

УДК 630\*231

*В.А. Усольцев*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург  
<sup>2</sup> Ботанический сад УрО РАН, г. Екатеринбург

### **ОБ АДДИТИВНЫХ МОДЕЛЯХ БИОМАССЫ ДЕРЕВЬЕВ: НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ И ПОПЫТКА ИХ АНАЛИТИЧЕСКОГО ОБЗОРА**

**Ключевые слова:** *биосферная роль лесов, биомасса деревьев, аллометрические модели, пробные площади, биологическая продуктивность, биогеография, аддитивность уравнений.*

Показана проблема гармонизации моделей биомассы деревьев путём соблюдения принципа аддитивности, предполагающего, что суммарная биомасса фракций, полученная по «фракционным» уравнениям, должна быть равна значению биомассы, полученному по общему уравнению. Предпринята попытка аналитического обзора неопределённостей, связанных с этой проблемой.

*V.A. Usoltsev*

### **ON ADDITIVE MODELS OF TREE BIOMASS: SOME UNCERTAINTIES AND THE ATTEMPT OF THEIR ANALYTICAL REVIEW**

**Key words:** *biosphere role of forests, biomass of trees, allometric models, sample plots, biological productivity, biogeography, equations additivity.*

The problem of harmonizing models of tree biomass by means of ensuring the principle of their additivity has been shown. It is implying that the sum of biomass values obtained by "component" equations should be equal to the value of total biomass received with the general equation. An attempt was made to review some uncertainties related to this problem.

Биомасса (фитомасса) лесов, как было показано ранее, является неотъемлемой составляющей в решении проблемы устойчивого развития и основным «драйвером» сукцессионных изменений во вторичных лесах (Lohbeck et al., 2015), однако скорость восстановления их биомассы существенно опережает темпы восстановления биоразнообразия (Martin et al., 2013). Это означает снижение устойчивости биосферы и постепенную её деградацию, что несёт угрозу для существования человека. Поэтому снятие неопределённостей, связанных с оценкой биопродукции и биоразнообразия лесного покрова, имеет непреходящее значение. Некоторые из существующих неопределённостей связаны с известными теоретическими концепциями, которые показывают несоответствие или даже входят в противоречие с результатами их практических приложений при оценке фитомассы деревьев.

В XIX веке, видимо, под влиянием открытых ранее физических законов пытались найти «законы роста» древостоев «в духе физики принципов» (Кофман, 1986. С. 5), и количество ростовых функций превысило сотню (Peschel, 1938), но поскольку количество факторов, определяющих рост этих сложнейших биологических объектов, «зашкаливает», и все они не могут быть подвержены количественному анализу, пришло понимание того, что рост древостоев не определяется некими «чистыми» законами, а характеризуется стохастическими закономерностями, в основе которых лежит теория вероятностей (Assmann, 1961; Антанайтис, 1976).

Но еще в начале XIX в. Лапласом (цит. по: Харвей, 1974) была высказана «еретическая» точка зрения: «Теория вероятностей была необходима ввиду нашего невежества и неосведомленности» (С. 219). Лаплас считал, что мир управляется не вероятностными законами, а законами природы, овладев которыми, можно прогнозировать ту или иную ситуацию. В какой степени мы овладели законами природы, можно судить по опыту экологов, которые в состоянии объяснить сегодня не более 10% изменчивости наблюдаемых в экспериментах явлений (Møller, Jennions, 2002).

Тем не менее, среди зарубежных «математизированных» экологов бытует мнение, что описание природных объектов лежит за пределами евклидовой геометрии (Mandelbrot, 1983) и что «живой мир управляется законами, основанными на фрактальной геометрии и размерах организмов» (Whitfield, 2001. P. 342). Сегодня основная концепция лесоводов “видеть за деревьями лес” получает развитие с точностью «до наоборот». Идею этого развития можно выразить словами американского эколога Дж. Енквиста (цит. по: Whitfield, 2001): “Когда я иду по лесу, то меня не оставляет ощущение, что хотя это очень сложная система, но в основе этой сложности лежат очень простые правила” (с. 342).

Начиная с XIX века, исследователи отмечали, что связи между массой отдельных частей и целого организма у различных видов хорошо описываются так называемой функцией самоподобия, или аллометрической функцией (Snell, 1892; Dubois, 1897; Huxley, 1932; Gould, 1966; Zar, 1968; Ищенко, 1969; Мина, Клевезаль, 1976; Кофман, 1986; Гелашвили и др., 2013). В последние годы при рассмотрении лесных сообществ как сложных адаптивных систем (Proctor, Larson, 2005) получили распространение две теоретические модификации аллометрической модели: (1) масса особи ~ её размер и (2) масса органа ~ общая масса особи.

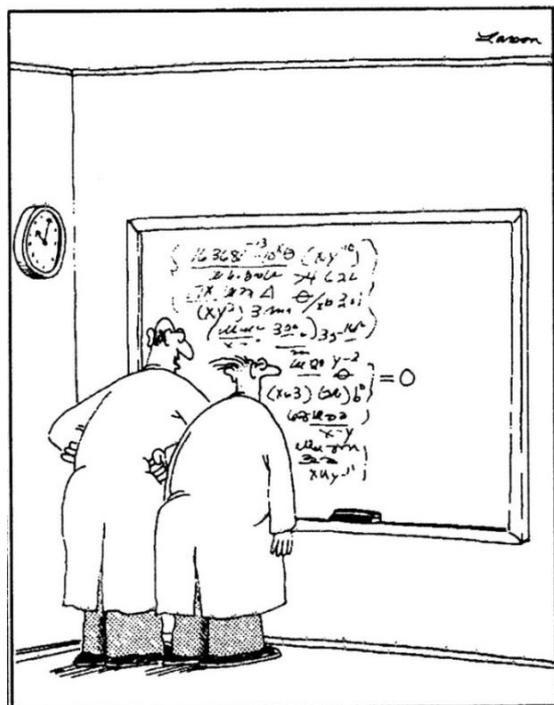
Первая известна как фрактальная модель Г. Веста – симбиоз теорий фракталов и пайп-модели (West et al., 1999), а вторая представлена двумя теориями: MST - метабологического масштабирования (West et al., 1997; Enquist, Niklas, 2002) и АРТ - адаптивного распределения масс (Poorter et al., 2015). Хотя АРТ-теория представляет собой модификацию (второе теоретическое приближение) её предшественницы - MST-теории, полученные нами результаты не подтвердили её теоретических предпосылок (Усольцев и др., 2015), и такой же вывод был получен при эмпирической апробации фрактальной модели Г. Веста (Zianis, Mencuccini, 2004; Усольцев и др., 2015) и MST-теории (Poorter et al., 2015). Таким образом, проверка названных трёх теорий на фактических материалах показала, что эмпирические модели обычно обеспечивают более устойчивые предсказания массы дерева и соотношения ее фракций по сравнению с теоретическими.

Поскольку исследуемые закономерности имеют стохастический характер, всегда имеется область отклонений от них, характеризующаяся доверительным интервалом. Как показал А.Н. Колмогоров (1933), корреляция измеряет лишь параллелизм в изменчивости признаков, источником которой может быть действие некоего третьего фактора, а применительно к такому сложному объекту, как лесная экосистема, таких «третьих» факторов может быть множество. Поскольку фрактальная модель, MST и АРТ-теории предполагают не «параллелизм изменчивости», а биологически обусловленные взаимосвязи, то при попытках снятия некоторых неопределённостей, связанных с названными теориями, может оказаться продуктивным исследование упомянутой выше области отклонений, как в пределах, так и за пределами доверительного интервала. Открыть «закономерную аномалию» - относительно просто, но гораздо сложнее найти ей объяснение. Именно отход от тривиальных процедур статистического анализа, исследование «аномалий», или тонких структур статистических распределений любых динамических процессов, позволил С.Э. Шнолю выйти на открытие вселенского уровня (Шноль, 1984, 2009). Изложенные неопределённости имеют общую природу, и на выходе их лежит дилемма: «закон» или «закономерность»?

Неопределённость несколько иной природы свойственна ещё одной проблеме, обозначенной в названии данной статьи и имеющей отношение к уравнениям фитомассы деревьев, а именно – к их гармонизации путём соблюдения принципа аддитивности, предполагающего, что суммарная фитомасса фракций, полученная по «фракционным» уравнениям, должна быть равна значению фитомассы, полученному по общему уравнению. Настоящее сообщение представляет попытку её аналитического обзора.

В нашей предыдущей работе (Усольцев и др., 2017a) было показано, что обеспечение аддитивности уравнений фитомассы требует статистического анализа и программного обеспечения, выходящих за пределы обычного метода наименьших квадратов, но часто не даёт более высоких показателей адекватности уравнений по сравнению с традиционным методом. В этой связи последовали вопросы: 1) какие преимущества дают аддитивные уравнения по сравнению с обычными (независимыми) в теоретическом и прикладном аспектах, 2) имеют ли они более весомый статистический смысл, нежели обеспечение лишь непротиворечивости оценок, и 3) даст ли использование аддитивных систем уравнений, рассчитанных на уровне дерева и древостоя, более корректные закономерности распределения фитомассы и ЧПП древостоя, а также фитомассы деревьев, по основным климатическим трансконтинентальным градиентам по сравнению с имеющимися закономерностями, полученными обычными методами с использованием традиционных уравнений? Этот перечень вопросов можно продолжить. Например, чем можно объяснить экспоненциальный рост числа публикаций по теме аддитивности уравнений фитомассы деревьев в мировой литературе в последние годы?

Прежде чем отвечать на подобные вопросы, необходимо ознакомить читателя с основными зарубежными научными достижениями по этой теме, полностью проигнорированной в русскоязычной литературе. Имеется в виду - дать предварительную информацию для биологов-нематематиков, не предполагая углубления в тонкости довольно сложных алгоритмов матричной алгебры. Автор, вторгаясь в эту неясную для российской лесной науки область, рискует быть непонятым лесоведами-биологами, с одной стороны, и скомпрометированным перед математиками, - с другой. [Замечу в скобках, что формат журнала «Эко-потенциал» позволяет иногда отступить от «звериной серьёзности» (термин Н.В. Тимофеева-Ресовского) нашей академической науки].



*«Мы математически описали предназначение Вселенной, и это, д-р Эллингтон, очевидный факт! Боже, как я люблю ощущать трепет научного открытия!».*

IAMG Newsletter. No. 66. June 2003

(<http://www.iamg.org/documents/Newsletters/NewslettersHSP/NL66-high%20res.pdf>).

В дальнейшем мы неизбежно столкнёмся в этом вопросе с давней проблемой взаимопонимания «теоретиков-математиков» и «эмпириков». Первые часто смотрят на вторых как на усидчивых трудяг, не понимающих, что прогресс в исследованиях требует перехода от накопления фактов к их теоретическому анализу. Вторые же часто смотрят на первых как на типов, сидящих в башне из слоновой кости и не понимающих, что экосистемы слишком сложны для адекватного моделирования, и своим жаргоном и высокоме-

рием не подпускающих простых смертных к пониманию их искусства показывать его ограничения (Smith, 1982).

