Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный лесотехнический университет

Кафедра Сопротивления материалов и теоретической механики

В. А. Калентьев
В. М. Калинин
Л. Т. Раевская
Н. И. Чащин

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТЕЛ

Методические указания
по выполнению расчетно-графических работ
с вариантами заданий
для студентов очной и заочной формы обучения
Направления 150400 — Технологические машины и оборудование,
270200 — Транспортное строительство,
220300 — Автоматизированные технологии и производства»
Дисциплина — Теоретическая механика.

Екатеринбург
2006

Печатается по рекомендации методической комиссии лесоинженерного факультета
Протокол № 69 от 28 декабря 2004 г.

Рецензент — д-р техн. наук профессор Копнов В. А.

Редактор Майер Н. А.
Компьютерная верстка Наумов М. В.

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16	Поз.
Плоская печать	Печ. л. 1,16	Тираж 120 экз.
Заказ №		Цена 4 руб. 00 коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ

Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ КООРДИНАТ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Прежде чем приступить к решению задач по определению координат центров тяжести тел, необходимо изучить теоретические положения по определению координат центра параллельных сил. Это связано с тем, что обычно при определении центра тяжести рассматриваются твердые тела, размеры которых малы по сравнению с земным радиусом, и силы тяжести отдельных частиц тела P_i, можно считать параллельными друг другу.

Для определения координат центров тяжести тел пользуются формулами

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{P}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i y_i}{P}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i z_i}{P}, \tag{1}$$

которые определяют положение центра тяжести параллельных сил, P — сила тяжести твердого тела, x_i, y_i, z_i — координаты точек приложения сил тяжести P_i частиц тела, $P = \Sigma P_i$.

Если тело однородно по объему, то координаты центра тяжести тела определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i x_i}{V}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i y_i}{V}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i z_i}{V}, \tag{2}$$

где V_i — объемы отдельных частей, V — объем всего тела.

Для тонкой пластины координаты центра тяжести определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i x_i}{S}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i y_i}{S}, \tag{3}$$

где S_i — площади отдельных частей пластины, S — площадь всей пластины. Выражения, стоящие в числителях, называют **статическими моментами площади** относительно соответствующих координатных осей:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_i y_i; \qquad S_y = \sum_{i=1}^{n} S_i x_i .$$

S_x — статический момент площади относительно оси X, а S_y — статический момент площади относительно оси Y, так что $x_C = \dfrac{S_y}{S}$, $y_C = \dfrac{S_x}{S}$.

Аналогично определяются координаты центра тяжести линии, то есть тела, имеющего одно измерение:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ell_i x_i}{L}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ell_i y_i}{L}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ell_i z_i}{L}, \tag{4}$$

где ℓ_i — длины отдельных ее частей, L — длина всей линии.

Все написанные выше формулы для координат центра тяжести в общем случае являются приближенными, и результат вычисления будет зависеть от n — числа частиц, на которые разбито рассматриваемое тело. Для получения более точных значений координат центра тяжести нужно в этих формулах перейти к пределу при $n \to \infty$, тогда суммы перейдут в определенные интегралы и формулы (9)–(11) запишутся так:

$$\begin{aligned}
&x_c = \frac{1}{V}\int_V x dV; \qquad y_c = \frac{1}{V}\int_V y dV; \qquad z_c = \frac{1}{V}\int_V z dV;\\
&x_c = \frac{1}{S}\int_S x dS; \qquad y_c = \frac{1}{S}\int_S y dS; \qquad z_c = \frac{1}{S}\int_S z dS;\\
&x_c = \frac{1}{L}\int_L x dL; \qquad y_c = \frac{1}{L}\int_L y dL; \qquad z_c = \frac{1}{L}\int_L z dL.
\end{aligned} \tag{5}$$

2. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

2.1 Способ симметрии

Если однородное твердое тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести этого тела лежит соответственно или в плоскости, или на оси, или в центре симметрии. Для тела, состоящего из стержней одинаковой длины и веса (рис. 6), координата x_c лежит в плоскости симметрии, которая перпендикулярна оси X. Если принять длину одного стержня ℓ = 44 см, то x_c = 22 см.

Другой пример — однородное круглое кольцо имеет центр симметрии в центре кольца и, следовательно, там будет и центр тяжести. Прямоугольная пластинка имеет две оси симметрии, и центр тяжести находится на пересечении этих осей и т.д.

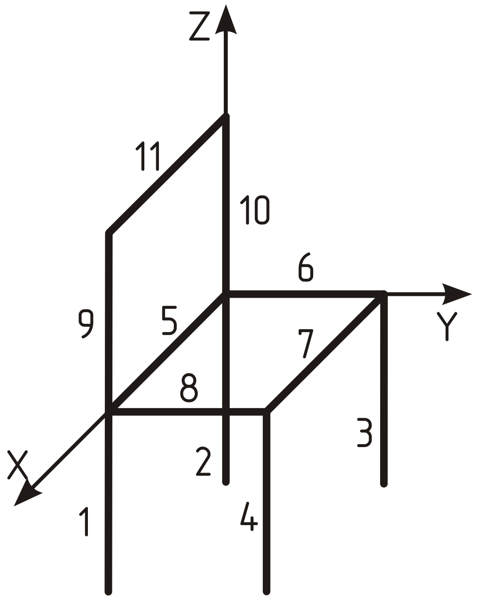


Рис. 1

2.2 Способ разбиения

Этот способ применяется для определения центров тяжести тел сложной геометрической формы. Общий прием определения центров тяжести таких тел состоит в том, что данное тело разбивают на конечное число частей простейшей геометрической формы (если это возможно), для каждой из которых положение центра тяжести известно или оно сравнительно легко может быть найдено. Тогда координаты центра тяжести всего тела можно будет непосредственно вычислить по формулам (3).

Например, необходимо определить положение центра тяжести площади пластинки, изображенной на чертеже (рис. 2). Площадь фигуры разбивается на три простые фигуры: прямоугольник, треугольник, полукруг, координаты центров тяжести которых c_1, c_2, c_3 легко определяются. Оси X и Y выбираются так, чтобы по отношению к ним удобно было находить центр тяжести простых фигур.

