УРАЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

Г.Г. Ордуянц
В.Я. Тойбич

ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЗВЕНЬЕВ

Екатеринбург
2012

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет»

Кафедра автоматизации производственных процессов

Г.Г. Ордуянц
В.Я. Тойбич

ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЗВЕНЬЕВ

Методические указания
для самостоятельной работы студентов
специальности 220301, 220200, 220400, 220700
по дисциплине «Теория автоматического управления»

Екатеринбург
2012

Печатается по рекомендации методической комиссии лесоинженерного факультета.
Протокол № 1 от 8 сентября 2011 г.

Рецензент доцент канд. техн. наук С.П. Санников

Редактор К.В. Корнева
Оператор компьютерной верстки Т.В. Упорова

Подписано в печать 23.10.12		Поз. 15
Печать плоская	Формат 60х84 1/16	Тираж 10 экз.
Заказ №	Печ. л. 0,93	Цена 5 р. 12 к.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

Задача 1

Какое динамическое звено имеет весовую функцию $W(t) = 5(1 - e^{-2t})$?

Решение. Весовая функция *W(t)* связана с передаточной функцией *W(p)* следующим соотношением:

$$W(p) = \int_0^\infty W(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty 5(1 - e^{-2t})e^{-pt}dt = 5(-\frac{1}{5})e^{-pt}\Big|_0^\infty + \frac{5}{p+2}e^{-t(p+2)}\Big|_0^\infty = \frac{10}{p(p+2)}.$$

Это звено представляет собой последовательное соединение типовых инерционного и интегрирующего звеньев.

Задача 2

Задана переходная функция *h(t)*. Найти передаточную функцию *W(p)* и определить тип звена (рис. 1).

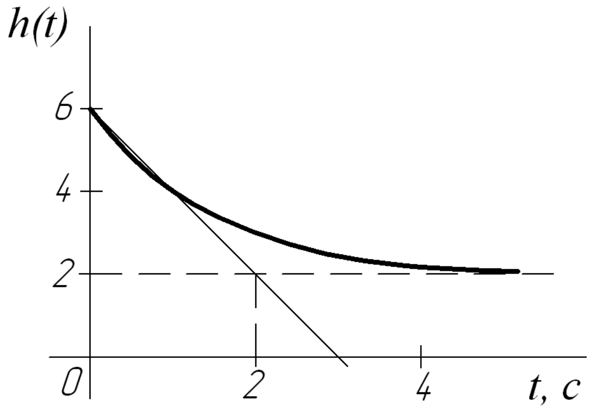

Рис. 1. Переходная функция к задаче 2

Решение. Запишем переходную функцию *h(t)*.

$$h(t) = 2 + 4e^{-t/T},$$

где T – постоянная времени экспоненты, и из графика видно, что $T = 2$ с. Зависимость между *h(t)* и *W(p)* такова:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(p)}{p}\right].$$

Отсюда $\frac{W(p)}{p} = L[h(t)]$,

а $W(p) = pL[h(t)] = p\int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt = p\int_0^\infty (2 + 4e^{-t/2})e^{-pt}dt = 2\frac{6p+1}{2p+1}.$

Звено с такой передаточной функцией можно заменить последовательным соединением типовых форсирующего и инерционного звеньев:

$$W(p) = K\frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1},$$

где K=2, T_1 = 6 с, T_2 = 2 с.

Задача 3

Найти весовую *W(t)* и переходную *h(t)* функции неустойчивого звена, если его передаточная функция равна:

$$W(p) = \frac{5}{0,1p + 1}.$$

Решение. Найдем весовую функцию как обратное преобразование Лапласа от передаточной:

$$W(t) = L^{-1}\left[W(p)\right] = L^{-1}\left[\frac{5}{0,1p - 1}\right] = 50e^{10t},$$

а переходная функция равна:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(p)}{p}\right] = L^{-1}\left[\frac{5}{p(0,1p - 1)}\right] = 5(-1 + e^{10t}).$$

Задача 4

Найти параметры передаточной функции колебательного звена, если его переходная функция имеет вид, изображенный на рисунке 2.

