\prod_{i=D-1}^{0}\prod_{k=0}^{2^{r-1}-1}\mathbf{CS}_{k\underset{2^{r-1}}{\oplus}(D-i-1),k+2^{r-1}}(\varphi_i)\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^r}\right], \quad (23)$$

где $\underset{2^{r-1}}{\oplus}$ символ сложения по модулю 2^{r-1}. Аналогично для обратного вейвлет-пакета получаем:

$$\mathrm{WDP}_{2^n}^{-1}[\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{D-1}]=$$

$$=\prod_{r=m}^{n}\left[\bigoplus_{t=1}^{2^r}\left(\mathbf{P}_{2^r}^{t}\cdot\prod_{i=D-1}^{0}\prod_{k=0}^{2^{r-1}-1}\mathbf{CS}_{k\underset{2^{r-1}}{\oplus}(D-i-1),k+2^{r-1}}(\varphi_i)\right)^{s_t^r}\right]. \quad (24)$$

Четвертая каноническая форма многопараметрического представления циклических ортогональных вейвлет-преобразований

Многопараметрическая форма прямого вейвлет-преобразования и вейвлет-пакетов. Рассмотренные выше атомарные матрицы записаны с «нормальным» упорядочиванием строк: сначала усредняющие h-строки, потом дифференцирующие g-строки. Четвертую каноническую форму многопараметрического преобразования можно получить, используя циклическое представление:

$$\mathrm{CAT}_8\left[h_0,h_1,\ldots,h_5\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}
h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & & \\
g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & & \\
 & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\
 & & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \\
h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\
g_4 & g_5 & & & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\
h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1 \\
g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & & & g_0 & g_1
\end{pmatrix}= \quad (25)$$

$$=\mathbf{P}_8\mathrm{AWT}_8\left[h_0,h_1,\ldots,h_5\right],$$

где $\mathbf{P}_{2^n}$ - перестановочная матрица идеального диадического перемешивания, переставляющая строки атомарной матрицы $\mathrm{AWT}_{2^n}\left[h_0,h_1,\ldots,h_5\right]$ лестничного типа по закону

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2^r-2 & 2^r-1 \\
0 & 2^{r-1} & 1 & 2^{r-1}+1 & 2 & \cdots & 2^{r-1}-1 & 2^r-1
\end{pmatrix}. \quad (26)$$

Для получения многопараметрической формы вейвлет-преобразований, определим матрицу вращения с отражением в плоскости i-й и j-й орт:

$$\mathbf{CS}_{i,j}^{R}(\varphi)=\begin{array}{c}
\\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & s & \cdots & -c & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}. \quad (27)$$

Будем последовательно перемножать $\mathrm{CAT}_{2^n}\left[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}\right]$ с матрицами вращения $\mathbf{CS}_{01}^{R}(\varphi_0)$, $\mathbf{CS}_{23}^{R}(\varphi_0),\ldots$, $\mathbf{CS}_{2D-2,2D-1}^{R}(\varphi_0)$ и выбирать угол φ_0, таким образом, чтобы получилась матрица $\mathrm{CAT}_{2^n}'\left[h_0',h_1',\ldots,h_{2D-3}'\right]$ с новым набором коэффициентов, число которых на два меньше, чем в исходной матрице. В качестве примера возьмем приведенное выше атомарное преобразование $\mathrm{CAT}_8\left[h_0,h_1,\ldots,h_5\right]$.

$$\mathbf{CS}_{67}^{R}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{45}^{R}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{23}^{R}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{01}^{R}(\varphi_0)\cdot \mathrm{CAT}_8[h_0,...,h_5]=$$

