УДК 674.8 - 41:539.37

А.Ф.Кулиничев
(Уральский лесотехнический институт им. Ленинского комсомола)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАТИВНОСТИ ДРЕВЕСНЫХ ПЛИТ ПРИ ДЕЙСТВИИ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

Рассмотрим вопросы теоретического характера по определению деформативности прямоугольной плиты, приняв ее в осях OX (проходит по нижней кромке) и Oy по левой кромке плиты. Начало координат O примем в нижнем левом углу плиты.

Для определения прогиба прямоугольной плиты размером $b \times 2b$ с одной защемленной малой стороной под действием распределенных изгибающих моментов M_1 и M_2 на сторонах $2b$ имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0. \qquad (1)$$

Решив уравнение (1), определим прогиб плиты в следующем виде

$$f = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_{mn}\,ch\frac{mn\pi y}{b} + B_{mn}\,sh\frac{mn\pi y}{b} +$$

$$C_{mn}\frac{mn\pi y}{b}\,sh\frac{mn\pi y}{b} + D_{mn}\frac{mn\pi y}{b}\,ch\frac{mn\pi y}{b}\Big)\sin\frac{mn\pi x}{b} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big(E_m\,ch\frac{m\pi x}{2b} + F_m\,sh\frac{m\pi x}{2b} + G_m\frac{m\pi x}{2b}\,sh\frac{m\pi x}{2b} +$$

$$H_m\frac{m\pi x}{2b}\,ch\frac{m\pi x}{2b}\Big)\sin\frac{m\pi y}{2b}. \qquad (2)$$

Для плит с соотношением сторон 1:2 при всех значениях $m = n$ = 1, 2, 3 .... считаем

$$sh 2mn\pi = ch 2mn\pi. \qquad (3)$$

Постоянные коэффициенты A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_m, F_m, G_m и H_m определим из граничных условий, разложив гиперболические функции в ряды и решив систему полученных уравнений

$A_{mn} = 0$

$$B_{mn} = \frac{48b^2(1-\mu^2)(2+2mn\pi-\mu 2mn\pi)(-1)^{m(n+1)}\left[M_2+M_1(-1)^{mn+1}\right]}{Eh^3m^3n^2\pi^3(1+4n^4)(3+\mu)\, sh\, 2mn\pi}$$

$$\frac{48b^2(1-\mu^2)(-1)^{m(n+1)}(2+2mn\pi-2\mu mn\pi)(2-\mu)}{Eh^3m^3\pi^3(n^2+4n^4)(3+\mu)}$$

$$\frac{\left[M_1 ch\frac{m\pi}{2}+M_1-M_2-M_1(-1)^{mn} ch\frac{m\pi}{2}\right]}{(1-\mu)\, sh\, 2mn\pi}$$

$$C_{mn} = -\frac{192b^2(1-\mu^2)(-1)^{mn}\left[M_2+M_1(-1)^{mn+1}\right]}{Eh^3m^3\pi^3(1+4n^2)^2} +$$

$$B_{mn}\frac{1+\mu+2mn\pi(1-\mu)}{2+2mn\pi-2\mu mn\pi}$$

$$D_{mn} = -B_{mn} + \frac{192b^2(1-\mu^2)(-1)^{mn}\left[M_2+M_1(-1)^{mn+1}\right]}{Eh^3m^3\pi^3(1+4n^2)^2}$$

$$E_m = 0;$$

$$F_m = \frac{12b^2(1-\mu^2)\left(M_2 \, ch\frac{m\pi}{2} - M_1\right)}{Eh^3 m\pi \, sh^2\frac{m\pi}{2}}$$

$$G_m = -\frac{24b^2(1-\mu^2)M_1}{Eh^3 m^2\pi^2}$$

$$H_m = \frac{24b^2(1-\mu^2)\left(M_1 \, ch\frac{m\pi}{2} - M_2\right)}{Eh^3 m^2\pi^2 \, sh\frac{m\pi}{2}} \qquad (4)$$

