



С. П. Санников

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Самостоятельная работа № 2

Екатеринбург
2012

Электронный архив УГЛТУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет»

Кафедра автоматизации производственных процессов

С. П. Санников

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Методические указания для самостоятельной работы № 2
Направление ВПО 220300, 220200, 220400, 220700

Екатеринбург
2012

Электронный архив УГЛТУ

Рассмотрены и рекомендованы к изданию методической комиссией
лесоинженерного факультета УГЛТУ
Протокол № 1 от 8.09.11 г.

Рецензент: Ордуянц Г. Г., доц. каф. АПП, канд. техн. наук

Редактор Л. Д. Черных
Оператор компьютерной верстки Т. В. Упорова

Подписано в печать 16.05.12		Формат 60×84 1/16
Плоская печать	Заказ №	Тираж 50 экз.
Поз. 5	Печ. л. 2,09	Цена 11 руб. 00 коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

Занятия 4, 5, 6

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

2.1. Основные подходы к построению математических моделей систем

Математические схемы. *Математическая модель* — это совокупность математических объектов (чисел, переменных, множеств, векторов, матриц и т.п.) и отношений между ними, адекватно отображающая физические свойства создаваемого технического объекта. Процесс формирования математической модели и использования ее для анализа и синтеза называется *математическим моделированием*.

При построении математической модели системы необходимо решить вопрос об ее полноте. Полнота модели регулируется, в основном, выбором границы «система S — среда E ». Также должна быть решена задача упрощения модели, которая помогает выделить в зависимости от цели моделирования основные свойства системы, отбросив второстепенные.

При переходе от содержательного к формальному описанию процесса функционирования системы с учетом воздействия внешней среды применяют *математическую схему* как звено в цепочке «описательная модель — математическая схема — математическая (аналитическая или (и) имитационная) модель».

Формальная модель объекта. Модель объекта (системы S) можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы:

- совокупность входных воздействий на систему

$$x_i = X, \quad i = \overline{1, n_X};$$

- совокупность воздействий внешней среды

$$v_j = V, \quad j = \overline{1, n_V};$$

- совокупность внутренних (собственных) параметров систем

$$h_k = H, \quad k = \overline{1, n_H};$$

- совокупность выходных характеристик системы

$$y_j = Y, \quad j = \overline{1, n_Y}.$$

В общем случае x_i, v_j, h_k, y_l являются элементами непересекающихся подмножеств и содержат как детерминированные, так и стохастические составляющие.

Входные воздействия, воздействия внешней среды E и внутренние параметры системы являются *независимыми (экзогенными)* переменными, которые в векторной форме имеют соответственно вид $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{nX}(t))$; $\vec{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_{nV}(t))$; $\vec{h}(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_{nH}(t))$, а выходные характеристики являются *зависимыми (эндогенными)* переменными и в векторной форме имеют вид: $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{nY}(t))$. Можно выделить управляемые и неуправляемые переменные.

Процесс функционирования системы S описывается во времени оператором F_S , который преобразует экзогенные переменные в эндогенные в соответствии с соотношениями вида

$$\vec{y}(t) = F_S(\vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, t). \quad (2.1)$$

Совокупность зависимостей выходных характеристик системы от времени $y_j(t)$ для всех видов $j = \overline{1, n_Y}$ называется *выходной траекторией* $\vec{y}(t)$. Зависимость (2.1) называется *законом функционирования системы* F_S , который задается в виде функции, функционала, логических условий, в алгоритмической, табличной формах или в виде словесного правила соответствия. *Алгоритмом функционирования* A_S называется метод получения выходных характеристик с учетом входных воздействий $\vec{x}(t)$, воздействий внешней среды $\vec{v}(t)$ и собственных параметров системы $\vec{h}(t)$. Один и тот же закон функционирования F_S системы S может быть реализован различными способами, т.е. с помощью множества различных алгоритмов функционирования A_S .

Математические модели называются *динамическими* (2.1), если математические соотношения описывают поведение объекта (системы) моделирования во времени t , т.е. отражают динамические свойства.

Для *статических* моделей математическая модель представляет собой отображение между двумя подмножествами свойств моделируемого объекта Y и $\{X, V, H\}$ в определенный момент, что в векторной форме может быть записано как

$$\vec{y} = f(\vec{x}, \vec{v}, \vec{h}). \quad (2.2)$$

Соотношения (2.1) и (2.2) могут быть заданы различными способами: аналитически (с помощью формул), графически, таблично и т.д. Эти соотношения могут быть получены через свойства системы S в конкретные моменты времени, называемые состояниями. Состояние системы S характеризуется векторами

$$\vec{z}' = (z'_1, z'_2, \dots, z'_k) \text{ и } \vec{z}'' = (z''_1, z''_2, \dots, z''_k),$$

где $z'_1 = z_1(t')$, $z'_2 = z_2(t')$, ..., $z'_k = z_k(t')$ в момент $t' \in (t_0, T)$; $z''_1 = z_1(t'')$, $z''_2 = z_2(t'')$, ..., $z''_k = z_k(t'')$ в момент $t'' \in (t_0, T)$ и т. д. $k = 1, n_Z$.

Если рассматривать процесс функционирования системы S как последовательную смену состояний $z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)$, то они могут быть интерпретированы как координаты точки в k -мерном фазовом пространстве. При этом каждой реализации процесса будет соответствовать некоторая фазовая траектория. Совокупность всех возможных значений состояний $\{\vec{z}\}$ называется пространством состояний объекта моделирования Z , причем $z_k \in Z$.

Состояния системы S в момент времени $t_0 < t^* \leq T$ полностью определяются начальными условиями $\vec{z}^0 = (z^0_1, z^0_2, \dots, z^0_k)$ [где $z^0_1 = z_1(t_0)$, $z^0_2 = z_2(t_0)$, ..., $z^0_k = z_k(t_0)$], входными воздействиями $\vec{x}(t)$, внутренними параметрами $\vec{h}(t)$ и воздействиями внешней среды $\vec{v}(t)$, которые имели место в промежутке времени $t^* - t_0$, с помощью двух векторных уравнений

$$\vec{z}(t) = \Phi(\vec{z}^0, \vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, t); \quad (2.3)$$

$$\vec{y}(t) = F(\vec{z}, t). \quad (2.4)$$

Первое уравнение по начальному состоянию \vec{z}^0 и экзогенным переменным $\vec{x}, \vec{v}, \vec{h}$ определяет вектор-функцию $\vec{z}(t)$, а второе по полученному значению состояний $\vec{z}(t)$ — эндогенные переменные на выходе системы $\vec{y}(t)$. Таким образом, цепочка уравнений объекта «вход–состояния–выход» позволяет определить характеристики системы

$$\vec{y}(t) = F[\Phi(\vec{z}^0, \vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, t)]. \quad (2.5)$$

В общем случае время в модели системы S может рассматриваться на интервале моделирования $(0, T)$ как непрерывное, так и дискретное, т.е. квантованное на отрезки длиной Δt временных единиц каждый, когда $T = m\Delta t$, где $m = 1, m_T$ — число интервалов дискретизации.

Таким образом, под математической моделью объекта (реальной системы) понимают конечное подмножество переменных $\{\vec{x}(t), \vec{v}(t), \vec{h}(t)\}$ вместе с математическими связями между ними и характеристиками $\vec{y}(t)$.

Если математическое описание объекта моделирования не содержит элементов случайности или они не учитываются, т.е. если можно считать, что в этом случае стохастические воздействия внешней среды $\vec{v}(t)$ и стохастические внутренние параметры $\vec{h}(t)$ отсутствуют, то модель называется детерминированной в том смысле, что характеристики однозначно определяются детерминированными входными воздействиями

$$\vec{y}(t) = f(\vec{x}, t). \quad (2.6)$$

Очевидно, что детерминированная модель является частным случаем стохастической модели.

Типовые математические схемы. В практике моделирования объектов в области системотехники и системного анализа на первоначальных этапах исследования системы рациональнее использовать *типовые математические схемы*: дифференциальные уравнения, конечные и вероятностные автоматы, системы массового обслуживания, сети Петри, агрегативные системы и т. д.

Типовые математические схемы имеют преимущества простоты и наглядности. В качестве детерминированных моделей, когда при исследовании случайные факторы не учитываются, для представления систем, функционирующих в непрерывном времени, используются дифференциальные, интегральные, интегродифференциальные и другие уравнения, а для представления систем, функционирующих в дискретном времени – конечные автоматы и конечно-разностные схемы. В качестве стохастических моделей (при учете случайных факторов) для представления систем с дискретным временем используются вероятностные автоматы, а для представления систем с непрерывным временем – системы массового обслуживания. Для анализа причинно-следственных связей в сложных системах, где одновременно параллельно протекает несколько процессов, применяют сети Петри. Для описания поведения непрерывных и дискретных, детерминированных и стохастических систем (например АСОИУ) можно применять обобщенный (универсальный) подход на основе агрегативной системы. При агрегативном описании сложный объект (система) расчленяется на конечное число частей (подсистем), сохраняя при этом связи, обеспечивающие взаимодействие частей.

Таким образом, при построении математических моделей процессов функционирования систем можно выделить следующие основные подходы: непрерывно-детерминированный (*D*-схемы); дискретно-стохастический (*P*-схемы); дискретно-детерминированный (*F*-схемы); непрерывно-стохастический (*Q*-схемы); сетевой (*N*-схемы); обобщенный или универсальный (*A*-схемы).

2.2. Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы)

Основные соотношения. Рассмотрим особенности непрерывно-детерминированного подхода на примере использования в качестве математических моделей дифференциальных уравнений. *Дифференциальными уравнениями* называются такие уравнения, в которых неизвестными будут функции одного или нескольких переменных, причем в уравнение входят не только функции, но и их производные различных порядков. Если неиз-

вестные функции многих переменных, то уравнения называются *уравнениями частных производных*, иначе при рассмотрении функции одной независимой переменной уравнения называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями*.

Математическое соотношение для детерминированных систем (2.6) в общем виде будет

$$\vec{y}'(t) = \vec{f}(\vec{y}, t); \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \quad (2.7)$$

где $\vec{y}' = d\vec{y}/dt$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ — n -мерные векторы; $\vec{f}(\vec{y}, t)$ — вектор-функция, которая определена на некотором $(n+1)$ -мерном (\vec{y}, t) множестве и является непрерывной.

Математические схемы такого вида называются *D-схемами* (англ. Dynamic — динамик), они отражают динамику изучаемой системы, и в качестве независимой переменной, от которой зависят неизвестные искомые функции, обычно служит время t .

В простейшем случае обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$y'(t) = f(y, t). \quad (2.8)$$

Рассмотрим простейший пример формализации процесса функционирования двух элементарных схем различной природы: механической S_M (колебание груза на пружине рис. 2.1, а или маятника, рис.2.1, б) и электрической S_K (колебательный контур, рис. 2.1, в).