Правда, бывают исключения из правила, внушающие некоторую надежду на успех заявленного предприятия. Известный во всём мире биолог и первый русский эколог Николай Владимирович Тимофеев-Ресовский полагал, что успех научной дисциплины зависит не от количества математики, а от строгости определения элементарных явлений в данной области (Новоженков, 2002). Современник учёного В.А. Ратнер (1993) вспоминает: «Сотрудничая и общаясь с самыми выдающимися физиками-теоретиками и математиками, имея учеников-математиков, он тем не менее математикой не владел и, по-моему, за всю жизнь не написал ни одной математической формулы. Он не скрывал этого и даже с некоторой бравадой говорил, что понимает математику только в присутствии самих математиков».

Проблема лишь в том, смогут ли наши нынешние лесоведы-нематематики «понять математику в присутствии самих математиков» настолько, чтобы в содружестве с ними ответить на выше поставленные вопросы. И главное – удастся ли перевести получаемый результат с языка алгебры на «человеческий» язык, легко позволяющий выявить абсурдность того или иного суждения, в противном случае есть риск скатиться в область, именуемую Дж. Джефферсом (1981) псевдонаукой.

### **Состояние проблемы аддитивности линейных уравнений в примерах**

В целях обеспечения принципа аддитивности при расчёте систем уравнений для оценки фитомассы деревьев предложено несколько методов их структурирования, которые подразделяются на три группы: линейные аддитивные, нелинейные аддитивные и нелинейные мультипликативные (Parresol, 1999).

Несоблюдение принципа аддитивности в таблицах фитомассы деревьев, составленных по соответствующим уравнениям, отмечалось уже в первых работах, посвященных оценке фитомассы деревьев по их легко измеряемым морфологическим (дендрометрическим) показателям (Young et al., 1964). Применяемый на первых порах обычный метод наименьших квадратов был предназначен для расчёта линейных уравнений. Поскольку его алгоритм намного проще по сравнению с техникой расчета нелинейных (по параметрам) моделей, первые попытки осуществить принцип аддитивности были предприняты именно на примерах линейных моделей. Дж. Куруш (Kurucz, 1969) и А. Козак (Kozak, 1970) сформулировали следующие условия выполнения принципа аддитивности линейных моделей:

- для каждого из компонентов (фракций фитомассы) и дерева в целом должна быть применена одна и та же структура модели;
- при трансформации зависимой переменной она должна быть выполнена в линейном масштабе;
- все уравнения должны рассчитываться по одному и тому же количеству наблюдений.

При этих условиях коэффициенты «фракционных» уравнений, рассчитанных для каждой фракции отдельно, путём последовательного суммирования дают в итоге значения соответствующих коэффициентов общего уравнения для массы всего дерева.

В линейных моделях фракции фитомассы специфицируются как линейная или квадратичная (параболы 1-го или 2-го порядков) функции диаметра ствола (Kurucz, 1969; Kozak, 1970; Chiyenda, Kozak, 1984; Cunia, Briggs, 1984, 1985) или как функция диаметра ствола, высоты дерева и длины живой кроны (Parresol, 1999).

Методы оценки подобных уравнений включают в себя простой метод наименьших квадратов (ordinary least squares - OLS) (Kozak, 1970; Cunia, Briggs, 1984), ограниченный метод наименьших квадратов (restricted least squares – RLS) (Chiyenda, Kozak,

1984) и взвешенный метод наименьших квадратов (ordinary weighted least squares – OWLS) (Cunia, Briggs, 1984, 1985; Parresol, 1999). Общая фитомасса деревьев на основе уравнений определяется: 1) с использованием одних и тех же независимых переменных для каждой фракции фитомассы, 2) с добавлением наиболее приемлемой регрессионной функции для той или иной фракции и 3) прямым расчётом регрессионных коэффициентов для общей фитомассы (Cunia, Briggs, 1985; Parresol, 1999).

Дж. Куруш (Kucuz, 1969) привёл пример расчета аддитивных уравнений линейной зависимости четырёх фракций массы кроны в фунтах (ветви крупные  $P_1$ , средние  $P_2$ , мелкие  $P_3$  и хвоя  $P_4$ ) и кроны в целом  $P_{общ}$  от площади сечения ствола на высоте груди в кв. футах ( $BA$ ) на примере 23 модельных деревьев дугласии (табл. 1). Очевидно, что как сумма значений свободных членов, так и сумма значений регрессионных коэффициентов, дают в итоге соответствующие значения названных констант для общего уравнения.

Таблица 1

Характеристика аддитивных уравнений для фитомассы крон дугласии

Фракция фитомассы	Уравнение	R <sup>2</sup>	SE* в фунтах
Ветви крупные	$P_1 = 103,7 + 129,65 BA$	0,260	866
Ветви средние	$P_2 = 29,1 + 17,66 BA$	0,314	103
Ветви мелкие	$P_3 = 39,6 + 19,32 BA$	0,272	125
Хвоя	$P_4 = 78,6 + 39,58 BA$	0,264	261
Вся крона	$P_{общ} = 251,1 + 206,22 BA$	0,268	1347

\*SE – стандартная ошибка уравнения.

А. Козаком (Kozak, 1970) дан пример расчёта аддитивных уравнений параболической зависимости трёх фракций фитомассы в фунтах (древесина ствола  $P_1$ , кора ствола  $P_2$  и крона  $P_3$ ) и в целом дерева  $P_{общ}$  от диаметра ствола на высоте груди в дюймах ( $D$ ) на примере 10 модельных деревьев туи гигантской (табл. 2). Согласно первому из трёх выше приведённых условий выполнения принципа аддитивности линейных моделей, в «фракционные» уравнения автор включает одни и те же независимые переменные, даже если некоторые из них оказываются статистически не значимыми. В противном случае при использованном алгоритме расчетов суммарное значение фитомассы, полученное по «фракционным» уравнениям, будет отличаться от её значения, полученного по общему уравнению.

Таблица 2

Характеристика аддитивных уравнений для фитомассы деревьев туи гигантской при постоянном числе переменных во всех уравнениях (Kozak, 1970)

Фракция фитомассы	Уравнение	R <sup>2</sup>
Древесина ствола	$P_1 = 287,42 - 105,49 D + 13,439 D^2$	0,992
Кора ствола	$P_2 = -3,19 + 1,36 D + 0,410 D^2$	0,996
Крона	$P_3 = -31,20 + 7,01 D + 1,148 D^2$	0,960
Всё дерево	$P_{общ} = 253,03 - 97,12 D + 14,997 D^2$	0,995

В этом случае также видим, что константы общего уравнения равны алгебраической сумме соответствующих констант «фракционных» уравнений. Показатели адекватности (коэффициент детерминации и стандартная ошибка) общего уравнения рассчитываются по специальным формулам на основе полученных характеристик «фракционных» уравнений. Взаимная корреляция фракций фитомассы при этом не учитывалась.

В ходе дальнейшего развития и генерализации теории аддитивности рассмотрен случай, когда в «фракционных» уравнениях представлены различные независимые переменные, но при этом каждая независимая переменная общего уравнения должна присутствовать хотя бы в одном из «фракционных» уравнений согласно так называемому «принципу обусловленности», или «ограничительному принципу» (conditioning principle, or restriction principle) (Chiyenda, Kozak, 1984). В матричной форме представлены алгоритмы расчета системы, включающей «фракционные» и общее уравнения, в двух вариантах: 1) когда число независимых переменных в «фракционных» и общем уравнениях одно и то же (OLS- метод) и 2) когда число независимых переменных хотя бы в одном из «фракционных» уравнений меньше, чем в общем уравнении, вследствие, например, статистической незначимости одной или нескольких переменных (RLS- метод).

Результаты расчёта уравнений по первому варианту представлены в табл. 2, а по второму – в табл. 3, из которых следует, что показатели адекватности уравнений, рассчитанных по двум вариантам, довольно близки, что наглядно подтверждается графиком распределения остатков (рис. 1). Правда, есть некоторая потеря адекватности при оценке общей фитомассы дерева по второму варианту ( $0,987 < 0,995$ ). Взаимная корреляция показателей фитомассы различных фракций дерева не учитывалась и в этом случае.

Таблица 3

Характеристика аддитивных уравнений для фитомассы деревьев туи гигантской, когда число независимых переменных в некоторых «фракционных» уравнениях меньше, чем в общем уравнении (Kozak, 1970; Chiyenda, Kozak, 1984).

Фракция фитомассы	Уравнение	R <sup>2</sup>
Древесина ствола	$P_1 = 287,42 - 105,49 D + 13,439 D^2$	0,992
Кора ствола	$P_2 = 1,87 + 0,492 D^2$	0,996
Крона	$P_3 = -5,02 + 1,572 D^2$	0,959
Всё дерево	$P_{\text{общ}} = 253,03 - 97,12 D + 14,997 D^2$	0,987

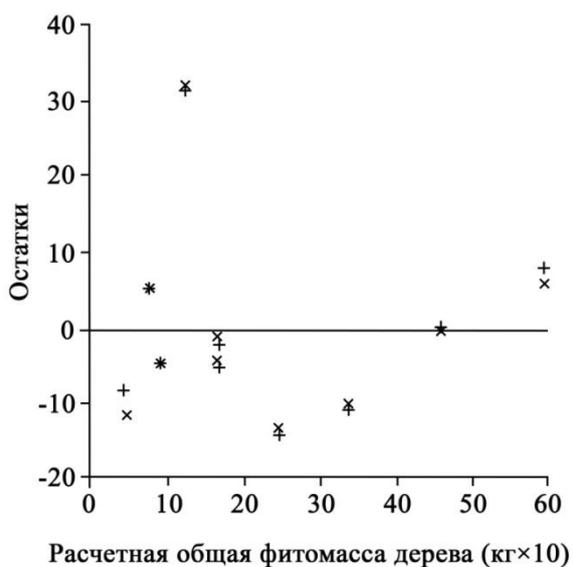


Рис. 1. Распределение остатков уравнений, рассчитанных по первому (+) и второму (x) вариантам в метрических единицах (Chiyenda, Kozak, 1984).

Показано, что первый вариант является частным случаем второго, «генерализованного, или обобщённого» варианта расчёта. В обоих вариантах не только параметры общего уравнения определяются параметрами «фракционных» уравнений, но и проблема тестирования различных гипотез и построения доверительных интервалов решается посредством использования результатов, полученных по «фракционным» уравнениям, минуя непосредственный расчёт параметров общего уравнения по фактическим данным. Тем самым, обеспечение принципа аддитивности не ограничивается случаем, когда все независимые переменные общего уравнения включены в каждое из «фракционных» уравнений,

тем самым, обеспечение принципа аддитивности не ограничивается случаем, когда все независимые переменные общего уравнения включены в каждое из «фракционных» уравнений,

а применяя «принцип обусловленности», или «ограничительный принцип», можно иметь любое количество аддитивных «фракционных» уравнений, при этом число независимых переменных в «фракционных» уравнениях может быть меньше или равным их числу в общем уравнении (Chiyenda, Kozak, 1984).

