УРАЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

Г.Г. Ордуянц
В.Я. Тойбич

РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗОМКНУТЫХ И ЗАМКНУТЫХ ЛИНЕЙНЫХ САР

Екатеринбург
2012

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет»

Кафедра автоматизации производственных процессов

Г.Г. Ордуянц
В.Я. Тойбич

РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗОМКНУТЫХ И ЗАМКНУТЫХ ЛИНЕЙНЫХ САР

Методические указания
по курсам ТАУ и УТС для студентов очной и заочной форм обучения,
специальностей 220301, 220200, 220400, 220700
по дисциплине «Теория автоматического управления»

Екатеринбург
2012

Печатается по рекомендации методической комиссии лесоинженерного факультета.
Протокол № 1 от 8 сентября 2011 г.

Рецензент доцент канд. техн. наук С.П. Санников

Редактор К.В. Корнева
Оператор компьютерной верстки Т.В. Упорова

Подписано в печать 30.10.12		Поз. 11
Печать плоская	Формат 60x84 1/16	Тираж 10 экз.
Заказ №	Печ. л. 1,39	Цена р. к.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

Введение

Настоящие методические указания входят в цикл работ, посвященных наиболее сложным и значимым разделам курса теории управления, и направлены на углубленную самостоятельную проработку этих тем студентами. Одним из важнейших требований к проектируемым автоматическим системам является устойчивость этих систем к возмущениям. Именно поэтому так важно овладение методами оценки устойчивости систем.

Все критерии устойчивости разделяются на две группы: алгебраические и частотные. К группе алгебраических относятся критерии Рауса-Гурвица и Вышнеградского. К частотным – критерии Михайлова и Найквиста. В соответствии с этим все задачи, приведенные в этой работе, разбиты тоже на две группы.

Необходимым и достаточным условием устойчивости САР является расположение всех корней характеристического уравнения $H(p)=0$ в левой полуплоскости комплексной плоскости корней.

Критерий Рауса-Гурвица позволяет оценить устойчивость по коэффициентам характеристического уравнения: система устойчива, если определитель Рауса-Гурвица и все его диагональные миноры положительны.

Критерий Вышнеградского справедлив только для систем, описываемых характеристическим уравнением третьего порядка: система устойчива, если все коэффициенты характеристического уравнения положительны и произведение средних коэффициентов больше произведения крайних.

Критерий Михайлова позволяет оценить устойчивость по виду кривой Михайлова: система устойчива, если кривая Михайлова начинается на положительной вещественной оси, с ростом частоты поворачивается против часовой стрелки, последовательно проходит n квадрантов (n – порядок характеристического уравнения), нигде не обращаясь в ноль, и в n-м квадранте уходит в бесконечность.

Достоинством критерия Найквиста является возможность оценки устойчивости замкнутой системы с единичной отрицательной обратной связью (ЕООС) по виду комплексной частотной характеристики (КЧХ) разомкнутой системы: замкнутая система с ЕООС устойчива, если разомкнутая система устойчива или находится на границе устойчивости, и КЧХ разомкнутой системы не охватывает точку с координатами $(-1; j0)$.

Алгебраические критерии устойчивости

Задача 1

Система описывается характеристическим уравнением следующего вида:

$$H(p) = p^3 + 2p^2 + 2p + 1 = 0.$$

Оценить устойчивость системы.

Решение:

найдем корни характеристического уравнения, выделив первое приближение $p + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
p^3+2p^2+2p+1 & p+1 \\ \cline{2-2}
-\underline{p^3+p^2} & p^2+p+1 \\
p^2+2p & \\
-\underline{p^2+p} & \\
p+1 & \\
-\underline{p+1} & \\
0 &
\end{array}$$

Получим $H(p) = (p+1)(p^2 + p + 1) = 0$,

отсюда: $p_1 = -1$, $p_{2,3} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 - 1} = -0{,}5 \pm j0{,}86$.

Все корни имеют отрицательные вещественные части. Следовательно, система устойчива.

Задача 2

Система описывается характеристическим уравнением:

$$H(p) = 5p^3 + 2p^2 + 2p + 1 = 0.$$

Оценить устойчивость системы.

Решение:

найдем корни характеристического уравнения, беря за первое приближение $p + 0{,}5$.

$$\begin{array}{r|l}
5p^3+2p^2+2p+1 & p+0{,}5 \\ \cline{2-2}
-\underline{5p^3+2{,}5p^2} & 5p^2-0{,}5p+2{,}25 \\
-0{,}5p^2+2p & \\
-\underline{-0{,}5p^2-0{,}25p} & \\
2{,}25p+1 & \text{второе приближение} \\
-\underline{2{,}25p+1{,}125} & \\
-0{,}125 & \text{остаток, превышающий 5\% от последнего члена уравнения}
\end{array}$$

Возьмем в качестве второго приближения $p+0{,}45$.

$$
\begin{array}{l|l}
\;\;\,5p^3+2p^2+2p+1 & p+0{,}45 \\ \cline{2-2}
-\,\underline{5p^3+2{,}25p^2} & 5p^2-0{,}25p+2{,}113 \\
\qquad -0{,}25p^2+2p & \\
\qquad -\,\underline{-0{,}25p^2-0{,}113p} & \\
\qquad\qquad 2{,}113p+1 & \\
\qquad\qquad -\,\underline{2{,}113p+0{,}951} & \\
\qquad\qquad\qquad 0{,}049 & \text{остаток менее 5\% от 1}
\end{array}
$$

Таким образом, исходное уравнение можно заменить произведением $H(p)=(p+0{,}45)(5p^2-0{,}25p+2{,}113)=0$, которое имеет следующие корни: $p_1=-0{,}45$; $p_{2,3}=0{,}025\pm j0{,}647$.

Система неустойчива, т.к. второй и третий корни имеют положительные вещественные части.

Задача 3

Передаточная функция разомкнутой системы $W(p)=\dfrac{K}{p(Tp+1)}$.

Найти условие устойчивости замкнутой системы.