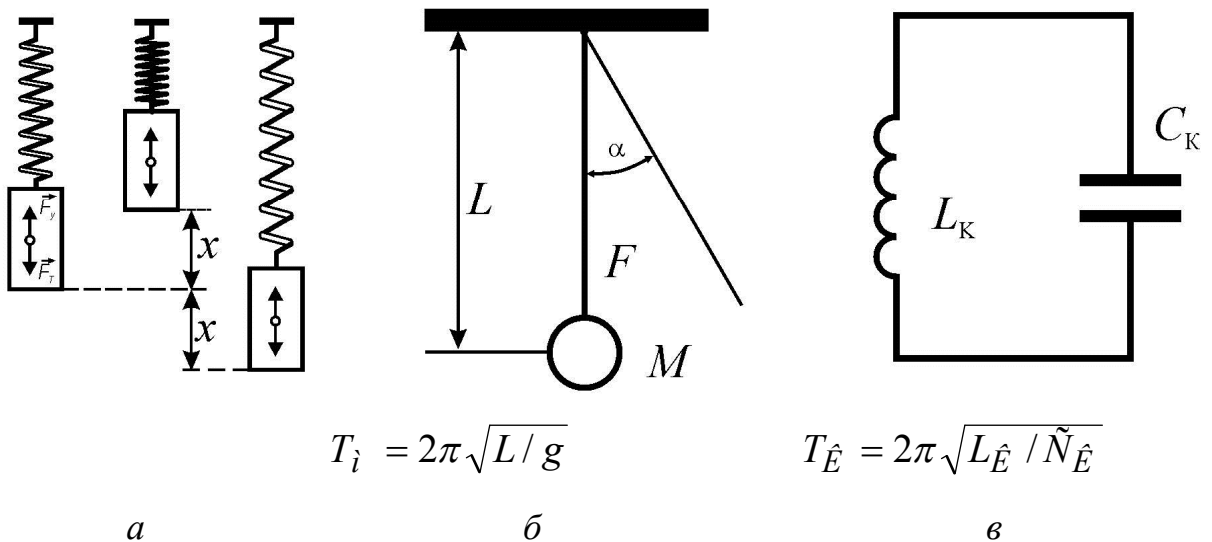


Рис. 2.1. Элементарные системы
 а – колебательная модель груза на пружине; б – физическая модель маятника; в – модель колебательного электрического контура

Процесс малых колебаний маятника описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$m_M l_M^2 (d^2 F(t)/dt^2) + m_M g l_M F(t) = 0,$$

где m_M , l_M — масса и длина подвеса маятника соответственно; g — ускорение свободного падения; $F(t)$ — угол отклонения маятника в момент времени t .

Из этого уравнения свободного колебания маятника можно найти оценки интересующих характеристик. Например, период колебания маятника

$$T_M = 2\pi \sqrt{l_M/g}.$$

Аналогично, процессы в электрическом колебательном контуре описываются обыкновенным дифференциальным уравнением

$$L_K (d^2 q(t)/dt^2) + (q(t)/C_K) = 0,$$

где L_K , C_K — индуктивность и емкость конденсатора; $q(t)$ — заряд конденсатора в момент времени t .

Из этого уравнения можно получить различные оценки характеристик процесса в колебательном контуре. Например, период электрических колебаний

$$T_M = 2\pi \sqrt{L_K C_K}.$$

Очевидно, что введя обозначения $h_2 = m_M l_M^2 = L_K$, $h_1 = 0$, $h_0 = m_M g l_M = 1/C_K$, $F(t) = q(t) = z(t)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее поведение этой замкнутой системы:

$$h_2 (d^2 z(t)/dt^2) + h_1 (dz(t)/dt) + h_0 z(t) = 0, \quad (2.9)$$

где h_0 , h_1 , h_2 — параметры системы; $z(t)$ — состояние системы в момент времени t .

Таким образом, поведение этих двух объектов может быть исследовано на основе общей математической модели (2.9). Кроме того, необходимо отметить, что поведение маятника (системы S_M) может быть изучено с помощью электрического колебательного контура (системы S_K).

Если изучаемая система S (маятник или контур) взаимодействует с внешней средой E , то появляется входное воздействие $x(t)$ (внешняя сила для маятника и источник энергии для контура), и непрерывно-детерминированная модель такой системы будет иметь вид:

$$h_2 (d^2 z(t)/dt^2) + h_1 (dz(t)/dt) + h_0 z(t) = x(t). \quad (2.10)$$

С точки зрения общей математической модели (см. подразд. 2.1) $x(t)$ является входным (управляющим) воздействием, а состояние системы S в данном случае можно рассматривать как выходную характеристику, т.е. выходная переменная совпадает с состоянием системы в данный момент времени $y = z$.

Возможные приложения D-схемы. Для описания линейных систем управления, как любой динамической системы, неоднородные дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты:

$$y^{(n)} + h_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + h_1y' + h_0y = b_m f^{(m)} + b_{m-1}f^{(m-1)} + \dots + b_1f' + b_0f + g_k u^{(k)} + g_{k-1}u^{(k-1)} + \dots + g_1u' + g_0u, \quad (2.11)$$

где $y(t)$, $y'(t)$, ..., $y^{(n)}(t)$ — неизвестная функция времени и ее производные; $f(t)$ и $u(t)$ — известные функции.

Используя, например, пакет программ VISSIM, предназначенный для имитационного моделирования процессов в системах управления, которые можно описать дифференциальными уравнениями, промоделируем решение обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения

$$h_3\ddot{y} + h_2\dot{y} + h_1\dot{y} + h_0y = 5t + 1, \quad (2.12)$$

где y — некоторая искомая функция времени на отрезке $[0; T]$ при нулевых начальных условиях, примем $h_3=1$, $h_2=3$, $h_1=1$, $h_0=3$:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + \dot{y} + 3y = 5t + 1. \quad (2.13)$$

Представив заданное уравнение относительно наивысшей из производных, получим уравнение

$$\ddot{y} = -3\dot{y} - \dot{y} - 3y + 5t + 1, \quad (2.14)$$

которое можно промоделировать, используя набор стандартных блоков пакета VISSIM: арифметические блоки — Gain (умножение на константу), Summing-Junction (сумматор); блоки интегрирования — Integrator (численное интегрирование), Transfer Function (задание уравнения, представленного в виде передаточной функции); блоки задания сигналов — Const (константа), Step (единичная функция в виде «ступеньки»), Ramp (линейно нарастающий сигнал); блоки-приемники сигналов — Plot (отображение во временной области сигналов, которые анализируются исследователем в ходе моделирования).

На рис. 2.2 изображено графическое представление данного дифференциального уравнения. Входу крайнего левого интегратора соответствует переменная \ddot{y} , входу среднего интегратора — \dot{y} , а входу крайнего правого интегратора — y . Выход крайнего правого интегратора соответствует переменной y .

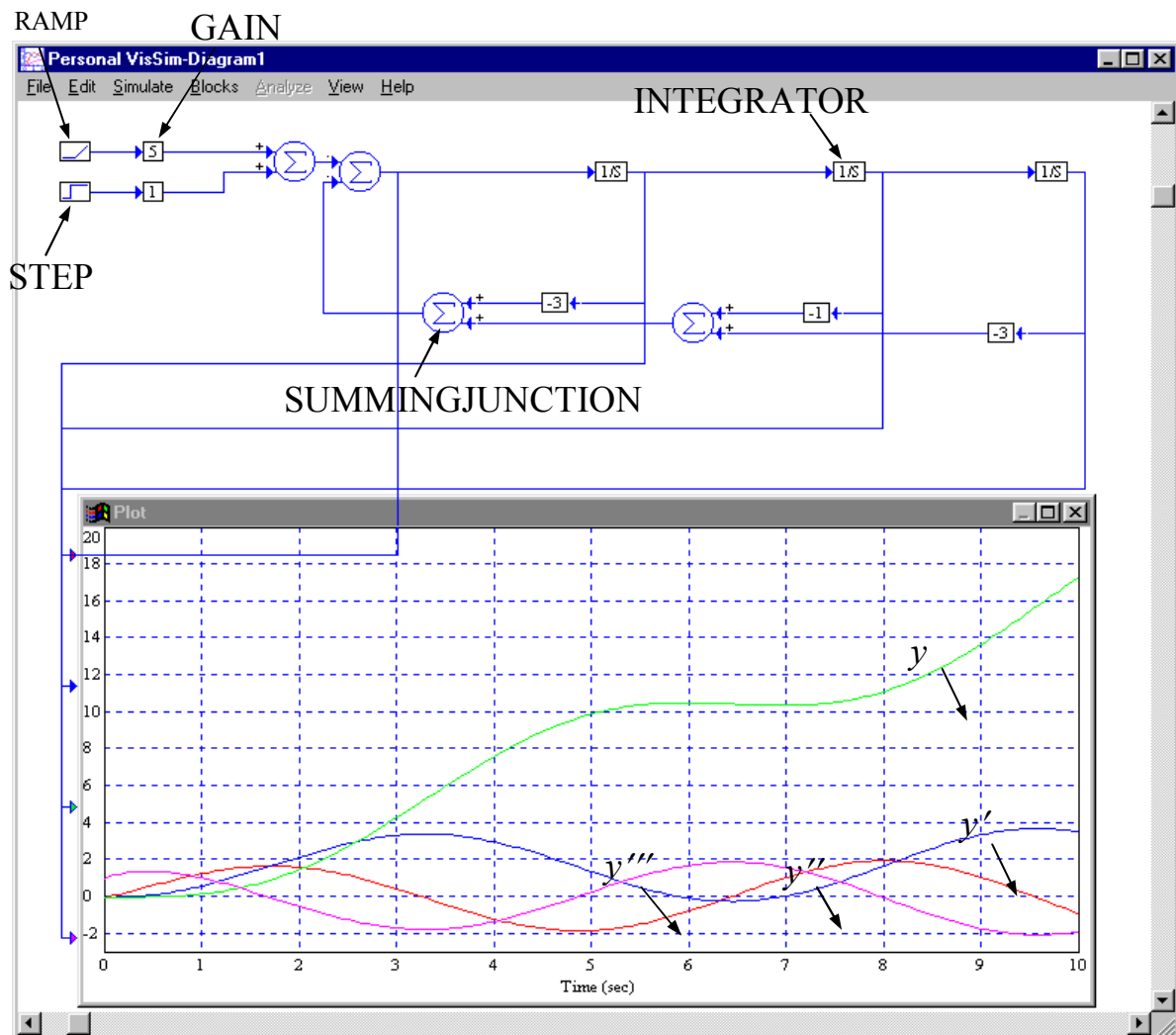


Рис. 2.2. Графическое представление уравнения

Частным случаем динамических систем, описываемых D -схемами, являются системы автоматического управления (САУ) и регулирования (САР). Реальный объект представляется в виде двух систем: управляющей и управляемой (объекта управления). Структура многомерной системы автоматического управления общего вида представлена на рис. 2.3, где обозначены эндогенные переменные: $\vec{x}(t)$ — вектор входных (задающих) воздействий; $\vec{v}(t)$ — вектор возмущающих воздействий; $\vec{h}'(t)$ — вектор сиг-

налов ошибки; $\vec{h}''(t)$ — вектор управляющих воздействий; экзогенные переменные: $\vec{z}(t)$ — вектор состояния системы S ; $\vec{y}(t)$ — вектор выходных переменных, обычно $\vec{y}(t) = \vec{z}(t)$.