Поскольку однородность дисперсии остатков представлена редкими случаями, Т. Куниа и Р. Бригс (Cunia, Briggs, 1984) применили взвешенный метод наименьших квадратов (OWLS-метод) и показали аддитивность «фракционных» линейных уравнений на примере 29 модельных деревьев клёна сахарного. Структура параболического уравнения аналогична принятой А. Козаком (Kozak, 1970) (см. табл. 2):

$$P_i = b_1 + b_2 D + b_3 D^2, \quad (1)$$

где  $P_i$  – масса  $i$ -й фракции дерева (листва, ветви, древесина ствола и кора ствола, соответственно  $P_1, P_2, P_3, P_4$ ). Уравнения рассчитываются по фракциям как обычным (неаддитивным, изолированным, независимым) способом, так и аддитивным. При этом проанализированы три варианта.

Вариант 1. Рассчитываются коэффициенты «фракционных» уравнений (1) и определяются по их сумме коэффициенты общего уравнения, но в «фракционные» уравнения включаются лишь статистически значимые переменные.

Вариант 2. То же, но в «фракционные» уравнения (1) и в общее включаются одни и те же независимые переменные (и один и тот же вид функции веса), без исключения статистически не значимых переменных. Метод аналогичен предложенному выше (Chiyenda, Kozak, 1984) на основе обычного (OLS) метода наименьших квадратов, но, в отличие от их подхода, в данном варианте применён взвешенный метод наименьших квадратов (OWLS- метод).

Вариант 3. Рассчитываются «фракционные» и общее регрессионные уравнения, при этом: 1) каждая регрессия включает собственные независимые переменные, 2) в каждой регрессии используется собственная функция весов; 3) аддитивность обеспечивается наложением ограничений на подбор регрессионных коэффициентов. В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$P_i = b_1 X_{i1} + b_2 X_{i2} + b_3 X_{i3}, \quad (2)$$

в него включены фиктивные переменные (см.: Усольцев и др., 2017б) по схеме

$$\begin{aligned} X_{i1} &= 1 \text{ (для } i\text{-й фракции дерева) и } 0 \text{ – для остальных фракций;} \\ X_{i2} &= D \text{ (для } i\text{-й фракции дерева) и } 0 \text{ – для остальных фракций;} \\ X_{i3} &= D^2 \text{ (для } i\text{-й фракции дерева) и } 0 \text{ – для остальных фракций;} \end{aligned}$$

и в матричной форме оно имеет вид

$$P_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^5 \beta_{ij} X_i, \quad (3)$$

При некоторых условиях вариант 3 представляет собой расширенную версию вариантов 1 и 2, и показатели адекватности трёх вариантов аддитивных уравнений близки между собой (по крайней мере, для данного исходного материала), но несколько различаются по точности и условиям применимости. Оказалось, что показатели адекватности, оцененные по сумме квадратичных остатков, в независимых (неаддитивных, изолированных) уравнениях несколько выше, чем в аддитивных уравнениях, рассчи-

танных по варианту 3, однако проверка по критерию Фишера показала, что это различие статистически не значимо. Авторы полагают, что если в таблицах фитомассы, составляемых на основе регрессионных уравнений, аддитивность фракций не предусматривается, то можно использовать неаддитивные (независимые) уравнения.

Рассмотренные три варианта расчета аддитивных уравнений могут дать один и тот же результат при следующих условиях:

- если для каждой фракции приемлемый результат даёт линейная регрессия одной и той же структуры;
- если все регрессионные коэффициенты для всех фракций (включая общую фитомассу) достоверно отличаются от нуля;
- во всех регрессионных уравнениях применена одна и та же функция веса;
- для каждого дерева имеются фактические данные всех фракций без исключения.

Если эти условия не выполняются, то предстоит выбор одного из трёх вариантов. Например, если для одной или нескольких фракций лучший результат даёт нелинейная (аллометрическая) функция, то применение варианта 1 исключается. Если некоторые регрессионные коэффициенты статистически не значимы или некоторые фракции фитомассы имеют разные функции веса, то рекомендуется вариант 3, но при условии, что фракции фитомассы взаимно не коррелированы. Если же они коррелированы (что обычно имеет место), то изложенные выводы становятся сомнительными.

Как было показано Б. Парресолом (Parresol, 1999, 2001), система аддитивных уравнений, рассчитанных с учётом внутренней корреляции между фракциями фитомассы, кроме логической обоснованности, имеет повышенную статистическую эффективность. Несмотря на эти достоинства, подобный подход игнорируется при разработке многочисленных уравнений фитомассы, возможно, вследствие того, что он требует статистического анализа и программного обеспечения, выходящих за пределы обычного метода наименьших квадратов. Сегодня в 80% публикаций вместо аддитивных фигурируют независимые системы аллометрических уравнений (Sanquetta et al., 2015).

Для решения неопределённости с мультиколлинеарностью Т. Куниа и Р. Бригс в другой своей работе (Cunia, Briggs, 1985) предложили обобщённый (генерализованный) метод наименьших квадратов (GLS-метод), или (что то же самое) метод псевдонесвязанных (внешне не связанных) регрессий (seemingly unrelated regressions - SUR) (Gallant, 1975; Srivastava, Giles, 1987; Borders, 1989; Fiebig, 2001; Магнус и др., 2004; Baltagi, Pirote, 2010; Fu et al., 2017) при перекрёстной оценке параметров уравнений (Parresol, 1999).

Типичная система псевдонесвязанных регрессий имеет вид (Усольцев, 1997):

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= b_{10} + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + e_1; & e_1 &\sim N(0, \sigma_1^2) \\ Y_2 &= b_{20} + b_{21}x_3 + b_{22}x_4 + e_2; & e_2 &\sim N(0, \sigma_2^2) \\ Y_3 &= b_{30} + b_{31}x_5 + b_{32}x_6 + e_3; & e_3 &\sim N(0, \sigma_3^2) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Первый индекс при параметре указывает номер уравнения системы, в которое он входит, а второй индекс соответствует переменной, к которой он относится. Очевидно, что между уравнениями отсутствуют аналитические взаимосвязи. Если  $cov(e_i, e_j) = 0$  для всех пар  $i$  и  $j$ , тогда никаких взаимосвязей нет. Однако, если одни составляющие ошибки коррелированы с другими [т.е. некоторая  $cov(e_i, e_j) \neq 0$ ], тогда уравнения связаны (Borders, 1989). При наличии таких межрегрессионных корреляций оценка параметров возможна по трёхшаговой процедуре подгонки, разработанной А. Цельнером (Zellner, 1962) и проанализированной Д. Ридом (Reed, 1987).

Авторами (Cunia, Briggs, 1985) поставлены задачи: 1) описать алгоритм, по которому GLS-метод может быть применён для обеспечения аддитивности уравнений и

таблиц; 2) использовать данные тех же модельных деревьев, что и в предыдущей работе (Cunia, Briggs, 1984); 3) сравнить результаты, полученные на основе обычного метода наименьших квадратов (OLS-метод), с результатами, полученными GLS-методом. Процедура осуществляется в последовательности: 1) определение ковариационной матрицы фактических наблюдений из выборочных данных, 2) объединение индивидуальных регрессий для разных фракций фитомассы в GLS-формате, которое включает в неявном виде каждую индивидуальную регрессию и ожидаемую взаимосвязь между ними, 3) расчёт GLS-определителей по расчётной процедуре, исключающей необходимость сохранения и обращения большой ковариационной матрицы фактических данных и 4) построение аддитивных таблиц фитомассы деревьев и соответствующих доверительных и прогностических пределов на основе GLS-регрессий.

Сравнительная характеристика результатов, полученных на основе взвешенного метода наименьших квадратов (OWLS-метод) (Cunia, Briggs, 1984), с результатами, полученными GLS-методом (Cunia, Briggs, 1985), приведенная в табл. 4, показывает, что оценки регрессионных коэффициентов, полученные по двум методам, довольно близки. Несмотря на близкие значения характеристик моделей, их доверительные и прогностические пределы оказываются различными. Авторы заключают также, что, во-первых, GLS-метод обеспечивает результаты, которые имеют значение, даже если бывает трудно дать интуитивный смысл его различным статистикам. Во-вторых, вследствие получаемых сопоставимых результатов неважно, какая расчетная процедура применена; её выбор представляет пример субъективного решения. Они предпочитают при составлении таблиц использовать GLS-метод, поскольку полагают, что GLS-модель наиболее близка к реальности.

Таблица 4

Сравнительная характеристика параметров аддитивных уравнений для фитомассы деревьев туи гигантской, когда число независимых переменных в некоторых «фракционных» уравнениях меньше, чем в общем уравнении, полученная по двум методам (Cunia, Briggs, 1984, 1985).

Фракция фитомассы	Метод	Уравнение
Листва	OWLS	$P_1 = -0,2562 + 0,00997 D^2$
	GLS	$P_1 = -0,2562 + 0,0099714 D^2$
Ветви	OWLS	$P_2 = 52,9988 - 5,804706 D + 0,25437795 D^2$
	GLS	$P_2 = 46,7409 - 4,97840 D + 0,23503040 D^2$
Древесина ствола	OWLS	$P_3 = -37,4857 + 0,5313073 D^2$
	GLS	$P_3 = -37,4857 + 0,5313073 D^2$
Кора ствола	OWLS	$P_4 = -3,7180 + 0,0550706 D^2$
	GLS	$P_4 = -3,7179 + 0,0550706 D^2$
Всё дерево	OWLS	$P_{общ} = 11,5390 - 5,804706 D + 0,85072725 D^2$
	GLS	$P_{общ} = 5,2811 - 4,97840 D + 0,8313797 D^2$

Нужно иметь в виду, что эти выводы получены на ограниченном количестве фактических данных (29 модельных деревьев), и для окончательного вывода о преимуществе GLS (SUR) по отношению к OWLS-методу необходим более обширный эмпирический материал (Cunia, Briggs, 1985).

Таким образом, за период с 1969-70 по 1985 гг. методы обеспечения аддитивности линейных уравнений фитомассы совершенствовались в направлении повышения статистической корректности и соответственно – сложности расчётных алгоритмов, последовательно пройдя стадии оценки уравнений методами OLS, OWLS и GLS (SUR). Однако убедительных доказательств повышения состоятельности (устойчиво-

сти, корректности) аддитивных моделей по сравнению с неаддитивными, а также по мере совершенствования и усложнения алгоритмов оценки аддитивных линейных уравнений, не предоставлено.