Решение:

найдем передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_з(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}=\frac{K}{p(Tp+1)+K}=\frac{K}{Tp^2+p+K}=\frac{K}{T\left(p^2+\frac{1}{T}p+\frac{K}{T}\right)}.$$

Замкнутая система будет устойчивой, если все корни характеристического уравнения $H(p)=Tp^2+p+K$ будут иметь отрицательные вещественные части. Найдем корни уравнения $p^2+\dfrac{1}{T}p+\dfrac{K}{T}=0$:

$$p_{1,2}=-\frac{1}{2T}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2T}\right)^2-\frac{K}{T}}.$$

Если под корнем отрицательная величина, т.е. $\dfrac{K}{T}>\dfrac{1}{4T^2}$, то для устойчивости системы достаточно, чтобы $T>0$. Тогда корни будут комплексные, сопряженные с отрицательной вещественной частью.

Если под корнем положительная величина, т.е. $\dfrac{K}{T}<\dfrac{1}{4T^2}$ $\left(K<\dfrac{1}{4T}\right)$, то для устойчивости системы корни должны быть отрицательными.

Из этого следует, что положительное значение корня должно быть меньше $\frac{1}{2T}$:

$$+\sqrt{\left(\frac{1}{2T}\right)^2-\frac{K}{T}}<\frac{1}{2T} \quad \text{или} \quad \sqrt{1-4KT}<1, \text{ из чего следует } 4KT>0,\ K>0.$$

Итак, замкнутая система устойчива при $K>0, T>0$.

Задача 4

Оценить устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p)=\frac{K}{p^2(Tp+1)}.$$

Решение:

найдем передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_з(p)=\frac{W(p)}{W(p)+1}=\frac{K}{p^2(Tp+1)+K}=\frac{K}{p^3T+p^2+K}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$H(p)=Tp^3+p^2+0\,p+K=0.$$

Применим для оценки устойчивости системы критерий Вышнеградского. Согласно ему все коэффициенты характеристического уравнения для системы третьего порядка должны быть положительны и произведение средних коэффициентов должно быть больше произведения крайних.

Нетрудно видеть, что это условие не соблюдается ни при каких значениях K и $T\neq 0$, т.е. в замкнутом состоянии система структурно неустойчива.

Задача 5

Система описывается характеристическим уравнением:

$$H(p)=(K_1-K_2)p^3+a_2p^2+a_1p+a_0=0.$$

Оценить устойчивость системы при $K_1=20\ c^3$, $K_2=20\ c^3$, $a_2=10\ c^2$, $a_1=5\ c$, $a_0=30$.

Решение:

коэффициент при старшем члене уравнения $a_3=K_1-K_2$. При $a_3>0$ и $a_2a_1>a_3a_0$ система устойчива. При $a_3<0$ система неустойчива. В нашем случае $a_3=K_1-K_2=20-20=0$, следовательно, система находится на границе устойчивости.

Задача 6

Система описывается характеристическим уравнением следующего вида: $H(p) = \left(a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0\right)p = 0$.

Оценить устойчивость системы при $a_3 = 10\,c^4$, $a_2 = 2\,c^3$, $a_1 = 4\,c^2$, $a_0 = 1\,c$.

Решение:

из уравнения видно, что один из корней равен нулю. Система будет находится на границе устойчивости, если все остальные корни будут лежать в левой полуплоскости комплексной плоскости корней. Для этого оставшаяся часть уравнения (в скобках) должна удовлетворять условию положительности всех коэффициентов и $a_2 a_1 > a_3 a_0$.

Из условия задачи видно, что при положительности всех коэффициентов $a_2 a_1 - a_3 a_0 = 2 \cdot 4 - 10 \cdot 1 < 0$. Следовательно, система неустойчива.

Задача 7

Структурная схема системы изображена на рисунке 1.

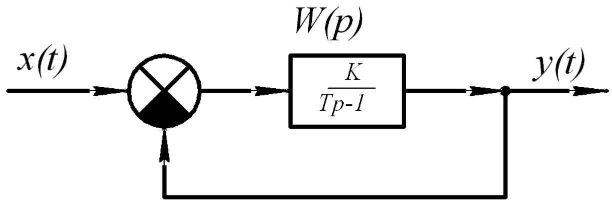

Рис. 1. Структурная схема системы

Коэффициент передачи $K > 0$, постоянная времени $T > 0$.

Оценить устойчивость разомкнутой и замкнутой систем.

Решение:

разомкнутая система неустойчива, т.к. имеет положительный корень $p_1 = \dfrac{1}{T}$.

Для оценки устойчивости замкнутой системы найдем ее передаточную функцию:

$$W_з(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K}{Tp - 1 + K}.$$

Корень характеристического уравнения ($H(p) = Tp + K - 1 = 0$) этой системы ($p_1 = \dfrac{1-K}{T}$) будет отрицательным, а сама замкнутая система устойчивой, если $K > 1$.

Задача 8

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{p^2 (T_2 p + 1)}.$$

Определить условие устойчивости замкнутой системы.

Решение:

Найдем передаточную функцию замкнутой системы.

$$W_з(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K(T_1 p + 1)}{p^3 T_2 + p^2 + K T_1 p + K}.$$

Система будет устойчивой, если $(K, T_1, T_2) > 0$ и $KT_1 > KT_2$, из чего следует $T_1 > T_2$.

Задача 9

Структурная схема гидростабилизатора изображена на рисунке 2. Параметры $K_1 = 25\, c^{-1}$, $T_1 = 0{,}01\,\text{с}$, $K_2 = 1$.

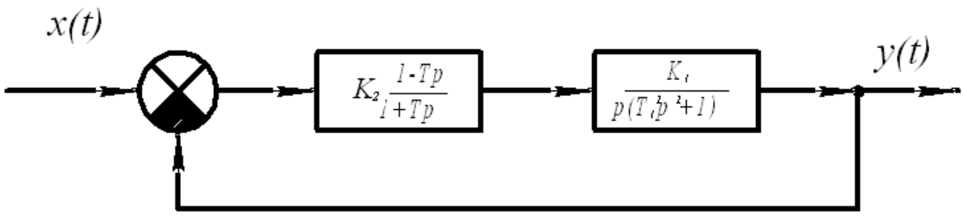

Рис. 2. Структурная схема гидростабилизатора

Оценить величину постоянной времени T корректирующего звена, при которой система устойчива.