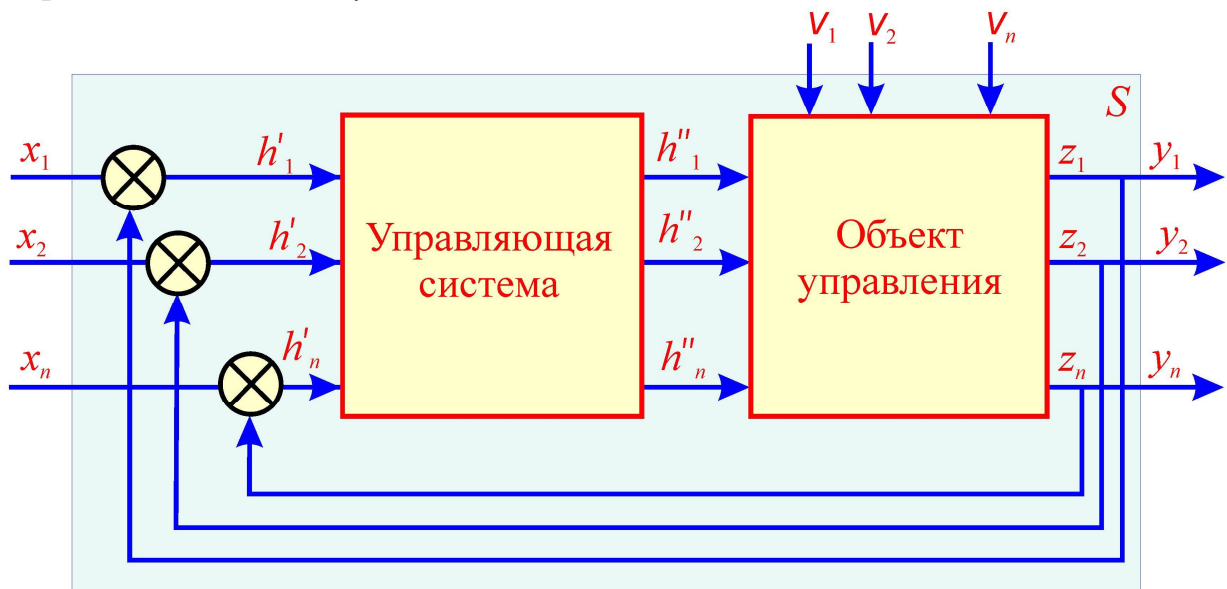


Рис. 2.3. Структура системы автоматического управления

Управляющая система — это совокупность программно-технических средств, обеспечивающих достижение объектом управления определенной цели. Насколько точно объект достигает заданной цели, можно судить (для одномерной системы) по координате состояния $y(t)$. Разность между заданным $y_{\text{зад}}(t)$ и действительным $y(t)$ законом изменения управляемой величины есть ошибка управления $\vec{h}'(t) = y_{\text{зад}}(t) - y(t)$. Если предписанный закон изменения управляемой величины соответствует закону изменения входного (задающего) воздействия, т.е. $x(t) = y_{\text{зад}}(t)$, то $\vec{h}'(t) = x(t) - y(t)$.

Системы, для которых ошибки управления $\vec{h}'(t) = 0$ во все моменты времени, называются *идеальными*. На практике реализация идеальных систем невозможна. Задачей системы автоматического управления является изменение переменной $y(t)$ согласно заданному закону с определенной точностью (с допустимой ошибкой). Параметры системы должны обеспечивать требуемую точность управления, а также устойчивость системы в переходном процессе. Если система устойчива, то анализируют поведение системы во времени, максимальное отклонение регулируемой переменной $y(t)$ в переходном процессе, время переходного процесса и т. п. Порядок дифференциального уравнения и значение его коэффициентов полностью определяются статическими и динамическими параметрами системы.

Таким образом, использование D -схем позволяет формализовать процесс функционирования непрерывно детерминированных систем S и оценить их основные характеристики, применяя аналитический или

имитационный подход, реализованный в виде соответствующего языка для моделирования непрерывных систем или использующий аналоговые и гибридные средства вычислительной техники.

2.3. Дискретно-детерминированные модели (F -схемы)

Основные соотношения. Рассмотрим особенности дискретно-детерминированного подхода на примере использования в качестве математического аппарата теории автоматов. Система представляется в виде автомата как некоторого устройства с входными и выходными сигналами, перерабатывающего дискретную информацию и меняющего свои внутренние состояния лишь в допустимые моменты времени. *Конечным автоматом* называется автомат, у которого множества внутренних состояний, входных и выходных сигналов являются конечными множествами.

Абстрактно конечный автомат (англ. finite automata) можно представить как математическую схему (F -схему), характеризующуюся шестью элементами: конечным множеством X входных сигналов (входным алфавитом); конечным множеством Y выходных сигналов (выходным алфавитом); конечным множеством Z внутренних состояний (внутренним алфавитом или алфавитом состояний); начальным состоянием z_0 , $z_0 \in Z$; функцией переходов $\varphi(z, x)$; функцией выходов $\psi(z, x)$. Автомат, задаваемый F -схемой: $F = \langle Z, X, Y, \psi, \varphi, z_0 \rangle$, функционирует в дискретном времени, моментами которого являются такты, каждому из которых соответствуют постоянные значения входного и выходного сигналов и внутренние состояния. Обозначим состояние, а также входной и выходной сигналы, соответствующие t -му такту при $t = 0, 1, 2, \dots$, через $z(t)$, $x(t)$, $y(t)$. При этом по условию $z(0) = z_0$, а $z(t) \in Z$, $x(t) \in X$, $y(t) \in Y$.

Абстрактный конечный автомат имеет один входной и один выходной каналы. В каждый момент $t = 0, 1, 2, \dots$ дискретного времени F -автомат находится в определенном состоянии $z(t)$ из множества Z состояний автомата, причем в начальный момент времени $t = 0$ он всегда находится в начальном состоянии $z(0) = z_0$. В момент t , будучи в состоянии $z(t)$, автомат способен воспринять на входном канале сигнал $x(t) \in X$ и выдать на выходном канале сигнал $y(t) = \psi[z(t), x(t)]$, переходя в состояние $z(t+1) = \varphi[z(t), x(t)]$, $z(t) \in Z$, $y(t) \in Y$. Абстрактный конечный автомат реализует некоторое отображение множества слов входного алфавита X на множество слов выходного алфавита Y . Другими словами, если на вход конечного автомата, установленного в начальное состояние z_0 , подавать в некоторой последовательности буквы входного алфавита $x(0), x(1), x(2), \dots$, т.е. входное слово, то на выходе автомата будут последовательно появляться буквы выходного алфавита $y(0), y(1), y(2), \dots$, образуя выходное слово.

Таким образом, работа конечного автомата происходит по следующей схеме: в каждом t -м такте на вход автомата, находящегося в состоянии $z(t)$, подается некоторый сигнал $x(t)$, на который он реагирует переходом $(t+1)$ -го такта в новое состояние $z(t+1)$ и выдачей некоторого выходного сигнала. Сказанное выше можно описать следующими уравнениями:

– для F -автомата первого рода, называемого также *автоматом Мили*,

$$z(t+1) = \varphi[z(t), x(t)], t = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.15)$$

$$y(t) = \psi[z(t), x(t)], t = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.16)$$

– для F -автомата второго рода

$$z(t+1) = \varphi[z(t), x(t)], t = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.17)$$

$$y(t) = \psi[z(t), x(t-1)], t = 1, 2, 3, \dots \quad (2.18)$$

Автомат второго рода, для которого

$$y(t) = \psi[z(t)], t = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.19)$$

т.е. функция выхода не зависит от входной переменной $x(t)$, называется *автоматом Мура*.

Таким образом, уравнения (2.15)—(2.19), полностью задающие F -автомат, являются частным случаем уравнений (2.3) и (2.4), когда система S — детерминированная и на её единственный вход поступает дискретный сигнал X .

По числу состояний различают конечные автоматы с памятью и без памяти. Автоматы с памятью имеют более одного состояния, а автоматы без памяти (комбинационные или логические схемы) обладают лишь одним состоянием. При этом, согласно (2.16), работа комбинационной схемы заключается в том, что она ставит в соответствие каждому входному сигналу $x(t)$ определенный выходной сигнал $y(t)$, т.е. реализует логическую функцию вида

$$y(t) = \psi[x(t)], t = 0, 1, 2, \dots$$

Эта функция называется булевой, если алфавит X и Y , которым принадлежат значения сигналов x и y , состоят из двух букв.

По характеру отсчета дискретного времени конечные автоматы делятся на синхронные и асинхронные. В синхронных F -автоматах моменты времени, в которые автомат считывает входные сигналы, определяются принудительно синхронизирующими сигналами. После очередного синхронизирующего сигнала с учетом считанного и в соответствии с уравнениями (2.15)—(2.19) происходит переход в новое состояние и выдача

сигнала на выходе, после чего автомат может воспринимать следующее значение входного сигнала. Таким образом, реакция автомата на каждое значение входного сигнала заканчивается за один такт, длительность которого определяется интервалом между соседними синхронизирующими сигналами. Асинхронный F -автомат считывает входной сигнал непрерывно и поэтому, реагируя на достаточно длинный входной сигнал постоянной величины x , он может, как следует из (2.15)—(2.19), несколько раз изменять состояние, выдавая соответствующее число выходных сигналов, пока не перейдет в устойчивое, которое уже не может быть изменено данным входным сигналом.

Возможные приложения F -схемы. Чтобы задать конечный F -автомат, необходимо описать все элементы множества $F = \langle Z, X, Y, \psi, \varphi, z_0 \rangle$, т.е. входной, внутренней и выходной алфавиты, а также функции переходов и выходов, причем среди множества состояний необходимо выделить состояние z_0 , в котором автомат находится в состоянии $t = 0$. Существуют несколько способов задания работы F -автоматов, но наиболее часто используются табличный, графический и матричный.

В табличном способе задаются таблицы переходов и выходов, строки которых соответствуют входным сигналам автомата, а столбцы — его состояниям. Первый слева столбец соответствует начальному состоянию z_0 . На пересечении i -й строки и k -го столбца таблицы переходов помещается соответствующее значение $\varphi(z_k, x_i)$ функции переходов, а в таблице выходов — соответствующее значение $\psi(z_k, x_i)$ функции выходов. Для F -автомата Мура обе таблицы можно совместить.