$$=\begin{pmatrix}
c & s & & & & & & \\
s & -c & & & & & & \\
 & & c & s & & & & \\
 & & s & -c & & & & \\
 & & & & c & s & & \\
 & & & & s & -c & & \\
 & & & & & & c & s \\
 & & & & & & s & -c
\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}
h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \boldsymbol{h_4} & \boldsymbol{h_5} & & \\
\boldsymbol{g_0} & \boldsymbol{g_1} & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & & \\
 & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \boldsymbol{h_4} & \boldsymbol{h_5} \\
 & & \boldsymbol{g_0} & \boldsymbol{g_1} & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \\
\boldsymbol{h_4} & \boldsymbol{h_5} & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\
g_4 & g_5 & & & \boldsymbol{g_0} & \boldsymbol{g_1} & g_2 & g_3 \\
h_2 & h_3 & \boldsymbol{h_4} & \boldsymbol{h_5} & & & h_0 & h_1 \\
g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & & & \boldsymbol{g_0} & \boldsymbol{g_1}
\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}
g_0' & g_1' & g_2' & g_3' & & & & \\
 & & h_0' & h_1' & h_2' & h_3' & & \\
 & & g_0' & g_1' & g_2' & g_3' & & \\
 & & & & h_0' & h_1' & h_2' & h_3' \\
 & & & & g_0' & g_1' & g_2' & g_3' \\
h_2' & h_3' & & & & & h_0' & h_1' \\
g_2' & g_3' & & & & & g_0' & g_1' \\
h_0' & h_1' & h_2' & h_3' & & & &
\end{pmatrix}=$$

$$=\mathrm{CAT}_8'[h_0', h_1', h_2', h_3'].$$

Теперь повторим вышеизложенную процедуру с новой атомарной матрицей

$$\mathbf{CS}_{70}^{R}(\varphi_1)\mathbf{CS}_{56}^{R}(\varphi_1)\mathbf{CS}_{34}^{R}(\varphi_1)\mathbf{CS}_{12}^{R}(\varphi_1)\cdot$$

$$\cdot \mathrm{CAT}_8'[h_0', h_1', h_2', h_3'] =$$

$$= \begin{pmatrix} c & & & & & & & s \\ & c & s & & & & & \\ & s & -c & & & & & \\ & & & c & s & & & \\ & & & s & -c & & & \\ & & & & & c & s & \\ & & & & & s & -c & \\ s & & & & & & & -c \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \mathbf{g_0'} & \mathbf{g_1'} & g_2' & g_3' & & & & \\ & & h_0' & h_1' & \mathbf{h_2'} & \mathbf{h_3'} & & \\ & & \mathbf{g_0'} & \mathbf{g_1'} & g_2' & g_3' & & \\ & & & & h_0' & h_1' & \mathbf{h_2'} & \mathbf{h_3'} \\ & & & & \mathbf{g_0'} & \mathbf{g_1'} & g_2' & g_3' \\ \mathbf{h_2'} & \mathbf{h_3'} & & & & & h_0' & h_1' \\ g_2' & g_3' & & & & & \mathbf{g_0'} & \mathbf{g_1'} \\ h_0' & h_1' & \mathbf{h_2'} & \mathbf{h_3'} & & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} & & h_0'' & h_1'' & & & & \\ & & g_0'' & g_1'' & & & & \\ & & & & h_0'' & h_1'' & & \\ & & & & g_0'' & g_1'' & & \\ & & & & & & h_0'' & h_1'' \\ & & & & & & g_0'' & g_1'' \\ h_0'' & h_1'' & & & & & & \\ g_0'' & g_1'' & & & & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{CAT}_8''[h_0'', h_1''].$$

Получилась блочно-перестановочная матрица с ортогональными (2×2)-блоками. Используя соответствующие матрицы вращения, можно превратить эту матрицу в перестановочную:

$$\mathbf{CS}_{01}^{R}(\varphi_2)\mathbf{CS}_{67}^{R}(\varphi_2)\mathbf{CS}_{45}^{R}(\varphi_2)\mathbf{CS}_{23}^{R}(\varphi_2)\cdot$$

$$\cdot \mathrm{CAT}_8''[h_0'', h_1''] =$$

$$= \begin{pmatrix} c & s & & & & & & \\ s & -c & & & & & & \\ & & c & s & & & & \\ & & s & -c & & & & \\ & & & & c & s & & \\ & & & & s & -c & & \\ & & & & & & c & s \\ & & & & & & s & -c \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} & & h_0'' & h_1'' & & & & \\ & & g_0'' & g_1'' & & & & \\ & & & & h_0'' & h_1'' & & \\ & & & & g_0'' & g_1'' & & \\ & & & & & & h_0'' & h_1'' \\ & & & & & & g_0'' & g_1'' \\ h_0'' & h_1'' & & & & & & \\ g_0'' & g_1'' & & & & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} & & -1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & -1 \\ -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \end{pmatrix} = -\mathbf{C}_8^2,$$

где $\mathbf{C}_8^2$ - матрица циклического сдвига по модулю 8 на две позиции.

