



Н.В. Куцубина
И.В. Перескоков
В.В. Васильев
Т.В. Калимулина

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНО-ИЗГИБНЫХ
И ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ МАШИН
И ОБОРУДОВАНИЯ**

Екатеринбург
2012

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра машин и оборудования ЦБП

Н.В. Куцубина
И.В. Перескоков
В.В. Васильев
Т.В. Калимулина

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНО-ИЗГИБНЫХ
И ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ МАШИН
И ОБОРУДОВАНИЯ**

Методические указания по дисциплинам: «Теория виброзащиты и акустической динамики машин», «Колебания и динамическая прочность», «Теория механизмов и машин», «Диагностика машин» для студентов направлений 150400, 151000, 190600

Екатеринбург
2012

Печатается по рекомендации методической комиссии института автомобильного транспорта и технологических систем, протокол № 1 от 30 сентября 2011 г.

Рецензент профессор, д-р техн. наук А.А. Санников

Редактор Р.В. Сайгина
Верстка Е.В. Карпова

Подписано в печать		Поз. 63
Плоская печать	Формат 60x84 ¹ / ₁₆	Тираж 2,09 экз.
Заказ №	Печ. л. 2,09	Цена руб. коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

Оглавление

Введение	4
1. Теоретические основы поперечно-изгибных колебаний.....	5
2. Теоретические основы продольных колебаний	17
3. Лабораторная работа «Определение собственных частот поперечно-изгибных колебаний стержней»	22
4. Лабораторная работа «Определение собственных частот продольных колебаний стержней»	24
5. Лабораторная работа «Исследование вынужденных частот поперечно-изгибных колебаний роторов».....	26
6. Лабораторная работа «Расчет волновода»	31
Литература	34

Введение

Основными конструктивными элементами технологических машин являются валы, цилиндры, роторы (далее роторы). Вибрация роторов возбуждается силами инерции неуравновешенных масс, параметрическими и кинематическими воздействиями опор. Исследование вибрации роторов (определение критических частот их вращения и параметров вынужденной вибрации) производится с целью разработки методик вибрационных расчетов, методов виброзащиты и вибродиагностики.

Также от различных динамических воздействий в ряде конструктивных элементов оборудования ЦБП (валах, станинах, фундаментах, бумажном полотне, одежде) возбуждаются продольные волны.

В методических указаниях приведены теория колебаний и методика вибрационных расчетов межопорных (опирающихся по концам на подшипники качения) роторов с распределенными параметрами, к которым относятся валы и цилиндры бумаго- и картоноделательных машин. Рассмотрены основы теории продольных колебаний в стержнях, а также расчет волновода, применяемого при диагностике оборудования.

Методические указания предназначены для студентов механических направлений при изучении соответствующих разделов курсов «Теория механизмов и машин», «Теория виброзащиты и акустическая динамика машин», «Диагностика оборудования» и могут быть полезны студентам старших курсов при изучении дисциплин специального курса.

3. Теоретические основы поперечно-изгибных колебаний

1.1. Дифференциальное уравнение поперечно-изгибных колебаний вращающегося стержня

Пусть стержень (рис. 1) совершает поперечно-изгибные колебания вдоль оси Z . Выделим из него бесконечно малый элемент dy . На этот элемент действуют следующие силы:

сила инерции элементарной массы $\rho S dy \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}$;

сила упругости распределенной опоры $C_0 Z dy$;

сила неупругих сопротивлений распределенной опоры $b_0 \frac{\partial Z}{\partial t} dy$;

центробежные силы инерции неуравновешенной массы $\rho e_y \omega^2 dy \cos(\omega t)$,

где e_y – удельный дисбаланс элемента;

ω – угловая частота вращения ротора;

внутренние поперечные силы

$$Q \text{ и } Q + \frac{\partial Q}{\partial y} dy;$$

внутренние моменты

$$M \text{ и } M + \frac{\partial M}{\partial y} dy.$$

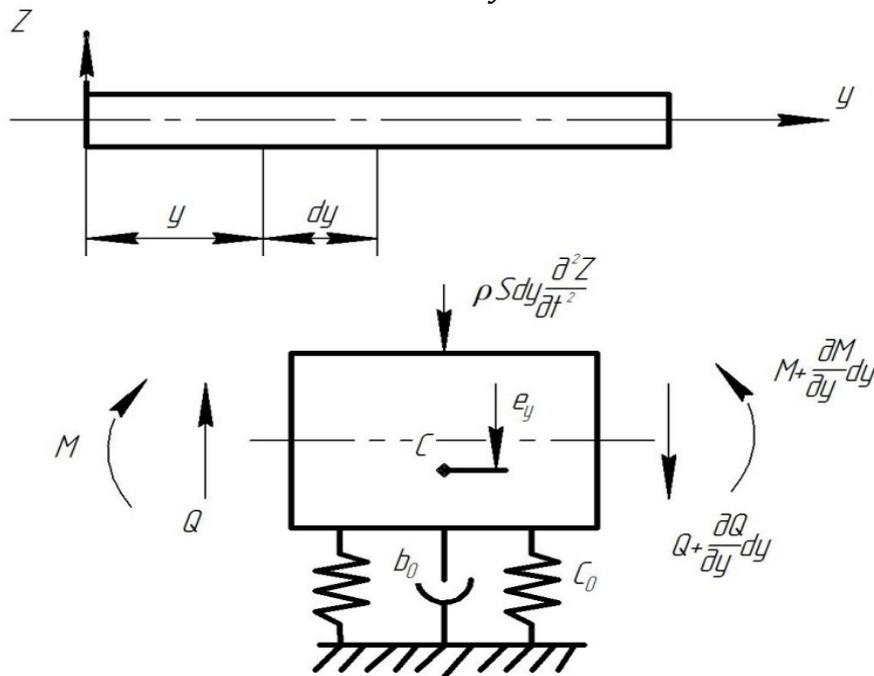


Рис. 1. Расчетная модель ротора

Уравнения равновесия элемента dy имеют вид

$$\frac{\partial Q}{\partial y} + \rho S \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + b_0 \frac{\partial Z}{\partial t} + C_0 Z = \rho e_y \omega^2 \cos \omega t; \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - Q = 0. \quad (2)$$

Известно [1], что

$$M = EI \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}; \quad Q = EI \frac{\partial^3 Z}{\partial y^3}. \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим следующее дифференциальное уравнение, описывающее колебания ротора

$$EI \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} + \rho S \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + b_0 \frac{\partial Z}{\partial t} + C_0 Z = \rho e_y \omega^2 \cos \omega t. \quad (4)$$

Граничные условия уравнения (4) определяются из равенства нулю моментов на опорах (при $y=0$ и $y=l$)

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)_{y=l} = 0 \quad (5)$$

и по величине реакции опор

$$EI \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3} \right)_{y=0,l} = \left\{ C_{Z_{л,п}} [Z_{y=0,l} - Z_{к_{л,п}}] + b_{Z_{л,п}} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)_{y=0,l} - \frac{\partial Z_{к_{л,п}}}{\partial t} \right] \right\}, \quad (6)$$

где $л, п$ – индексы, обозначающие соответственно левую и правую опоры.