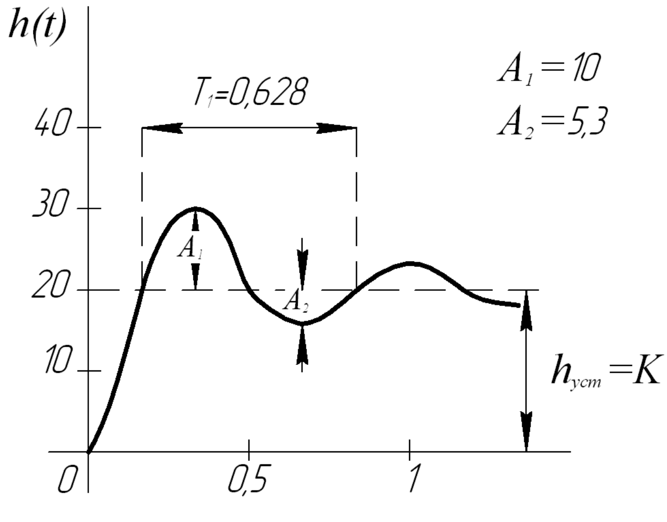

Рис. 2. Переходная функция к задаче 4

Решение. Такого вида переходная функция соответствует звену второго порядка, передаточная функция которого может быть записана так:

$$W(p)=\frac{K}{T^2p^2+2\xi Tp+1}=\frac{K}{T^2p^2+\frac{2\xi}{T}p+\frac{1}{T^2}}=\frac{K\omega_0^2}{p^2+2\delta p+\omega_0^2},$$

где $\omega_0^2=\dfrac{1}{T^2}$ – частота незатухающих колебаний;

$\delta=\xi/T$ – коэффициент затухания.

$$\omega_0^2=\omega_1^2+\delta^2,$$

где ω_1 – частота затухающих колебаний.

Переходная функция $h(t)$ такого звена запишется так:

$$h(t)=K\left[1-e^{-\delta t}\frac{\omega_0}{\omega_1}\sin\,(\omega_1+\mathrm{arctg}\frac{\omega_1}{\delta})\right].$$

Частоту ω_1 (с$^{-1}$) и коэффициент K найдем из графика:

$$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}=\frac{2\pi}{0{,}628}=10,\ \ K=20.$$

Зная амплитуды A_1 и A_3, можно найти коэффициент затухания δ, с$^{-1}$:

$$\frac{A_1}{A_3}=\frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+\frac{\pi}{2})}}=e^{\frac{\delta\pi}{2}},$$

откуда

$$\delta=\frac{2}{T_1}\ln\frac{A_1}{A_3}=\frac{2}{0{,}628}\ln\frac{10}{5{,}3}\approx 2,$$

$$\omega_0=\sqrt{\omega_1^2+\delta^2}=\sqrt{(10)^2+(2)^2}=10{,}2.$$

Передаточная функция имеет вид:

$$W(p)=\frac{2080}{p^2+4p+104}.$$

Задача 5

По переходной функции, изображенной на рисунке 3, определить тип звена и его передаточную функцию. Переходная функция представляет собой сумму линейного и экспоненциального членов.