Площади фигур будут равны

$$S_1 = ac;\; S_2 = \frac{1}{2}bc;\; S_3 = \frac{1}{2}\pi r^2.$$

Координаты центров тяжести фигур:

$$x_1 = \frac{a}{2};\, y_1 = \frac{c}{2};\; x_2 = a + \frac{b}{3};\; y_2 = \frac{c}{3};\; x_3 = \frac{a}{2};\; y_3 = c + kc_3;$$

$$kc_3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{r\sin\alpha}{\alpha} = \frac{4r}{3\pi}, \text{ так как } \alpha = \frac{\pi}{2},\; r = \frac{a}{2};\; y_3 = c + \frac{4a}{2\cdot 3\pi} = c + \frac{2a}{3\pi}.$$

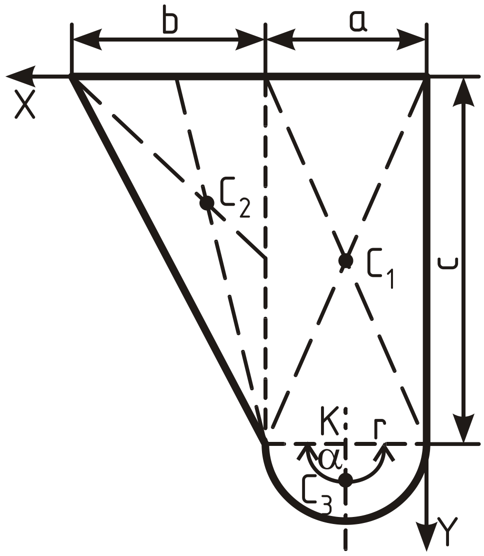


Рис. 2

Подставив S_i, X_i и Y_i в формулы (3), определим центры тяжести. Например, если взять значения a = 10 см, c = 20 см, то из формул (3) для координат центра тяжести всей плоской фигуры получаются следующие значения: x_c = 8,6 см, y_c = 9,9 см.

2.3. Способ дополнения

Этот способ является частным случаем способа разбиения и применяется к телам, имеющим вырезы, если центр тяжести тела без вырезов и вырезанных частей известен или легко определяется. Например требуется найти центр тяжести тела, представляющего собой пластинку с n вырезами. При определении координат центра тяжести плоской фигуры с вырезами используются формулы (3), при этом нужно считать площади вырезанных в них частей отрицательными. Обозначим вырезанные площадки через $-S_1$, $-S_2$, …, $-S_n$, а через x_1, y_1, x_2, y_2, …, x_n, y_n — координаты их центров тяжести. Тогда для определения координат центра тяжести данной плоской фигуры с n вырезами будут иметь место следующие формулы:

$$x_c = \frac{S_0 x_0 - S_1 x_1 - S_2 x_2 - \ldots - S_n x_n}{S_0 - S_1 - S_2 - \ldots - S_n};$$

$$y_c = \frac{S_0 y_0 - S_1 y_1 - S_2 y_2 - \ldots - S_n y_n}{S_0 - S_1 - S_2 - \ldots - S_n}.$$

где S_0 — площадь дополненной пластинки;
x_c, y_c — координаты центра тяжести этой пластинки.

Пример. Определить положение центра тяжести площади квадратной пластинки со стороной a, из которой вырезаны квадрат со стороной b и круг радиуса r (рис. 3).

Дано: $OK = O_1K = O_2K$, $a = 40$ см, $OK = 10$ см, $b = 10$ см, $r = 5$ см.

Решение. Начало осей координат помещаем в точку O, как показано на чертеже, так как по отношению к этим осям удобно находить центры тяжести простых фигур. Определим площадь квадрата без вырезов $S_0 = a^2$, $S_0 = 1600$ см^2, координаты его центра тяжести $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Определим площадь вырезанного квадрата $S_1 = b^2$, координаты его центра тяжести $x_1 = OK$, $y_1 = O_1K$; $S_1 = -100$ см^2, $x_1 = 10$, $y_1 = 10$.

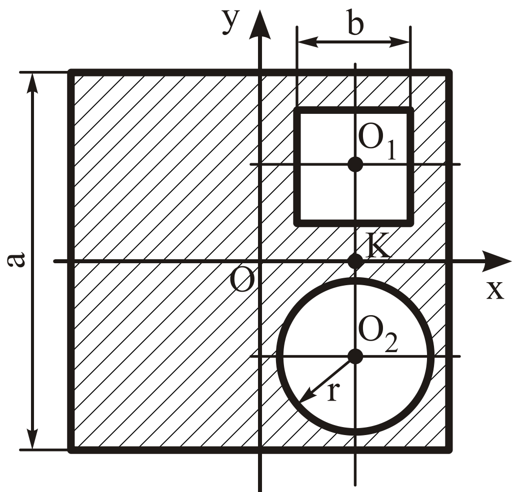


Рис. 3

Определим площадь вырезанного круга $S_2 = \pi r^2$, координаты центра тяжести круга $x_2 = OK$, $y_2 = -O_2K$; $S_2 = -78{,}5$ см^2, $x_2 = 10$, $y_2 = -10$.

Подставив значения величин в формулы (3) найдём координаты центра тяжести: $x_c = -1{,}26$, $y_c = -0{,}15$.

2.4. Центры тяжести некоторых однородных тел

1. Треугольная пластинка (рис. 4). Центр тяжести площади треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан, причем как известно из геометрии:

$$S = \frac{1}{2} a h_a;$$

$$x_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3);$$

$$y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) = \frac{1}{3} h_a,$$

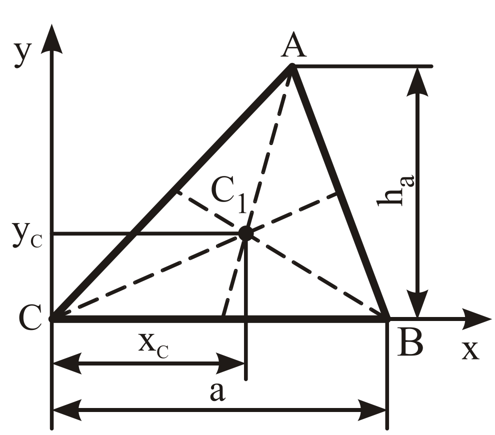


Рис. 4

где S — площадь, x_c, y_c — координаты центра тяжести, x_i, y_i — координаты вершин O, A, B.