Виброперемещения корпусов опор $Z_{к_{л,п}}$ находятся из решения дифференциальных уравнений, описывающих их колебания и составленных из условия равновесия всех сил, действующих на корпуса.

$$m_{к_{л,п}} \frac{\partial^2 Z_{к_{л,п}}}{\partial t^2} + b_{Z_{л,п}} \left(\frac{\partial Z_{к_{л,п}}}{\partial t} - \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)_{y=0,l} \right) + b_{к_{л,п}} \frac{\partial Z_{к_{л,п}}}{\partial t} + C_{Z_{л,п}} [Z_{к_{л,п}} - Z_{y=0,l}] + C_{к_{л,п}} Z_{к_{л,п}} = 0. \quad (7)$$

1.2. Определение собственных частот поперечно-изгибных колебаний стержней

Так как теория колебаний роторов подобна теории колебаний стержней, целесообразно, как более общий случай, рассмотреть частоты собственных колебаний призматических стержней.

Частоты собственных колебаний стержня описываются уравнением (4) без учета рассеивания энергии колебаний ($b_0 = 0$) и источника возбуждения колебаний ($e_y = 0$).

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \eta_0 Z = 0, \quad (8)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}; \quad (9)$$

$$\eta_0 = \frac{C_0}{EI}. \quad (10)$$

Решения (8) ищем в виде [2]

$$Z = [A_1 S(\alpha y) + A_2 T(\alpha y) + A_3 U(\alpha y) + A_4 V(\alpha y)], \quad (11)$$

где A_i ($i=1,2,3,4$) – постоянные, определяемые из граничных условий, которые для наиболее распространенных случаев приведены в табл. 1;

α – безразмерный параметр

$$\alpha^4 = \frac{\omega_0^2}{a^2} - \eta_0; \quad (12)$$

ω_0 – частота собственных колебаний стержня;

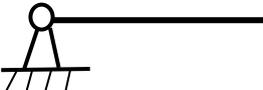
t – время;

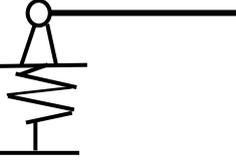
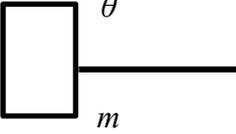
$S(\alpha y)$; $T(\alpha y)$; $U(\alpha y)$; $V(\alpha y)$ – функции Крылова, являющиеся комбинациями круговых и гиперболических функций

$$\begin{aligned} S(\alpha y) &= \frac{1}{2}(ch\alpha y + \cos\alpha y); \\ T(\alpha y) &= \frac{1}{2}(sh\alpha y + \sin\alpha y); \\ U(\alpha y) &= \frac{1}{2}(ch\alpha y - \cos\alpha y); \\ V(\alpha y) &= \frac{1}{2}(sh\alpha y - \sin\alpha y). \end{aligned} \quad (13)$$

Таблица 1

Граничные условия для стержней

Условные обозначения	Вид заделки конца стержня	Характеристика граничных условий	Граничные условия
1	2	3	4
	Защемленный	Равенство нулю прогиба и угла поворота стержня	$Z_{y=0,l} = 0$ $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{y=0,l} = 0$
	Шарнирно-опертый	Равенство нулю прогиба и момента	$Z_{y=0,l} = 0$ $\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_{y=0,l} = 0$ $M = EI \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_{y=0,l} = 0$

	Свободный	Равенство нулю момента и поперечной силы	$M = EI \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)_{y=0,l} = 0$ $Q = EI \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3} \right)_{y=0,l} = 0$ $\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)_{y=0,l} = 0 \quad \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3} \right)_{y=0,l} = 0$
	Шарнирно-опертый на упругой опоре	Равенство нулю момента, поперечная сила равна силе упругости опоры	$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)_{y=0,l} = 0$ $EI \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3} \right)_{y=0,l} = CZ_{y=0,l}$
	В виде сосредоточенной массы m и момента инерции Θ	Момент равен моменту инерции массы, поперечная сила равна силе инерции массы	$EI \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)_{y=0,l} = -\Theta \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y \partial t^2} \right)_{y=0,l}$ $EI \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3} \right)_{y=0,l} = -m \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}$

Последовательные производные функций (13) по y приведены в табл. 2.

Таблица 2

Производные функции Крылова

x^*	$\frac{dx}{dy}$	$\frac{d^2x}{dy^2}$	$\frac{d^3x}{dy^3}$	$\frac{d^4x}{dy^4}$
S	αV	$\alpha^2 U$	$\alpha^3 T$	$\alpha^4 S$
T	αS	$\alpha^2 V$	$\alpha^3 U$	$\alpha^4 T$
U	αT	$\alpha^2 S$	$\alpha^3 V$	$\alpha^4 U$
V	αU	$\alpha^2 T$	$\alpha^3 S$	$\alpha^4 V$

* $x = S; T; U; V$

При $y=0; S(0) = 1; T(0) = U(0) = V(0) = 0$ (14)

1.3. Динамическая и математическая модель поперечно-изгибных колебаний ротора

Динамическая модель ротора

При выборе динамической модели ротора приняты следующие предпосылки и допущения:

- выбор модели ограничен рассмотрением ее в плоскости;
- роторы приняты межопорные с равномерно распределёнными по длине пролета массами и постоянными параметрами сечений;
- длина пролета существенно превышает размеры поперечных сечений ротора, в модели не учитываются деформации сдвига сечений, инерция поворота сечений;
- жесткость подшипниковых опор соизмерима с жесткостью роторов;
- главные оси жесткости подшипника и его корпуса совпадают;
- реакция распределенной опоры совпадает по направлению с одной из главных осей жесткости подшипника;
- упругая податливость отнесена к упругой податливости опор;
- корпуса подшипниковых опор связаны со стойкой через упруго-демпфирующие опоры;
- ротор между опорами опирается на сопрягаемый элемент (смежный вал, сетку, сукно, обрабатываемый материал) в виде упруго-демпфирующего распределенного элемента;
- подшипники качения роторов имеют повышенные радиальные зазоры и работают преимущественно в режиме маятниковых колебаний цапф.

При принятых допущениях динамическая модель ротора (рис. 2) представляет однопролетный вращающийся стержень с сосредоточенными шарнирными упруго-демпфирующими опорами, распределенными по длине вала упруго-демпфирующим основанием. Подшипниковые узлы и приведенные к ним массы опорных конструкций (рычагов, элементов станин) представляются в виде сосредоточенных масс, связанных с неподвижной опорой (стойкой) упруго-демпфирующими элементами.

Математическая модель ротора имеет вид дифференциальных уравнений, описывающих колебания ротора (4)-(7).