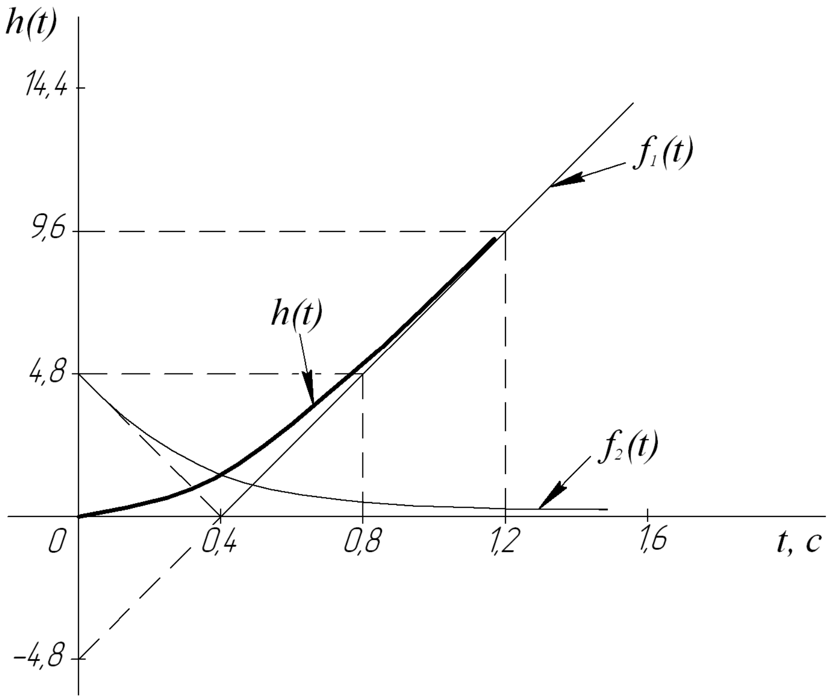

Рис. 3. Переходная функция к задаче 5

Решение. Нетрудно видеть, что функцию *h(t)* можно записать в виде суммы функций:

$$f_1(t) = Kt + A\,,\ f_2(t) = -Ae^{-\frac{t}{T}}\,,$$

где

$$K = \frac{4{,}8}{0{,}8-0{,}4} = 12\ \text{с}^{-1}\,,\ T = 0{,}4\ \text{с},$$

а величина A находится из уравнения:

$$-4{,}8 = K\cdot 0 + A,$$

$$\text{откуда}\ \ A = -\,4{,}8.$$

Итак, $h(t) = 12t - 4{,}8 + 4{,}8e^{-\frac{t}{0{,}4}} = 12t - 4{,}8(1 - e^{-\frac{t}{0{,}4}})$.

Известно, что:

$$\frac{W(p)}{p} = L[h(t)] = L\left[12t - 4{,}8(1-e^{-\frac{t}{0{,}4}})\right] = \int_0^\infty 12te^{-pt}dt - 4{,}8\int_0^\infty e^{-pt}dt + 4{,}8\int_0^\infty e^{-\frac{t}{0{,}4}}e^{-pt}dt =$$

$$= \frac{12}{p^2(0{,}4p+1)}\,.$$

Отсюда:

$$W(p) = \frac{12p}{p^2(0{,}4p+1)} = \frac{12}{p(0{,}4p+1)}\,.$$

По виду передаточной функции можно определить это звено как последовательное соединение интегрального и инерционного звеньев.

Задача 6

Как изменятся постоянные времени, коэффициент передачи, время и форма переходного процесса апериодического звена второго порядка или колебательного звена, изображенного на рисунке 4, при охвате его жесткой отрицательной обратной связью с коэффициентом передачи K_0?

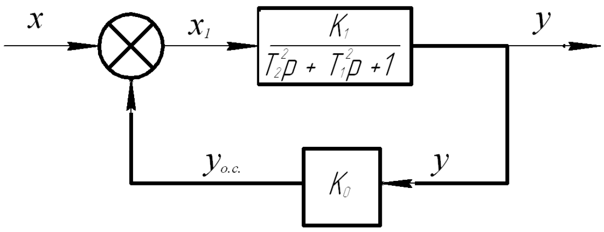

Рис. 4. Структурная схема

Решение. Найдем передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p) W_{ос}(p)} = \frac{\dfrac{K_1}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}}{1 + \dfrac{K_1 K_0}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}} = \frac{K_1}{T_2^2 p^2 + T_0 p + K_1 K_0 + 1} =$$

$$= \frac{K_1}{(1 + K_1 K_0)\left(\dfrac{T_2^2}{1 + K_1 K_0} P^2 + \dfrac{T_1}{1 + K_1 K_0} p + 1\right)} = \frac{K_{зам}}{T_{2зам}^2 p^2 + T_{1зам} p + 1},$$

где $T_2^2 = \dfrac{T_2^2}{1 + K_0 K_1}$, $T_{1зам} = \dfrac{T_1}{1 + K_1 K_0}$, $K_{зам} = \dfrac{K_1}{1 + K_1 K_0}$.