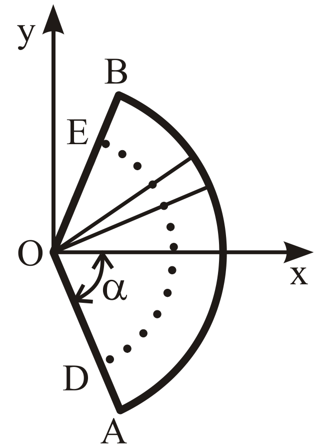


Рис. 5

2. Круговой сектор. Рассмотрим круговой сектор OAB радиуса r с центральным углом AOB = 2α (рис. 5). Сектор имеет ось симметрии, на которой и находится центр тяжести. Разбиваем площадь сектора радиусами, проведенными из центра O, на элементарные секторы, которые можно считать приблизительно треугольниками. Центры тяжести элементарных секторов расположены на дуге окружности радиуса $\frac{2}{3}r$. Следовательно, центр тяжести сектора OAB будет совпадать с центром тяжести дуги DE.

$$x_c = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{2}{3}.$$

Итак, центр тяжести площади кругового сектора лежит на его оси симметрии на расстоянии от центра O, равном

$$x_c = \frac{2}{3}\cdot R\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

В частности, для площади полукруга получим

$$x_c = \frac{4R}{3\pi}\approx 0{,}42R.$$

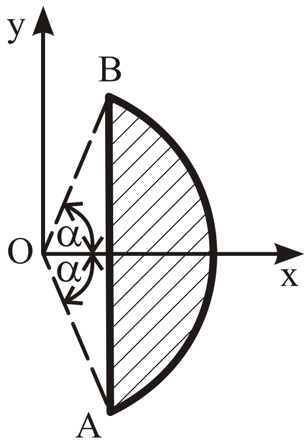


Рис. 6

4. Сегмент круга. Положение центра тяжести площади сегмента круга радиуса r с центральным углом AOB = 2α (рис. 6) найдем способом дополнения. Сегмент дополним до кругового сектора (часть 1), а затем вычтем площадь треугольника AOB (часть 2). Все рассматриваемые фигуры симметричны относительно оси OX, следовательно, $y_c = 0$, а координата x_c определяется формулой

$$x_c = \frac{1}{S}\left(x_1S_1 + x_2S_2\right),$$

где $x_1 = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, $S_1 = R^2\alpha$ — координата центра тяжести и площадь круга; $x_2 = \frac{2}{3}R\cos\alpha$, $S_2 = -R^2\sin\alpha\cos\alpha$ — координата центра тяжести и площадь треугольника. Результирующая площадь сегмента S получается в виде $S = S_1 + S_2 = R^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$. Произведя вычисления, получим

$$x_C = \frac{2}{3}R\frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

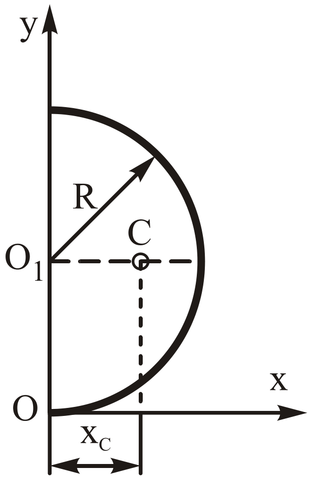


Рис. 7

5. Дуга окружности. Длина хорды AB = b.

Координата центра тяжести дуги окружности (рис. 8): $x_C = R\frac{\sin б}{б} = \frac{b}{2б}$

При $б = \frac{p}{2}$ (рис. 7) длина полуокружности ℓ = πR.

Координата центра тяжести полуокружности

$$x_C = \frac{2R}{p} = \frac{D}{p} \approx 0{,}637R$$

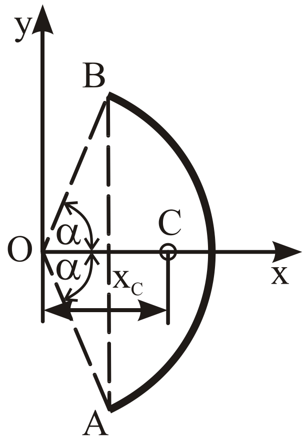


Рис. 8

Пример 1. Вычислить координаты центра тяжести равностороннего треугольника AOB с длиной стороны 20 см, у которого вырезан полукруг радиусом R = AO/4; a = 2 см.

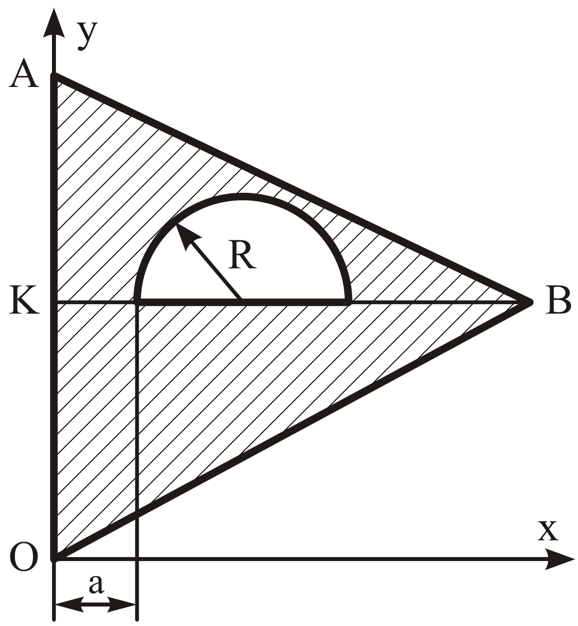


Рис. 9

Решение

Определим высоту BK по теореме Пифагора: $BK = \sqrt{OB^2 - OK^2} = \sqrt{400-100} = 10\sqrt{3} \approx 17$ см.

Площадь $S = \frac{1}{2} AO \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 17 = 170$ см^2.

Координаты центра тяжести треугольника:

$x_1 = \frac{1}{3} BK = \frac{17}{3} \approx 5{,}7$ см; y_1 = OK = 10 см.

Вычислим площадь полукруга и координаты его центра тяжести, причем площадь полукруга считается отрицательной:

$$S_2 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3{,}14 \cdot 25}{2} = \frac{78{,}5}{2} = 39{,}25 \text{ см}^2;$$

x_2 = a + R = 2 + 5 = 7 см. $y_2 = OK + \frac{4R}{3\pi} = 10 + 2{,}122 \approx 12{,}12$ см.

Вычислим координаты центра тяжести:

$$x_C = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i} = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2} = \frac{694{,}25}{130{,}75} = 5{,}3 \text{ см.}$$

$$y_C = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i} = \frac{S_1 y_1 - S_2 y_2}{S_1 - S_2} = \frac{1224{,}25}{130{,}25} = 9{,}4 \text{ см.}$$

Пример 2. Вычислить координаты центров тяжести линейного тела, состоящего из трех однородных частей, где R = 10 см, r = R/2.