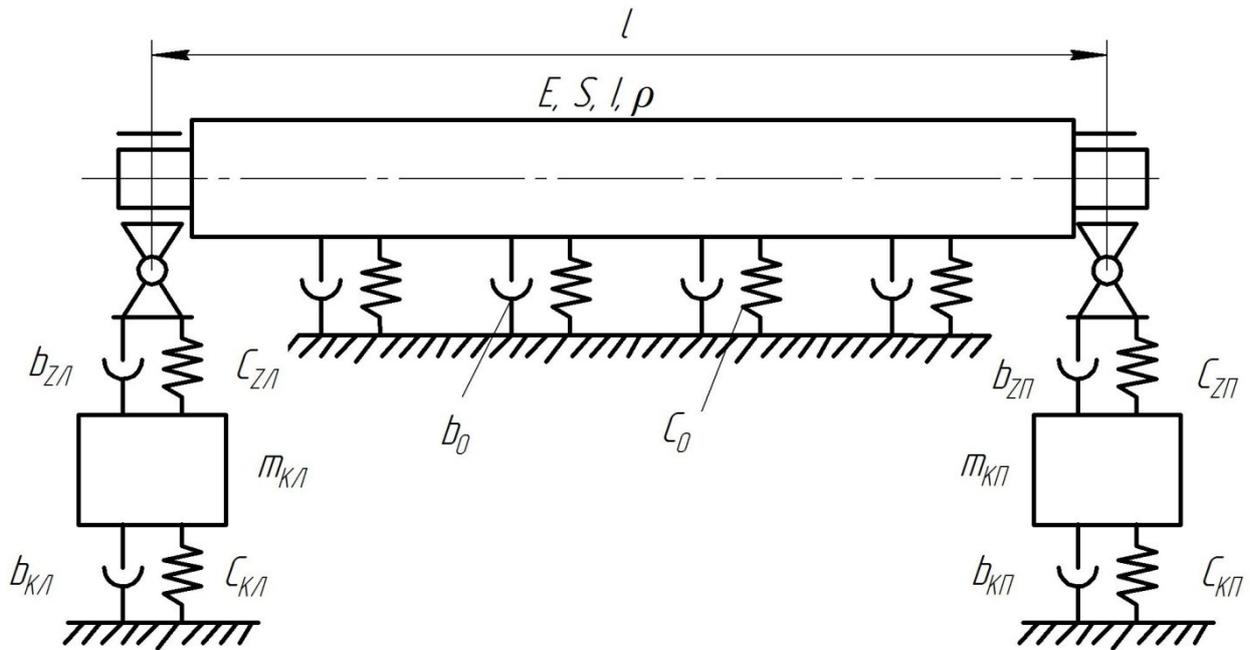


Рис. 2. Динамическая модель ротора с распределенными параметрами:
 E, ρ – модуль упругости и плотность материала ротора; S, I – площадь и момент инерции сечения ротора; C_z, b_z и C_k, b_k – коэффициенты жесткости и неупругих сопротивлений соответственно подшипника качения и опорных элементов корпуса подшипника; C_0, b_0 – линейные коэффициенты жесткости и неупругих сопротивлений распределенной опоры; l – длина пролета (расстояние между сосредоточенными опорами) ротора

1.4. Определение критических частот вращения ротора

В динамике роторов принято пользоваться понятием не свободных, а критических частот вращения, под которыми понимаются частоты вращения роторов, совпадающие с частотами их собственных колебаний.

Для определения критических частот вращения роторов используется уравнение (8) с частотным решением в виде

$$Z = Z_{y=0,l} \cos \omega_0 t, \quad (15)$$

где $Z_{y=0,l}$ – амплитудные перемещения ротора на опорах;

ω_0 – частота собственных колебаний ротора.

Граничные условия уравнения (8) аналогичны условию (7) без неупругих сопротивлений и с учетом (15)

$$\frac{\partial^2 Z_{kl,n}}{\partial t^2} + \frac{C_{zl,n} + C_{kl,n}}{m_{kl,n}} Z_{kl,n} = \frac{C_{zl,n}}{m_{kl,n}} Z_{y=0,l} \cos \omega_0 t, \quad (16)$$

частное решение которого имеет вид

$$Z_{kl,n} = \frac{C_{zl,n}}{(C_{zl,n} + C_{kl,n}) - \omega_0^2 m_{kl,n}} \quad (17)$$

и условию (6) также без неупругих сопротивлений с учетом (17)

$$\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3}\right)_{y=0,l} = \pm \frac{C_{нрл,n}}{EI} Z_{y=0,l}, \quad (18)$$

где $C_{нрл,n}$ – приведенные жесткости опор с левой и правой сторон ротора

$$C_{нрл,n} = \frac{C_{Zл,n}(C_{кл,n} - \omega_0^2 m_{кл,n})}{C_{Zл,n} + (C_{кл,n} - \omega_0^2 m_{кл,n})}. \quad (19)$$

Таким образом, динамическая модель ротора может быть представлена в виде вращающегося упругого стержня на упругих опорах с приведенной жесткостью (19).

Общее решение уравнения (8) с граничными условиями (18) ищем в виде (11)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_{y=0} &= \alpha^2 A_3 = 0 & A_3 &= 0; \\ \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_{y=l} &= A_1 \alpha^2 U(\alpha l) + A_2 \alpha^2 V(\alpha l) + A_4 \alpha^2 T(\alpha l) = 0; \\ \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3}\right)_{y=0} &= \alpha^3 A_4; \\ \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3}\right)_{y=l} &= A_1 \alpha^3 T(\alpha l) + A_2 \alpha^3 U(\alpha l) + A_4 \alpha^3 S(\alpha l); \\ Z_{y=0} &= A_1 \end{aligned} \quad (20)$$

$$Z_{y=l} = A_1 S(\alpha l) + A_2 T(\alpha l) + A_4 V(\alpha l);$$

$$\left[Z_{y=0} + \frac{1}{C_{нрл}} EI \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3}\right)_{y=0} \right] = A_1 + \frac{1}{C_{нрл}} EI \alpha^3 A_4 = 0;$$

$$\begin{aligned} \left[Z_{y=l} - \frac{1}{C_{нрл}} EI \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3}\right)_{y=l} \right] &= A_1 S(\alpha l) + A_2 T(\alpha l) + A_4 V(\alpha l) - \\ &- \frac{1}{C_{нрл}} EI [A_1 \alpha^3 T(\alpha l) + A_2 \alpha^3 U(\alpha l) + A_4 \alpha^3 S(\alpha l)] = 0 \end{aligned}$$

или матричном виде

$$\begin{vmatrix} T(\alpha l) & U(\alpha l) & S(\alpha l) \\ 1 & 0 & \frac{EI}{C_{нрл}} \alpha^3 \\ S(\alpha l) - \frac{EI}{C_{нрл}} \alpha^3 T(\alpha l) & T(\alpha l) - \frac{EI}{C_{нрл}} \alpha^3 U(\alpha l) & V(\alpha l) - \frac{EI}{C_{нрл}} \alpha^3 S(\alpha l) \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