Решение:

найдем передаточную функцию замкнутой системы.

$$W_з(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{\dfrac{K_1 K_2 (1 - Tp)}{p(1 + Tp)(T_1^2 p^2 + 1)}}{1 + \dfrac{K_1 K_2 (1 - Tp)}{p(1 + Tp)(T_1^2 p^2 + 1)}} =$$

$$= \frac{K_1 K_2 (1 - Tp)}{T_1^2 T p^4 + T_1^2 p^3 + T p^2 + p(1 - K_1 K_2 T) + K_1 K_2}.$$

Для оценки устойчивости применим критерий Гурвица. Для этого составим определитель Гурвица и потребуем положительности его и всех его диагональных миноров.

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} T_1^2 & 1-K_1K_2T & 0 & 0 \\ T_1^2T & T & K_1K_2 & 0 \\ 0 & T_1^2 & 1-K_1K_2T & 0 \\ 0 & T_1^2 & T & K_1K_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\Delta_1 = T_1^2 > 0\,;\ \Delta_2 = T_1^2T - T_1^2T(1-K_1K_2T) > 0\,.$$

Сокращая в выражении для Δ_2 на T_1^2T, получим условие $K_1K_2T > 0$, откуда $T > 0$.

$$\Delta_3 = T_1^2T(1-K_1K_2T) - T_1^4K_1K_2 - T_1^2T(1-K_1K_2T)^2 > 0$$

Решение последнего неравенства дает соотношение между K_1K_2 и постоянными T_1 и T_2, при которых $\Delta_3 > 0$:

$$K_1K_2 < \frac{1}{T} - \frac{T_1^2}{T^3} = \frac{T^2 - T_1^2}{T^3}\,.$$

При этом же условии $\Delta_4 > K_1K_2\Delta_3$.

Итак, гидростабилизатор устойчив при $T > 0$ и $\frac{1}{T} - \frac{T_1^2}{T^3} > K$. С учетом заданных значений K_1, K_2 и T_1 гидростабилизатор устойчив, например при $T = 0{,}02$ с.

Задача 10

На рисунке 3 приведена структурная схема автоматической системы. Постоянные времени звеньев $T_1 = 0{,}01$, $T_2 = 0{,}5$, $T_3 = 0{,}05$с.

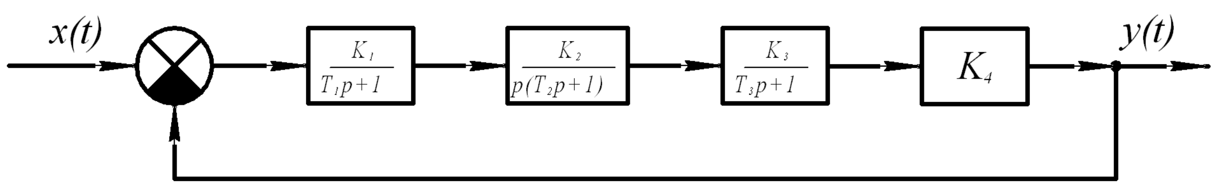

Рис. 3. Структурная схема системы

Определить критическое значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы $K = K_1K_2K_3K_4$, при котором замкнутая система находится на границе устойчивости.

Решение:
найдем передаточную функцию замкнутой системы.

$$W_з(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{K_1K_2K_3K_4}{p(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)+K_1K_2K_3K_4} =$$

$$= \frac{K}{T_1T_2T_3p^4 + p^3(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)+p^2(T_1+T_2+T_3)+p+K} =$$

$$= \frac{K}{2{,}5\cdot10^{-4}p^4 + 3{,}05\cdot10^{-2}p^3 + 5{,}6\cdot10^{-1}p^2 + p + K}.$$

Оценим устойчивость по критерию Гурвица.

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} 3{,}05\cdot10^{-2} & 1 & 0 & 0 \\ 2{,}5\cdot10^{-4} & 5{,}6\cdot10^{-1} & K & 0 \\ 0 & 3{,}05\cdot10^{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 2{,}5\cdot10^{-4} & 5{,}6\cdot10^{-1} & K \end{bmatrix} > 0$$

$$\Delta_1 = 3{,}05\cdot10^{-2} > 0$$

$$\Delta_2 = 3{,}05\cdot10^{-2}\cdot5{,}6\cdot10^{-1} - 2{,}5\cdot10^{-4} = 17{,}08\cdot10^{-3} - 0{,}25\cdot10^{-3} > 0$$

$$\Delta_3 = 3{,}05\cdot10^{-2}\cdot5{,}6\cdot10^{-1} - 2{,}5\cdot10^{-4} - (3{,}05\cdot10^{-2})^2K > 0$$

Последнее неравенство выполняется при $K < 18{,}09$. Для того чтобы система находилась на границе устойчивости, надо чтобы $\Delta_3 = 0$, из чего следует $K = 18{,}09\ c^{-1}$.

Задача 11

Структурная схема электромеханической следящей системы изображена на рисунке 4.
Коэффициент передачи измерительного элемента $K_{И.Э} = 1$ В/град= 57,3 рад, коэффициент усиления усилителя $K_У = 1000$, коэффициент передачи двигателя $K_Д = 50$ рад/В·сек, коэффициент передачи редуктора $K_Р = 10^{-3}$. Постоянная времени двигателя $T_М = 0{,}05$ с, постоянная времени усилителя $T_У = 0{,}005$ с.