Таким образом, мы можем написать

$$\mathbf{T}_8^2(\varphi_2)\mathbf{T}_8^1(\varphi_1)\mathbf{T}_8^0(\varphi_0)\cdot \mathrm{CAT}_8\left[h_0,h_1,\ldots,h_5\right] = -\mathbf{C}_8^2, \tag{28}$$

где $\mathbf{T}_{2^n}^i(\varphi_i)$ - ортогональные матрицы, полученные в результате перемножения матриц вращения с отражением $\mathbf{CS}_{k,l}^R(\varphi_i)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_8^2(\varphi_2) &= \mathbf{CS}_{01}^R(\varphi_2)\mathbf{CS}_{67}^R(\varphi_2)\mathbf{CS}_{45}^R(\varphi_2)\mathbf{CS}_{23}^R(\varphi_2), \\ \mathbf{T}_8^1(\varphi_1) &= \mathbf{CS}_{70}^R(\varphi_1)\mathbf{CS}_{56}^R(\varphi_1)\mathbf{CS}_{34}^R(\varphi_1)\mathbf{CS}_{12}^R(\varphi_1), \\ \mathbf{T}_8^0(\varphi_0) &= \mathbf{CS}_{67}^R(\varphi_0)\mathbf{CS}_{45}^R(\varphi_0)\mathbf{CS}_{23}^R(\varphi_0)\mathbf{CS}_{01}^R(\varphi_0). \end{aligned} \tag{29}$$

Так как матрицы $\mathbf{T}_{2^n}^i(\varphi_i)$ являются симметричными и ортогональными, то $\left[\mathbf{T}_{2^n}^i(\varphi_i)\right]^{-1} = \mathbf{T}_{2^n}^i(\varphi_i)$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\mathrm{CAT}_8\left[h_0,h_1,\ldots,h_5\right] = \mathrm{CAT}_8\left[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2\right] = \\ &= (-1)\cdot \mathbf{T}_8^0(\varphi_0)\mathbf{T}_8^1(\varphi_1)\mathbf{T}_8^2(\varphi_2)\cdot \mathbf{C}_8^2, \end{aligned} \tag{30}$$

и

$$\begin{aligned} &\mathrm{AWT}_8\left[h_0,h_1,\ldots,h_5\right] = \mathrm{AWT}_8\left[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2\right] = \\ &= (-1)\cdot \mathbf{P}_8\cdot\left[\mathbf{T}_8^0(\varphi_0)\mathbf{T}_8^1(\varphi_1)\mathbf{T}_8^2(\varphi_2)\right]\cdot \mathbf{C}_8^2. \end{aligned} \tag{31}$$

Построим параметрическую форму представления вейвлет-преобразования $\mathrm{WT}_{16}\left[h_0,h_1,\ldots,h_5\right]$. Так как $\mathrm{WT}_{16}[h_0,\ldots,h_5]=\left[\mathrm{AWT}_8[h_0,\ldots,h_5]\oplus\mathbf{I}_8\right]\cdot\mathrm{AWT}_{16}[h_0,\ldots,h_5]$, то

$$\begin{aligned} &\mathrm{WT}_{16}\left[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2\right] = \\ &=\left[(-1)\cdot\mathbf{P}_8\cdot\left[\mathbf{T}_8^0(\varphi_0)\mathbf{T}_8^1(\varphi_1)\mathbf{T}_8^2(\varphi_2)\right]\cdot\mathbf{C}_8^2\oplus\mathbf{I}_8\right]\cdot \\ &\cdot\left[(-1)\cdot\mathbf{P}_{16}\cdot\left[\mathbf{T}_{16}^0(\varphi_0)\mathbf{T}_{16}^1(\varphi_1)\mathbf{T}_{16}^2(\varphi_2)\right]\cdot\mathbf{C}_{16}^2\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

Блок-схема алгоритма преобразования $\mathrm{WT}_{16}\left[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_3\right]$ представлена на рис.1.