Отсюда видно, что обе постоянные времени уменьшаются, следовательно, уменьшается время переходного процесса. Коэффициент передачи уменьшается в ($1+K_1K_0$) раз. Уменьшение постоянных времени может привести к изменении формы переходного процесса, например, она вместо апериодической может стать колебательной.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЗВЕНЬЕВ

Задача 7

Найти передаточную функцию гидравлического демпфера (рис. 5), пренебрегая влиянием массы подвижных частей. За входную величину принять силу F, за выходную – перемещение поршня x.

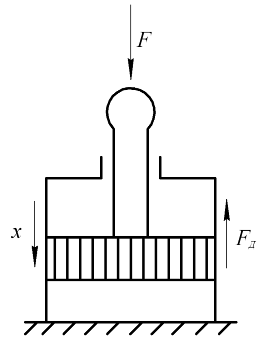

Рис. 5. Гидравлический демпфер

Решение. Приложенной силе F будет противостоять демпфирующая сила $F_Д = c\dot{x}$, где c – коэффициент демпфирования, пропорциональный вязкости жидкости и площади поршня и обратно пропорциональный площади пропускного отверстия.

В итоге имеем: $F = F_Д = c\dot{x} = c\dfrac{dx}{dt}$.

В операторной форме это уравнение запишется следующим образом:

$$F(p) = cpx(p).$$

Отсюда передаточная функция демпфера равна:

$$W(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{cp} = \frac{K}{p},$$

где коэффициент передачи $K = \dfrac{1}{c}$.

Задача 8

Найти передаточную функцию по условиям предыдущей задачи, если учесть массу подвижных частей.

Решение. В этом случае демпфирующая сила $F_Д$, противостоящая силе F, определяется следующим образом:

$$F_Д = m\ddot{x} + c\dot{x},$$

где m – масса подвижных частей.

Тогда имеем:

$$F = F_Д = m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt},$$

или в операторной форме:

$$F(p) = F_Д(p) = mp^2 X(p) + cpX(p).$$

Отсюда:

$$W(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{X(p)}{pX(p)(mp+c)} = \frac{1}{cp\left(\frac{m}{c}p+1\right)} = \frac{K}{p(Tp+1)},$$

где коэффициент передачи $K = \frac{1}{c}$, постоянная времени $T = \frac{m}{c}$.

Задача 9

Найти передаточную функцию демпфера и пружины (рис. 6), если пренебречь влиянием массы подвижных частей и принять за входную величину силу *F*, а за выходную – перемещение *x* точки *A* (поршня).

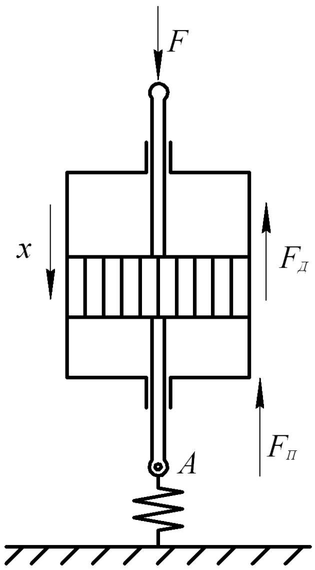

Рис. 6. Поршень с пружиной и демпфером

Решение. Уравнение равновесия сил:

$$F = F_Д + F_П = c_1\dot{x} + c_2 x,$$

где c_1 – коэффициент демпфирования,
c_2 – коэффициент упругости пружины.

В операторной форме:

$$F(p) = x(p)(c_1 p + c_2).$$

Отсюда:

$$W(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{c_1 p + c_2} = \frac{K}{Tp+1},$$

где $K = \frac{1}{c_2}$, $T = \frac{c_1}{c_2}$.