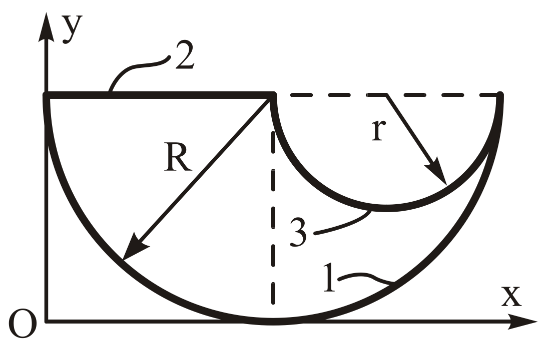


Рис. 10

Решение

Вычислим длину и координаты центров тяжести части 1:

$\ell_1 = \pi R = 3{,}14 \cdot 10 = 31{,}4$ см;

x_1 = R = 10 см;

$$y_1 = R - \frac{2R}{\pi} = 10 - \frac{30}{3{,}14} = 3{,}6 \text{ см.}$$

Вычислим длину и координаты центра тяжести части 2:
$\ell_1 = R = 10$ см.
$x_2 = \frac{R}{2} = 5$ см. $y_2 = R = 10$ см.
Вычислим длину и координаты центра тяжести части 3:
$\ell_3 = \pi R = 3{,}14 \cdot 5 = 15{,}7$ см.
$x_3 = R + r = 10 + 5 = 15$ см;
$y_3 = R - \frac{2r}{\pi} = 10 - \frac{10}{3{,}14} = 10 - 3{,}2 = 6{,}8$ см.
Вычислим координаты центра тяжести всего тела:

$$x_C = \frac{\sum \ell_i x_i}{\sum l_i} = \frac{\ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \ell_3 x_3}{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3} = \frac{599{,}5}{57{,}1} = 10{,}5 \text{ см};$$

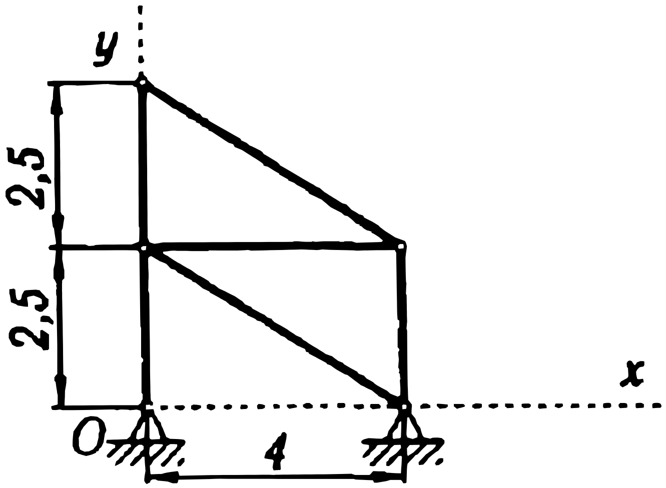
$$y_C = \frac{\sum \ell_i y_i}{\sum l_i} = \frac{\ell_1 y_1 + \ell_2 y_2 + \ell_3 y_3}{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3} = \frac{319{,}76}{57{,}1} = 5{,}6 \text{ см}.$$

3. Задание. Определение положения центра тяжести твердого тела

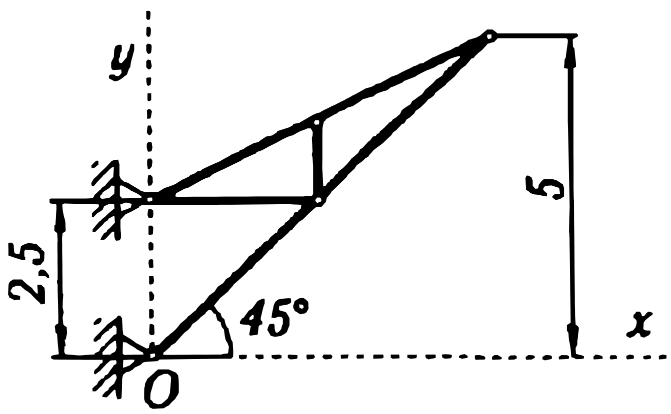
Найти координаты центра тяжести плоской фермы, составленной из тонких однородных стержней одинакового погонного веса (варианты 1−6), плоской фигуры (варианты 7−18 и 24−30) или объема (варианты 19−23), показанных на рис. 7−14. В вариантах 1−6 размеры указаны в метрах, а в вариантах 7−30 — в сантиметрах.