Описание работы F -автомата Мили таблицами переходов φ и выходов ψ иллюстрируется табл. 2.1, а описание F -автомата Мура — таблицей переходов (табл. 2.2).

Таблица 2.1

X_i	Z_k			
	z_0	z_1	...	z_k
<i>Переходы</i>				
x_1	$\varphi(z_0, x_1)$	$\varphi(z_1, x_1)$...	$\varphi(z_k, x_1)$
x_2	$\varphi(z_0, x_2)$	$\varphi(z_1, x_2)$...	$\varphi(z_k, x_2)$
...
x_i	$\varphi(z_0, x_i)$	$\varphi(z_1, x_i)$...	$\varphi(z_k, x_i)$
<i>Выходы</i>				
x_1	$\psi(z_0, x_1)$	$\psi(z_1, x_1)$...	$\psi(z_k, x_1)$
x_2	$\psi(z_0, x_2)$	$\psi(z_1, x_2)$...	$\psi(z_k, x_2)$
...
x_i	$\psi(z_0, x_i)$	$\psi(z_1, x_i)$...	$\psi(z_k, x_i)$

Таблица 2.2

x_i	$\Psi(z_k)$			
	$\Psi(z_0)$	$\Psi(z_1)$...	$\Psi(z_k)$
	z_0	z_1	...	z_k
x_1	$\varphi(z_0, x_1)$	$\varphi(z_1, x_1)$...	$\varphi(z_k, x_1)$
x_2	$\varphi(z_0, x_2)$	$\varphi(z_1, x_2)$...	$\varphi(z_k, x_2)$
...
x_i	$\varphi(z_0, x_i)$	$\varphi(z_1, x_i)$...	$\varphi(z_k, x_i)$

Примеры табличного способа задания F -автомата Мили $F1$ приведены в табл. 2.3, а для F -автомата Мура $F2$ — в табл. 2.4.

Таблица 2.3

x_i	z_k		
	z_0	z_1	z_2
<i>Переходы</i>			
x_1	z_2	z_0	z_0
x_2	z_0	z_2	z_1
<i>Выходы</i>			
x_1	y_1	y_1	y_2
x_2	y_1	y_2	y_1

Таблица 2.4

x_i	Y				
	y_1	y_1	y_3	y_2	y_3
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	z_1	z_4	z_4	z_2	z_2
x_2	z_3	z_1	z_1	z_0	z_0

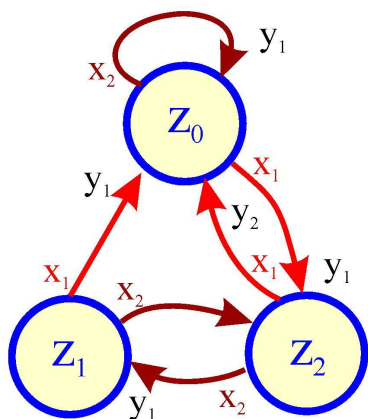
При графическом способе задания конечного автомата используется понятие направленного графа. Граф автомата представляет собой набор вершин, соответствующих различным состояниям автомата и соединяющих вершины дуг графа, соответствующих тем или иным переходам автомата. Если входной сигнал x_k вызывает переход из состояния z_i в состояние z_j , то на графе автомата дуга, соединяющая вершину z_i с вершиной z_j , обозначается x_k . Для того чтобы задать функцию выходов, дуги графа необходимо отметить соответствующими выходными сигналами. Для автоматов Мили эта разметка производится так: если входной сигнал x_k действует на состояние z_i , то получается дуга, исходящая из z_i и помеченная x_k ; эту дугу дополнительно отмечают выходным сигналом $y = \Psi(z_i, x_k)$. Для автомата

Мура аналогичная разметка графа такова: если входной сигнал x_k , действуя на некоторое состояние автомата, вызывает переход в состояние z_j , то дугу, направленную в z_i и помеченную x_k , дополнительно отмечают выходным сигналом $y = \psi(z_j, x_k)$.

На рис. 2.4. *a*, *б* приведены заданные ранее таблицами *F*-автоматы Мили *F1* и Мура *F2*, соответственно.

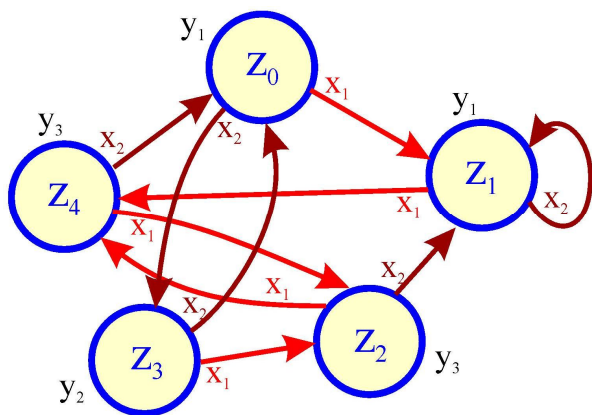
При матричном задании конечного автомата матрица соединений автомата квадратная $C = \|c_{ij}\|$, строки соответствуют исходным состояниям, а столбцы – состояниям перехода. Элемент $c_{ij} = x_k/y_s$, стоящий на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца, в случае автомата Мили соответствует входному сигналу x_k , вызывающему переход из состояния z_i в состояние z_j , и выходному сигналу y_s , выдаваемому при этом переходе. Для автомата Мили *F1*, рассмотренного выше, матрица соединений имеет вид:

$$C_1 = \begin{vmatrix} \tilde{o}_2 / y_1 & -x_1 / y_1 \\ x_1 / y_1 & -x_2 / y_2 \\ x_1 / y_2 & x_2 / y_1 - \end{vmatrix}$$



a

X_i	Z_k		
	z_0	z_1	z_k
<i>Переходы</i>			
x_1	z_2	z_0	z_0
x_2	z_0	z_2	z_1
<i>Выходы</i>			
x_1	y_1	y_1	y_2
x_2	y_1	y_2	y_1



б

x_i	Y				
	y_1	y_1	y_3	y_2	y_3
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	z_1	z_4	z_4	z_2	z_2
x_2	z_3	z_1	z_1	z_0	z_0

Рис. 2.4. Графы автоматов: *a* — Мили; *б* — Мура

Если переход из состояния z_i в состояние z_j происходит под действием нескольких сигналов, элемент матрицы c_{ij} представляет собой множество пар «вход-выход» для этого перехода, соединенных знаком дизъюнкции.

Для F -автомата Мура элемент c_{ij} равен множеству входных сигналов на переходе (z_i, z_j) , а выход описывается вектором выходов

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \psi(z_0) \\ \psi(z_1) \\ \dots \\ \psi(z_k) \\ \dots \\ \psi(z_K) \end{pmatrix},$$

i -я компонента которого — выходной сигнал, отмечающий состояние z_i .

Для рассмотренного выше F -автомата Мура $F2$ матрицы соединений и вектор выходов имеют вид:

$$C_2 = \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & - \\ -x_2 & - & -x_1 \\ -x_2 & - & -x_1 \\ x_2 & -x_1 & - \\ x_2 & -x_1 & - \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Для детерминированных автоматов выполняется условие однозначности переходов: автомат, находящийся в некотором состоянии, под действием любого входного сигнала не может перейти более чем в одно состояние. Применительно к графическому способу задания F -автомата это означает, что в графе автомата из любой вершины не могут выходить два и более ребра, отмеченные одним и тем же входным сигналом. А в матрице соединений автомата C в каждой строке любой входной сигнал не должен встречаться более одного раза.

Для F -автомата состояние z_k называется *устойчивым*, если для любого входа $x_i \in X$, для которого $\varphi(z_k, x_i) = z_k$, имеет место $\varphi(z_k, x_i) = y_k$. F -автомат называется *асинхронным*, если каждое его состояние $z_k \in Z$ устойчиво.

Таким образом, понятие в дискретно-детерминированном подходе к исследованию на моделях свойств объектов является математической абстракцией, удобной для описания широкого класса процессов функционирования реальных объектов в автоматизированных системах управления. С помощью F -автомата можно описать объекты, для которых характерно наличие дискретных состояний, и дискретный характер работы во времени — это элементы и узлы ЭВМ, устройства контроля, регулирования и управления, системы временной и пространственной коммутации в технике обмена информацией и т.д.

2.4. Дискретно-стохастические модели (P -схемы)

Основные соотношения. Рассмотрим особенности построения математических схем при дискретно-стохастическом подходе на вероятностных (стохастических) автоматах. В общем виде *вероятностный автомат P -схемы* (англ. *probabijistic automat*) можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нем, и может быть описано статистически.

Введем математическое понятие P -автомата, используя понятия, введенные для F -автомата. Рассмотрим множество G , элементами которого являются всевозможные пары (x_i, z_s) , где x_i и z_s — элементы входного подмножества X и подмножества состояний Z , соответственно. Если существуют две такие функции φ и ψ , что с их помощью осуществляются отображения $G \rightarrow Z$ и $G \rightarrow Y$, то говорят, что $F = \langle Z, X, Y, \varphi, \psi \rangle$ определяет автомат детерминированного типа.

Рассмотрим более общую математическую схему. Пусть Φ — множество всевозможных пар вида (z_k, y_i) , где y_i — элемент выходного подмножества Y . Потребуем, чтобы любой элемент множества G индуцировал на множестве Φ некоторый закон распределения следующего вида:

Элементы из Φ	(z_1, y_1)	(z_1, y_2)	...	(z_k, y_{J-1})	(z_k, y_J)
(x_i, z_s)	b_{11}	b_{12}	...	$b_{K(J-1)}$	b_{KJ}

При этом $\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J b_{kj} = 1$, где b_{kj} — вероятности перехода автомата

в состояние z_k и появления на выходе сигнала y_j , если он был в состоянии z_s и на его вход в этот момент времени поступил сигнал x_i . Число таких распределений, представленных в виде таблиц, равно числу элементов множества G . Обозначим множество этих таблиц через B . Тогда четверка элементов $P = \langle Z, X, Y, B \rangle$ называется вероятностным автоматом (P -автоматом).

Возможные приложения P -схемы. Пусть элементы множества G индуцируют некоторые законы распределения на подмножествах Y и Z , что можно представить соответственно в виде:

Элементы из Y	y_1	y_2	\dots	y_{J-1}	y_J
(x_i, z_s)	q_1	q_2	\dots	q_{J-1}	q_J
Элементы из Z	z_1	z_2	\dots	z_{K-1}	z_K
(x_i, z_s)	z_1	z_2		z_{K-1}	z_K

При этом $\sum_{k=1}^K z_k = 1$ и $\sum_{j=1}^J q_j = 1$, где z_k и q_j — вероятности перехода

P -автомата в состояние z_k и появления выходного сигнала y_k при условии, что P -автомат находился в состоянии z_s и на его вход поступил входной сигнал x_i .