### Состояние проблемы аддитивности аллометрических нелинейных уравнений в примерах

В случае нелинейных регрессий обычно применяются степенные (аллометрические) зависимости фитомассы от диаметра ствола, высоты дерева и их сочетаний (Reed, Green, 1985; Vi et al., 2001; Parresol, 2001). В отличие от работ, в которых применены методические процедуры расчета аддитивных (по фитомассе фракций) линейных моделей (Chiyenda, Kozak, 1984; Cunia, Briggs, 1984), Д. Рид и Э. Грин (Reed, Green, 1985) применили процедуру, обеспечивающую аддитивность в случае нелинейных моделей. При этом в их методике, как и в более ранних работах, *не предусмотрена коррекция уравнений на внутреннюю корреляцию между фракциями фитомассы*.

Метод представляет некоторую модификацию подходов, использованных при одновременной оценке компатибельных прогностических уравнений для запаса стволов и прироста площади сечений (Burkhart, Sprinz, 1984), а также при одновременной оценке коэффициентов уравнений для сбег и объёма ствола деревьев (Reed, Green, 1984; Knoebel et al., 1986; Candy, 1989). Общая процедура оценки коэффициентов в аналитически связанных уравнениях включает в себя минимизацию суммы стандартизированных сумм квадратических ошибок от каждого из «фракционных» уравнений, или функции потерь (5):

$$L = \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^{n_j} \frac{(Y_{ij} - \hat{Y}_{ij})^2}{\hat{\sigma}_j^2} \right], \quad (5)$$

где  $Y_{ij}$  и  $\hat{Y}_{ij}$  -  $i$ -е фактическое (эмпирическое) и расчётное значения  $j$ -го компонента соответственно;  $\hat{\sigma}_j^2$  - предопределённая оценка условной дисперсии, связанной с  $j$ -м «фракционным» уравнением;  $n_j$  – количество наблюдений, включённых в расчёт  $j$ -го «фракционного» уравнения (если количество  $n_j$  не одно и то же для всех  $j$ , рекомендуется их взвешивать по суммам квадратической ошибки);  $m$  – количество «фракционных» уравнений в системе (Reed, Green, 1985).

Связь фракций фитомассы и общей фитомассы дерева с диаметром на высоте груди представлена простой аллометрической (степенной) функцией

$$\hat{Y}_{ij} = b_{0j} D_i^{b_{1j}} \quad (6)$$

где  $\hat{Y}_{ij}$  – расчётное значение фитомассы  $j$ -й фракции  $i$ -го дерева;  $D_i$  – диаметр на высоте груди  $i$ -го дерева;  $b_{0j}$  и  $b_{1j}$  – оцениваемые коэффициенты ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), представляющие соответственно фракции фитомассы хвои, ветвей, древесины ствола и коры. Общая фитомасса дерева описывается уравнением

$$\hat{Y}_{i5} = b_{01} D_i^{b_{11}} + b_{02} D_i^{b_{12}} + b_{03} D_i^{b_{13}} + b_{04} D_i^{b_{14}} \quad (7)$$

Функция потерь, подлежащая минимизированию для данной системы уравнений, представлена выражением

$$L = \frac{\sum(Y_{i1} - b_{01}D_i^{b_{11}})^2}{\hat{\sigma}_1^2} + \frac{\sum(Y_{i2} - b_{02}D_i^{b_{12}})^2}{\hat{\sigma}_2^2} + \frac{\sum(Y_{i3} - b_{03}D_i^{b_{13}})^2}{\hat{\sigma}_3^2} +$$

$$+ \frac{\sum(Y_{i4} - b_{04}D_i^{b_{14}})^2}{\hat{\sigma}_4^2} + \frac{\sum(Y_{i5} - b_{01}D_i^{b_{11}} - b_{02}D_i^{b_{12}} - b_{03}D_i^{b_{13}} - b_{04}D_i^{b_{14}})^2}{\hat{\sigma}_5^2} \quad (8)$$

где  $Y_{ij}$  – фактическое значение фитомассы  $j$ -й фракции  $i$ -го дерева ( $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ), представляющие соответственно фракции фитомассы хвои, ветвей, древесины ствола, коры ствола и общую фитомассу;  $\hat{\sigma}_j^2$  – условная расчётная дисперсия  $j$ -го «фракционно-го» уравнения (Reed, Green, 1985).

Коэффициенты уравнений для четырёх фракций и общей фитомассы, а также коэффициенты детерминации и общая квадратическая ошибка системы уравнений, рассчитаны по трём вариантам: (1) – обычный нелинейный метод наименьших квадратов для фракций и общей фитомассы; (2) – аддитивная система уравнений, когда значения фитомассы каждой фракции, оцененные по нелинейному методу наименьших квадратов, суммируются для получения общей фитомассы и (3) – аддитивная система уравнений, полученная по процедуре одновременной оценки коэффициентов. Различия оценок, полученных по трём разным вариантам, оказались несущественными. Авторы заключают, что обеспечение аддитивности уравнений фитомассы не обязательно означает повышение точности их оценок (Reed, Green, 1985).

Б.Р. Парресол (Parresol, 2001) на примере 40 деревьев сосны Эллиота выполнил сравнение адекватности нелинейных уравнений для фракций фитомассы, коэффициенты которых оценены итерационным методом с учётом внутренней корреляции между фракциями. Поскольку обычно уравнения фитомассы характеризуются неоднородностью дисперсии остатков, система уравнений, показанная в табл. 5 (где  $H$  – высота дерева, м), на первом этапе рассчитана как обычным (OLS), так и взвешенным (OWLS) методом, при котором вводится дополнительная функция ошибки. Установлено, что процедура взвешивания снижает стандартную ошибку пяти коэффициентов регрессии из семи ( $b_{11} \dots b_{33}$ ) и соответственно увеличивает коэффициент детерминации, особенно в уравнениях для массы коры и кроны дерева (см. табл. 5).

Выявив преимущество алгоритма с учетом процедуры взвешивания, Б.Р. Парресол (Parresol, 2001) далее сравнивает результаты оценки уравнений табл. 5, рассчитанных методом нелинейных псевдонесвязанных регрессий (nonlinear seemingly unrelated regressions - NSUR), аддитивных по фракционному составу, двумя способами: в первом случае неоднородность дисперсии остатков устраняется путём процедуры взвешивания, а во втором – путём линеаризации уравнений логарифмированием переменных. Расчёт сопровождается оценкой стандартной ошибки параметров модели, а также доверительных интервалов. Результаты сравнения приведены в табл. 6 и 7.

Судя по величине стандартных ошибок параметров, более корректной является модель, рассчитанная методом NSUR. Однако при малом объёме выборки и несущественной внутренней корреляции между фракциями фитомассы может быть предпочтительнее логарифмическая линеаризация. Поскольку при моделировании фитомассы деревьев разных пород Б.Р. Парресол (Parresol, 2001) практически не встречался с отсутствием мультиколлинеарности фракций, он настоятельно рекомендует использовать метод псевдонесвязанных регрессий, как в линейных, так и нелинейных моделях.

Таблица 5

Значения  $R^2$  нелинейных уравнений для фитомассы деревьев сосны Эллиота, рассчитанных обычным и взвешенным методом

Фракция фитомассы	Структура уравнения	$R^2$
Обычный метод		
Древесина ствола	$P_1 = b_{11}(D^2H)^{b_{12}}$	0,984
Кора ствола	$P_2 = b_{21}D^{b_{22}}$	0,962
Крона	$P_3 = b_{31}D^{b_{32}}H^{b_{33}}$	0,917
Всё дерево	$P_{\text{общ}} = b_{11}(D^2H)^{b_{12}} + b_{21}D^{b_{22}} + b_{31}D^{b_{32}}H^{b_{33}}$	-
Взвешенный метод		
Древесина ствола	$P_1 = b_{11}(D^2H)^{b_{12}}$	0,989
Кора ствола	$P_2 = b_{21}D^{b_{22}}$	0,976
Крона	$P_3 = b_{31}D^{b_{32}}H^{b_{33}}$	0,927
Всё дерево	$P_{\text{общ}} = b_{11}(D^2H)^{b_{12}} + b_{21}D^{b_{22}} + b_{31}D^{b_{32}}H^{b_{33}}$	-

Таблица 6

Коэффициенты и стандартные ошибки уравнений фитомассы деревьев, рассчитанных методом NSUR

Регрессионный коэффициент*	Способ взвешивания	Логарифмическая трансформация
$b_{11}$	0,016245±0,00175	0,016530±0,00170
$b_{12}$	1,0590±0,0124	1,0568±0,0121
$b_{21}$	0,046040±0,00530	0,046206±0,00559
$b_{22}$	2,2112±0,0397	2,2011±0,0423
$b_{31}$	0,014015±0,00436	0,035861±0,0143
$b_{32}$	3,5098±0,147	3,8704±0,135
$b_{33}$	-0,87190±0,193	-1,5717±0,216

\*Идентификацию регрессионных коэффициентов в моделях см. в табл. 5.

Таблица 7

Результаты оценки параметров уравнений фитомассы деревьев сосны Эллиота методом NSUR

Фракция фитомассы	Способ взвешивания		Логарифмическая трансформация	
	FI*	RMSE**	FI	RMSE
Древесина ствола	0,984	27,1	0,984	27,1
Кора ствола	0,961	5,0	0,961	5,1
Крона	0,909	13,0	0,879	15,0
Всё дерево	0,988	31,2	0,986	33,9

\*FI – индекс аппроксимации в масштабе исходных данных (то же, что  $R^2$ ).

\*\*RMSE – среднеквадратическая ошибка в масштабе исходных данных.

Х.П. Карвало (Carvalho, 2003; Carvalho, Parresol, 2003) проанализировал нелинейные аддитивные зависимости массы ствола и кроны той же структурной формы, что в табл. 5, на примере более обширного эмпирического материала -166 деревьев дуба пиренейского, взятых на 83 пробных площадях. Аллометрические модели линеаризованы путём логарифмирования с поправкой на смещение, предложенной Г. Баскервилем (Baskerville, 1972). В модель для массы кроны наряду с видовым цилиндром ( $D^2H$ ) включена в качестве независимой переменной длина живой кроны  $LCL$ , по аналогии с Б.Р. Парресолом (Parresol, 2001), объясняющая изменчивость массы последней у равно-

великих стволов вследствие варьирования возраста, ценотического положения в пологе и т.п. Ширина кроны  $CW$ , введённая в качестве ещё одной переменной, показала меньшую значимость по сравнению с её длиной при высоком коэффициенте корреляции между ними (0,78), и была исключена из структуры модели. Сравнение корректности и устойчивости аддитивных моделей фитомассы, рассчитанных методом NSUR и взвешенным методом наименьших квадратов OWLS, показало преимущества первого из них (Carvalho, 2003; Carvalho, Parresol, 2003). Необходимо отметить, что модели фитомассы с использованием  $D$ ,  $H$  и  $LCL$  в качестве независимых переменных могут быть не востребованы при оценке фитомассы древостоев, поскольку длина кроны  $CW$  при таксации древостоев обычно не измеряется (Ruiz-Peinado et al., 2012).