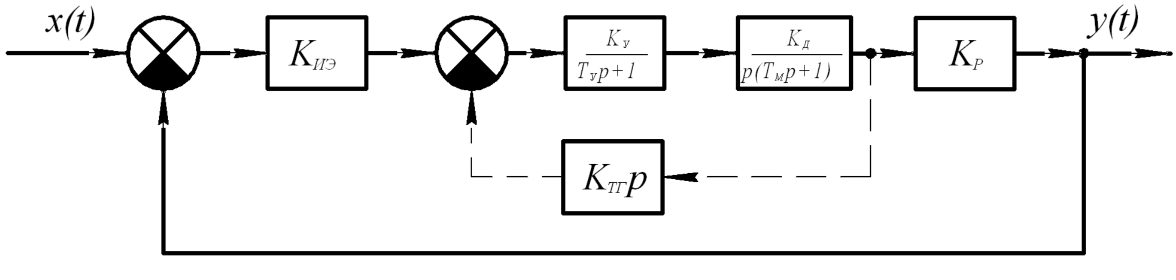

Рис. 4. Структурная схема электромеханической системы

Оценить: а) устойчивость системы в отсутствии тахогенераторной обратной связи; б) значение коэффициента передачи $K_{ТГ}$ тахогенератора, при котором следящая система устойчива.

Решение:

А. Найдем передаточную функцию замкнутой системы в отсутствии тахогенераторной обратной связи.

$$W_З(p) = \frac{K_{И.Э}K_У K_Д K_Р}{p(T_У p+1)(T_М p+1) + K_{И.Э}K_У K_Д K_Р} =$$

$$= \frac{57{,}3 \cdot 1000 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{p(0{,}005p+1)(0{,}5p+1) + 57{,}3 \cdot 1000 \cdot 50 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= \frac{2865}{2{,}5 \cdot 10^{-3} p^3 + 0{,}505p^2 + p + 2865}.$$

Характеристическое уравнение системы:

$$H(p) = 2{,}5 \cdot 10^{-3} p^3 + 0{,}505p^2 + p + 2865 = 0.$$

Для устойчивости системы при положительности всех коэффициентов необходимо, чтобы произведение средних коэффициентов было больше произведения крайних.

В нашем случае $0{,}505 \cdot 1 < 2865 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} = 7{,}16$.

Следовательно, в этом случае система неустойчива.

Б. Найдем передаточную функцию замкнутой системы с тахогенераторной обратной связью.

$$W_З(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)},$$

где

$$W_{раз}(p) = K_{И.Э}K_Р \frac{\dfrac{K_У K_Д}{p(T_У p+1)(T_М p+1)}}{1 + \dfrac{K_У K_Д K_{ТГ} p}{p(T_У p+1)(T_М p+1)}} = \frac{K_{И.Э}K_Р K_У K_Д}{p((T_У p+1)(T_М p+1) + K_У K_Д K_{ТГ})}.$$

Подставив это выражение в передаточную функцию замкнутой системы, получим:

$$W_З(p) = \frac{K_{И.Э}K_Р K_У K_Д}{p((T_У p+1)(T_М p+1) + K_У K_Д K_{ТГ}) + K_{И.Э}K_Р K_У K_Д}.$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$H(p) = T_У T_М p^3 + (T_У + T_М)p^2 + p(1 + K_У K_Д K_{ТГ}) + K_{И.Э}K_Р K_У K_Д.$$

Для устойчивости системы необходима положительность всех коэффициентов этого уравнения и произведение средних коэффициентов должно быть больше произведения крайних. Первое соблюдается, т.к. $K_{ТГ} > 0$. Из второго $(T_У + T_М)(1 + K_У K_Д K_{ТГ}) > T_У T_М K_{И.Э} K_Р K_У K_Д$ следует:

$$K_{ТГ} > \frac{T_У T_М K_{И.Э} K_Р K_У K_Д - (T_У + T_М)}{K_У K_Д (T_У + T_М)} = \left[\frac{K_{И.Э} K_Р K_У K_Д}{\dfrac{1}{T_М} + \dfrac{1}{T_У}} - 1 \right] (K_У K_Д)^{-1}.$$

Подставляя заданные значения коэффициентов передачи и постоянных времени, получим значение $K_{ТГ}$, при котором замкнутая система устойчива: $K_{ТГ} > 2{,}4 \cdot 10^{-3} \dfrac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{рад}}$.

Частотные критерии

Задача 12

Оценить устойчивость системы с помощью критерия Михайлова, если характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$H(p) = 0{,}04p^3 + 0{,}5p^2 + 2p + 8 = 0.$$

Решение:
найдем выражение $H(j\omega)$, заменив p на $j\omega$ в уравнении $H(p)$.

$$H(j\omega) = 0{,}04(j\omega)^3 + 0{,}5(j\omega)^2 + 2j\omega + 8 = -j0{,}04\omega^3 - 0{,}5\omega^2 + 2j\omega + 8 =$$
$$= (8 - 0{,}5\omega^2) + j\omega(2 - 0{,}04\omega^2).$$

Построим кривую Михайлова, геометрическое место концов векторов $H(j\omega)$, находя ее пересечения с осями комплексной плоскости.

Пересечения с вещественной осью имеют место при тех значениях частот, при которых мнимая часть $H(j\omega)$ равна нулю:
$\omega(2 - 0{,}04\omega^2) = 0$, откуда, с$^{-1}$,

$$\omega_1 = 0;\ \omega_2 = +\sqrt{\frac{2}{0{,}04}} = \sqrt{50} = 7{,}07.$$

Координаты пересечения находим, подставляя найденные значения частот, ω_1 и ω_2 в $H(j\omega)$:

$$H(j0) = 8;\ H(j7{,}07) = 8 - 0{,}5 \cdot 50 = -17.$$

Аналогично находим координаты пересечения кривой Михайлова с мнимой осью:

$$8 - 0{,}5\omega^2 = 0; \qquad \omega_3 = +\sqrt{\frac{8}{0{,}5}} = 4\ \text{с}^{-1}; \qquad H(j4) = j4(2 - 0{,}04 \cdot 4^2) = j5{,}44.$$