Если для всех k и j имеет место соотношение $q_j z_k = b_{kj}$, то такой P -автомат называется *вероятностным автоматом Мили*. Это требование означает выполнение условия независимости распределений для нового состояния P -автомата и его выходного сигнала.

Пусть теперь определение выходного сигнала P -автомата зависит лишь от того состояния, в котором находится автомат в данном такте работы. Другими словами, пусть каждый элемент выходного подмножества Y индуцирует распределение вероятностей выходов, имеющих следующий вид:

Элементы из Y	y_1	y_2	\dots	y_{K-1}	y_K
z_k	s_1	s_2	\dots	s_{I-1}	s_I

Здесь $\sum_{i=1}^I s_i = 1$, где s_i — вероятность появления выходного сигнала

y_i при условии, что P -автомат находился в состоянии z_k .

Если для всех k и i имеет место соотношение $z_k s_i = b_{ki}$, то такой P -автомат называется *вероятностным автоматом Мура*. Понятие P -автоматов Мили и Мура введено по аналогии с детерминированным F -автоматом. Частным случаем P -автомата, задаваемого как $P = \langle Z, X, Y, B \rangle$, являются автоматы, у которых либо переход в новое состояние, либо выходной сигнал определяются детерминированно. Если выходной сигнал P -автомата определяется детерминированно, то такой автомат называется *Y -детерминированным вероятностным автоматом*. Аналогично, *Z -детерминированным вероятностным автоматом* называется P -автомат, у которого выбор нового состояния является детерминированным.

Пример 2.1. Пусть задан Y -детерминированный P -автомат

$$P_p = \begin{vmatrix} 0 & 0,50 & 0 & 0 & 0,50 \\ 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,40 & 0 & 0,60 \\ 0 & 1,00 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{array}{c|ccccc} Z & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \hline Y & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}.$$

На рис. 2.5 показан ориентированный граф переходов этого автомата. Вершины графа сопоставляются с состояниями автомата, а дуги — возможными переходами из одного состояния в другое. Дуги имеют веса, соответствующие вероятностям перехода p_{ij} , а около вершин графа пишутся значения выходных сигналов, индуцируемых этими состояниями. Требуется оценить суммарные финальные вероятности пребывания этого P -автомата в состояниях z_2 и z_3 .

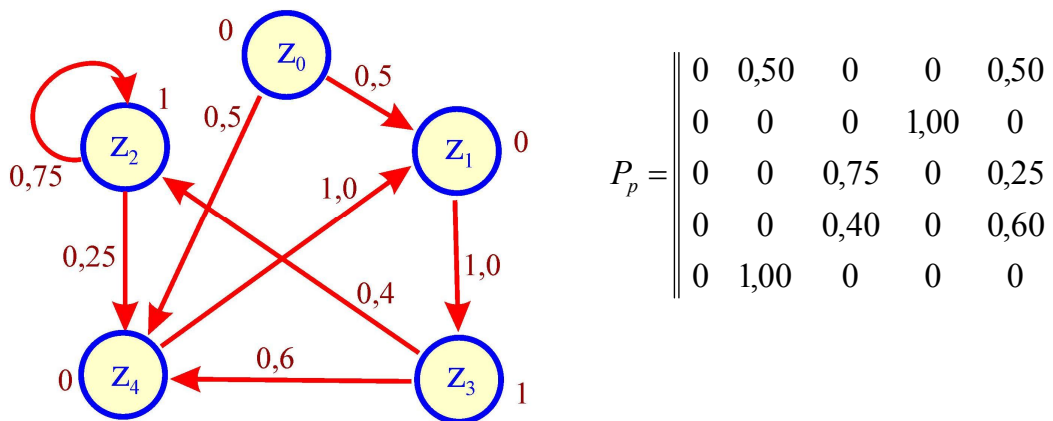


Рис. 2.5. Граф вероятностного автомата

При использовании аналитического подхода можно записать известные соотношения из теории марковских цепей и получить систему уравнений для определения финальных вероятностей. При этом начальное состояние z_0 можно не учитывать, так как начальное распределение не оказывает влияние на значения финальных вероятностей. Тогда имеем

$$\bar{C} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1,00 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,40 & 0 & 0,60 \\ 1,00 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \bar{C} = (c_k) = (c_1, c_2, c_3, c_4),$$

где c_k — финальная вероятность пребывания P -автомата в состоянии z_k .

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 = c_4; \\ c_2 = 0,75c_2 + 0,4c_3; \\ c_3 = c_1; \\ c_4 = 0,25c_2 + 0,6c_3. \end{cases}$$

Добавим к этим уравнениям условие нормировки $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$. Тогда, решая систему уравнений, получим $c_1 = 5/23$, $c_2 = 8/23$, $c_3 = 5/23$, $c_4 = 5/23$. Таким образом, $c_2 + c_3 = 13/23 = 0,5652$. Другими словами, при бесконечной работе заданного в этом примере Y -детерминированного P -автомата на его выходе формируется двоичная последовательность с вероятностью появления единицы, равной 0,5652.

Подобные P -автоматы могут использоваться как генераторы марковских последовательностей, которые необходимы при построении и реализации процессов функционирования систем S или воздействий внешней среды E .

2.5. Непрерывно-стохастические модели (Q -схемы)

Основные соотношения. Особенности непрерывно-стохастического подхода рассмотрим на примере типовых математических Q -схем — *систем массового обслуживания* (англ. *queueing system*).

В качестве процесса обслуживания могут быть представлены различные по своей физической природе процессы функционирования экономических, производственных, технических и других систем, например: потоки поставок продукции некоторому предприятию, потоки деталей и комплектующих изделий на сборочном конвейере цеха, заявки на обработку информации ЭВМ от удаленных терминалов и т.д. При этом характерным для работы таких объектов является случайное появление заявок (требований) на обслуживание и завершение обслуживания в случайные моменты времени, т.е. стохастический характер процесса их функционирования.

Потоком событий называется последовательность событий, происходящих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Различают потоки однородных и неоднородных событий. *Поток событий* называется *однородным*, если он характеризуется только моментами поступления этих событий (вызывающими моментами) и задается последовательностью $\{t_n\} = \{0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_n \leq \dots\}$, где t_n — момент наступления n -го события — неотрицательное вещественное число. Однородный поток событий также может быть задан в виде последовательности промежутков

времени между n -м и $(n-1)$ -м событиями $\{\tau_n\}$, которая однозначно связана с последовательностью вызывающих моментов $\{t_n\}$, где $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $n \geq 1$, $t_0 = 0$, т.е. $\tau_1 = t_1$. *Потоком неоднородных событий* называется последовательность $\{t_n, f_n\}$, где t_n — вызывающие моменты; f_n — набор признаков события. Например, применительно к процессу обслуживания для неоднородного потока заявок может быть задана принадлежность к тому или иному источнику заявок, наличие приоритета, возможность обслуживания тем или иным типом канала.

В любом элементарном акте обслуживания можно выделить две основные составляющие: ожидание обслуживания заявкой и собственно обслуживание заявки. Это можно изобразить в виде некоторого i -го прибора обслуживания Π_i (рис. 2.6), состоящего из накопителя заявок H_i , в котором может одновременно находиться $j_i = 0, L_i^H$ заявок, где L_i^H — емкость i -го накопителя, и канала обслуживания заявок (или просто канала) K_i . На каждый элемент прибора обслуживания Π_i поступают потоки событий: в накопитель H_i — поток заявок w_i , на канал K_i — поток обслуживаний u_i .

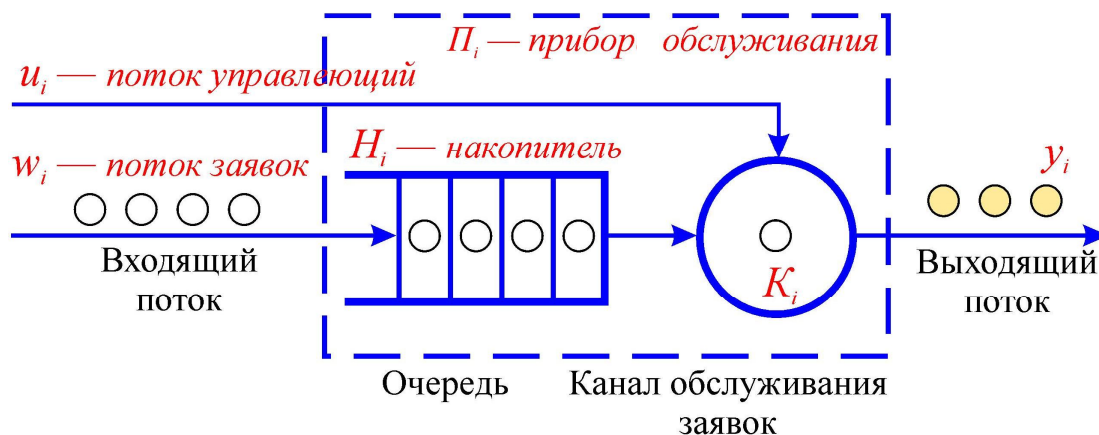


Рис. 2.6. Прибор обслуживания заявок

Заявки, обслуженные каналом K_i , и заявки, покинувшие прибор Π_i по различным причинам необслуженными (например, из-за переполнения накопителя H_i), образуют выходной поток $y_i \in Y$, т.е. интервалы времени между моментами выхода заявок образуют подмножество выходных переменных.

Обычно поток заявок $w_i \in W$, т.е. интервалы времени между моментами появления заявок на входе K_i , образует подмножество неуправляемых переменных, а поток обслуживания $u_i \in U$, т.е. интервалы времени между

началом и окончанием обслуживания заявки, образует подмножество управляемых переменных.

Процесс функционирования прибора обслуживания Π_i можно представить как процесс изменения состояний его элементов во времени $z_i(t)$. Переход в новое состояние для Π_i означает изменение количества заявок, которые в нем находятся (в канале K_i и в накопителе H_i). Таким образом, вектор состояний для Π_i имеет вид: $\vec{z}_i = (z_i^H, z_i^K)$, где z_i^H — состояние накопителя H_i ($z_i^H = 0$ — накопитель пуст, $z_i^H = 1$ — в накопителе имеется одна заявка, ..., $z_i^H = L_i^H$ — накопитель полностью заполнен); L_i^H — емкость накопителя H_i , измеряемая числом заявок, которые в нем могут поместиться; z_i^K — состояние канала K_i ($z_i^K = 0$ — канал свободен, $z_i^K = 1$ — канал занят).