Х. Бай с соавторами (Bi et al., 2004) при расчете аддитивных уравнений использовали данные 300 модельных деревьев 15 австралийских видов эвкалипта. Для идентификации каждого вида они включили в уравнения фиктивные переменные по аналогии с упомянутыми выше Т. Куниа и Р. Бригсом (Cunia, Briggs, 1984) с тем отличием, что последние идентифицировали не древесные виды, а фракции фитомассы. При подборе «лучшей» функции для каждой фракции фитомассы оказалось, что видовой цилиндр  $D^2H$  даёт устойчивые оценки для массы древесины и коры ствола, но для ветвей и листвы - худшие по сравнению с независимой переменной, выраженной одним только диаметром ствола  $D$  (Bi et al., 2004). Тем самым, ещё раз подтвердился наш вывод (Усольцев, 1985, 1988), что применение видového цилиндра для оценки массы кроны нежелательно, поскольку при одном и том же диаметре зависимость её от высоты отрицательная, а не положительная, как это имеет место в структуре видového цилиндра. В отечественных разработках этот факт подтверждается, однако предпочтение отдаётся видovому цилиндру, «руководствуясь его преимущественным использованием при определении запасов фитомассы, а следовательно, и удобством при сравнении результатов разных авторов» (Уткин и др., 1996. С. 42).

На этом фоне совершенно неожиданный результат получен К. Жангом с соавторами (Zhang et al., 2016) по данным 80 деревьев тополёвых плантаций с диаметром ствола от 2 до 39 см: при оценке массы листвы и ветвей в первом случае по  $D$ , а во втором по  $D$ ,  $H$  и  $CW$  (без видového цилиндра  $D^2H$ ), лучшие показатели адекватности получены в первом из них.

Поскольку на каждый вид в среднем приходилось около 20 модельных деревьев, применение метода оценки с использованием функции ошибки, казалось бы, является некорректным: для малых выборок он даёт менее устойчивые оценки с точки зрения статистической теории (Zellner, 1962). Однако благодаря идентификации древесных видов фиктивными переменными оценка функции остаточной дисперсии стала «коллективной», гармонизированной. В результате аддитивные уравнения для древесины ствола, коры, ветвей и листвы, рассчитанные методом NSUR с учётом внутренней корреляции фракций фитомассы, показали более высокие характеристики адекватности по сравнению с линеаризованными аллометрическими моделями, рассчитанными методом OWLS, т.е. получил подтверждение выше показанный Х.П. Карвало результат.

Позднее Х. Бай с соавторами (Bi et al., 2015) по аналогичной методике с некоторыми модификациями дополнили выше приведённые результаты для эвкалиптов умеренной зоны Австралии аддитивными моделями, рассчитанными по данным 245 деревьев 11 видов эвкалипта, полученных в редкостойных древостоях южной части Австралии. В отличие от предыдущего исследования, виды эвкалипта не идентифицировались в аддитивных системах уравнений фиктивными переменными, а рассчитывались для каждого вида отдельно.

Р. Даряи и Х. Сораби (Daryaei, Sohrabi, 2015) для расчета аддитивных уравнений фитомассы (ствол, ветви, листва, надземная часть) 108 деревьев, по 10-12 для каждой из девяти листопадных пород в лесах умеренной зоны Ирана, применили процедуру

NSUR с теми отличиями, что толщина ствола на высоте груди не превышала 8 см, модели предполагались обезличенными по породному составу, но с косвенным учётом породного разнообразия по плотности древесины  $\rho$ , а в итоговую аддитивную систему уравнений (рассчитанных одновременно, с ограничением оценок параметров) включались «фракционные» уравнения, показавшие лучшие характеристики адекватности в каждой из четырёх структур аллометрических уравнений:

$$P_i = f(D); \quad (9)$$

$$P_i = f(D, H); \quad (10)$$

$$P_i = f(D, \rho); \quad (11)$$

$$P_i = f(D, H, \rho). \quad (12)$$

В итоговую аддитивную систему вошли уравнения: (9) – для массы листвы и (12) – для массы ствола и ветвей. Учёт плотности древесины ствола и ветвей, как видо-специфичной характеристики, не повысил адекватности уравнений.

Необходимо отметить, что разработка моделей и таблиц фитомассы, отдельных для мелких (Singh et al., 2011; Chaturvedi, Raghubanshi, 2013) и крупных (Ter-Mikaelian, Korzukhin, 1997) деревьев, не всегда правомерно. Понятно, что причина подобной тенденции заключается в том, что у мелких деревьев вследствие сдвига диаметра  $D$  вверх по стволу аллометрия нарушается. Однако, как было установлено (Усольцев и др., 2017г), введение в линеаризованную аллометрическую модель синергизма ( $\ln D \times \ln H$ ) снимает это ограничение, и аллометрическое соотношение сохраняется без какой-либо корреляции остатков при  $D > 0,2-0,6$  см и  $H > 1,3$  м.

Процедуру расчёта аддитивных уравнений на основе NSUR, аналогичную применённой Р. Даряи и Х. Сораби (Daryaei, Sohrabi, 2015), показали болгарские исследователи (Stankova et al., 2016) на примере 44 деревьев гибридных тополей в возрасте от 1 до 6 лет, масса которых подразделялась лишь на ствол и ветви. Из 22 сочетаний  $D$  и  $H$ , а также средней высоты совокупностей деревьев, методом перебора выявлялась лучшая структура модели для каждой из двух фракций, и затем эти лучшие объединялись в аддитивную систему с перекрёстной межрегрессионной оценкой параметров (Parguesol, 1999). Аналогичную 2-этапную процедуру с отбором «лучшей» для каждой фракции модели реализовали К.Р. Санкуетта с соавторами (Sanquetta et al., 2015).

Л. Донг с соавторами (Dong et al., 2015a) использовали данные о фитомассе 472 деревьев девяти древесных пород северо-восточного Китая по фракциям: листва, ветви, крона, надземная часть, корни и общая фитомасса. Анализировались две структуры аддитивных аллометрических уравнений связи: (1) – только с диаметром ствола  $D$  и (2) с диаметром ствола  $D$  и с высотой дерева  $H$ . В отличие от предыдущих авторов (Bi et al., 2004), фиктивные переменные для идентификации древесных пород не использовались, и каждая порода анализировалась отдельно. Оценка параметров моделей (1) и (2) выполнялась как методом нелинейной регрессии в исходных единицах (nonlinear regression on the untransformed data - NLR), так и методом OLS с логарифмированием исходных единиц. Для обеспечения аддитивности всех уравнений в последнем случае использовалась процедура псевдонесвязанных регрессий (SUR). Модель (2) показала преимущество по показателям адекватности по отношению к модели (1) для всех пород. При этом введение поправки на логарифмирование не улучшило результата оценки. Поскольку выбор между методами NLR, с одной стороны, и OLS с логарифмированием, с другой, зависит от распределения ошибок модели, для их сравнения выполнен анализ «правдоподобия» (likelyhood analysis) и установлено, что структура мультипликативной ошибки (при лог-трансформировании) предпочтительнее структуры аддитивной ошибки. Подобное заключение при сравнении моделей (1) и (2) для трёх хвойных видов северо-восточного Китая Л. Донг с соавторами сделали в другом сообщении (Dong et al., 2016).

Таким образом, «фракционные» уравнения используются для оценки фитомассы фракций дерева и суммируются для получения оценки общей фитомассы. В процессе подбора регрессионных коэффициентов при перекрёстной оценке аддитивных уравнений для промежуточных (subtotal) фракций, например, надземной фитомассы (как суммы масс кроны и ствола) или массы кроны (как суммы масс листвы и ветвей), соответствующие ограничения не накладываются. Однако в случаях, когда желательна оценка фитомассы промежуточных фракций, Б. Парресол (Pargresol, 2001) предложил вводить дополнительные ограничения на подбор регрессионных коэффициентов для обеспечения аддитивности уравнений для массы фракций (например, листвы и ветвей) и промежуточной фракции (например, массы кроны) и при этом обеспечить их аддитивность с уравнением общей фитомассы, но без расчёта отдельных (специальных) уравнений для промежуточных фракций и общей фитомассы дерева. Структура агрегированной системы аддитивных уравнений показана в табл. 8. Подобную процедуру с введением двух промежуточных фракций (ствола и кроны) для трёх хвойных видов северо-восточного Китая Л. Донг с соавторами применили в другой своей работе (Dong et al., 2016).

Таблица 8

Структура аддитивных уравнений как для общей фитомассы, так и её промежуточной фракции - кроны дерева (Pargresol, 2001)

Фракция фитомассы	Структура уравнения*
Древесина ствола	$P_1 = b_{11}(D^2H)^{b_{12}}$
Кора ствола	$P_2 = b_{21}D^{b_{22}}$
Листва	$P_3 = b_{31}D^{b_{32}}H^{b_{33}}$
Ветви	$P_4 = b_{41}(D \times LCL)^{b_{42}}$
Крона	$P_5 = b_{31}D^{b_{32}}H^{b_{33}} + b_{41}(D \times LCL)^{b_{42}}$
Всё дерево	$P_{\text{общ}} = b_{11}(D^2H)^{b_{12}} + b_{21}D^{b_{22}} + b_{31}D^{b_{32}}H^{b_{33}} + b_{41}(D \times LCL)^{b_{42}}$

\*LCL - протяжённость живой кроны дерева.

С. Танг с соавторами (Tang et al., 2000) предложили структуру «дисагрегированной» (расчлняемой) аддитивной модели (disaggregation model), согласно которой оцененная надземная фитомасса расчлняется на фракции (древесина, кора, ветви, листва) в соответствии с их долями в надземной фитомассе (одношаговая система пропорционального взвешивания). Если желательны оценки промежуточных фракций фитомассы, оцененная надземная фитомасса расчлняется на промежуточные фракции (например, ствол и крону) в соответствии с их долями в надземной фитомассе. Далее оцененная фитомасса ствола расчлняется на древесину и кору в соответствии с их долями в массе ствола, а оцененная фитомасса кроны расчлняется на ветви и листву в соответствии с их долями в массе кроны (двухшаговая система пропорционального взвешивания).

Для сопряженной оценки коэффициентов уравнений для исходных и промежуточных фракций применён TSEM-метод, обеспечивающий пошаговую аддитивность надземной фитомассы, промежуточных фракций и, наконец, исходных фракций (Tang et al., 2000). Метод TSEM (Two-Stage nonlinear Error-in-variable Models) предполагает, что в системе одновременных нелинейных моделей зависимые переменные ( $P_i$ ) подвержены случайным ошибкам, тогда как независимые переменные измерены без ошибок. Подобный подход был развит на примере 150 деревьев сосны Массона естественного и искусственного происхождения и сделан вывод о лучшей его прогностической способности по сравнению с методом NSUR (Fu et al., 2016).