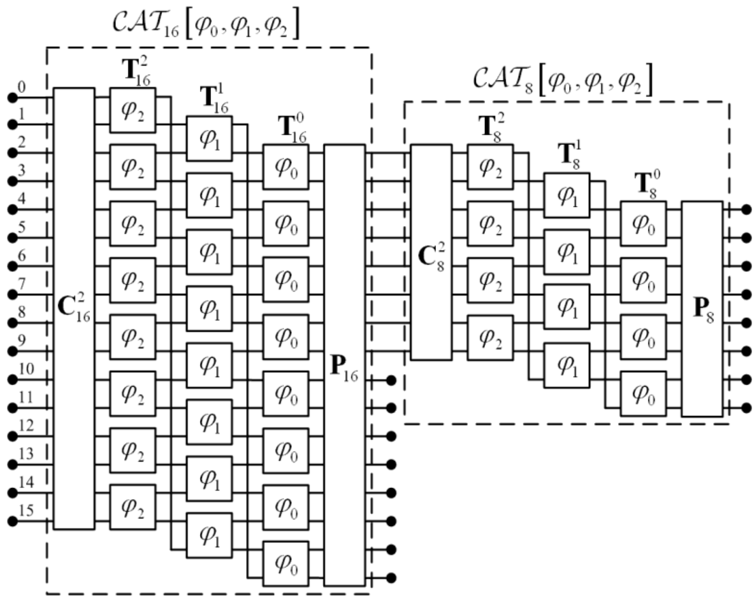

Рис. 1. Блок-схема алгоритма параметрического вейвлет-преобразования $\mathrm{WT}_{16}[\varphi_0,\varphi_1,\varphi_3]$.

Полученный результат верен для любой атомарной $(2^n \times 2^n)$ матрицы $\mathrm{AWT}_{2^n}[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{AWT}_{2^n}[h_0,h_1,...,h_{2D-1}] &= \mathrm{AWT}_{2^n}[\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_{D-1}] = \\ &= (-1)^D \cdot \mathbf{P}_{2^n} \cdot \left[\prod_{i=0}^{D-1} \mathbf{T}_{2^n}^{i}(\varphi_i)\right] \cdot \mathbf{C}_{2^n}^{D-1} = \\ &= (-1)^D \cdot \mathbf{P}_{2^n} \cdot \left[\prod_{i=0}^{D-1} \prod_{k=2^{n-1}-1}^{0} \mathbf{CS}^{R}_{i \underset{2^n}{\oplus} 2k,\, i \underset{2^n}{\oplus} (2k+1)}(\varphi_i)\right] \cdot \mathbf{C}_{2^n}^{D-1},\end{aligned} \tag{33}$$

где $\underset{2^n}{\oplus}$ - операция сложения по модулю 2^n.

Учитывая (14), получаем следующее многопараметрическое представление циклического вейвлет-преобразования, которое назовем четвертой канонической формой:

$$\begin{aligned}&\mathrm{WDT}_{2^n}[\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_{D-1}] = \\ &= (-1)^D \cdot \prod_{r=n-m+1}^{1} \left[\left(\mathbf{P}_{2^{n-r+1}} \cdot \left[\prod_{i=0}^{D-1} \mathbf{T}^{i}_{2^{n-r+1}}(\varphi_i)\right] \cdot \mathbf{C}^{D-1}_{2^{n-r+1}} \right) \oplus, \right. \\ &\qquad \left. \oplus \mathbf{I}_{2^n - 2^{n-r+1}} \right]\end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\mathbf{T}^{i}_{2^{n-r+1}}(\varphi_i) = \prod_{k=0}^{2^{n-r}-1} \mathbf{CS}^{R}_{i \underset{2^{n-r+1}}{\oplus} 2k,\, i \underset{2^{n-r+1}}{\oplus} (2k+1)}(\varphi_i). \tag{35}$$

Аналогично, подставляя (33) в (17), получаем выражение для вейвлет-пакета:

$$\begin{aligned}&\mathrm{WDP}_{2^n}[\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_{D-1}] = \\ &= \prod_{r=n-m+1}^{1} \left[\bigoplus_{t=1}^{2^r} \left((-1)^D \cdot \mathbf{P}_{2^{n-r+1}} \cdot \left[\prod_{i=0}^{D-1} \mathbf{T}^{i}_{2^{n-r+1}}(\varphi_i)\right] \cdot \mathbf{C}^{D-1}_{2^{n-r+1}} \right)^{s_r^t} \right].\end{aligned} \tag{36}$$

