УДК 674.8 - 41:539.37

А.Ф.Кулиничев, В.А.Шмелев
(Уральский лесотехнический
институт им. Ленинского
комсомола)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАТИВНОСТИ ДРЕВЕСНЫХ ПЛИТ ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

Представляет как теоретический, так и практический интерес задача о колебаниях прямоугольной древесной плиты размером $a \times b$ с одной защемленной малой стороной под действием переменных во времени изгибающих моментов $M_1(\vartheta t)$ и $M_2(\vartheta t)$ на сторонах b. Особый интерес представляет резонансный случай, когда частота возбуждения близка к одной из собственных частот плиты $\omega_к$ (к = 1, 2, 3 ...).

Примем уравнение колебаний плиты с учетом диссипации энергии

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \lambda\frac{\partial f}{\partial t} + m\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

где f - прогиб (отклонение) плиты;
t - время;
m - масса единицы площади плиты;
λ - коэффициент диссипации.

Решение уравнения (1) имеем в следующем виде:

$$f(x,y,t) = \frac{6(1-\mu^2)}{Eh^3a^3}x^2(x-a)\left[xM_2(\vartheta t) - (x-b)M_1(\vartheta t)\right] + F(x,y)T(t), \qquad (2)$$

где $F(x,y)$ - прогиб плиты при действии статических моментов;

E - модуль Юнга;
μ - коэффициент Пуассона;
h - толщина плиты.

Для определения основной частоты колебаний плиты и амплитуды колебаний плиты применим метод Бубнова-Галеркина. Подставим решение (2) в уравнение (1), получим следующее уравнение относительно функции $T(t)$:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = m_1 M_1(\nu t) + m_2 M_2(\nu t) + m_3 \frac{dM_1}{dt} + \tag{3}$$

$$+ m_4 \frac{dM_2}{dt} + m_5 \frac{d^2M_1}{dt^2} + m_6 \frac{d^2M_2}{dt^2} + m_7 \frac{dT}{dt},$$

где $$\omega^2 = \alpha^2 \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) F(x,y)\, dy\, dx;$$

$$m_1 = \frac{6\alpha^2(1-\mu^2)}{Eh^3a^3} \int_0^a \int_0^b (192x - 108a) F(x,y)\, dy\, dx;$$

$$m_2 = -\frac{6\alpha^2(1-\mu^2)}{Eh^3a^3} \int_0^a \int_0^b (84x - 36a) F(x,y)\, dy\, dx;$$

$$m_3 = \frac{6\alpha^2\lambda(1-\mu^2)}{Eh^3a^3} \int_0^a \int_0^b x^2(x-a)^3 F(x,y)\, dy\, dx;$$

$$m_4 = -\frac{6\alpha^2\lambda(1-\mu^2)}{Eh^3a^3} \int_0^a \int_0^b x^3(x-a)^2 F(x,y)\, dy\, dx;$$

$$m_5 = \frac{m_3}{\lambda}; \qquad m_6 = \frac{m_4}{\lambda};$$

$$m_7 = -\alpha^2 \lambda \int_0^a \int_0^b F^2(x,y)\,dy\,dx\ ;$$

$$\alpha^2 = m \int_0^a \int_0^b F(x,y)\,dy\,dx\ .$$

С помощью уравнения (3) можно исследовать колебания плиты как в резонансном случае, так и в случае $\vartheta \neq \omega$ (ω - основная частота собственных колебаний).

Рассмотрим общий случай, когда $M_i(\vartheta t)$, $i = 1, 2$ являются произвольными периодическими функциями с периодом T. Разлагая их в ряд Фурье, имеем

$$M_1(\nu t) = \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{1k} \sin k\nu t + b_{1k} \cos k\nu t\right);$$

$$M_2(\nu t) = \frac{a_{2,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{2k} \sin k\nu t + b_{2k} \cos k\nu t\right). \qquad (4)$$

Решение уравнения (3) найдем в виде тригонометрического ряда

$$T(t) = \frac{p_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(p_k \sin k\nu t + r_k \cos k\nu t\right). \qquad (5)$$