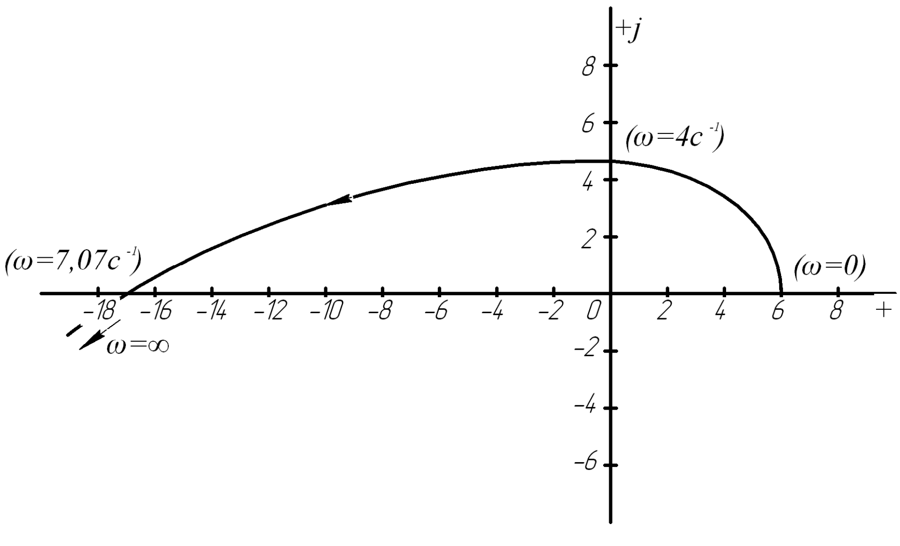

Рис. 5. Кривая Михайлова к задаче 12

На рисунке 5 изображена кривая Михайлова. Видно, что она начинается на положительной вещественной оси, с ростом частоты поворачивается в положительном направлении, проходит последовательно три квадранта, нигде не обращаясь в ноль, и в третьем квадранте уходит в бесконечность. Следовательно, система устойчива.

Задача 13

Система описывается характеристическим уравнением вида:

$$H(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Оценить устойчивость системы по критерию Михайлова для следующих значений параметров:

а) $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$;

б) $a_0 = 8$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$.

Решение:

А. Найдем выражение $H(j\omega)$.

$$H(j\omega) = (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 3j\omega + 4 = -j\omega^3 - 2\omega^2 + 3j\omega + 4 =$$
$$= (4 - 2\omega^2) + j\omega(3 - \omega^2) = A(\omega) + jB(\omega)$$

Задаваясь значениями ω, найдем $A(\omega)$ и $B(\omega)$. Данные расчета помещены в таблице 1.

Таблица 1

Расчетные данные для нахождения $A(\omega)$ и $B(\omega)$

ω, с$^{-1}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$A(\omega)$	4	3,5	2	-0,5	-4	-8,5
$B(\omega)$	0	1,38	2	1,13	-2	-8,13

По данным расчета строим кривую Михайлова (рис. 6).

Из анализа кривой видно, что система при этих значениях параметров устойчива.

Б. Найдем выражение $H(j\omega)$ для другого набора параметров.

$$H(j\omega) = (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 3j\omega + 8 = -j\omega^3 - 2\omega^2 + 3j\omega + 8 =$$
$$= (8 - 2\omega^2) + j\omega(3 - \omega^2) = A(\omega) + jB(\omega)$$

Данные по расчету $A(\omega)$ и $B(\omega)$ для различных значений частот сведены в таблице 2.

Таблица 2

Данные для различных значений частот

ω, с$^{-1}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$A(\omega)$	8	6	2	3,5	0	-4,5
$B(\omega)$	0	1,38	2	1,13	-2	-8,13

По данным расчета строим кривую Михайлова (рис. 7).