Обратное многопараметрическое вейвлет преобразование. Для того, чтобы получить выражение для обратного многопараметрического атомарного вейвлет-преобразования, транспонируем левую и правую части равенства(34):

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{AWT}_{2^n}^{-1}\left[\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{D-1}\right]=\mathrm{AWT}_{2^n}^{t}\left[\varphi_0,\ldots,\varphi_{D-1}\right]=\\
&=\left[\left(-1\right)^{n-m+1}\cdot\mathbf{P}_{2^n}\cdot\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}_{2^n}^{i}\left(\varphi_i\right)\right)\cdot\mathbf{C}_{2^n}^{D-1}\right]^t=\\
&=\left(-1\right)^{n-m+1}\cdot\left[\mathbf{C}_{2^n}^{D-1}\right]^t\cdot\left[\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}_{2^n}^{i}\left(\varphi_i\right)\right]^t\cdot\mathbf{P}_{2^n}^{t}=\\
&=\left(-1\right)^{n-m+1}\cdot\left[\mathbf{C}_{2^n}^{D-1}\right]^t\cdot\left(\prod_{i=0}^{D-1}\left[\mathbf{T}_{2^n}^{D-i+1}\left(\varphi_{D-i+1}\right)\right]^t\right)\cdot\mathbf{P}_{2^n}^{t}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Так как $\mathbf{T}_{2^n}^{D-i+1}\left(\varphi_{D-i+1}\right)$ - произведение симметричных ортогональных матриц вращения с отражением $\mathbf{CS}_{k,l}^{R}\left(\varphi_{D-i+1}\right)$, то $\left[\mathbf{T}_{2^n}^{D-i+1}\left(\varphi_{D-i+1}\right)\right]^t= \;=\mathbf{T}_{2^n}^{D-i+1}\left(\varphi_{D-i+1}\right)$, следовательно

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{AWT}_{2^n}^{t}\left[\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{D-1}\right]=\\
&=\left(-1\right)^{n-m+1}\cdot\left[\mathbf{C}_{2^n}^{D-1}\right]^t\cdot\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}_{2^n}^{D-i+1}\left(\varphi_{D-i+1}\right)\right)\cdot\mathbf{P}_{2^n}^{t}.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Подставляя (37) в (19), получаем выражение для обратного вейвлет-преобразования

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{WDT}_{2^n}^{-1}[\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_{D-1}]=\\
&\left(-1\right)^{n-m+1}\cdot\prod_{r=n}^{m}\left[\left[\mathbf{C}_{2^r}^{D-1}\right]^t\cdot\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}_{2^r}^{D-i+1}\left(\varphi_{D-i+1}\right)\right)\cdot\mathbf{P}_{2^r}^{t}\oplus\right.\\
&\left.\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^r}\right],
\end{aligned}
\tag{39}
$$

где

$$
\mathbf{T}_{2^r}^{D-i+1}\left(\varphi_{D-i+1}\right)=\prod_{k=0}^{2^{n-r}-1}\mathbf{CS}^{R}_{(D-i+1)\underset{2^r}{\oplus}2k,(D-i+1)\underset{2^r}{\oplus}(2k+1)}\left(\varphi_{D-i+1}\right).
$$

Аналогично для обратного вейвлет-пакета получаем:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{WDP}_{2^n}^{-1}[\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_{D-1}]=\\
&=\left(-1\right)^{n-m+1}\cdot\prod_{r=n}^{m}\left[\bigoplus_{t=1}^{2^r}\left(\left[\mathbf{C}_{2^r}^{D-1}\right]^t\cdot\right.\right.\\
&\left.\left.\cdot\left[\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}_{2^r}^{D-i+1}\left(\varphi_{D-i+1}\right)\right]\cdot\mathbf{P}_{2^r}^{t}\right)^{s_r^t}\right].
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Оценка компрессионных свойств многопараметрических вейвлет-преобразований