Приравняв нулю главный определитель (21), раскрыв функции Крылова (13) и обозначив

$$\lambda = \alpha l = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega_0^2 l^4}{EI} - \eta_0}, \quad (22)$$

$$K_{l,n} = \frac{\lambda^3}{\eta_{l,n}}, \quad (23)$$

$$\eta_0 = \frac{C_0 l^4}{EI}, \quad (24)$$

$$\eta_{l,n} = \frac{C_{np,l,n} l^3}{EI}, \quad (25)$$

получим уравнение для определения частот собственных колебаний ротора (частотное уравнение) в общем виде

$$2sh\lambda \sin\lambda + (K_l + K_n)(sh\lambda \cos\lambda - \sin\lambda ch\lambda) + K_l K_n (1 - ch\lambda \cos\lambda) = 0. \quad (26)$$

Критическая частота вращения ротора определяется из формулы (22)

$$\omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI(\lambda^4 + \eta)}{\rho S}}. \quad (27)$$

Возможны следующие случаи при определении критических частот вращения роторов:

1. Симметричный ротор

$$C_{np,l} = C_{np,n} = C_{np}; \quad K_l = K_n = K; \quad \eta_l = \eta_n = \eta.$$

Частотное уравнение приобретает вид

$$2sh\lambda \sin\lambda + 2 \frac{\lambda^3}{\eta} (sh\lambda \cos\lambda - \sin\lambda ch\lambda) + \left(\frac{\lambda^3}{\eta}\right)^2 (1 - ch\lambda \cos\lambda) = 0. \quad (28)$$

2. Отсутствие упругого распределенного основания

В формуле (27) $\eta = 0$.

3. Пренебрежимо малая масса корпусов подшипников

В формуле (19) $m_{к,л,н} = 0$.

4. Неподвижные корпуса подшипников

В формулах (19) и (25) $C_k = \infty$; $C_{np,l,n} = C_z$.

5. Абсолютно жесткие опоры $K_{л,н} = 0$.

Частотное уравнение приобретает вид

$$2sh\lambda \sin\lambda = 0. \quad (29)$$

6. Абсолютно податливые опоры $K_{л,н} = \infty$.

Частотное уравнение приобретает вид

$$1 - ch\lambda \cos\lambda = 0. \quad (30)$$

1.5. Вынужденные поперечно-изгибные колебания роторов от их неуравновешенности

Параметры вынужденных колебаний роторов определяются из решения уравнения (4) с граничными условиями (5), (6) в виде (11), где вместо ω_0 принимается частота ротора ω . Для определения амплитуды колебаний ротора, например в середине пролета, в формулу (11) следует подставить $y = l/2$, на опорах соответственно $y = 0$ и $y = l$.

Неуравновешенность роторов случайна. Применение точной модели для расчета вынужденных колебаний роторов при недостоверных источниках колебаний нерационально.

Рассмотрим упрощенную модель вала, основанную на разложении колебаний по главным формам (рис. 3). По первой форме ротор колеблется под действием сил инерции статически неуравновешенного вала, по второй форме – под действием сил инерции, имеющего моментную неуравновешенность. При симметричном роторе сила инерции распределяется поровну между опорами, и движение ротора можно рассматривать в одной из опор. Динамическая модель представлена на рис. 3, где C_{ε} – условная жесткость вала на жестких шарнирных опорах, определяемая при первой частоте собственных колебаний по формуле

$$C_{\varepsilon 1} = \pi^4 \frac{EI}{l^3}. \quad (31)$$

Колебания по второй форме можно свести к первой форме, рассматривая только половину массы вала и введя в центре масс вала шарнирную опору.

Условная жесткость вала по второй форме колебаний равна

$$C_{\varepsilon 2} = 8C_{\varepsilon 1}. \quad (32)$$

Распределение неуравновешенности по длине ротора в общем случае определяется по формуле

$$e(y) = e_c + e_M \left(1 - \frac{2}{l}y\right), \quad (33)$$

где e_c , e_M – параметры, характеризующие соответственно статическую и моментную неуравновешенности ротора.

Силы инерции, приведенные к опорам от статической и моментной неуравновешенностей ротора, равны

$$F_{IC} = m_{\varepsilon} e_c \omega^2, \quad (34)$$

$$F_{IM} = m_{\varepsilon} \frac{e_M}{6} \omega^2. \quad (35)$$

Из условия равновесия ротора, корпуса подшипника и цапфы при первой форме колебаний имеем следующие дифференциальные уравнения, описывающие вынужденные колебания ротора

$$m_{\epsilon} \ddot{Z}_{\epsilon} + b_{\epsilon} (\dot{Z}_{\epsilon} - \dot{Z}_{\psi}) + C_{\epsilon} (Z_{\epsilon} - Z_{\psi}) = m_{\epsilon} e_c \omega^2 \cos \omega t; \quad (36)$$

$$m_{\kappa} \ddot{Z}_{\kappa} + b_{\kappa} \dot{Z}_{\kappa} + b_Z (\dot{Z}_{\kappa} - \dot{Z}_{\psi}) + C_{\kappa} Z_{\kappa} + C_Z (Z_{\kappa} - Z_{\psi}) = 0; \quad (37)$$

$$2b_Z (\dot{Z}_{\psi} - \dot{Z}_{\kappa}) + 2C_Z (Z_{\psi} - Z_{\kappa}) = b_{\epsilon} (\dot{Z}_{\epsilon} - \dot{Z}_{\psi}) + C_{\epsilon} (Z_{\epsilon} - Z_{\psi}) = 0; \quad (38)$$

где Z_{ϵ} , Z_{ψ} , Z_{κ} – перемещения центра масс вала, цапфы и корпуса подшипника.

Решение уравнений (36)-(38) ищем в виде

$$S_u = S_{u1} \cos \omega t + S_{u2} \sin \omega t, \quad (39)$$

где $u = \epsilon, \kappa, \psi$.

Обозначим

$$\frac{2m_{\kappa}}{(m_{\epsilon} + 2m_{\kappa})} = \mu; \quad (40)$$

$$\frac{C_{\epsilon 1}}{m_{\epsilon}} = \lambda_{\epsilon}^2; \quad \frac{2C_Z}{m_{\epsilon}} = \lambda_Z^2; \quad \frac{2C_{\kappa}}{(m_{\epsilon} + 2m_{\kappa})} = \lambda_{\kappa}^2; \quad (41)$$

$$\kappa_{\epsilon} = \frac{m_{\epsilon} \lambda_{\epsilon}}{b_{\epsilon}}; \quad \kappa_Z = \frac{m_{\epsilon} \lambda_Z}{(2b_Z)}; \quad \kappa_{\kappa} = \frac{(m_{\epsilon} + 2m_{\kappa}) \lambda_{\kappa}}{(2b_{\kappa})}; \quad (42)$$

$$\eta_{\epsilon, Z, \kappa} = \frac{\omega}{\lambda_{\epsilon, Z, \kappa}}; \quad (43)$$

$$\frac{\lambda_{Z, \kappa}^2}{\lambda_{\epsilon}^2} = \frac{C_{Z, \kappa}}{C_{\epsilon}} = K_{Z, \kappa}; \quad (44)$$

где $\lambda_{\epsilon, Z, \kappa}$; $\kappa_{\epsilon, Z, \kappa}$ – соответственно частоты собственных колебаний и коэффициенты динамического усиления колебаний при резонансе парциальных систем;

μ ; $C_{Z, \kappa}$ – отношение масс и жесткостей;

$\eta_{\epsilon, Z, \kappa}$ – частотные отношения парциальных систем.