Таблица

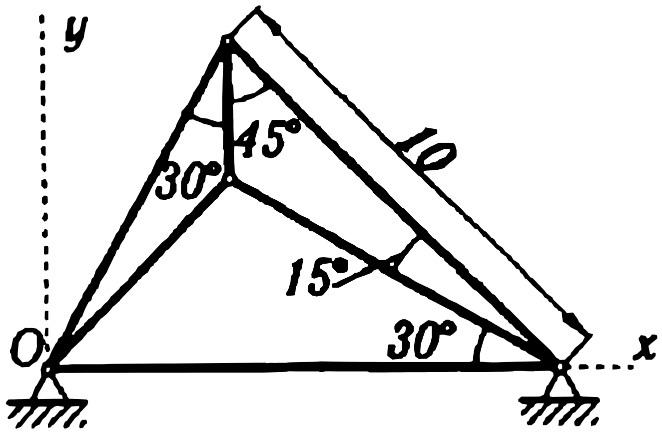
1



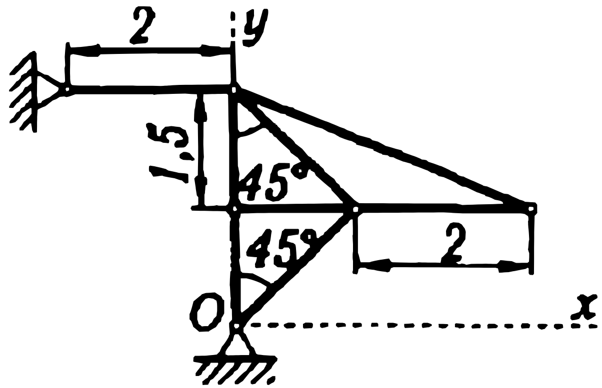
2



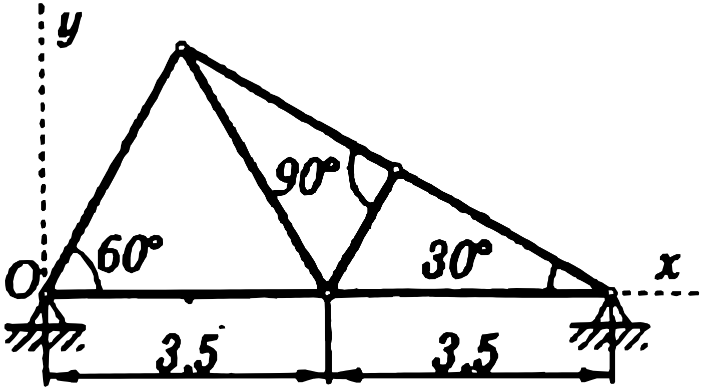
3



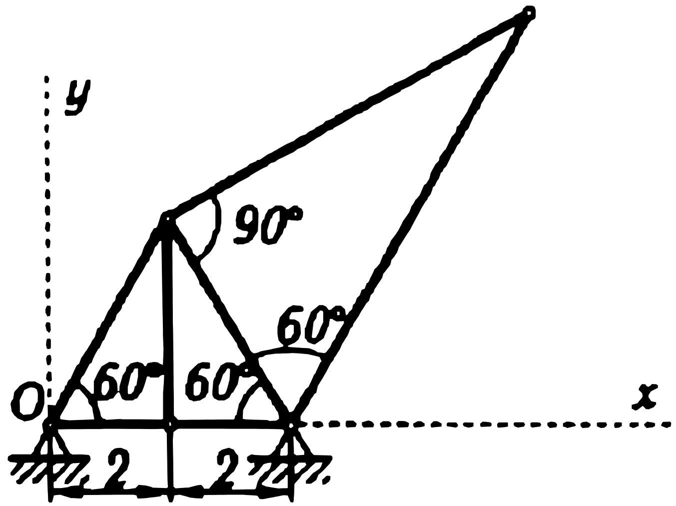
4



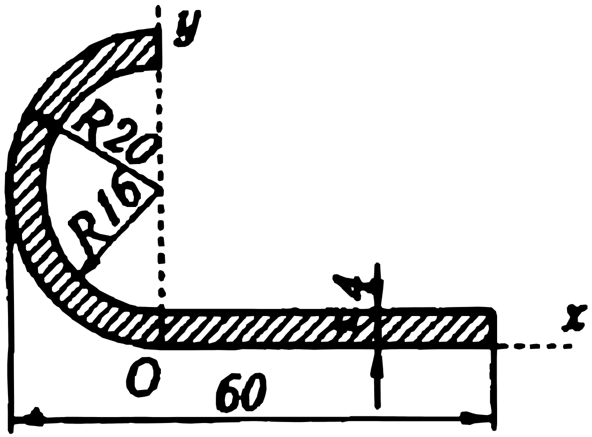
5, 3


y
90°
60°
O
30°
x
3,5
3,5

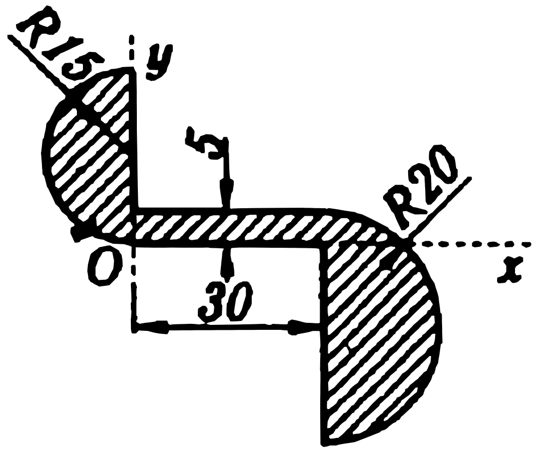
6


y
90°
60°
O
60°
60°
x
2
2

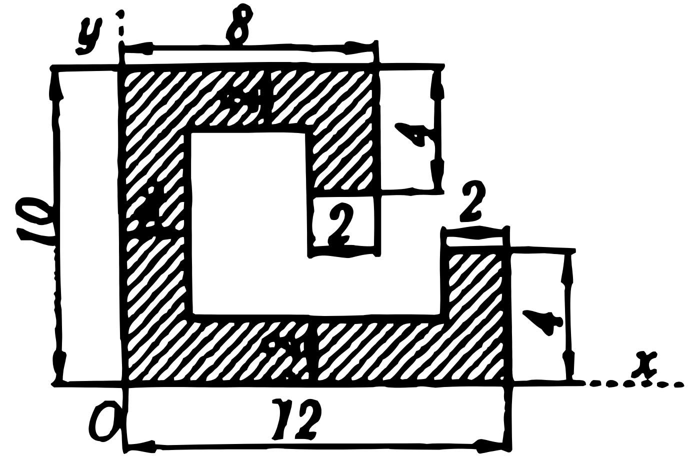