Несколько иная структура «дисагрегированной» (расчлняемой) аддитивной модели предложена другими китайскими исследователями, обозначенная ими как “controlling directly under total biomass by proportion function” (Zeng, Tang, 2010; Zhang et al.,

2016). Получив неожиданный результат, а именно более низкие показатели адекватности модели с двумя независимыми переменными  $D$  и  $H$  для массы ветвей и листвы по сравнению с моделью лишь с одной переменной  $D$ , авторы рекомендовали использовать последнюю для всех фракций фитомассы в тополёвых плантациях (Zhang et al., 2016). Противоположный результат получен при анализе структуры «дисагрегированной» аддитивной модели на примере культур пихты китайской: лучшие результаты для всех фракций фитомассы показали модели с двумя независимыми переменными  $D$  и  $H$  (Zhuo et al., 2016).

Если нужны дополнительные уравнения для промежуточных фракций, например, подразделение общей фитомассы на надземную и подземную, то применяется трёхшаговая система пропорционального взвешивания (three-step proportional weighting – 3SPW). Л. Донг с соавторами (Dong et al., 2015b) применили её для оценки системы нелинейных аддитивных уравнений, используя данные 122 модельных деревьев лиственницы Гмелина, взятых на 43 пробных площадях в чистых и смешанных лиственничниках на северо-востоке Китая. Для фракций надземной  $P_a$  и подземной  $P_b$  фитомассы рассчитаны изолированные уравнения зависимости от  $D$  и  $H$ , а доли той и другой фракции в общей фитомассе  $P_t$  рассчитываются согласно выражений (13) и (14), где индексы  $t$ ,  $a$  и  $r$  при коэффициентах означают принадлежность последних соответственно к общей фитомассе, надземной и подземной. Принцип дисагрегирования, показанный на примере общей фитомассы, расчленяемой на надземную и подземную в соответствии с выражениями (13) и (14), аналогичным образом осуществляется далее на втором шаге, где надземная фитомасса расчленяется на крону и ствол, а на третьем шаге крона расчленяется на ветви и листву, и ствол – на древесину и кору на основе соответствующих изолированных уравнений фитомассы.

$$P_a = \frac{1}{1 + \frac{a_r D^{b_r} H^{c_r}}{a_a D^{b_a} H^{c_a}}} \times P_t \quad (13)$$

$$P_r = \frac{1}{1 + \frac{a_a D^{b_a} H^{c_a}}{a_r D^{b_r} H^{c_r}}} \times P_t \quad (14)$$

Л. Донг с соавторами (Dong et al., 2015b) и Д. Аффлек (Affleck, 2015) применили TSEM-метод, обеспечивающий пошаговую аддитивность надземной фитомассы, промежуточных фракций и, наконец, исходных фракций (Tang et al., 2000), в двух вариантах расчётных алгоритмов: по процедуре NSUR с учётом внутренней корреляции фракций фитомассы (Parresol, 2001; см. табл. 8) и по трёхшаговой системе пропорционального взвешивания (3SPW), пример которой для первого шага показан в выражениях (13) и (14). Сравнение показало, что существенного различия результатов, полученных по двум различным расчётным алгоритмам, не выявлено (Dong et al., 2015b).

Таким образом, принцип дисагрегирования, реализованный по трёхшаговой системе пропорционального взвешивания (3SPW), (а) позволяет пошагово (последовательно) расчленить оценки общей фитомассы на промежуточные фракции и затем полученные оценки – расчленить на исходные фракции в соответствии с их долями в промежуточных фракциях, (б) обеспечивает пошаговую аддитивность фракций всех уровней и (в) предоставляет модель фитомассы для каждой промежуточной и исходной фракции, давая возможность выбора системы аддитивных уравнений любой желаемой степени детализации.

Ч. Навар с соавторами (Návar et al., 2004) при расчете аддитивных уравнений фитомассы для 14-летних культур трёх видов сосны по данным 56 деревьев, взятых на 23 пробных площадях, применили три процедуры расчёта.

1) Общепринятая процедура (CON) включает в себя расчёт уравнений, структура которых признана «наилучшей», как показано Дж. Клаттером с соавторами (Clutter et al., 1983).

2) Процедура гармонизации (HAR) «фракционных» уравнений, предполагающей, что величина фракции, доля которой в общей массе минимальная, не может превысить массу фракции, доля которой максимальная или, по крайней мере, выше минимальной; например, масса коры не может быть больше массы древесины ствола (Jacobs, Cunia, 1980; Cunia, Briggs, 1985).

3) Расчёт псевдонесвязанных регрессий (SUR), представляющих продвинутый вариант CON и HAR, и примеры «лучших» из псевдонесвязанных моделей были опубликованы ранее (Cunia, Briggs, 1984, 1985; Paresol, 1999, 2001).

В качестве зависимых переменных приняты показатели массы (кг) трёх фракций – хвои ( $P_1$ ), ветвей ( $P_2$ ) и ствола ( $P_3$ ), а в качестве независимых переменных – диаметр ствола ( $D$ , см), высота дерева ( $H$ , м) и их комбинация ( $D^2H$ ), все как в исходном виде, так и в логарифмической трансформации. С целью уменьшения дисперсии фитомассы крупных деревьев в исследованном диапазоне их толщин применена процедура взвешивания посредством оценивания ошибки как функции независимых переменных. Использован метод наименьших квадратов при расчете параметров регрессии 5 структурных форм: простой линейной (LS), простой нелинейной (NLS), простой логарифмически трансформированной (LTS), множественной линейной (ML) и множественной нелинейной (MNL). В процедуре нелинейной регрессии использован метод Ньютона в пакете программ SAS (SAS/ETS, 1988). Наименьшие стандартные ошибки и наибольшие значения t-критерия уравнений, как «фракционных», так и общих, оказались при расчете по методу псевдонесвязанных регрессий (SUR), иногда существенно отличающиеся по сравнению с другими использованными в исследовании методами.

Установлено, что лучшие показатели адекватности для всей фитомассы дерева оказались в уравнении структурной формы (ML) – множественной линейной регрессии ( $R^2 = 0,86$ ;  $SE = 5,6$  кг); для (LS), (NLS), (LTS) и (MNL)  $R^2$  составил соответственно 0,82; 0,68; 0,81; 0,83 и SE соответственно 6,2; 8,1; 6,2; 6,1 кг. Этот вывод находится в противоречии с традиционным использованием нелинейных (аллометрических) неаддитивных уравнений при подобных оценках фитомассы (Ter-Mikaelian, Korzukhin, 1997; Schroeder et al., 1997).

Характеристика итоговой, общей для трёх видов сосны, системы аддитивных уравнений, рассчитанной по методу псевдонесвязанных регрессий, дана в табл. 9.

Таблица 9

Характеристика аддитивных уравнений для фитомассы деревьев, общих для трёх видов сосны

Фракция фитомассы	Уравнение
Хвоя	$P_1 = -1,13 + 0,353D - 0,54 \ln H$
Ветви	$P_2 = 9,413 + 1,605D - 10,3 \ln D$
Ствол	$P_3 = 0,093 + 0,009 D^2 H$
Всё дерево	$P_{\text{общ}} = 8,367 + 1,959 D - 0,54 \ln H - 10,3 \ln D + 0,009 D^2 H$

Примерно такие же, «контринтуитивные» результаты получены Т. Магалхесом и Т. Сейфертом (Magalhães, Seifert, 2015). При расчете аддитивных уравнений использованы данные измерений массы корней, кроны, древесины и коры ствола у 93 деревьев мадагаскарского эндемика – андростахиса Джонсона (*Androstachys Johnsonii* Prain),

взятых на 23 пробных площадях. Исследованы зависимости фитомассы фракций от  $D$ ,  $H$ ,  $D^2H$  и  $LCL$  (последняя переменная – только для кроны) в линейной и аллометрической модификациях методами CON и SUR (только для линейных зависимостей), а также методом NSUR с ограничением параметров (для нелинейных зависимостей). По показателям адекватности лучшей оказалась система аддитивных уравнений в линейной модификации, рассчитанная методом CON, несколько хуже – система нелинейных уравнений, рассчитанных методом NSUR, и худшие результаты показал расчет по SUR. Преимущество метода NSUR становится очевидным для многих исследователей, которые стали применять его без сопоставления получаемых результатов с другими (Bronisz et al., 2016; Dong et al., 2016). Таким образом, процедура псевдонесвязанных регрессий не всегда оказывается лучшей даже по сравнению с обычной процедурой CON.

Тем не менее, по мнению многих исследователей (Zhang et al., 2016; Zhuo et al., 2016), система NSUR даёт более эффективные оценки по сравнению с изолированными уравнениями. Она характеризуется как наиболее предпочтительная при расчёте аддитивных уравнений фитомассы деревьев, поскольку является более гибкой и учитывает статистические зависимости между выборочными данными путём принудительного согласования коэффициентов.

### Заключение

Таким образом, описанные выше неопределённости, разночтения, противоречия, связанные с аддитивными уравнениями фитомассы, во многом обусловлены разными объёмами фактических данных, выбором той или иной структуры модели, но главным образом – той или иной процедурой расчёта системы аддитивных моделей. Первые попытки осуществить принцип аддитивности были предприняты на примерах линейных моделей фитомассы. Статистическая корректность и соответственно – сложность расчётных алгоритмов при этом последовательно возрастали, однако доказательств повышения состоятельности (эффективности) аддитивных моделей по сравнению с изолированными оценками не было предоставлено. Затем последовал переход на нелинейные аддитивные системы уравнений, более корректные, но обладающие гораздо более сложными расчётными алгоритмами по сравнению с линейными.

Сформированные к настоящему времени базы данных (Usoltsev, 2013, 2016) создают предпосылки для уточнения, и возможного снятия изложенных неопределённостей или какой-то их части на основе географически распределённых 7-8 тысяч фактических значений фитомассы как деревьев, так и древостоев лесобразующих древесных видов Евразии, полученных на пробных площадях «деструктивным» методом. В качестве предварительного варианта будет подвергнут анализу весь имеющийся массив данных с разделением его по древесным видам, и если будут получены удовлетворительные результаты, то в качестве второго, продвинутого варианта процедура может быть продолжена на региональных уровнях. Основу анализа, по-видимому, составят нелинейные модели, и предстоит пройти несколько последовательных этапов с выбором соответствующих альтернатив:

- методом перебора установить структуру уравнения, оптимальную для каждой фракции фитомассы;
- выявить оптимальный вариант устранения неоднородности дисперсии остатков: (1) путём оценки параметров нелинейным взвешенным методом наименьших квадратов с дополнительным вводом функции ошибки или (2) путём линеаризации зависимостей, например, логарифмированием с поправкой или без поправки на смещение, вызванное подобной линеаризацией;
- подобрать алгоритм, учитывающий внутреннюю корреляцию между фракциями фитомассы;

- рассчитывать модели для каждого древесного вида отдельно или идентифицировать их в общей модели с помощью фиктивных переменных;
- унифицировать расчётный алгоритм таким образом, чтобы можно было по мере необходимости получать значения коэффициентов для основных, промежуточных и исходных фракций (соответственно по 1, 2 и 3-шаговой системе оценок), т.е. получать аддитивную систему уравнений любой желаемой степени детализации по фракционному составу как с ошибками в независимых переменных, так и без них;
- сравнить эффективность систем аддитивных уравнений, рассчитанных обычным методом наименьших квадратов, нелинейным методом псевдонесвязанных регрессий (Gallant, 1975; Parresol, 2001) и двумя методами расчёта «дисагрегированной» системы моделей, представленными в соответствующих публикациях китайских исследователей (Dong et al., 2015b; Fu et al., 2016; Zhang et al., 2016; Zhuo et al., 2016).