В качестве парциальных систем выбраны:

упругий вал на абсолютно жестких шарнирных опорах (λ_{ϵ} , κ_{ϵ});

жесткий вал на упруго-демпфирующих подшипниках при неподвижных корпусах опор (λ_Z , κ_Z);

жесткий вал, связанный жестко с корпусами опор на упруго-демпфирующих опорах корпусов (λ_{κ} , κ_{κ}).

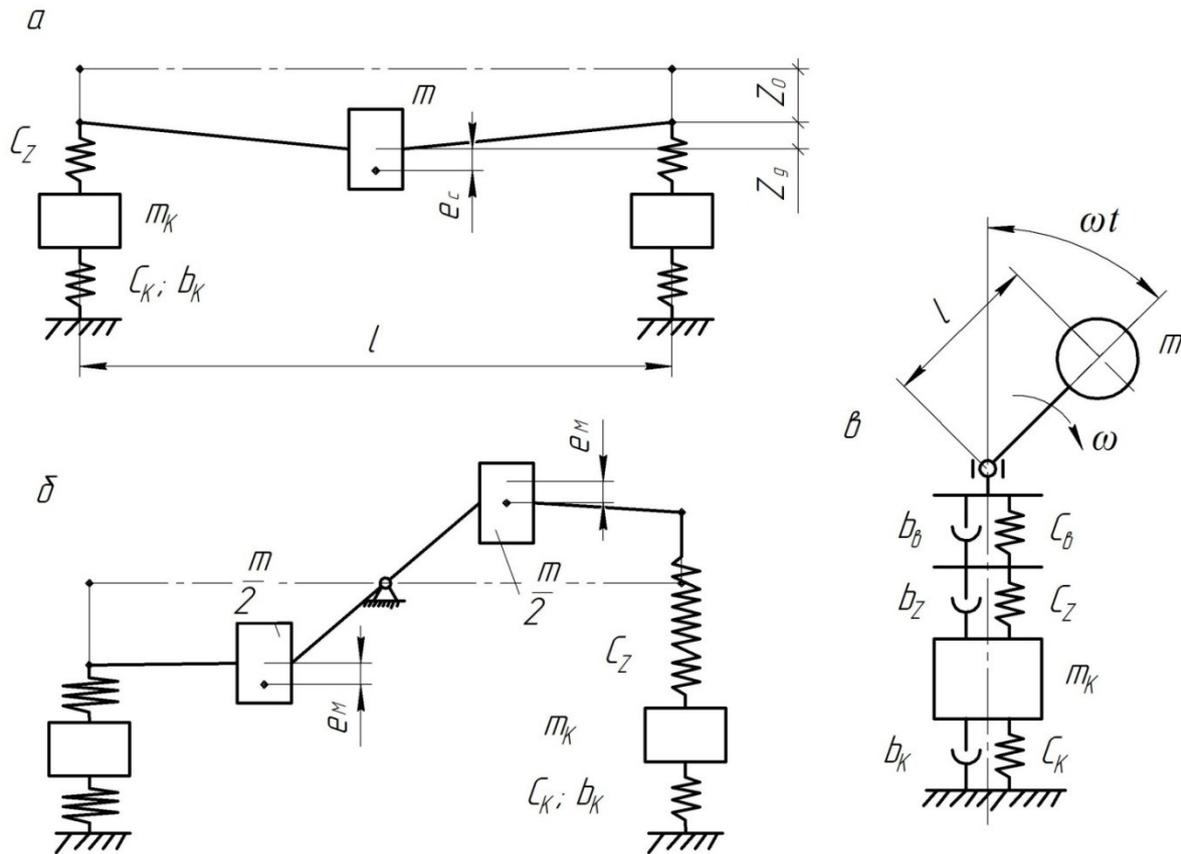


Рис. 3. Упрощенная модель ротора:

a – первая форма колебаний ротора; *б* – вторая форма колебаний ротора;
в – динамическая модель ротора

Подставив решения (39) в систему дифференциальных уравнений (36)-(38), получим систему алгебраических уравнений.

$$\begin{vmatrix} (1 - \eta_\epsilon^2) & A_1 & -1 & -A_1 & 0 & 0 \\ -A_1 & (1 - \eta_\epsilon^2) & A_1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -A_1 & (1 + K_Z) & (A_2 + A_1) & -K_Z - A_2 & 0 \\ A_1 & -1 & -(A_2 + A_1) & (1 + K_Z) & A_2 & -K_Z \\ 0 & 0 & -K_Z(1 - \mu) - A_2(1 - \mu) & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & A_2(1 - \mu) & -K_Z(1 - \mu) - A_4 & A_3 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} S_{\epsilon 1} \\ S_{\epsilon 2} \\ S_{y1} \\ S_{y2} \\ S_{\kappa 1} \\ S_{\kappa 2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_c \eta_\epsilon^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (45)$$

где

$$A_1 = \frac{\eta_\epsilon}{\kappa_\epsilon}; \quad A_2 = \frac{\eta_\epsilon \sqrt{K_Z}}{\kappa_Z}; \quad A_3 = [K_\kappa + K_Z(1 - \mu) - \mu \eta_\epsilon^2];$$

$$A_4 = \left[\frac{\sqrt{K_\kappa} \eta_\epsilon}{\kappa_\kappa + A_2(1 - \mu)} \right].$$

Амплитуды виброперемещений вала цапфы и корпуса подшипника определяются по формуле

$$S_{ua} = \sqrt{S_{a1}^2 + S_{a2}^2}. \quad (46)$$

Из решения системы уравнений (50) по формуле (46) определяются амплитуды виброперемещений вала, цапфы и корпуса подшипника.

4. Теоретические основы продольных колебаний

2.1. Дифференциальное уравнение продольных колебаний стержней

Общие положения теории продольных колебаний рассмотрим на примере продольных колебаний стержней, т.е. в конструктивных элементах, в которых один из размеров – длина существенно превышает два других размера, характеризующих поперечное сечение.

При исследовании продольных колебаний стержней предполагается, что:

центры тяжести поперечных сечений лежат на одной линии (оси), а сами сечения при деформации остаются плоскими;

движение частиц перпендикулярно оси стержня отсутствует;

погонная масса, жесткость, а также интенсивность внешней нагрузки являются непрерывными или кусочно-непрерывными функциями одной координаты X ;

смещения точек вдоль оси от действия на стержень внешней нагрузки являются функцией двух переменных: координаты стержня X и времени t ;

при колебаниях восстанавливающие силы не выходят за пределы пропорциональности, т.е. деформации являются линейными функциями сил.

Рассмотрим стержень длиной l (рис. 4). Выделим элемент стержня длиной dx на расстоянии x от начала координаты.

Сила инерции элемента стержня равна

$$F_u = -\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (51)$$

где t – время, с.