Для оценки компрессионных характеристик многопараметрических ортогональных вейвлет преобразований были поставлены эксперименты, направленные на выявление зависимости энтропии $E^D\left(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{D-1}\right)$ коэффициентов спектра от числа и значений параметров преобразования. В качестве критерия использовалось значение энтропии квантованных до целого значения коэффициентов вейвлет-разложения. Вид зависимости $E^2\left(\varphi_0,\varphi_1\right)$ для случая двухпараметрических вейвлет-преобразований приведен на рис. 2, из которого видно, что эта зависимость имеет локальные и глобальные минимумы, которым соответствуют наилучшие с точки зрения сжатия вейвлет-преобразования. В качестве тестового изображения использовалась «Лена». Все экспериментальные результаты и выводы, сделанные из них, носят предварительный характер. Авторы планируют провести широкомасштабные эксперименты на большей базе изображений с целью нахождения наилучших вейвлет-преобразований в задачах сжатия изображений.

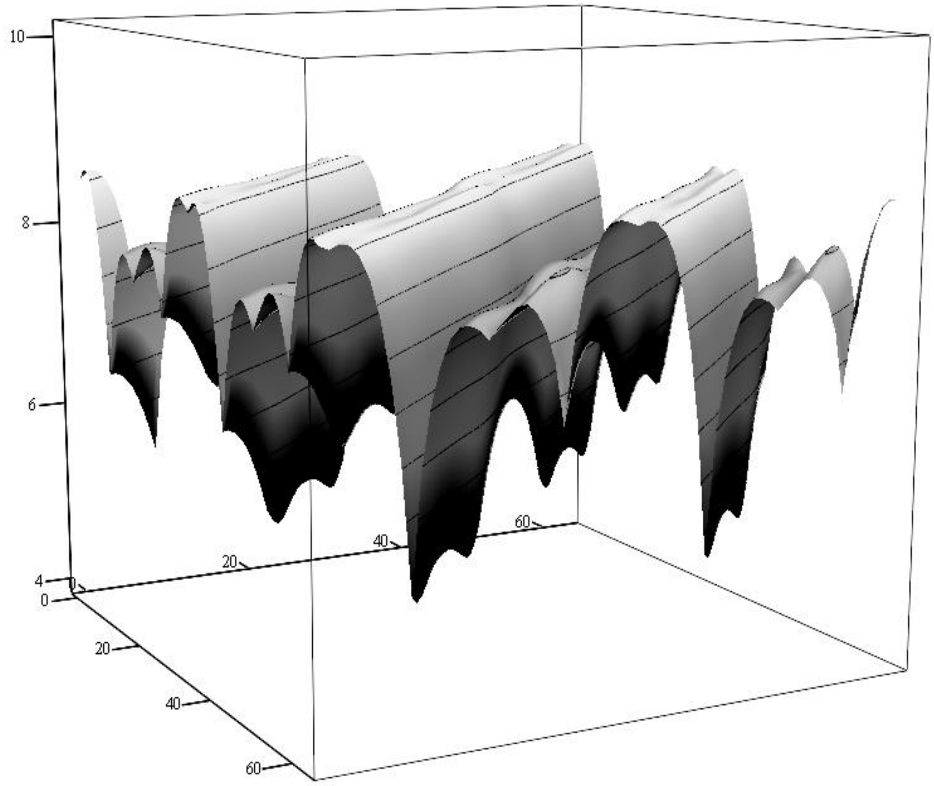

Рис. 2. Вид зависимости энтропии спектра для класса двухпараметрических преобразований.

Заключение

В настоящей работе выведено два представления так называемых многопараметрических циклических ортогональных вейвлет-преобразований, названные третьей и четвертой канонической формами. Они представляют собой произведение слабозаполненных матриц вращения и описывают быстрый алгоритм циклических вейвлет-преобразований. Оба выражения зависят от конечного числа свободных параметров, которые можно менять независимо друг от друга. При каждом значении свободных параметров получается конкретное циклическое ортогональное вейвлет-преобразование, что создает основу для унифицированного описания всех подобных преобразований.

Список использованной литературы

Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia: PA, 1992 . 68 p.

Daubechies I., Sweldens W. Factoring wavelet transforms into lifting steps // J. Fourier Anal. Appl. 1998. Vol. 4. No. 3. P. 247-269.

Рецензент статьи: кандидат технических наук, доцент Института экономики и управления Уральского государственного лесотехнического университета М.П. Воронов.