Подставив коэффициенты (4) в уравнение (2), определим прогиб плиты

$$f = -\frac{48b^2(1-\mu^2)}{Eh^3\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2+2\pi mn - 2\mu mn)}{m^3n^2(1+4n^2)}\right.$$

$$\frac{(-1)^{m(n+1)}}{sh\,2mn\pi}\left[\frac{M_2 + M_1(-1)^{mn+1}}{(1+4n^2)(3+\mu)} + \right.$$

$$\left.\frac{(2-\mu)\left[M_1 \, ch\frac{m\pi}{2} + M_1 - M_2 - M_1(-1)^{mn} ch\frac{m\pi}{2}\right]}{(3+\mu)(1-\mu)}\right]$$

$$\left(sh\frac{mn\pi y}{b} - \frac{mn\pi y}{b} ch\frac{mn\pi y}{b} + \right.$$

$$\left.\frac{1+\mu+2mn\pi - 2\mu mn\pi}{2+2mn\pi - 2\mu mn\pi}\frac{mn\pi y}{b} sh\frac{mn\pi y}{b}\right) -$$

$$-\frac{4(-1)^{mn}\left[M_2+M_1(-1)^{mn+1}\right]}{m^3 b(1+4n^2)^2}\frac{mn\pi y}{b}\left(ch\frac{mn\pi y}{b}-sh\frac{mn\pi y}{b}\right)\Big\}$$

$$\sin\frac{mn\pi y}{b}+\frac{24b^2(1-\mu^2)}{Eh^3\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\Bigg[\frac{\frac{m\pi}{2}\left(M_2 ch\frac{m\pi}{2}-M_1\right)}{sh^2\frac{m\pi}{2}}$$

$$sh\frac{m\pi x}{2b}-M_1\frac{m\pi x}{2b}sh\frac{m\pi x}{2b}+\frac{M_1 ch\frac{m\pi}{2}-M_2}{sh\frac{m\pi}{2}}$$

$$\frac{m\pi x}{2b}ch\frac{m\pi x}{2b}\Bigg]\sin\frac{m\pi y}{2b}, \qquad (5)$$

где E – модуль Юнга;

μ – коэффициент Пуассона;

h – толщина плиты;

b – меньший размер стороны плиты.

Прогибы (5) при условии (3) пригодны для длинных плит.

Таким образом, получено общее решение задачи изгиба прямоугольной плиты, находящейся под действием распределенных моментов по двум свободно опертым краям. Коэффициенты M_1 и M_2 определим разложением функций изгибающих моментов в пределах $0 < y \leqslant 2b$:

$$f_1(y)=\sum_{m=1}^{\infty}M_1\sin\frac{m\pi y}{2b}$$

$$f_2(y)=\sum_{m=1}^{\infty}M_2\sin\frac{m\pi y}{2b} \qquad (6)$$

Основываясь на быстрой сходимости рядов (5), для практических расчетов можно взять $m = n = 1$.

Окончательно получим прогиб плиты в следующем виде

$$f=-\frac{48b^2(1-\mu^2)}{Eh^3\pi^3}\left\{\frac{2+2\pi-2\mu\pi}{5\,sh\,2\pi}\left[\frac{M_1+M_2}{5(3+\mu)}\right.\right.+$$

$$\left.\frac{(2-\mu)\left[M_1 ch\frac{\pi}{2} + M_1 - M_2 + M_1 ch\frac{\pi}{2}\right]}{(3+\mu)(1-\mu)}\right]$$

$$\cdot\left(sh\frac{\pi y}{b} - \frac{\pi y}{b} ch\frac{\pi y}{b} + \frac{(1+\mu+2\pi-2\mu\pi)\pi y}{(2+2\pi-2\mu\pi)\cdot b} sh\frac{\pi y}{b}\right) +$$

$$\left.\left.\frac{4(M_1+M_2)}{25}\frac{\pi y}{b}\exp\left(-\frac{\pi y}{b}\right)\right]\right\} \sin\frac{\pi x}{b} +$$

$$\frac{24b^2(1-\mu^2)}{Eh^3\pi^2}\left[\frac{\frac{\pi}{2}\left(M_2 ch\frac{\pi}{2} - M_1\right)}{sh^2\frac{\pi}{2}} sh\frac{\pi x}{2b} -\right.$$

$$\left. M_1\frac{\pi x}{2b} sh\frac{\pi x}{2b} + \frac{M_1 ch\frac{\pi}{2} - M_2}{sh\frac{\pi}{2}}\frac{\pi x}{2b} ch\frac{\pi x}{2b}\right] \sin\frac{\pi y}{2b}. \qquad (7)$$

Таким образом, в работе теоретически выведено общее решение (5), для практических расчетов приведено уравнение (7), с помощью которых можно вести расчеты древесных плит при применении в конструкциях.

На основании вышеуказанных результатов установлена возможность определения прогиба древесных плит, что важно для ускоренного метода определения их механических характеристик.