Задача 10

Изменится ли тип динамического звена, к которому относится демпфер, рассмотренный в предыдущих задачах (см. рис. 5 и 6), если входную и выходную величины поменять местами? Найти передаточные функции.

Решение. Найдем передаточные функции по рисунку 5.

$$W(p) = \frac{F(p)}{X(p)} = Kp,$$

где $K = c$.

По рисунку 6:

$$W(p) = \frac{F(p)}{X(p)} = K\left(Tp + 1\right),$$

где $K = c_2$, $T = \frac{c_1}{c_2}$.

Таким образом, тип звена изменяется с интегрирующего на дифференцирующий в первом случае и с инерционного на форсирующий – во втором.

Задача 11

Найти передаточную функцию пассивной электрической цепи (рис. 7), если в качестве входной величины принято напряжение U_1, в качестве выходной – U_2.

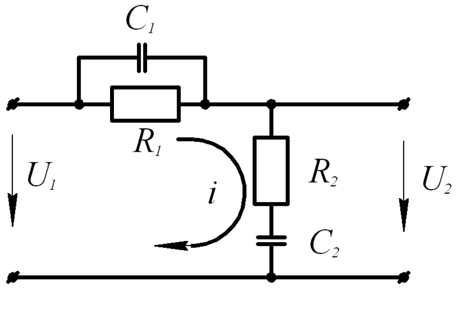

Рис. 7. Схема электрической цепи

Решение. Всю задачу целесообразно решать в операторной форме:

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{I(p)\left(R_2 + \dfrac{1}{pc_2}\right)}{I(p)\left(R_1 + \dfrac{1}{pc_1} + R_2 + \dfrac{1}{pc_2}\right)} = \frac{K(T_2 p + 1)}{T_1 p + 1},$$

где коэффициент передачи $K = \frac{c_1}{c_1 + c_2}$,

постоянные времени $T_1 = \frac{c_1 c_2 (R_1 + R_2)}{c_1 + c_2}$, $T_2 = R_2 C_2$.

Задача 12

Составить дифференциальные уравнения и найти передаточную функцию трансформатора, изображенного на рисунке 8. В качестве входной величины взять напряжение U_1, выходной – U_2.

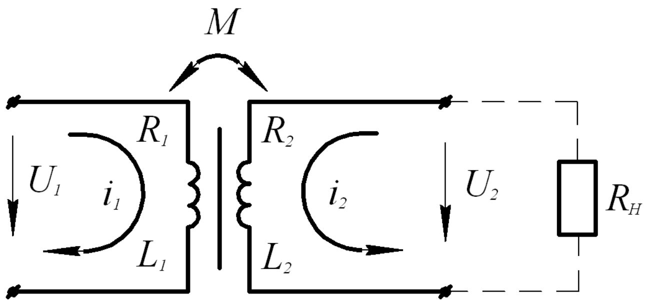

Рис. 8. Схема трансформатора

Дифференциальные уравнения запишутся так:

$$\begin{cases} U_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt}, \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} - U_2. \end{cases}$$

В операторной форме эти уравнения будут иметь вид:

$$\begin{cases} U_1(p) = R_1 I_1(p) + pL_1 I_1(p) + pMI_2(p) \\ 0 = R_2 I_2(p) + pL_2 I_2(p) + pMI_1(p) - U_2(p) \end{cases}$$

Совместное решение этих уравнений дает новое уравнение, связывающее между собой $U_1(p)$ и $U_2(p)$:

$$\left[\frac{L_1 L_2 - M^2}{R_1(R_H + R_2)} p^2 + \frac{L_2 R_1 + L_1(R_H + R_2)}{R_1(R_H + R_2)} p + 1\right] U_2(p) = -\frac{MR_H}{R_1(R_H + R_2)} pU_1(p),$$

или

$$\left[(T_1 T_2 - T_3^2) p^2 + (T_1 + T_2) p + 1\right] U_2(p) = -K\tau p U_1(p),$$

где постоянные времени

$$T_1 = \frac{L_1}{R_1};\ T_2 = \frac{L_2}{R_H + R_2};\ T_3 = \sqrt{\frac{M^2}{R_1(R_H + R_2)}};\ \text{коэффициент}\ \tau = \frac{M}{R_1},$$

причем размерность его и всех постоянных времени – сек. Коэффициент передачи $K = \dfrac{R_H}{R_H + R_2}$ – безразмерная величина.