7


y
R20
R16
4
x
O
60

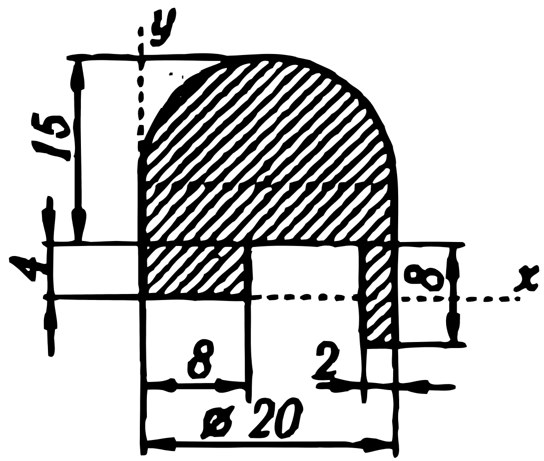
8


R15
y
5
R20
O
x
30

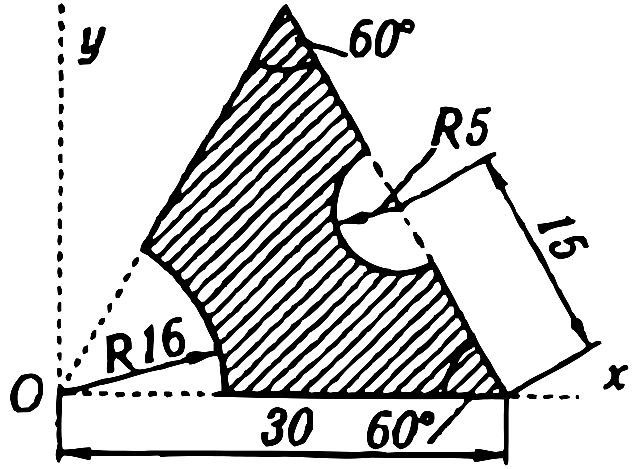
9


y
8
4
10
2
2
4
x
O
12

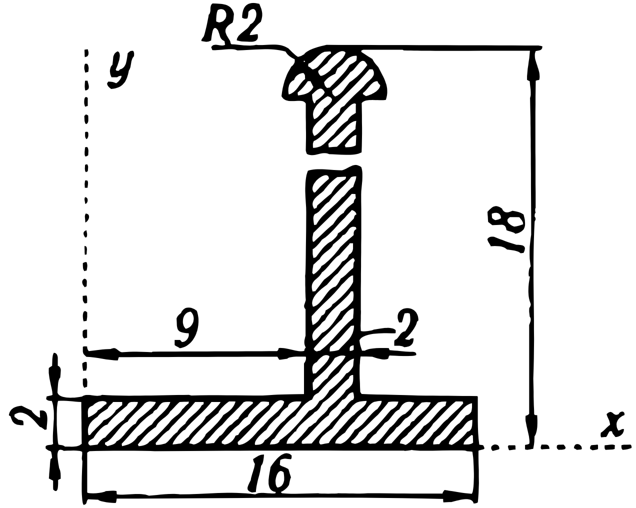
10


y
15
4
8
x
8
2
ø 20

11

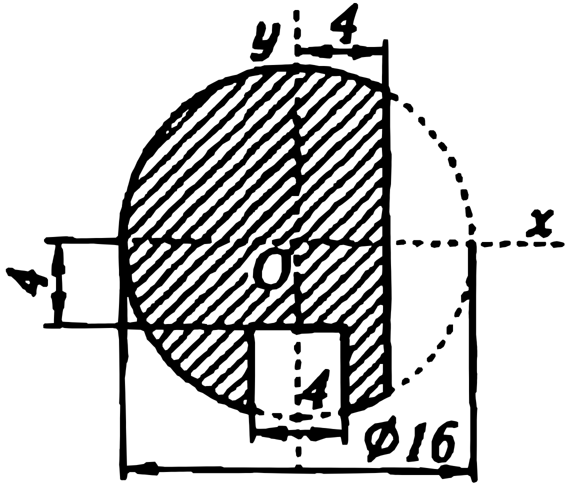

y
60°
R5
15
R16
O
x
30
60°

12

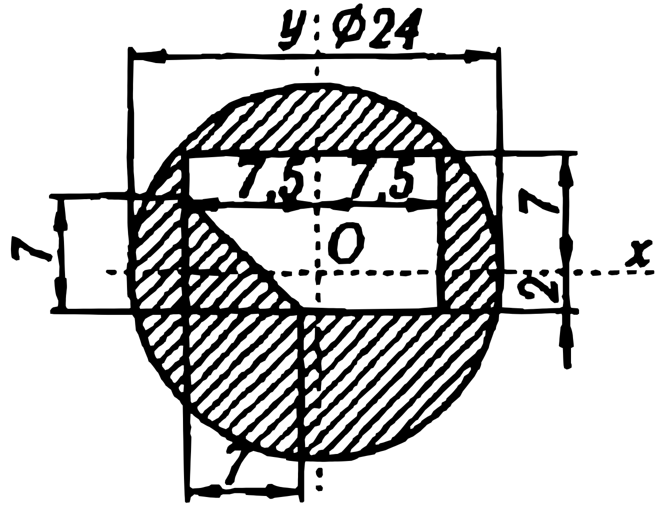

R2
y
18
9
2
2
x
16

Продолжение табл.