Предстоит решить главный вопрос: если обеспечение аддитивности уравнений фитомассы деревьев не даёт и не даст достоверного увеличения их прогностической способности по сравнению с изолированными оценками, то не будет ли результатом всех поисков лишь авторское «ощущение трепета» от созерцания «красоты непротиворечивых оценок»?

Кроме того, остаётся в силе известная неопределённость, возникающая при экстраполяции полученных уравнений за пределы использованного эмпирического материала. Тем самым проблема аддитивности аллометрических уравнений смыкается с проблемой применимости «всеобщих» видоспецифичных аллометрических моделей в локальных (региональных) приложениях. Пока что «всеобщие» модели некоторого уровня обобщения разрабатываются лишь для наземной фитомассы деревьев (см.: Усольцев и др., 2017б,в,г). Возможность же получения «всеобщих» моделей, дифференцированных по фракционному составу и рассчитанных с соблюдением принципа аддитивности, в настоящее время считается сомнительной (Vi et al., 2004). Причина - соотношение фитомасс фракций при одной и той же наземной существенно варьирует от древостоя к древостою, и предстоит выяснить, возможно ли объяснить эту изменчивость в рамках видоспецифичной аддитивной системы моделей, «всеобщей» или региональной?

*Автор выражает признательность кандидату физико-математических наук, старшему научному сотруднику Института леса им. В.Н. Сукачева СО РАН Григорию Борисовичу Кофману за полезные замечания, высказанные им в ходе подготовки рукописи.*

#### Список использованной литературы

*Антанайтис В.В.* Введение // Закономерности лесной таксации: Методическое пособие. Каунас: Литовская сельскохозяйственная академия, 1976. С. 5-10.

*Гелашвили Д.Б., Иудин Д.И., Розенберг Г.С., Якимов В.Н., Солнцев Л.А.* Фракталы и мультифракталы в биоэкологии. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 2013. 370 с.

*Джеффферс Дж.* Введение в системный анализ: применение в экологии. М.: Мир, 1981. 256 с.

*Ищенко В.Г.* Применение аллометрических уравнений в популяционной экологии животных // Тр. Института экологии растений и животных УрО РАН. Вып. 71. Вопросы эволюционной и популяционной экологии животных. Свердловск, 1969. С. 8-15.

*Колмогоров А.Н.* К вопросу о пригодности найденных статистическим путем формул прогноза // Заводская лаборатория. 1933. № 1. С. 164-167.

*Кофман Г.Б.* Рост и форма деревьев. Новосибирск: Наука, 1986. 211 с.

*Магнус Я.Р., Катыхов П.К., Пересецкий А.А.* Эконометрика. Начальный курс: Учеб. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Дело, 2004. 576 с.

*Мина Н.В., Клевезаль Г.А.* Рост животных. М.: Наука, 1976. 291 с.

*Новоженков Ю.И.* Пророк в своем отечестве, которого я знал и перед которым преклоняюсь // Вестник УрО РАН: Наука. Общество. Человек. Вып. 2. Екатеринбург, 2002. С. 28-35.

*Ратнер В.А.* Мамонт (заметки о Н. В. Тимофееве-Ресовском) // Николай Владимирович Тимофеев-Ресовский: Очерки. Воспоминания. Материалы. М.: Наука, 1993. С. 291-300.

*Усольцев В.А.* Моделирование структуры и динамики фитомассы древостоев. Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та, 1985. 191 с. (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/3353>).

*Усольцев В.А.* Рост и структура фитомассы древостоев. Новосибирск: Наука, Сибирское отд-ние, 1988. 253 с. (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/3352>).

*Усольцев В.А.* Применение системы связанных регрессионных уравнений в лесоводственных исследованиях. Екатеринбург: УГЛТА, 1997. 108 с. (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/3379>).

*Усольцев В.А., Субботин К.С., Гаврилин Д.С., Норицина Ю.В.* Моделирование распределения ассимилятов в фитомассе деревьев: законы или закономерности? // Эко-Потенциал. 2015. № 1(9). С. 15-32 (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/4065>).

*Усольцев В.А., Воронов М.П., Колчин К.В.* О некоторых неопределённости в оценке биологической продуктивности лесов в контексте биогеографии // Эко-потенциал. 2017а. № 2 (18). С. 7-22.

*Усольцев В.А., Колчин К.В., Воронов М.П.* Фиктивные переменные и смещения всеобщих аллометрических моделей при локальной оценке фитомассы деревьев (на примере *Picea* L.) // Эко-потенциал. 2017б. № 1 (17). С. 22-39 (<http://elar.usfeu.ru/bitstream/123456789/6502/1/eko-17-02.pdf>).

*Усольцев В.А., Колчин К.В., Маленко А.А.* Смещения всеобщих аллометрических моделей при локальной оценке фитомассы деревьев лиственницы // Вестник Алтайского государственного аграрного университета. 2017в. № 4 (150). С. 85-90 (<http://www.asau.ru/vestnik/2017/4/085-090.pdf>).

*Усольцев В.А., Колчин К.В., Норицина Ю.В., Азарёнок М.В., Богословская О.А.* Смещения всеобщих видоспецифичных аллометрических моделей при локальной оценке фитомассы деревьев сосны, кедра и пихты // Эко-потенциал. 2017г. № 2 (18). С. 46-57.

*Уткин А.И., Замолотчиков Д.Г., Гульбе Т.А., Гульбе Я.И.* Аллометрические уравнения для фитомассы по данным деревьев сосны, ели, берёзы и осины в европейской части России // Лесоведение. 1996. № 6. С. 36-46.

*Харвей Д.* Научное объяснение в географии. М.: Прогресс, 1974. 502 с.

*Шноль С.Э.* О динамике новых истин в науке о жизни // Кибернетика живого: Биология и информация. М.: Наука, 1984. С. 84-94.

*Шноль С.Э.* Космофизические факторы в случайных процессах. Stockholm: Изд-во «Svenska fysikarkivat», 2009. 388 с. ([http://digitalphysics.ru/pdf/Kaminskii\\_A\\_V/shnoll2009ru.pdf](http://digitalphysics.ru/pdf/Kaminskii_A_V/shnoll2009ru.pdf)).

*Affleck D.L.R.* Additivity and maximum likelihood estimation of nonlinear component biomass models // U. S. Department of Agriculture Pacific Northwest Research Station. General Technical Report PNW-GTR-931. January 2016. P. 13-17.

*Assmann E.* Waldertragskunde: Organische Produktion, Struktur, Zuwachs und Ertrag von Waldbeständen. München, Bonn, Wien: BLV Verlagsgesellschaft, 1961. 492 S.

*Baltagi B.H., Pirotte A.* Seemingly unrelated regressions with spatial error components. Center for Policy Research Working Paper. Maxwell School of Citizenship and Public

Affairs Syracuse University. 2010. No.125. 36 p.  
([http://www.maxwell.syr.edu/uploadedFiles/cpr/publications/working\\_papers2/wp125.pdf](http://www.maxwell.syr.edu/uploadedFiles/cpr/publications/working_papers2/wp125.pdf)).

*Baskerville G.L.* Use of logarithmic regression in the estimation of plant biomass // Canadian Journal of Forest Research. 1972. Vol. 2. P. 49-53.

*Bi H., Birk E., Turner J., Lambert M., Jurskis V.* Converting stem volume to biomass with additivity, bias correction, and confidence bands for two Australian tree species // New Zealand Journal of Forestry Science. 2001. Vol. 31. P. 298-319.

*Bi H., Turner J., Lambert M.J.* Additive biomass equations for native eucalypt forest trees of temperate Australia // Trees. 2004. Vol. 18. P. 467-479.

*Bi H., Murphy S., Volkova L., Weston Ch., Fairman T., Li Y., Law R., Norris J., Lei X., Caccamo G.* Additive biomass equations based on complete weighing of sample trees for open eucalypt forest species in south-eastern Australia // Forest Ecology and Management. 2015. Vol. 349. P. 106-121 (<http://dx.doi.org/10.1016/j.foreco.2015.03.007>).

*Borders B.E.* Systems of equations in forest stand modelling // Forest Science. 1989. Vol. 35. No. 2. P. 548-556.

*Bronisz K., Strub M., Cieszewski C., Bijak S., Bronisz A., Tomusiak R., Wojtan R., zasa-sada M.* Empirical equations for estimating aboveground biomass of betula pendula growing on former farmland in central Poland // Silva Fennica. 2016. Vol. 50. No. 4. Article No. 1559. 17 p. DOI: 10.14214/sf.1559.

*Burkhart H.E., Sprinz P.T.* Compatible cubic volume and basal area projection equations for thinned old-field loblolly pine plantations // Forest Science. 1984. Vol. 30. No. 1. P. 86-93.

*Candy S.G.* Growth and yield models for *Pinus radiata* in Tasmania // New Zealand Journal of Forestry Science. 1989. Vol. 19. P. 112-133.

*Carvalho J.P.* Uso da Propriedade da Aditividade de Componentes de Biomassa Individual de *Quercus pyrenaica* Willd. Com Recurso a um Sistema de Equações Não-Linear // Silva Lusitana. 2003. Vol. 11. No. 2. P. 141 – 152 (португал. с англ. резюме).

*Carvalho J.P., Parresol B.R.* Additivity in tree biomass components of Pyrenean oak (*Quercus pyrenaica* Willd.) // Forest Ecology and Management. 2003. Vol. 179. P. 269-276.

*Chaturvedi R.K., Raghubanshi A.S.* Aboveground biomass estimation of small diameter woody species of tropical dry forest // New Forests. 2013. Vol. 44. P. 509-519.

*Chiyenda S.S., Kozak A.* Additivity of component biomass regression equations when the underlying model is linear // Canadian Journal of Forest Research. 1984. Vol. 14. P. 441-446.

*Clutter J.L., Forston J.C., Pienaar L.V., Brister G.H., Bailey R.L.* Timber management: A quantitative approach. New York: Wiley, 1983. 333 p.

*Cunia T., Briggs R.D.* Forcing additivity of biomass tables: some empirical results // Canadian Journal of Forest Research. 1984. Vol. 14. P. 376-384.

*Cunia T., Briggs R.D.* Forcing additivity of biomass tables: use of the generalized least-square method // Canadian Journal of Forest Research. 1985. Vol. 15. P. 23-28.

*Daryaei A., Sohrabi H.* Additive biomass equations for small diameter trees of temperate mixed deciduous forests // Scandinavian Journal of Forest Research. 2015. Vol. 31. No. 4. P. 394-398.

*Dong L., Zhang L., Li F.* Developing additive systems of biomass equations for nine hardwood species in Northeast China // Trees. 2015a. Vol. 29. No. 4. (DOI 10.1007/s00468-015-1196-1).