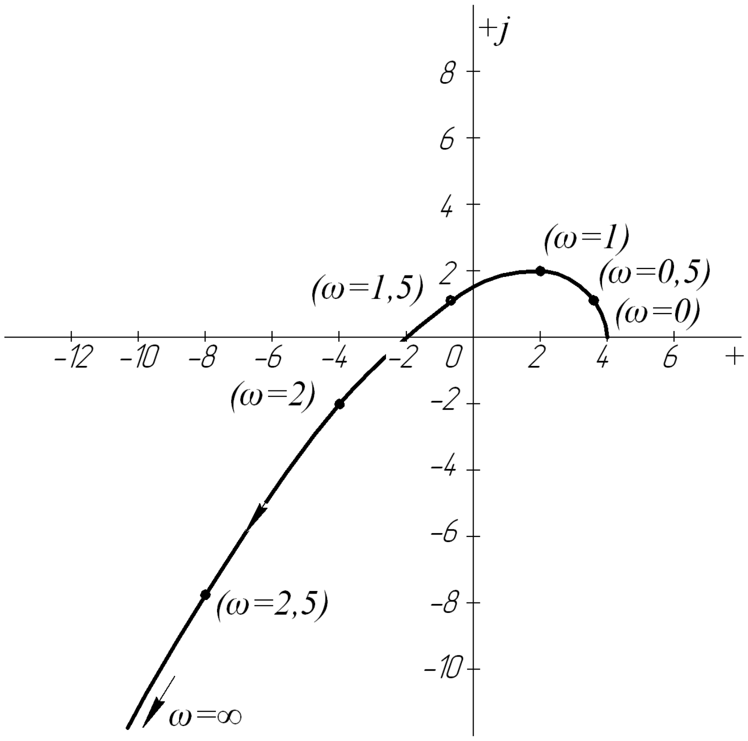

Рис. 6. Кривая Михайлова к задаче 13А

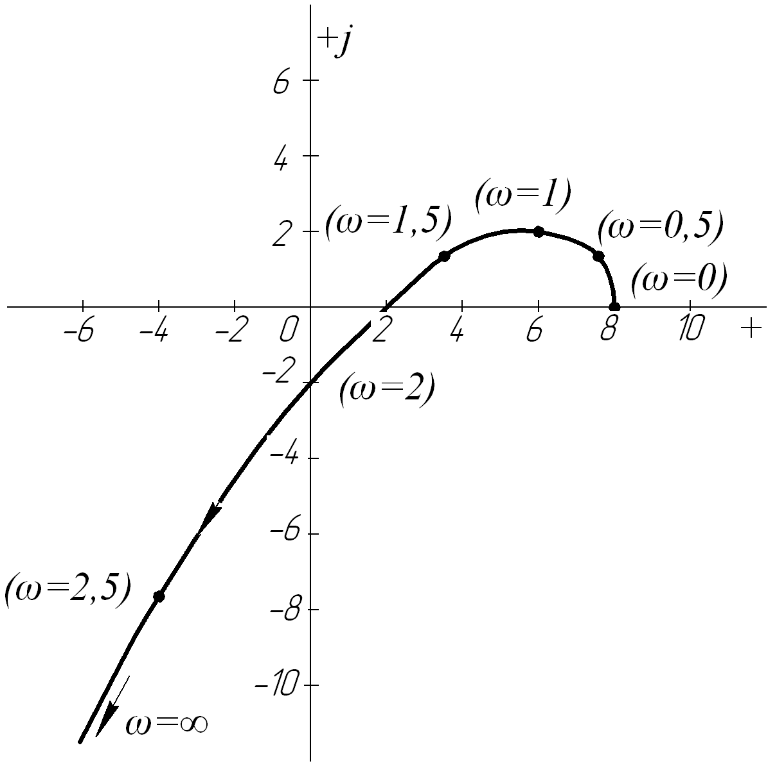

Рис. 7. Кривая Михайлова к задаче 13Б

Из анализа кривой видно, что система с таким набором параметров неустойчива, т.к. нарушен порядок прохождения квадрантов.

Задача 14

На рисунке 8 изображена структурная схема системы. Оценить устойчивость системы по критерию Михайлова.

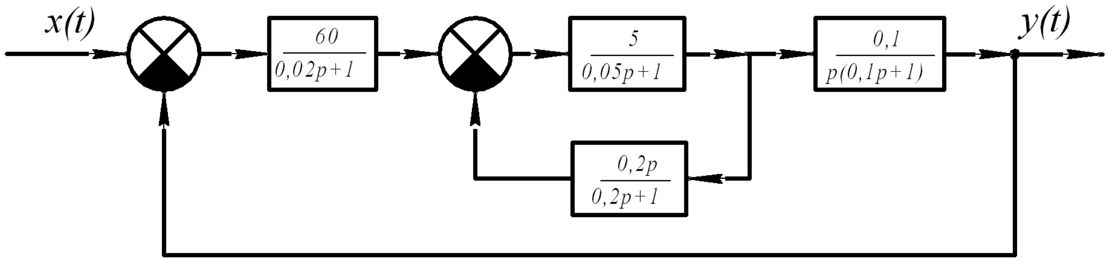

Рис. 8. Структурная схема системы

Решение:
найдем передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем.

$$W_{раз}(p) = \frac{60}{0{,}02p+1} \cdot \frac{\dfrac{5}{0{,}05p+1}}{1+\dfrac{5}{0{,}05p+1} \cdot \dfrac{0{,}2p}{0{,}2p+1}} \cdot \frac{0{,}1}{p(0{,}1p+1)} =$$

$$= \frac{60}{0{,}02p+1} \cdot \frac{0{,}1}{p(0{,}1p+1)} \cdot \frac{5(0{,}2p+1)}{(0{,}05p+1)(0{,}2p+1)+p} =$$

$$= \frac{30(0{,}2p+1)}{2 \cdot 10^{-5}p^5 + 3{,}7 \cdot 10^{-3}p^4 + 0{,}16p^3 + 1{,}37p^2 + p}$$

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1+W_{раз}(p)} = \frac{30(0{,}2p+1)}{2 \cdot 10^{-5}p^5 + 3{,}7 \cdot 10^{-3}p^4 + 0{,}16p^3 + 1{,}37p^2 + 7p + 30}$$

Оценим устойчивость замкнутой системы, используя условие чередования корней вещественной и мнимой частей функции $H_{зам}(j\omega)$.

$$H_{зам}(p) = 2 \cdot 10^{-5}(j\omega)^5 + 3{,}7 \cdot 10^{-3}(j\omega)^4 + 0{,}16(j\omega)^3 + 1{,}37(j\omega)^2 + 7j\omega + 30 =$$

$$= (30 - 1{,}37\omega^2 + 3{,}7 \cdot 10^{-3}\omega^4) + j\omega(7 - 0{,}16\omega^2 + 2 \cdot 10^{-5}\omega^4) = A(\omega) + jB(\omega).$$

Находим корни $A(\omega) = 0$ и $B(\omega) = 0$ (все $\omega > 0$).

$30 - 1{,}37\omega^2 + 3{,}7 \cdot 10^{-3}\omega^4 = 0$;	$\omega(z - 0{,}16\omega^2 + 2 \cdot 10^{-5}\omega^4) = 0$;
$\omega_1 = 18{,}6$ с$^{-1}$;	$\omega_3 = 0$;
$\omega_2 = 4{,}48$ с$^{-1}$;	$\omega_4 = 89$ с$^{-1}$;
	$\omega_5 = 6{,}3$ с$^{-1}$.

Расположим эти корни на числовой оси частот, обозначая корни вещественной части кружочками, корни мнимой части — звездочками (рис. 9).

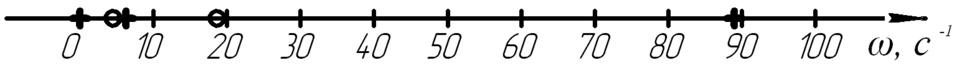

Рис. 9. Расположение корней вещественной и мнимой частей функции $H_{зам}(j\omega)$

Из рисунка 9 видно, что замкнутая система устойчива, т.к. корни вещественной и мнимой частей функции $H_{зам}(j\omega)$ чередуются.