Возможные приложения Q-схем. В практике моделирования систем, имеющих более сложные структурные связи и алгоритмы поведения, для формализации используются не отдельные приборы обслуживания, а Q-схемы, образуемые композицией многих элементарных приборов обслуживания Π_i . Если каналы K_i различных приборов обслуживания соединены параллельно, то имеет место многоканальное обслуживание (*многоканальная Q-схема*), а если приборы Π_i и их параллельные композиции соединены последовательно, то имеет место многофазное обслуживание (*многофазная Q-схема*). Таким образом, для задания Q-схемы необходимо использовать оператор сопряжения R , отражающий взаимосвязь элементов структуры (каналов и накопителей) между собой.

Связи между элементами Q-схемы изображают в виде стрелок (линий потока, отражающих направление движения заявок). Различают разомкнутые и замкнутые Q-схемы. В разомкнутой Q-схеме выходной поток обслуженных заявок не может снова поступить на какой-либо элемент, т.е. обратная связь отсутствует, а в замкнутых Q-схемах имеются обратные связи, по которым заявки двигаются в направлении, обратном движению «вход-выход».

Собственными (внутренними) параметрами Q-схемы будут являться количество фаз L_ϕ , количество каналов в каждой фазе L_{Kj} , $j = \overline{1, L_\phi}$, количество накопителей каждой фазы L_{Hk} , $k = \overline{1, L_\phi}$, емкость i -го накопителя L_i^H . Следует отметить, что в теории массового обслуживания в зависимости от емкости накопителя применяют следующую терминологию для систем массового обслуживания: системы с потерями ($L_i^H = 0$, т.е. накопитель в приборе Π_i отсутствует, а имеется только канал обслуживания K_i), системы с ожиданием ($L_i^H \rightarrow \infty$, т.е. накопитель H_i имеет бесконечную емкость и очередь заявок не ограничивается) и системы смешанного типа (с ограниченной емкостью накопителя H_i). Всю совокупность собственных параметров Q-схемы обозначим как подмножество H .

Для задания Q -схемы также необходимо описать алгоритмы ее функционирования, которые определяют набор правил поведения заявок в системе в различных неоднозначных ситуациях. Неоднородность заявок, отражающая процесс в той или иной реальной системе, учитывается с помощью введения классов приоритетов.

В зависимости от динамики приоритетов в Q -схемах различают статические и динамические приоритеты. Статические приоритеты назначаются заранее и не зависят от состояний Q -схемы. Динамические приоритеты возникают при моделировании в зависимости от возникающих ситуаций. Исходя из правил выбора заявок из накопителя H_i на обслуживание каналом K_i , можно выделить относительные и абсолютные приоритеты. *Относительный приоритет* означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель H_i , ожидает окончания обслуживания предшествующей заявки каналом K_i и только после этого занимает канал. *Абсолютный приоритет* означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель H_i , прерывает обслуживание каналом K_i заявки с более низким приоритетом и сама занимает канал (при этом вытесненная из K_i заявка может либо покинуть систему, либо может быть снова записана на какое-то место в H_i).

При рассмотрении алгоритмов функционирования приборов обслуживания P_i (каналов K_i и накопителей H_i) необходимо также задать набор правил, по которым заявки покидают H_i и K_i : для H_i – либо правила переполнения, по которым заявки в зависимости от заполнения H_i покидают систему, либо правила ухода, связанные с истечением времени ожидания заявки в H_i ; для K_i – правила выбора маршрутов или направлений ухода. Кроме того, для заявок необходимо задать правила, по которым они остаются в канале K_i или не допускаются до обслуживания каналом K_i , т.е. правила блокировок канала. При этом различают блокировки K_i по выходу и по входу. Такие блокировки отражают наличие управляющих связей в Q -схеме, регулирующих поток заявок в зависимости от состояний Q -схемы. Весь набор возможных алгоритмов поведения заявок в Q -схеме можно представить в виде некоторого оператора алгоритмов поведения заявок A .

Таким образом, Q -схема, описывающая процесс функционирования системы массового обслуживания любой сложности, однозначно задается в виде $Q = \langle W, U, H, Z, Y, R, A \rangle$.

Возможности оценки характеристик с использованием аналитических моделей теории массового обслуживания являются весьма ограниченными. Несравненно большими возможностями обладают имитационные модели, позволяющие исследовать Q -схему, задаваемую $Q = \langle W, U, H, Z, Y, R, A \rangle$ без ограничений. На работу с Q -схемами при машинной реализации моделей ориентированы многие языки имитационного моделирования, например SIMULA, SIMSCRIPT, GPSS.

2.6. Сетевые модели (N -схемы)

Основные соотношения. Для формального описания структуры и взаимодействия параллельных систем и процессов, а также анализа причинно-следственных связей в сложных системах используются *сети Петри* (англ. *Petri Nets*), называемые N -схемами.

Формально N -схема задается четверкой вида

$$N = \langle B, D, I, O \rangle,$$

где B — конечное множество символов, называемых позициями, $B \neq O$;
 D — конечное множество символов, называемых переходами, $D \neq O$,
 $B \cap D \neq O$;
 I — входная функция (прямая функция инцидентности) $I: B \times D \rightarrow \{0, 1\}$;
 O — выходная функция (обратная функция инцидентности), $O: B \times D \rightarrow \{0, 1\}$.

Таким образом входная функция I отображает переход d_j в множество входных позиций $b_j \in I(d_j)$, а выходная функция O отображает переход d_j в множество выходных позиций $b_j \in O(d_j)$. Для каждого перехода $d_j \in D$ можно определить множество входных позиций перехода $I(d_j)$ и выходных позиций перехода $O(d_j)$ как

$$I(d_j) = \{ b_i \in B \mid I(b_i, d_j) = 1 \},$$

$$O(d_j) = \{ b_i \in B \mid O(d_j, b_i) = 1 \},$$

$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad n = |B|, \quad m = |D|.$$

Аналогично для каждой *позиции* $b_i \in B$ вводятся определения множеств входных переходов позиции $I(b_i)$ и выходных переходов позиции $O(b_i)$:

$$I(b_i) = \{ d_j \in D \mid I(d_j, b_i) = 1 \},$$

$$O(b_i) = \{ d_j \in D \mid O(b_i, d_j) = 1 \}.$$

Графически N -схема изображается в виде двудольного ориентированного мультиграфа, представляющего собой совокупность позиций и переходов (рис. 2.7). Граф N -схемы имеет два типа узлов: позиции и переходы, изображаемые 0 и 1, соответственно. Ориентировочные дуги соединяют позиции и переходы, причем каждая дуга направлена от элемента одного множества (позиции или перехода) к элементу другого множества (переходу или позиции). Граф N -схемы является мультиграфом, так как он допускает существование кратных дуг от одной вершины к другой.

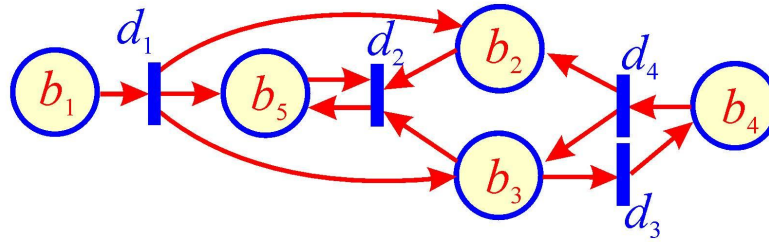


Рис. 2.7. Графическое изображение N-схемы

Пример 2.2. Представим формально N-схему, показанную в виде графа на рис. 2.7:

$$N = \langle B, D, I, O \rangle,$$

$$B = \langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle,$$

$$D = \langle d_1, d_2, d_3, d_4 \rangle.$$

Входные позиции перехода

$$I(d_1) = \{b_1\},$$

$$I(d_2) = \{b_2, b_3, b_5\},$$

$$I(d_3) = \{b_3\},$$

$$I(d_4) = \{b_4\}.$$

Выходные позиции перехода

$$O(d_1) = \{b_2, b_3, b_5\},$$

$$O(d_2) = \{b_5\},$$

$$O(d_3) = \{b_4\},$$

$$O(d_4) = \{b_2, b_3\}.$$

Возможные приложения N-схем. Приведенное представление N-схемы может использоваться только как отражение статики моделируемой системы (взаимосвязи событий и условий), но не позволяет отразить в модели динамику функционирования моделируемой системы. Для представления динамических свойств объекта вводится функция маркировки (разметки) позиций $M: B \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$. Маркировка M есть присвоение неких абстрактных объектов, называемых метками (фишками), позициям N-схемы, причем количество меток, соответствующее каждой позиции, может меняться. При графическом задании N-схемы разметка отображается помещением внутри вершин позиций соответствующего числа точек (когда количество точек велико, ставят цифры).

Маркированная (размеченная) N-схема может быть описана в виде $N_M = \langle B, D, I, O, M \rangle$.

Функционирование N-схемы отражается путем перехода от разметки к разметке. Начальная разметка обозначается как $M_0: B \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$. Смена разметок происходит в результате срабатывания одного из переходов $d_j \in D$ сети. Необходимым условием срабатывания перехода d_j является $b_i \in I(d_j)$, $\{M(b_i) \geq 1\}$, где $M\{b_i\}$ — позиции b_i . Переход d_j , для которого выполняется указанное условие, определяется как находящийся в состоянии готовности к срабатыванию или как возбужденный переход.

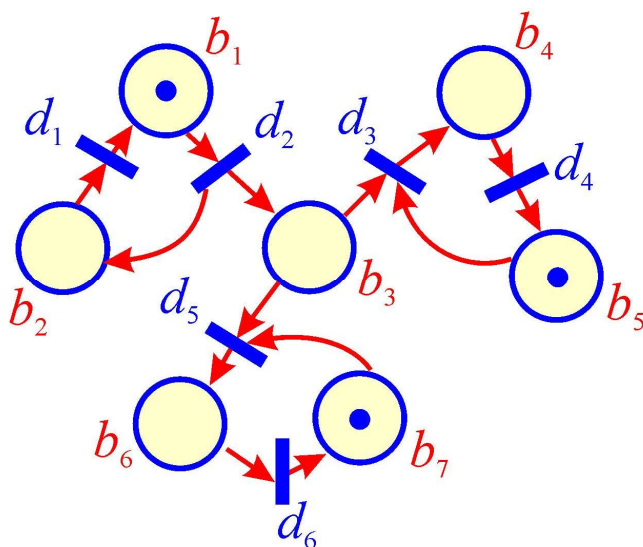
Срабатывание перехода d_j изменяет разметку сети $M(b) = (M(b_1), M(b_2), \dots, M(b_n))^2$ на разметку $M'(b)$ по следующему правилу:

$$M'(b) = M(b) - I(d_j) + O(d_j),$$

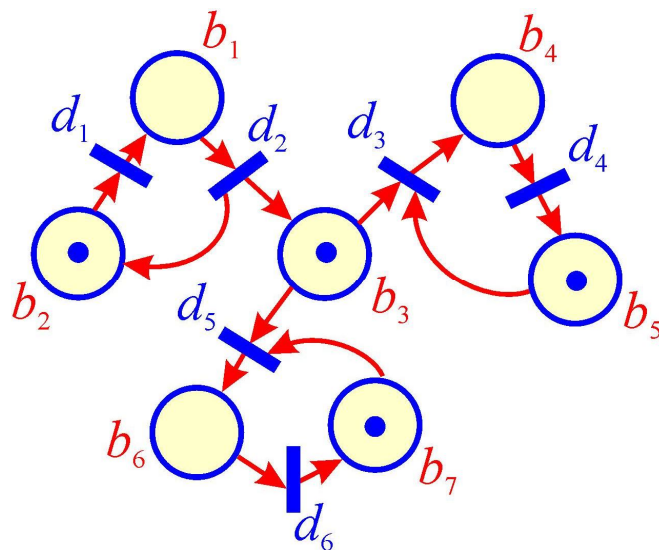
т.е. переход d_j изымает по одной метке из каждой своей входной позиции и добавляет по одной метке в каждую из выходных позиций.