*Dong L., Zhang L., Li F.* A three-step proportional weighting system of nonlinear biomass equations // Forest Science. 2015b. Vol. 61. No. 1. P. 35-45.

*Dong L., Zhang L., Li F.* Developing two additive biomass equations for three coniferous plantation species in Northeast China // Forests. 2016. Vol. 7, 136; doi:10.3390/f7070136

*Dubois E.* Sur le rapport du poids de l'encéphale avec la grandeur du corps chez les mammifères // *Bulletins de la Société d'anthropologie de Paris.* 1897. Vol. 8. P. 337-376.

*Enquist B.J., Niklas K.J.* Global allocation rules for patterns of biomass partitioning in seed plants // *Science.* 2002. Vol. 295. P. 1517-1520.

*Fiebig D.G.* Seemingly unrelated regression // *Baltagi B.H. (ed.) A companion to theoretical econometrics.* Massachusetts: Blackwell, 2001. Chapter 5. P. 101-121. DOI: 10.1002/9780470996249.

*Fu L., Lei Y., Wang G., Bi H., Tang S., Song X.* Comparison of seemingly unrelated regressions with error-invariable models for developing a system of nonlinear additive biomass equations // *Trees.* 2016. Vol. 30. No. 3. P. 839–857.

*Fu L., Sharma R.P., Wang G., Tang S.* Modelling a system of nonlinear additive crown width models applying seemingly unrelated regression for Prince Rupprecht larch in northern China // *Forest Ecology and Management.* 2017. Vol. 386. P. 71–80.

*Gallant A.R.* Seemingly unrelated non-linear regressions // *J. Econometrics.* 1975. Vol. 3. P. 35-50.

*Gould S.* Allometry and size in ontogeny and phylogeny // *Biological Reviews.* 1966. Vol. 41. P. 587-640.

*Huxley J.* Problems of relative growth. Methuen & Co., London, 1932. 296 p.

*Jacobs M.W., Cunia T.* Use of dummy variables to harmonize tree biomass tables // *Canadian Journal of Forest Research.* 1980. Vol. 10. No. 4. P. 483–490.

*Knoebel B.R., Burkhardt H.E., Beck D.E.* A growth and yield model for thinned stands of yellow-poplar // *Forest Science Monograph.* 1986. Vol. 27. 62 p.

*Kozak A.* Methods for ensuring additivity of biomass components by regression analysis // *The Forestry Chronicle.* 1970. Vol. 46. No. 5. P. 402–404.

*Kurucz J.* Component weights of Douglas-fir, western hemlock, and western red cedar biomass for simulation of amount and distribution of forest fuels. University of British Columbia, Forestry Department, M.F. thesis. 1969. 116 p.

*Lohbeck M., Poorter L., Martinez-Ramos M., Bongers F.* Biomass is the main driver of changes in ecosystem process rates during tropical forest succession // *Ecology.* 2015. Vol. 96. P. 1242–1252.

*Magalhães T.M., Seifert T.* Biomass modelling of *Androstachys johnsonii* Prain: A comparison of three methods to enforce additivity // *International Journal of Forestry Research.* Volume 2015 (2015). Article ID 878402, 17 p. (<http://dx.doi.org/10.1155/2015/878402>).

*Mandelbrot B.B.* The fractal geometry of nature. New York: W.N. Freeman, 1983. 468 p.

*Martin P.A., Newton A.C., Bullock J.M.* Carbon pools recover more quickly than plant biodiversity in tropical secondary forests // *Proceedings of the Royal Society: B (Biological Sciences).* 2013. Vol. 280. P. 1-8 (<http://dx.doi.org/10.1098/rspb.2013.2236>).

*Møller A.P., Jennions M.D.* How much variance can be explained by ecologists and evolutionary biologists? // *Oecologia.* 2002. Vol. 132. P. 492-500.

*Návar Ch.J.J., González B.N., Graciano L.J.J., Dale V., Parresol B.* Additive biomass equations for pine species of forest plantations of Durango, Mexico // *Madera y Bosques.* 2004. Vol. 10. No. 2. P. 17-28.

*Parresol B.R.* Assessing tree and stand biomass: a review with examples and critical comparison // *Forest Science.* 1999. Vol. 45. P. 573-593.

*Parresol B.R.* Additivity of nonlinear biomass equations // *Canadian Journal of Forest Research.* 2001. Vol. 31. P. 865-878.

*Peschel W.* Die mathematische Methoden zur Herleitung der Wachstumsgesetze von Baum und Bestand und die Ergebnisse ihrer Anwendung. Berlin: P. Parey, 1938. S. 169-248.

*Poorter H., Jagodzinski A.M., Ruiz-Peinado R., Kuyah S., Luo Y., Oleksyn J., Usoltsev V.A., Buckley T.N., Reich P.B., Sack L.* How does biomass allocation change with size and differ among species? An analysis for 1200 plant species from five continents // *New Phytologist*. 2015. Vol. 208. Issue 3 (November 2015). P. 736-749 (<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/nph.13571/epdf>).

*Proctor J.D., Larson B.M.H.* Ecology, complexity and metaphor // *BioScience*. 2005. Vol. 55. No. 12. P. 1065-1068.

*Reed D.D.* Estimation procedures for analytically related growth and yield models // *Proceedings of the 1986 Annual Meeting of the Society of American Foresters*. Bethesda, MD. 1987. P. 89-92.

*Reed D.D., Green E.J.* Compatible individual tree taper and volume ratio equations // *Forest Science*. 1984. Vol. 30. No. 4. P. 977-990.

*Reed D.D., Green E.J.* A method of forcing additivity of biomass tables when using nonlinear models // *Canadian Journal of Forest Research*. 1985. Vol. 15. P. 1184-1187.

*Ruiz-Peinado R., Montero G., del Rio M.* Biomass models to estimate carbon stocks for hardwood tree species // *Forest Systems*. 2012. Vol. 21. No. 1. P. 42-52.

*Sanquetta C.R., Behling A., Cortel A.P.D., Netto S.P., Schikowski A.B., do Amaral M.K.* Simultaneous estimation as alternative to independent modeling of tree biomass // *Annals of Forest Science*. 2015. Vol. 72. P. 1099-1112.

SAS/ETS user's guide, version 6. 2nd edn. SAS Institute, Cary. 1988.

*Schroeder P., Brown S., Mo J., Birdsey R., Cieszewski C.* Biomass estimation for temperate broadleaf forest of the United States using inventory data // *Forest Science*. 1997. Vol. 43. P. 424-434.

*Sheil D.* A critique of permanent plot methods and analysis with examples from Budoongo forest, Uganda // *Forest Ecology and Management*. 1995. Vol. 77. P. 11-34.

*Singh V., Tewari A., Kushwaha S.P., Dadhwal V.K.* Formulating allometric equations for estimating biomass and carbon stock in small diameter trees // *Forest Ecology and Management*. 2011. Vol. 261. P. 1945-1949.

*Smith E.L.* Review of the book "Gradient Modeling: Resource and Fire Management" by S.R. Kessel // *Forest Science*. 1982. Vol. 28. No. 1. P. 127-128.

*Snell O.* Die Abhängigkeit des Hirngewichtes von dem Körpergewicht und den geistigen Fähigkeiten // *Archiv für Psychiatrie und Nervenkrankheiten*. 1892. Vol. 23. P. 436-446.

*Srivastava V.K., Giles D.E.A.* Seemingly unrelated regression equations models: Estimation and inference. New York: Marcel Dekker, 1987. 374 p.

*Stankova T., Gyuleva V., Tsvetkov I., Popov E., Velinova K., Velizarova E., Dimitrov D. N., Hristova H., Kalmukov K., Dimitrova P., Glushkova M., Andonova E., Georgiev G. P., Kalaydzhiiev I., Tsakov H.* Aboveground dendromass allometry of hybrid black poplars for energy crops // *Annals of Forest Research*. 2016. Vol. 59. No. 1. P. 61-74.

*Tang S., Zhang H., Xu H.* Study on establish and estimate method of compatible biomass model // *Scientia Silvae Sinica*. 2000. Vol. 36. P. 19-27 (in Chinese with English abstract).

*Tang S., Wang Y.* A parameter estimation program for the error-in-variable model // *Ecological Modelling*. 2002. Vol. 156. P. 225-236.

*Ter-Mikaelian M.T., Korzukhin M.D.* Biomass equations for sixty-five North American tree species // *Forest Ecology and Management*. 1997. Vol. 97. P. 1-24.

*Usoltsev V.A.* Forest biomass and primary production database for Eurasia. CD-version. The second edition, enlarged and re-harmonized. Yekaterinburg: Ural State Forest Engineering University, 2013 (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/3059>).

*Usoltsev V.A.* Single-tree biomass data for remote sensing and ground measuring of Eurasian forests. CD-version in English and Russian. Yekaterinburg: Ural State Forest Engineering University, 2016 (<http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/6103>).

*West G.B., Brown J.H., Enquist B.J.* A general model for the origin of allometric scaling laws in biology // *Science*. 1997. Vol. 276. P. 122-126.

*West G.B., Brown J.H., Enquist B.J.* A general model for the structure and allometry of plant vascular system // *Nature*. 1999. Vol. 400. P. 664-667.

*Whitfield J.* All creatures great and small // *Nature*. 2001. Vol. 413. P. 342-344.

*Young H. E., Strand L., Altenberger R.* Preliminary fresh and dry weight tables for seven tree species in Maine. Maine Agricultural Experiment Station, Technical Bulletin 12. 1964. 76 p.

*Zar J.R.* Calculation and miscalculation of the allometric equation as a model in biological data // *BioScience*. 1968. Vol. 18. No. 12. P. 1118-1120.

*Zellner A.* An efficient method of estimating seemingly unrelated regression equations and tests for aggregation bias // *Journal of the American Statistical Association*. 1962. Vol. 57. P. 348-368.

*Zeng W.S., Tang S.Z.* Using measurement error modeling method to establish compatible single-tree biomass equations system // *Forest Research*. 2010. Vol. 23. P. 797-802.

*Zhang C., Peng D.-L., Huang G.-S., Zeng W.-S.* Developing aboveground biomass equations both compatible with tree volume equations and additive systems for single-trees in poplar plantations in Jiangsu Province, China // *Forests*. 2016. Vol. 7. No. 2. 32; DOI:10.3390/f7020032.

*Zhuo L., Tao H., Wei H., Chengzhen W.* Compatible models of carbon content of individual trees on a *Cunninghamia lanceolata* plantation in Fujian Province, China // *PLoS ONE*. 2016. Vol. 11. No. 3. P. 1-21: e0151527(<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0151527>).

*Zianis D., Mencuccini M.* On simplifying allometric analyses of forest biomass // *Forest Ecol. Management*. 2004. Vol. 187. P. 311-332.

**Рецензент статьи:** профессор Уральского государственного лесотехнического университета, доктор с.-х. наук В.А. Азарёнок.