Из равновесия элемента стержня согласно принципу Даламбера имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0. \quad (52)$$

Левое сечение элемента смещается по оси X на ξ , правое – на величину $\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$, где величина $\frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ является абсолютным удлинением элемента. Относительное удлинение элемента равно

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (53)$$

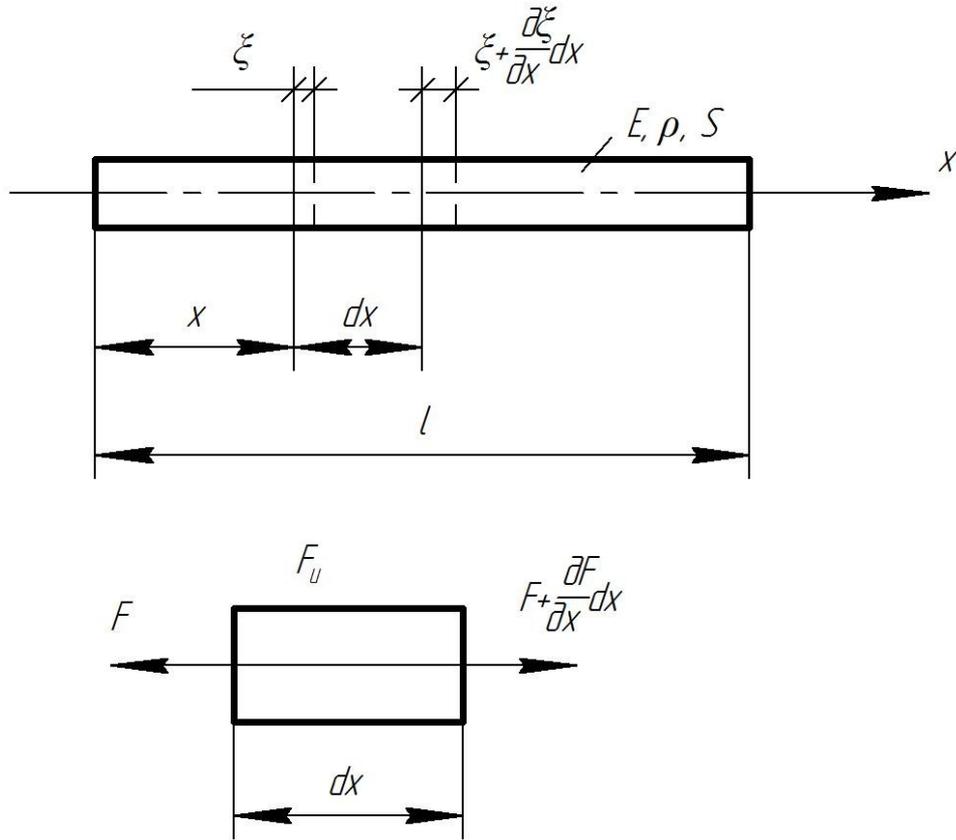


Рис. 4. Расчетная модель стержня:

ρ – плотность материала стержня, $\text{кг}\cdot\text{м}^{-3}$; E – модуль упругости материала стержня, $\text{Н}\cdot\text{м}^{-1}$; S – площадь поперечного сечения, м^2 ; F – нормальная сила в сечении, Н ; ξ – смещение поперечного сечения вдоль оси стержня, м ; F_u – сила инерции элемента стержня, Н

Усилие, возникающее в сечении, связано с относительным удлинением формулой Гука

$$F = ES\varepsilon = ES \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad (54)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (55)$$

Подставляя (55) в (52) и сокращая S , получим

$$E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0. \quad (56)$$

Обозначив

$$a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (57)$$

получим следующее дифференциальное уравнение продольных колебаний:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \quad (58)$$

где a – скорость распространения волны по стержню, $\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$

Решение уравнения (58) находим в виде

$$\xi = u \cdot \sin(pt + \beta), \quad (59)$$

где u – функция абсциссы X , определяющая форму колебаний;

p – круговая частота колебаний, $\text{рад}\cdot\text{с}^{-1}$;

β – угол сдвига фаз, град.

2.2. Определение собственных частот продольных колебаний стержней

Частоты собственных колебаний стержня описываются уравнением, полученным после подстановки решения (59) в уравнение (58) и сокращением $\sin(pt + \beta)$. В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $u(X)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{p^2}{a^2} u = 0. \quad (60)$$

Решением этого уравнения является выражение

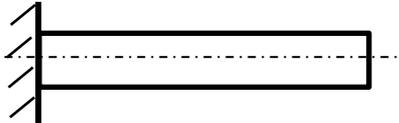
$$u = A \sin \frac{p}{a} x + B \cos \frac{p}{a} x. \quad (61)$$

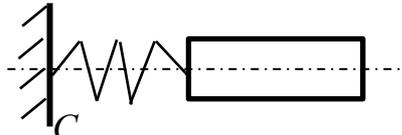
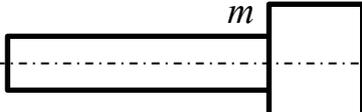
Постоянные A и B определяются из условия закрепления концов стержня. Но при любом закреплении концов стержня уравнения, выражающие граничные условия, оказываются однородными и дают отличные от нуля значения постоянных только в том случае, если определитель этих уравнений равен нулю. Из равенства нулю этого определителя находятся частоты собственных колебаний стержня.

Наиболее часто встречающиеся граничные условия закрепления концов стержня приведены в табл. 3.

Таблица 3

Граничные условия на концах стержня

Вид закрепления	Изображение	Математическая модель
Свободный конец		$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$
Защемление		$\xi = 0$

Сосредоточенная жесткость		$ES \frac{\partial \xi}{\partial x} = C\xi$
Сосредоточенная масса		$ES \frac{\partial \xi}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

Случай, когда стержень заделан одним концом, а второй конец свободный соответствует волноводу с весьма малой относительно волновода массой вибропреобразователя и жесткой связью волновода с объектом диагностирования, например, приваркой волновода.

На свободном конце $X=l$ продольная сила должна равняться нулю, а, следовательно, равно нулю и относительное удлинение $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=l} = 0$, в соответствии с (59)

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l} = 0. \quad (62)$$

На защемленном конце перемещение равно нулю

$$u_{x=0} = 0. \quad (63)$$

Подставив в (62) и (63) решение (59), получим из уравнения (63) $B = 0$, а из уравнения (62)

$$A \frac{p}{a} \cos \frac{p}{a} l = 0.$$

Не равное нулю значение A может быть получено только при

$$\cos \frac{pl}{a} = 0.$$

Частоты свободных колебаний стержня с одним защемленным и другим свободным концом определяются по формуле

$$p_n \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\pi a}{l} = (2n-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}, \quad (64)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ - номер формы колебаний.

2.3. Вынужденные продольные колебания стержней

Вынужденные колебания, когда стержень на одном конце имеет сосредоточенную массу m , а другой конец стержня принудительно смещается в горизонтальном направлении по закону $X_0 = S_a \sin \omega t$ (рис. 5б).