Задача 15

Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$W(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

где $K = 80\ \text{с}^{-1}$,

$T_1 = 0{,}02\ \text{с}$,

$T_2 = 0{,}03\ \text{с}$.

С помощью критерия Найквиста оценить устойчивость замкнутой системы.

Решение:

найдем выражение $W(j\omega)$ для разомкнутой системы, по которой можно построить комплексную частотную характеристику (КЧХ).

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)} =$$

$$= \underbrace{\frac{K}{\omega\sqrt{T_1\omega^2 + 1}\sqrt{T_2\omega^2 + 1}}}_{A(\omega)} \underbrace{\angle(-90^\circ - \text{arctg}T_1\omega - \text{arctg}T_2\omega)}_{\varphi(\omega)} =$$

$$= \frac{80}{\omega\sqrt{(4\cdot 10^{-4}\omega^2 + 1)(9\cdot 10^{-4}\omega^2 + 1)}} \angle(-90^\circ - \text{arctg}0{,}02\omega - \text{arctg}0{,}03\omega).$$

Задавая значения частоты, получим значения $W(j\omega_k)$, концы которых опишут КЧХ. Данные расчета сведены в таблице 3.

Таблица 3

Расчетные данные для построения КЧХ

ω, с$^{-1}$	0	10	20	30	50	100	∞
$A(\omega)$	∞	7,5	3,2	1,7	0,63	0,11	0
$\varphi(\omega)$	-90°	118°	-143°	-163°	-191°	-226°	-270°

По данным таблицы построена КЧХ (рис. 10).

Нетрудно увидеть, что КЧХ не охватывает точку $M(-1; j0)$. Следовательно, замкнутая система устойчива.

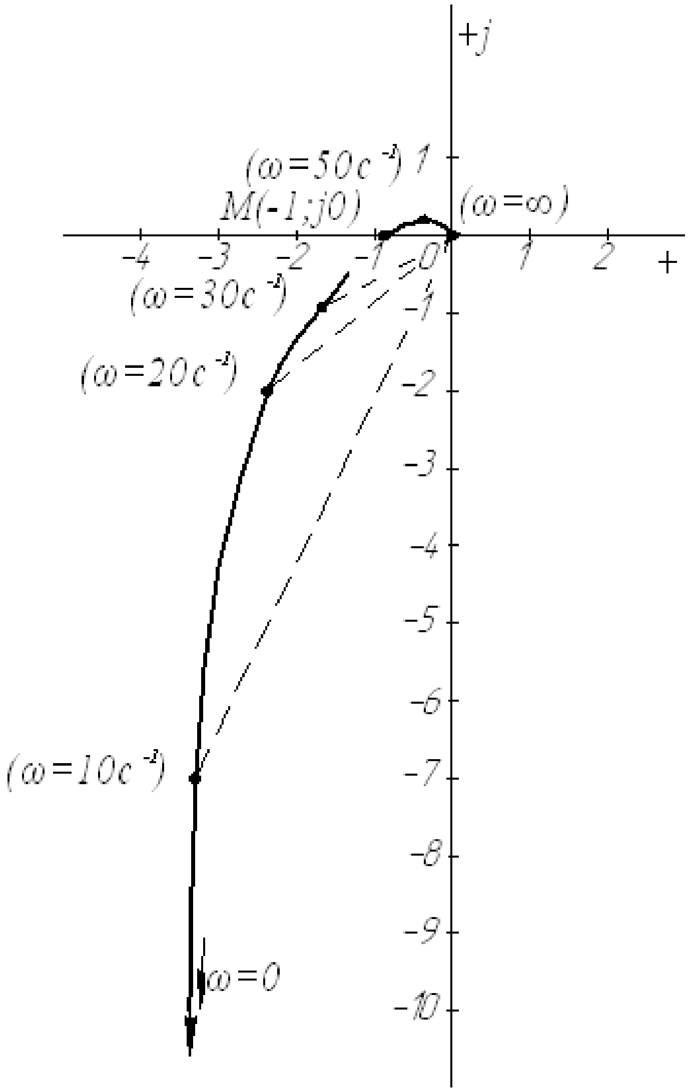

Рис. 10. Комплексная частотная характеристика разомкнутой системы

Задача 16

Передаточная функция автоматической системы в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$$

где $K = 10$,

$T_1 = 0{,}07$ с,

$T_2 = 0{,}035$ с,

$T_3 = 0{,}18$ с.

Оценить устойчивость системы в замкнутом состоянии.

Решение.

Запишем:

$$W(j\omega)=\frac{10}{(0{,}07j\omega+1)(0{,}035j\omega+1)(0{,}18j\omega+1)}=$$

$$=\frac{10}{\sqrt{49\cdot10^{-4}\omega^2+1}\sqrt{12{,}3\cdot10^{-4}\omega^2+1}\sqrt{0{,}032\omega^2+1}}\angle(-\mathrm{arctg}\,0{,}07\omega-$$

$$-\mathrm{arctg}\,0{,}035\omega-\mathrm{arctg}\,0{,}18\omega).$$

Найдем частоту ω_1, при которой фаза $\varphi(\omega_1)=-180^\circ$. Эта частота есть решение трансцендентного уравнения:

$$-\mathrm{arctg}\,0{,}07\omega_1-\mathrm{arctg}\,0{,}035\omega_1-\mathrm{arctg}\,0{,}18\omega_1=-180^\circ$$

и может быть получена приближенно: $\omega_1=25\ \text{с}^{-1}$.

Если модуль $A(\omega_1)<1$, то замкнутая система устойчива, если $A(\omega_1)>1$ — неустойчива, если $A(\omega_1)=0$ — система находится на границе устойчивости.

Оценим модуль:

$$A(\omega_1)=\frac{10}{\sqrt{49\cdot10^{-4}\cdot25^2+1}\sqrt{12{,}3\cdot10^{-4}\cdot25^2+1}\sqrt{0{,}032\cdot25^2+1}}=0{,}81<1.$$

Следовательно, замкнутая система устойчива.