Пример 2.3. Рассмотрим размеченную N -схему с начальной разметкой $M_0 = \{1, 0, 0, 0, 1, 0, 1\}$, которая приведена на рис. 2.8, а. При такой начальной разметке N -схемы единственным готовым к срабатыванию является переход d_2 , срабатывание которого ведет к смене разметки на M_1 , где $M_1 = \{0, 1, 1, 0, 1, 0, 1\}$ (рис. 2.8, б).

При разметке M_1 возможно срабатывание переходов d_1 , d_3 и d_5 . В зависимости от того, какой переход сработал первым, получается одна из трех возможных новых маркировок (рис. 2.8, в, г, д). Функционирование N -схемы продолжается до тех пор, пока существует хотя бы один возможный переход.



а



б

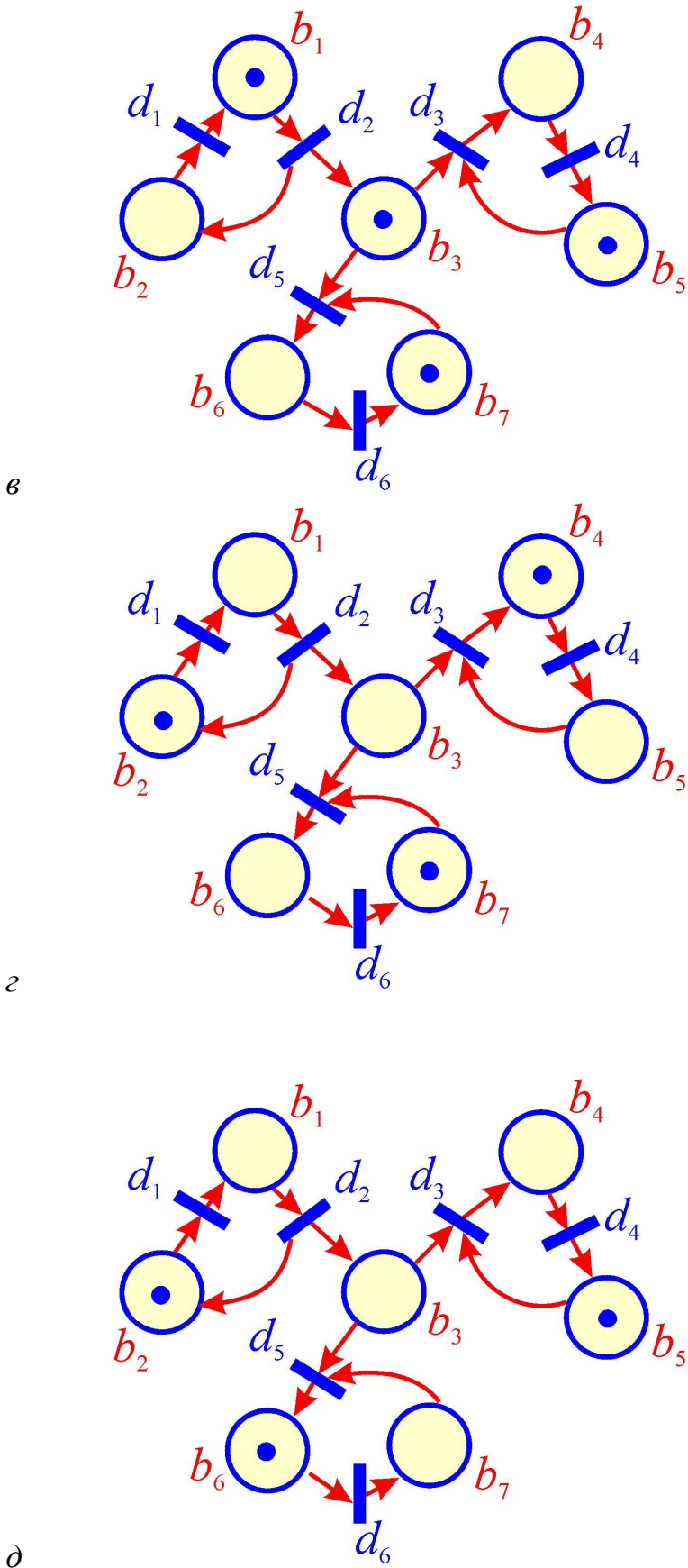


Рис. 2.8. Пример функционирования размеченной N-схемы

Таким образом, N -схема выполняется запуском переходов под управлением количества меток и их распределения в сети. Переход запускается удалением меток из его входных позиций и образованием новых меток, помещаемых в выходные позиции. Переход может запускаться только тогда, когда он разрешен. Переход называется *разрешенным*, если каждая из его входных позиций имеет число меток, по крайней мере, равное числу дуг из позиции в переход.

Важной особенностью моделей процесса функционирования систем с использованием типовых N -схем является простота построения иерархических конструкций при моделировании параллельных и конкурирующих процессов в системах.

2.7. Комбинированные модели (A -схемы)

Основные соотношения. Для описания поведения непрерывных и дискретных, детерминированных и стохастических систем применяется обобщенный (универсальный) подход, предложенный *Н.П. Бусленко*. Он базируется на понятии *агрегативной системы* (англ. aggregate system), называемой A -схемой.

При агрегативном описании сложный объект (система) расчленяется на конечное число частей (подсистем), сохраняя при этом связи, обеспечивающие взаимодействие частей. Если некоторые из полученных подсистем оказываются еще достаточно сложными, то процесс их разбиения продолжается до тех пор, пока не образуются подсистемы, которые в условиях рассматриваемой задачи моделирования могут считаться удобными для математического описания. В результате такой декомпозиции сложная система представляется в виде многоуровневой конструкции из взаимосвязанных элементов, объединенных в подсистемы различных уровней.

В качестве элемента A -схемы выступает агрегат, а связь между агрегатами (внутри системы S и с внешней средой E) осуществляется с помощью оператора сопряжения R . Очевидно, что агрегат сам может рассматриваться как A -схема, т.е. может разбиваться на элементы (агрегаты) следующего уровня.

Любой агрегат характеризуется следующими множествами: моментов времени T , входных X и выходных Y сигналов, состояний Z в каждый момент времени t . Состояние агрегата в момент времени $t \in T$ обозначается как $z(t) \in Z$, а входные и выходные сигналы как $x(t) \in X$ и $y(t) \in Y$, соответственно.

Будем полагать, что переход агрегата из состояния $z(t_1)$ в состояние $z(t_2) \neq z(t_1)$ происходит за малый интервал времени, т.е. имеет место скачок δz . Переходы агрегата из состояния $z(t_1)$ в $z(t_2)$ определяются

собственными (внутренними) параметрами самого агрегата $h(t) \in H$ и входными сигналами $x(t) \in X$.

В начальный момент времени t_0 состояния z имеют значения, равные z^0 , т.е. $z^0 = z(t_0)$, задаваемые законом распределения процесса $z(t)$ в момент времени t_0 , а именно $J[z(t_0)]$. Предположим, что процесс функционирования агрегата в случае воздействия входного сигнала x_n описывается случайным оператором V . Тогда в момент поступления в агрегат $t_n \in T$ входного сигнала x_n можно определить состояние

$$z(t_n + 0) = V[t_n, z(t_n), x_n].$$

Обозначим полуинтервал времени $t_1 < t \leq t_2$ как $(t_1, t_2]$, а полуинтервал $t_1 \leq t < t_2$ как $[t_1, t_2)$. Если интервал времени (t_n, t_{n+1}) не содержит ни одного момента поступления сигналов, то для $t \in (t_n, t_{n+1})$ состояние агрегата определяется случайным оператором U в соответствии с соотношением

$$z(t) = U[t, t_n, z(t_n + 0)].$$

Совокупность случайных операторов V и U рассматривается как оператор переходов агрегата в новые состояния. При этом процесс функционирования агрегата состоит из скачков состояний δz в моменты поступления входных сигналов x (оператор V) и изменений состояний между этими моментами t_n и t_{n+1} (оператор U). На оператор U не накладывается никаких ограничений, поэтому допустимы скачки состояний δz в моменты времени, не являющиеся моментами поступления входных сигналов x . В дальнейшем моменты скачков δz будем называть особыми моментами времени t_δ , а состояния $z(t_\delta)$ — особыми состояниями A -схемы. Для описания скачков состояний δz в особые моменты времени t_δ будем использовать случайный оператор W , представляющий собой частный случай оператора U , т.е.

$$z(t_\delta + 0) = W[t_\delta, z(t_\delta)].$$

В множестве состояний Z выделяется такое подмножество $Z^{(Y)}$, что если $z(t_\delta)$ достигает $Z^{(Y)}$, то это состояние является моментом выдачи выходного сигнала, определяемого оператором выходов:

$$y = G[t_\delta, z(t_\delta)].$$

Таким образом, под *агрегатом* будем понимать любой объект, определяемый упорядоченной совокупностью рассмотренных множеств $T, X, Y, Z, Z^{(Y)}, H$ и случайных операторов V, U, W, G .

Последовательность входных сигналов, расположенных в порядке их поступления в A -схему, будем называть *входным сообщением* или *x-сообщением*. Последовательность выходных сигналов, упорядоченную относительно времени выдачи, назовем *выходным сообщением* или *y-сообщением*.

Возможные применения А-схемы. Для описания некоторой реальной системы S в виде А-схемы необходимо описать отдельные агрегаты A_n , $n = \overline{1, N_A}$, и связи между ними. Каждый n -й агрегат А-схемы A_n имеет входные контакты, на которые поступает совокупность элементарных сигналов $x_i(t)$, $i = \overline{1, I_n}$, одновременно возникающих на входе элемента, и выходные контакты, с которых снимается совокупность элементарных сигналов $y_j(t)$, $j = \overline{1, J_n}$. Таким образом, каждый агрегат А-схемы A_n имеет I_n входных и J_n выходных контактов.