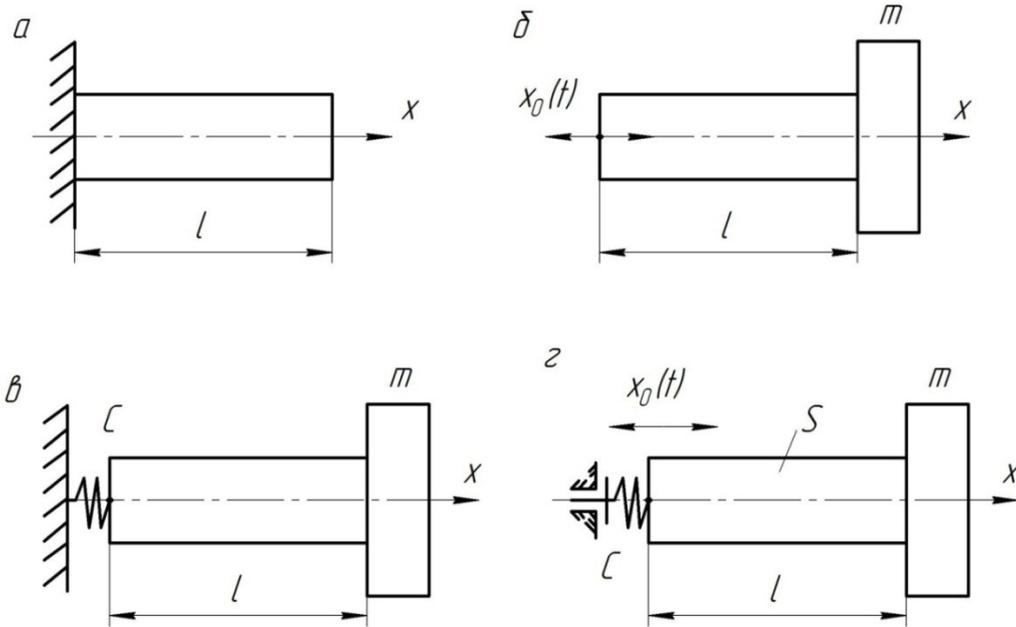


Рис. 5. Расчетные схемы стержней

Этот случай соответствует волноводу с жесткой связью с диагностируемым объектом и с сосредоточенной массой вибропреобразователя. Он пригоден также для исследования колебаний валов бумагоделательных машин, возбуждаемых гармоническим перемещением сукна, сетки и бумаги, колебаний груза на канате при неравномерном движении точки сопряжения каната с барабаном.

Граничные условия задачи

$$\text{при } X=0 \quad \xi = X_0(t); \quad (65)$$

$$\text{при } X=l \quad ES \frac{\partial \xi}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (66)$$

решения уравнения установившихся продольных колебаний стержня находим в виде

$$\xi = \left(A \sin \frac{\omega}{a} x + B \cos \frac{\omega}{a} x \right) \sin \omega t. \quad (67)$$

Подставляя это решение в граничные условия (65) и (66), находим произвольные постоянные A и B

$$B = S_a; \quad (68)$$

$$A = S_a \frac{ES \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} l + m \omega^2 \cos \frac{\omega}{a} l}{ES \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} l - m \omega^2 \sin \frac{\omega}{a} l}. \quad (69)$$

Подставив A и B в решение (67), получим перемещение массы m при $X=l$

$$X_m = S_a \left[\frac{ES \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} l + m \omega^2 \cos \frac{\omega}{a} l}{ES \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} l - m \omega^2 \sin \frac{\omega}{a} l} * \sin \frac{\omega}{a} l + \cos \frac{\omega}{a} l \right] \sin \omega t. \quad (70)$$

Выражение (70) представим в виде

$$X_m = S_{am} \sin \omega t, \quad (71)$$

где S_{am} – амплитуда виброперемещения массы m , м

$$\begin{aligned} S_{am} &= S_a \left[\frac{ES \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} l + m \omega^2 \cos \frac{\omega}{a} l}{ES \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} l - m \omega^2 \sin \frac{\omega}{a} l} * \sin \frac{\omega}{a} l + \cos \frac{\omega}{a} l \right] \sin \omega t = \\ &= S_a \frac{ES \frac{\omega}{a}}{ES \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} l - m \omega^2 \sin \frac{\omega}{a} l}. \end{aligned} \quad (72)$$

Обозначив

$$\frac{\omega}{a} l = Z \quad (73)$$

и имея в виду, что $Sl\rho = m_{CT}$ – масса стержня, а

$$\frac{m \omega^2}{ES \frac{\omega}{a}} = \frac{m_{CT} \omega}{m a} l = \frac{m_{CT}}{m} Z,$$

получим

$$S_{am} = S_a \left[\frac{1}{\cos Z - \frac{m_{CT}}{m} Z \sin Z} \right]. \quad (74)$$

Передаточная функция стержня, равная отношению амплитуд виброперемещений массы и колеблющейся опоры, равна

$$\eta = \frac{S_{am}}{S_a} = \frac{1}{\cos Z - \frac{m_{CT}}{m} Z \sin Z}. \quad (75)$$

3. Лабораторная работа «Определение собственных частот поперечно-изгибных колебаний стержней»

3.1. Методика выполнения лабораторной работы

По поперечно-изгибным колебаниям роторов предусматривается домашнее задание, состоящее из двух частей, и лабораторная работа.

В первой части домашнего задания исследуются свободные колебания стержней при различных граничных условиях.

Во второй части производится расчет свободных и вынужденных колебаний межопорных роторов.

В лабораторной работе на математической модели исследуются зависимости параметров колебаний межопорных роторов от их конструктивных размеров.

Расчет свободных колебаний стержней производится следующим образом.

Исходные данные для расчета:

E, ρ – модуль продольной упругости и плотность материала стержня;

l – длина стержня;

S, I – площадь и момент инерции сечения стержня;

C – коэффициент жесткости сосредоточенной опоры;

m, Θ – масса и момент инерции сосредоточенного груза.

Варианты стержней с различными концевыми условиями приведены на рис. 5.

Расчет свободных колебаний концевых стержней при различных граничных условиях на концах производится в следующем порядке.

1. Составляются дифференциальные уравнения, описывающие граничные условия (табл. 1).
2. Решение в форме (11) подставляется в граничные условия.
3. Составляется система уравнений, из равенства нулю главного определителя которых составляется частотное уравнение.
4. По частотному уравнению на ПК определяются частоты собственных колебаний стержней.

3.2. Пример определения частот собственных колебаний межопорного стержня с шарнирными опорами (рис. 6).