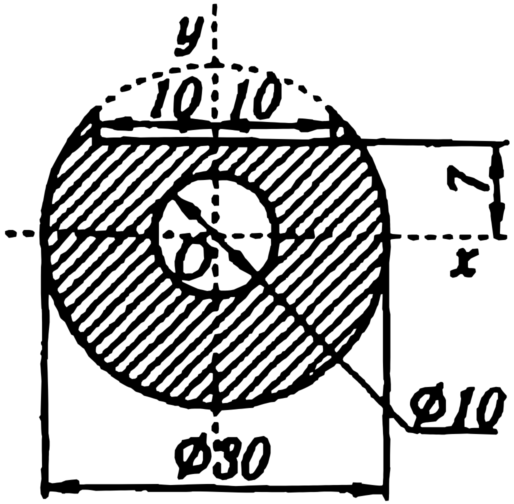
13



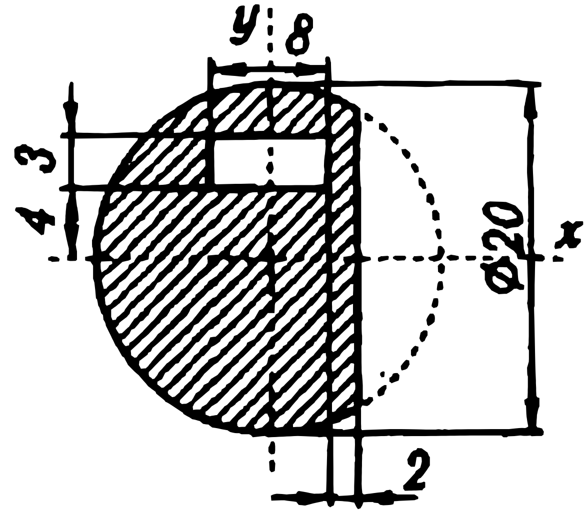
14



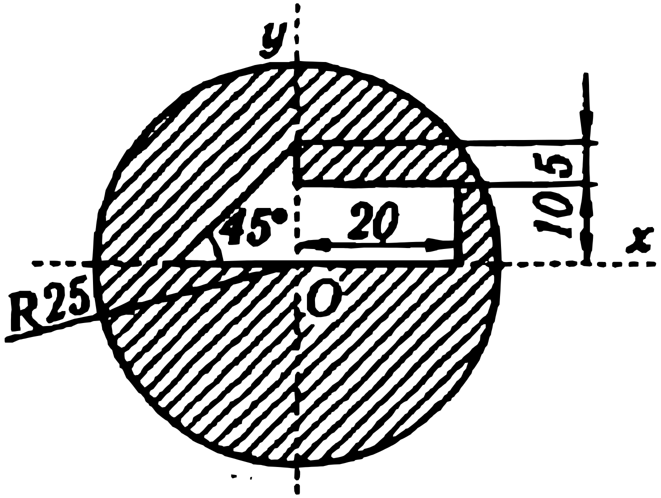
15



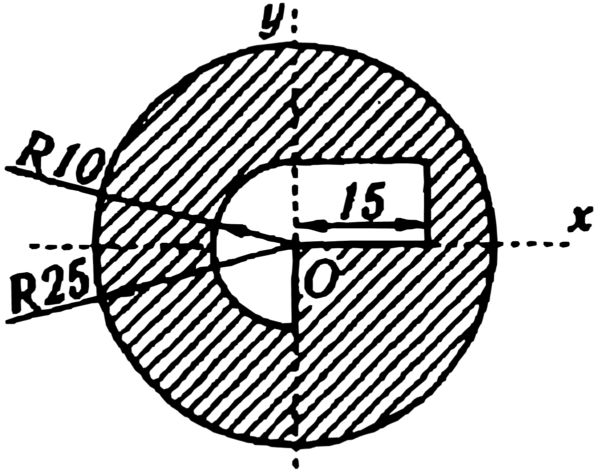
16



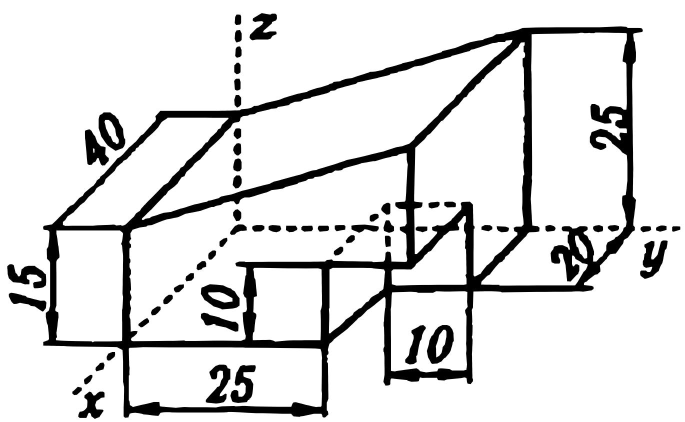
17


y
10
5
45°
20
x
R25
O

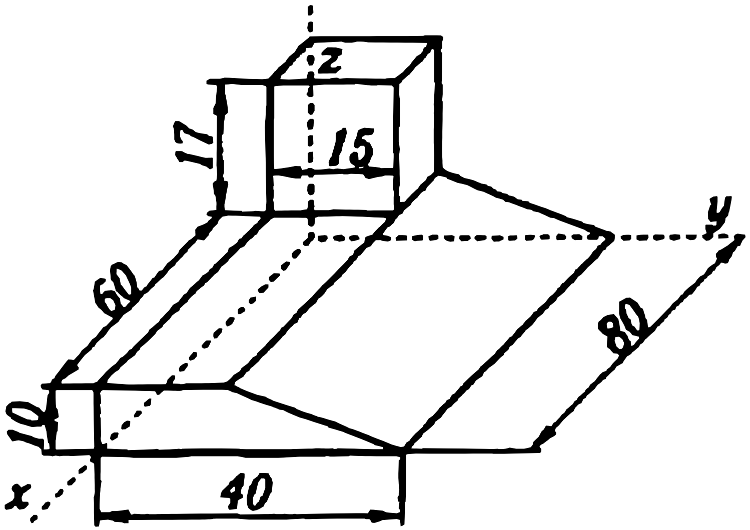
18


y
R10
15
x
R25
O

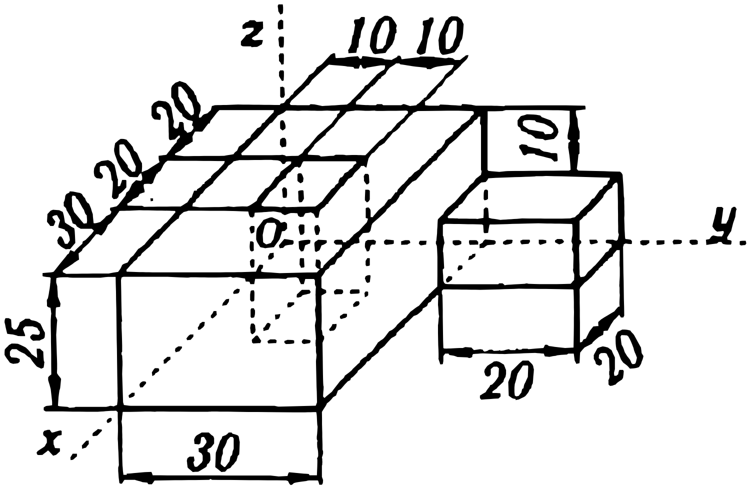
19


z
40
25
15
10
20
y
10
25
x

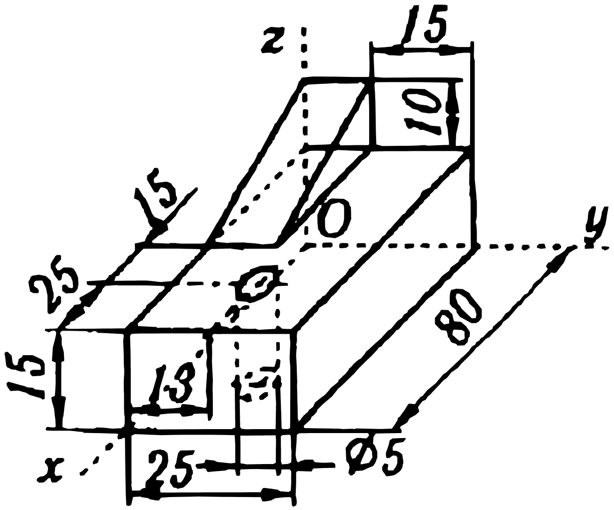
20


z
17
15
y
60
80
10
x
40