Передаточная функция трансформатора:

$$W(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=-\frac{K\tau p}{(T_1T_2-T_3^2)p^2+(T_1+T_2)p+1}.$$

Часто в реальных трансформаторах $M^2\approx L_1L_2$. В таком случае $(T_1T_2-T_3^2)\approx 0$ и выражение для передаточной функции упрощается:

$$W(p)=-\frac{K\tau p}{(T_1+T_2)p+1}.$$

Задача 13

Найти передаточную функцию четырехполюсника, собранного по мостовой схеме (рис. 9), если в качестве входной величины взято напряжение U_1, в качестве выходной – U_2.

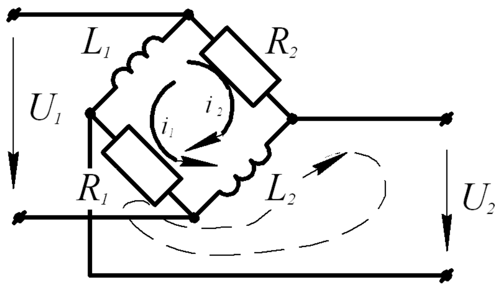

Рис. 9. Мостовая схема четырехполюсника

Решение. Дифференциальные уравнения для цепи запишутся так:

$$U_1=L_1\frac{di_1}{dt}+R_1i_1,$$

$$U_2=L_2\frac{di_2}{dt}+R_2i_2$$

или в операторной форме:

$$U_1(p)=pL_1I_1(p)+R_1I_1(p),$$

$$U_2(p)=pL_2I_2(p)+R_2I_2(p),$$

откуда

$$I_1(p)=\frac{U_1(p)}{R_1+pL_1},\ I_2(p)=\frac{U_2(p)}{R_2+pL_2}.$$

Запишем уравнение для выходного контура при направлении его обхода, указанного пунктирной стрелкой.

$$U_2(p)+I_1(p)R_1-I_2(p)pL_2=0.$$

Отсюда:

$$U_2(p) = I_2(p)pL_2 - I_1(p)R_1 = \frac{U_1(p)}{pL_2 + R_2}pL_2 - \frac{U_1(p)}{pL_1 + R_1}R_1 =$$

$$= U_1(p)\left(\frac{pL_2}{pL_2 + R_2} - \frac{R_1}{pL_1 + R_1}\right) = U_1(p)\frac{T_1T_2p^2 - 1}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)},$$

где $T_1 = \dfrac{L_1}{R_1}$, $T_2 = \dfrac{L_2}{R_2}$.

Передаточная функция получается равной

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{T_1T_2p^2 - 1}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)}.$$

Список рекомендуемой литературы

1. Гальперин, М.В. Автоматическое управление [Текст] / М.В. Гальперин. – М.: ИНФА-М: ФОРУМ, 2007.
2. Ким, Д.П. Теория автоматического управления [Текст] / Д.П. Ким. Т.1. – М.: Физматлит, 2003.
3. Лукас, В.А. Теория автоматического управления [Текст]: учебн. [для вузов] / В.А. Лукас. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 2004.
4. Ким, Д.П. Сборник задач по теории автоматического регулирования. Линейные системы [Текст] / Д.П. Ким, Н.Д. Дмитриева. – М.: Физматлит, 2007.
5. Теория автоматического управления [Текст]: учебн. [для вузов]. В 2 ч. / под ред. А.А. Воронова. – 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Высшая школа, 1986.
6. Теория автоматического управления [Текст]: учебн. [для вузов]. В 2 ч. / под ред. В.А. Нетушила. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1976.
7. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления [Текст]: учеб. пособие [для вузов] / под ред. В.А. Бесекерского. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1978.