Пример 2.4. Рассмотрим А-схему, структура которой приведена на рис. 2.9.

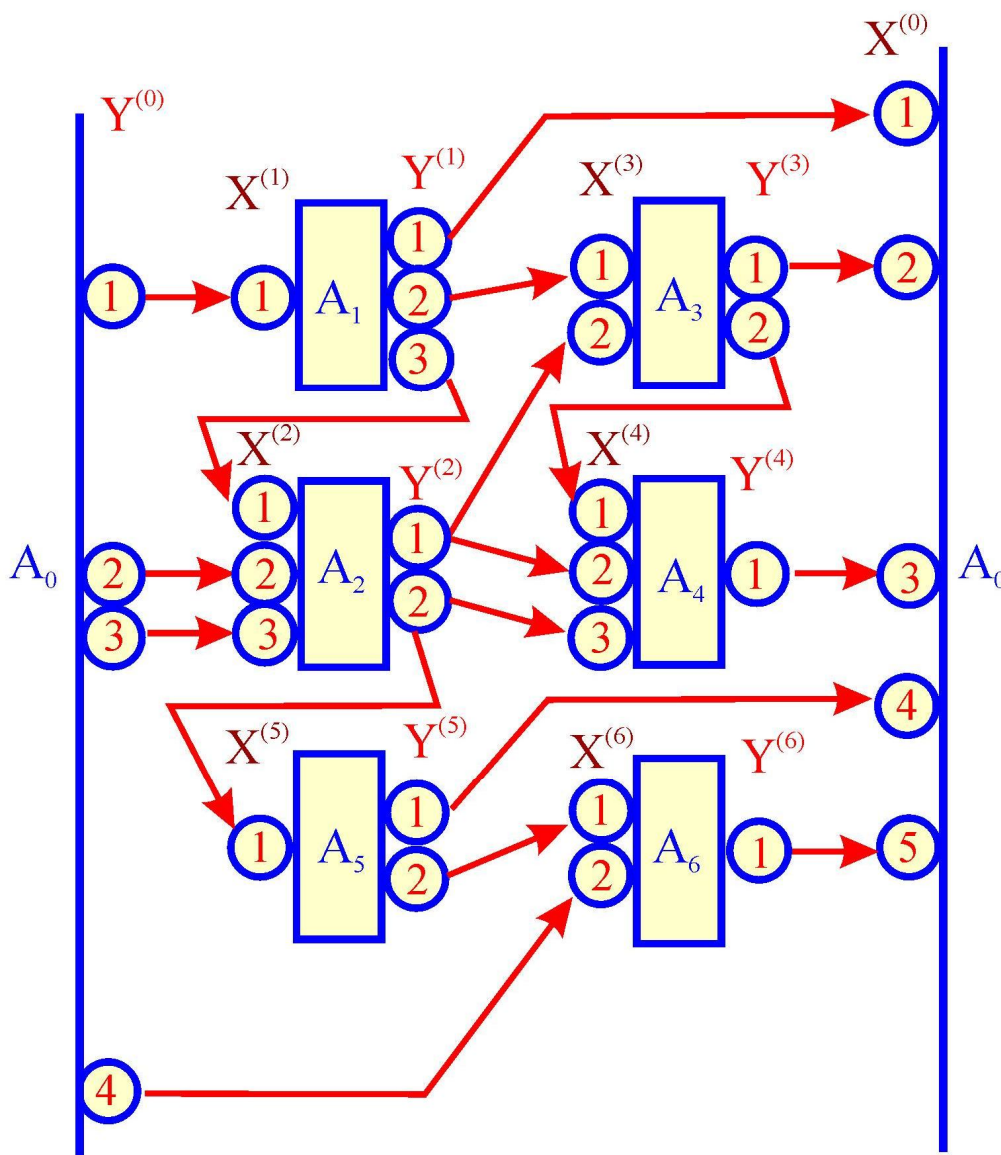


Рис. 2.9. Структура агрегативной системы

Функционирование A -схемы связано с переработкой информации (передача последней на схеме показана стрелками). Вся информация, циркулирующая в A -схеме, делится на внешнюю и внутреннюю. Внешняя информация поступает от внешних объектов, не являющихся элементами рассматриваемой схемы, а внутренняя информация вырабатывается агрегатами самой A -схемы. Обмен информацией между A -схемой и внешней средой E происходит через агрегаты, которые называются *полюсами* A -схемы. При этом различают *входные полюсы* A -схемы, представляющие собой агрегаты, на которые поступают x -сообщения (агрегаты A_1, A_2, A_6), и *выходные полюсы* A -схемы, выходная информация которых является y -сообщениями (агрегаты A_1, A_3, A_4, A_5, A_6). Агрегаты, не являющиеся полюсами, называются *внутренними*.

Взаимодействие A -схемы с внешней средой E рассматривается как обмен сигналами между внешней средой E и элементами A -схемы. В соответствии с этим внешнюю среду E можно представить в виде фиктивного элемента системы A_0 , вход которого содержит I_0 входных контактов $X_i^{(0)}$, $i = \overline{1, I_0}$, а выход — J_0 выходных контактов $Y_i^{(0)}$, $i = \overline{1, J_0}$. Сигнал, выдаваемый A -схемой во внешнюю среду E , принимается элементом A_0 как входной сигнал, состоящий из элементарных сигналов $x_1^{(0)}(t), x_2^{(0)}(t), \dots, x_{I_0}^{(0)}(t)$. Сигнал, поступающий в A -схему из внешней среды E , является выходным сигналом элемента A_0 и состоит из элементарных сигналов $y_1^{(0)}(t), y_2^{(0)}(t), \dots, y_{J_0}^{(0)}(t)$.

Таким образом, каждый A_n (в том числе A_0) как элемент A -схемы характеризуется множеством входных контактов $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_{I_n}^{(n)}$, которое обозначим $\{X_i^{(n)}\}$, и множеством выходных контактов $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_{J_n}^{(n)}$, которое обозначим $\{Y_j^{(n)}\}$, где $n = \overline{0, N_A}$. Полученная пара множеств $\{X_i^{(n)}\}, \{Y_j^{(n)}\}$ является математической моделью элемента A_n , используемого для формального описания сопряжения его с прочими элементами A -схемы и внешней средой E .

В силу предположения о независимости передачи сигналов каждому входному контакту,

$$X_i^{(n)} \in \bigcup_{n=0}^{N_A} \{X_i^{(n)}\}$$

соответствует не более чем один выходной контакт

$$Y_j^{(k)} \in \bigcup_{n=0}^{N_A} \{Y_j^{(n)}\},$$

где $\bigcup_{n=0}^{N_A} \{X_i^{(n)}\}$ — множество входных контактов всех элементов A -схемы и внешней среды E ;

$\bigcup_{n=0}^{NA} \{Y_j^{(n)}\}$ — множество выходных контактов всех элементов A -схе-

мы и внешней среды E , с которыми она связана элементарным каналом;

$$k, n = \overline{0, NA}.$$

Поэтому можно ввести однозначный оператор $Y_j^k = R(X_i^{(n)})$ с областью определения в множестве $\bigcup_{n=0}^{NA} \{X_i^{(n)}\}$ и областью значений

в множестве $\bigcup_{n=0}^{NA} \{Y_j^{(n)}\}$, согласующий входной контакт $X_i^{(n)}$ с выходным контактом $Y_j^{(k)}$. Контакты связаны элементарным каналом. Если в A -схеме к контакту $X_i^{(n)}$ не подключен никакой элементарный канал, то оператор R не определен на этом контакте $X_i^{(n)}$. Оператор R называется *оператором сопряжения* элементов (агрегатов) в A -схеме. Совокупность множеств $\{X_i^{(n)}\}$, $\{Y_j^{(k)}\}$ и оператор R образуют схему сопряжения элементов в системе S .

Рассмотрим оператор сопряжения для A -схемы, структура которой показана на рис. 2.9. Оператор сопряжения R можно задать в виде таблицы, в которой на пересечении строк с номерами элементов (агрегатов) n и столбцов с номерами контактов i располагаются пары чисел k, j , указывающие номер элемента k и номер контакта j , с которым соединен контакт $X_i^{(n)}$ (табл.2.5).

Таблица 2.5

n (входной агрегат)	i (входной контакт)				
	1	2	3	4	5
0	1,1	3,1	4,1	5,1	6,1
1	0,1	—	—	—	—
2	1,3	0,2	0,3	—	k, j
3	1,2	2,1	—	—	(выходной агрегат,
4	3,2	2,1	2,2	—	выходной
5	2,2	—	—	—	выходной
6	5,2	0,4	—	—	контакт)

Стандартная форма представления исследуемого объекта в виде A -схемы приводит к унификации не только алгоритмов имитации, но и к возможности применять стандартные методы обработки и анализа результатов моделирования системы S .

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Альянах И.Н. Моделирование вычислительных систем / Л.: Машиностроение, 1988. 233 с.

Введение в математическое моделирование: учеб. пособие для вузов / под ред. П.В.Тарасова. М.: Интернет Инжиниринг, 2000. 200 с.

Ивченко Г.И. Математическая статистика: учеб. пособие для вузов / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. М.: Высш. шк., 1984. 248 с.

Мурашев В. П. Расчет и моделирование электромеханических систем: Учеб. пособие для студентов специальностей 210200, 170400/ В. П. Мурашев; Моск. гос. ун-т леса. 2-е изд., стер. М.: МГУЛ, 2002. 136 с.

Косоруков О. А. Исследование операций: учебник для студентов вузов/ под ред. Н. П. Тихомирова; Рос. экон. акад. им. Г. В. Плеханова. М.: Экзамен, 2003. 448 с.

Обвинцев В. В. Информационное обеспечение лесопромышленного производства: учеб. пособие для студентов вузов. Урал. гос. лесотехн. ун-т. Екатеринбург: УГЛТУ, 2005. 203 с.

Советов Б.Я. Моделирование систем : учеб. для вузов / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. М. : Высш. шк., 2001. 343 с.

Советов Б.Я. Моделирование систем : учеб. для вузов / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1998. 319 с.

Советов Б. Я. Моделирование систем: практикум : учеб. пособие для студентов вузов/ Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 2003. 295 с.

Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: учеб. для вузов. М.: Наука, 1997. 600 с.

Томашевский В. Н. Имитационное моделирование в среде GPSS / В. Н. Томашевский, Е. Г. Жданова. М.: Бестселлер, 2003. 416 с.

Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. М.: Мир, 1978. 308 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Занятия 4, 5, 6

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ	3
2.1. Основные подходы к построению математических моделей систем.....	3
2.2. Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы)	6
2.3. Дискретно-детерминированные модели (F-схемы).....	12
2.4. Дискретно-стохастические модели (Q-схемы)	18
2.5. Непрерывно-стохастические модели (Q-схемы)	21
2.6. Сетевые модели (N-схемы)	25
2.7. Комбинированные модели (A-схемы).....	29
 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	 34