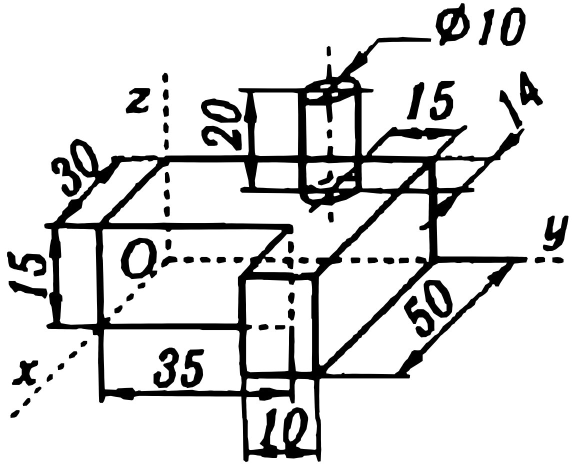
21


z
10 10
20
20
30
10
o
y
25
20
20
x
30

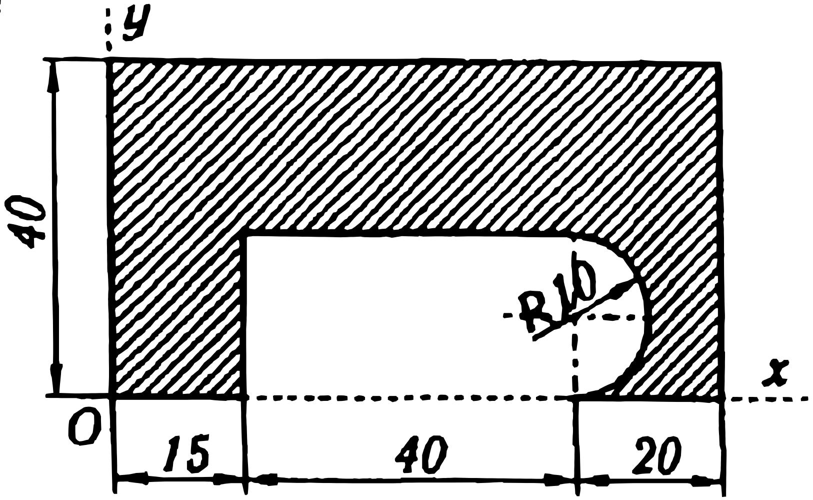
22


z
15
10
15
O
y
25
80
15
13
x
25
Ø5

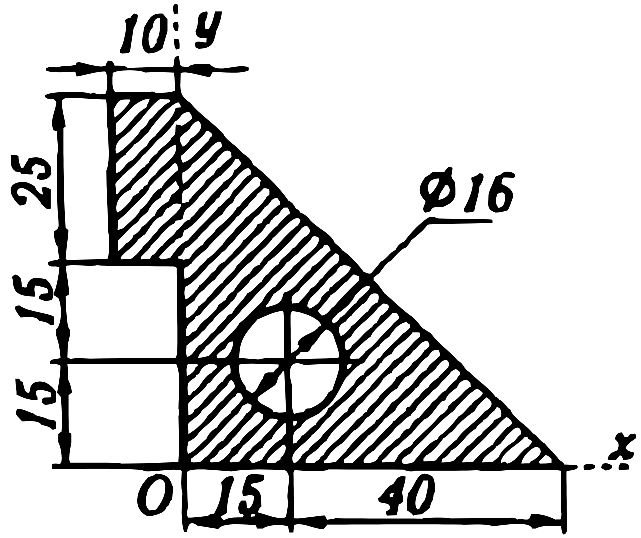
23


Ø10
z
20
15
14
30
O
y
15
50
x
35
10

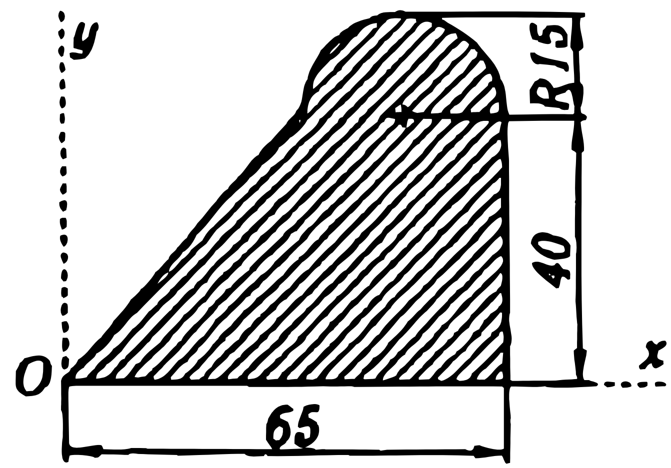
24


y
40
R10
x
O
15
40
20

25

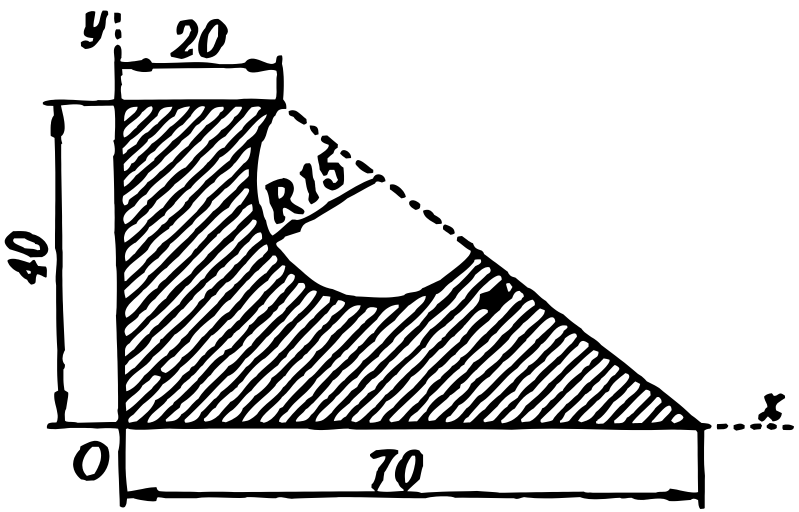


26

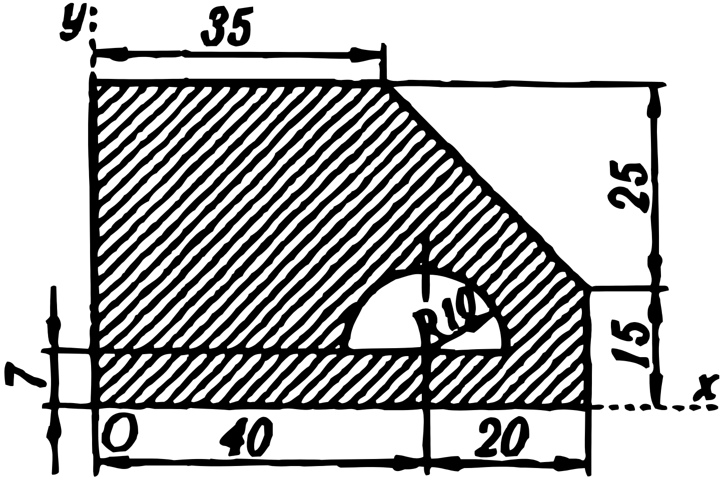


Окончание табл.

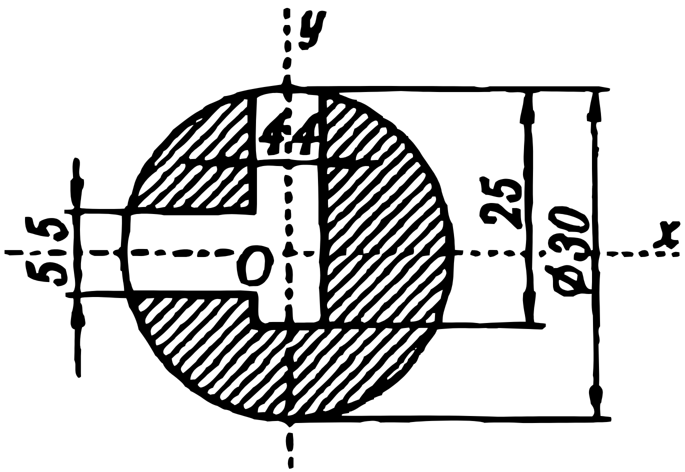
27



28



29



30