Подставив ряды (4,5) в уравнение (3) и применив метод гармонического баланса, получим для определения коэффициентов ряда (5) систему уравнений, решив которую, получим

$$p_0 = \frac{m_1 a_{1,0} + m_2 a_{2,0}}{\omega^2}\ ;$$

$$p_k = \frac{[m_1 a_{1k} + m_2 a_{2k} - k^2\nu^2(m_5 a_{1k} + m_6 a_{2k}) -}{(\omega^2 - \nu^2 k^2)^2 + (k\nu)^2}$$

$$\frac{-k\nu\left(m_3 b_{1k}+m_4 b_{2k}\right)\Big]\Big[\omega^2-(\nu k)^2\Big]}{} -$$

$$-\frac{\left[m_1 b_{1k}+m_2 b_{2k}-k^2\nu^2\left(m_5 b_{1k}+m_6 b_{2k}\right)-k\nu\left(m_3 a_{1k}+m_4 a_{2k}\right)\right]k\nu}{\left(\omega^2-k^2\nu^2\right)^2+(k\nu)^2},$$

$$r_k=\frac{\left[m_1 b_{1k}+m_2 b_{2k}-k^2\nu^2\left(m_5 b_{1k}+m_6 b_{2k}\right)-k\nu\left(m_3 a_{1k}+m_4 a_{2k}\right)\right]\left(\omega^2-k^2\nu^2\right)}{\left(\omega^2-k^2\nu^2\right)^2+(k\nu)^2}+$$

$$+\frac{\left[m_1 a_{1k}+m_2 a_{2k}-k^2\nu^2\left(m_5 a_{1k}+m_6 a_{2k}\right)-k\nu\left(m_3 b_{1k}+m_4 b_{2k}\right)\right]k\nu}{\left(\omega^2-k^2\nu^2\right)^2+(k\nu)^2} \qquad (6)$$

Окончательно прогиб плиты под действием периодически изменяющихся изгибающих моментов определится следующей формулой

$$f(x.y.t)=\frac{6x^2(x-a)^2(1-\mu^2)}{Eh^3a^3}\Big[xM_2(\nu t)-(x-a)M_1(\nu t)\Big]+$$

$$+F(x,y)\Big[\frac{p_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(p_k\sin k\nu t+r_k\cos k\nu t\right) . \qquad (7)$$

Формула (7) позволяет найти прогибы для нерезонансного и резонансного случаев. В последнем случае необходимо в формулах (6) положить $k^2\nu^2=\omega^2$. Следует отметить, что для практических расчетов в формуле (7) достаточно определить лишь один-два члена ряда.

Рассмотрим частный случай, который представляет практический интерес.

Пусть $M_1(\nu t) = M_2(\nu t) = A \sin \nu t$, тогда уравнение (3) принимает следующий вид:

$$\frac{d^2T}{dt^2} - m_7 \frac{dT}{dt} + \omega^2 T = m_8 \sin \nu t + m_9 \cos \nu t, \tag{8}$$

где $$m_8 = A\,(m_1 + m_2 - \nu^2 m_5 - \nu^2 m_4);$$

$$m_9 = \nu A\,(m_3 + m_4).$$

В случае установившегося режима колебаний решение уравнения (8) найдем в следующем виде:

$$T(t) = C \sin \nu t + D \cos \nu t. \tag{9}$$

Подставив выражение (9) в уравнение (8) и приравняв коэффициенты при одноименных гармониках в обоих его частях, получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных C и Д, решив которую, получим

$$C = \frac{m_8(\omega^2 - \nu^2) - m_9 \nu}{(\omega^2 - \nu^2)^2 + \nu^2}; \quad D = \frac{m_9(\omega^2 - \nu^2) + m_8 \nu}{(\omega^2 - \nu^2)^2 + \nu^2}. \tag{10}$$

Решение (9) представим в следующем виде:

$$T(t) = B \sin(\nu t + \varphi), \tag{11}$$

где B – амплитудный коэффициент;
φ – фаза колебаний.

Соответственно равны:

$$B = \sqrt{C^2 + D^2} = \sqrt{\frac{m_8^2 + m_9^2}{(\omega^2 - \nu^2) + \nu^2}}; \tag{12}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{D}{C} = \frac{m_9(\omega^2 - \nu^2) + m_8 \nu}{m_8(\omega^2 - \nu^2) - m_9 \nu}.$$

Определим максимальный прогиб плиты при резонансе.
В этом случае $|\sin \nu t + \varphi| = 1$:

$$B = \frac{1}{\nu}\sqrt{m_8^2 + m_9^2} = \frac{1}{\omega}\sqrt{m_8^2 + m_9^2} . \qquad (13)$$

Максимальное значение изгибающих моментов M_i равно A, так как

$$\max |\sin \nu t| = 1.$$

Подставляя выражение для B и $\max M_i$ в решение (2), находим максимальное значение прогибов плиты

$$f(x,y,t) = A\Big[\frac{6x^2(1-\mu^2)(x-a)^2}{Eh^3 a^2} + \frac{F(x,y)}{\omega} -$$

$$- \sqrt{\omega^2(m_3+m_4)^2 + (m_1+m_2-\omega^2 m_5-\omega^2 m_4)^2}\Big] . \qquad (14)$$

Таким образом, формула (14) позволяет решить практически важную задачу - определить максимальные деформации плиты в условиях динамического нагружения и по ним оценить прочность плиты.