Задача 17

Определить устойчивость замкнутой следящей системы методом логарифмических характеристик, если задана передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{раз}(p)=\frac{40}{p(0{,}01p+1)(0{,}02p+1)}.$$

Решение:

для построения амплитудной и фазовой частотных характеристик определяем сопрягающие частоты:

$$\omega_{C1}=\frac{1}{T_1}=\frac{1}{0{,}01}=100\ \text{с}^{-1},\qquad \omega_{C2}=\frac{1}{T_2}=\frac{1}{0{,}02}=50\ \text{с}^{-1},$$

$$\lg\omega_{C1}=2,\qquad \lg\omega_{C2}=1{,}69,$$

а также $20\lg K=20\lg 40=32{,}8$ дБ.

По этим данным строим логарифмическую амплитудно-частотную характеристику $L(\omega)=f(\lg\omega)$ (рис. 11).

На фоне амплитудной характеристики строим логарифмическую фазочастотную характеристику (ЛФЧХ) по выражению:

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \mathrm{arctg}0{,}01\omega - \mathrm{arctg}0{,}02\omega\ .$$

Данные расчета $\varphi(\omega)$ для различных значений частоты сведены в таблицу 4.

Таблица 4

Данные расчета $\varphi(\omega)$

ω, с$^{-1}$	0	0,1	10	50	80	100	500	∞
$\varphi(\omega)$, град	-90°	$-90{,}2^\circ$	-107°	$-161{,}5^\circ$	-185°	-198°	-253°	-270°

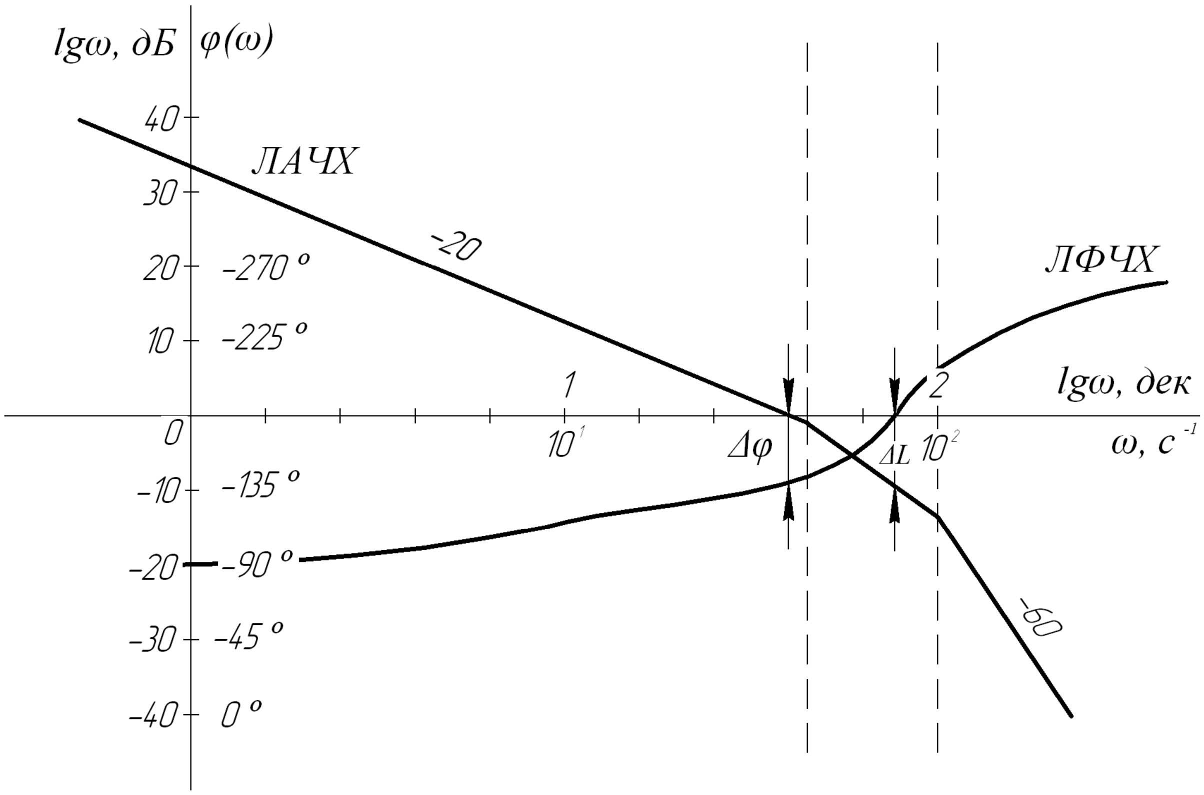

Рис. 11. Логарифмические частотные характеристики – амплитудная и фазовая

Как видно из рисунка 11, замкнутая система устойчива, т.к. фазе $\varphi(\omega^*) = -180^\circ$ соответствует $L(\omega^*) < 0$. При этом запас устойчивости по модулю составляет $\Delta L \approx 8$ дБ, по фазе $\Delta\varphi \approx 31^\circ$.

Список рекомендуемой литературы

1. Гальперин, М.В. Автоматическое управление [Текст] / М.В. Гальперин. – М.: ИНФА-М: ФОРУМ, 2007.
2. Ким, Д.П. Теория автоматического управления [Текст] / Д.П. Ким. – М.: Физматлит. Т. 1. 2003.
3. Лукас, В.А. Теория автоматического управления [Текст] / В.А. Лукас: учебн. [для вузов]. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 2004.
4. Ким, Д.П. Сборник задач по теории автоматического регулирования. Линейные системы [Текст] / Д.П. Ким, Н.Д. Дмитриева. – М.: Физматлит, 2007.
5. Теория автоматического управления [Текст]: учебн. [для вузов]. В 2 ч. / под ред. А.А. Воронова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1986.
6. Теория автоматического управления [Текст]: учебн. [для вузов]. В 2 ч. / под ред. В.А. Нетушила. – 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Высшая школа, 1976.
7. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления [Текст]: учеб. пособие [для вузов] / под ред. В.А. Бесекерского. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1978.