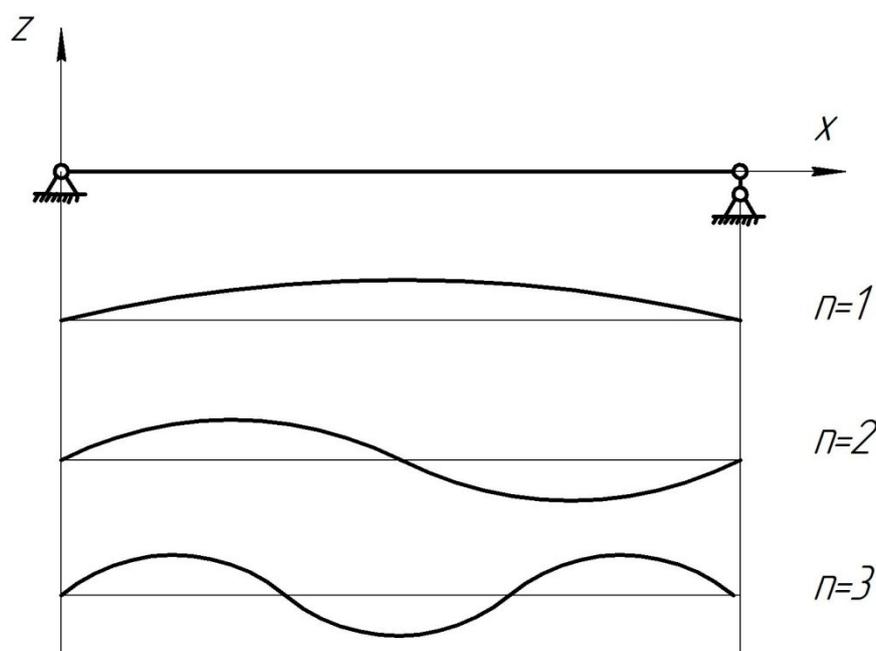


Рис. 6. Формы колебаний стержня

Граничные условия в соответствии с табл.1 при $y = 0, l; Z_{y=0,l}$
 $\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_{y=0,l} = 0.$

Подставив решение (11) в граничные условия, имеем:

из условия на левом конце стержня ($y = 0$), полагая, что $\sin \omega_0 t \neq 0$

$$Z_{y=0} = [A_1 S(0) + A_2 T(0) + A_3 U(0) + A_4 V(0)] = 0,$$

откуда $A_1 = 0$,

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_{y=0} = [A_2 \alpha^2 V(0) + A_3 \alpha^2 S(0) + A_4 \alpha^2 T(0)] = 0,$$

откуда $A_3 = 0$;

из условий на правом конце стержня ($y = l$)

$$Z_{y=l} = [A_2 T(\alpha l) + A_4 V(\alpha l)] = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_{y=l} = [A_2 \alpha^2 V(\alpha l) + A_4 \alpha^2 T(\alpha l)] = 0,$$

откуда

$$\begin{vmatrix} T(\alpha l) & V(\alpha l) \\ V(\alpha l) & T(\alpha l) \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} A_2 \\ A_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Приравнивая нулю определитель, получаем частотное уравнение

$$T^2(\alpha l) - V^2(\alpha l) = 0.$$

Подставляя функции Крылова (13), получим

$$\frac{1}{4} (sh \alpha l + sin \alpha l)^2 - \frac{1}{4} (sh \alpha l - sin \alpha l)^2 = sh \alpha l * sin \alpha l = 0.$$

Так как $sh \alpha l \neq 0$, то $sin \alpha l = 0$, откуда $\alpha l = n\pi$,

где $n = 1, 2, 3, \dots$

Имея в виду (9), (10), (12), получим формулу для определения частот свободных колебаний межопорного стержня (при $\eta = 0$)

$$\omega_{0n}^2 = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S l^4}}.$$

3.3. Задание к выполнению лабораторной работы

Исходные данные и варианты стержней с различными концевыми условиями приведены в табл. 4.

4. Лабораторная работа «Определение собственных частот продольных колебаний стержней»

4.1. Методика выполнения лабораторной работы

При исследовании продольных колебаний стержней принимаются следующие допущения:

исследование ведется в линейной постановке;

не учитывается рассеивание колебаний в конструкции ротора;

не учитываются влияния изгибных и крутильных колебаний.

Динамическая модель представляется в виде стержня с площадью поперечного сечения S , модулем упругости E , плотностью ρ , и эквивалентной длиной l .

Эти исходные данные задаются согласно варианту.

Расчет собственных продольных колебаний конечных стержней при различных граничных условиях на концах производится в следующем порядке.

1. Составляются дифференциальные уравнения, описывающие граничные условия (табл. 3).
2. Решение в форме (61) подставляется в граничные условия.
3. Составляется система уравнений, из равенства нулю главного определителя которых составляется частотное уравнение.
4. По частотному уравнению на ПК определяются частоты собственных продольных колебаний стержней.

4.2. Пример определения частот собственных продольных колебаний стержней

Рассмотрим случай, когда стержень на одном конце имеет сосредоточенную массу m , другой конец связан со стойкой через сосредоточенную упругую связь жесткостью C (рис. 5в).

Граничные условия определяются из равенств продольной силы в стержне силе инерции массы m с одной стороны стержня и силе упругости пружины – с другой стороны.

При $X = 0$ продольная сила уравнивается реакцией упругого закрепления $C\xi$

$$ES \frac{\partial \xi}{\partial x} = C\xi. \quad (76)$$

При $X = l$ продольная сила уравнивается силой инерции сосредоточенной массы – $m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

$$ES \frac{\partial \xi}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (77)$$

Продольная сила, реакция упругого закрепления и сила инерции сосредоточенной массы с учетом выражений (59) и (61) равны

$$F = ES \frac{\partial \xi}{\partial x} = ES \frac{du}{dx} \sin(pt + \beta) =$$

$$= ES \left(A \frac{p}{a} \cos \frac{p}{a} x - B \frac{p}{a} \sin \frac{p}{a} x \right) \sin(pt + \beta); \quad (78)$$

$$C\xi = C \left(A \sin \frac{p}{a} x + B \cos \frac{p}{a} x \right) \sin(pt + \beta) \quad (79)$$

$$-m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = m \left(A \sin \frac{p}{a} x + B \cos \frac{p}{a} x \right) p^2 \sin(pt + \beta).$$

Из равенства (76) с учетом выражения (78) при $X = 0$ имеем

$$ES \frac{p}{a} A - CB = 0. \quad (80)$$

Из равенства (77) с учетом (79) при $X = l$ имеем

$$\left(ES \frac{p}{a} \cos \frac{p}{a} l - mp^2 \sin \frac{p}{a} l \right) A - \left(ES \frac{p}{a} \sin \frac{p}{a} l + mp^2 \cos \frac{p}{a} l \right) B = 0. \quad (81)$$

Приравнивая определитель системы уравнений (80) и (81) нулю, получаем частное уравнение

$$\begin{vmatrix} ES \frac{p}{a} & -C \\ \left(ES \frac{p}{a} \cos \frac{p}{a} l - mp^2 \sin \frac{p}{a} l \right) & - \left(ES \frac{p}{a} \sin \frac{p}{a} l + mp^2 \cos \frac{p}{a} l \right) \end{vmatrix} =$$

$$= -ES \frac{p}{a} \left(ES \frac{p}{a} \sin \frac{p}{a} l + mp^2 \cos \frac{p}{a} l \right) + C \left(ES \frac{p}{a} \cos \frac{p}{a} l - mp^2 \sin \frac{p}{a} l \right) = 0$$

или

$$ES \frac{p}{a} (mp^2 - C) \cos \frac{p}{a} l + \left[mp^2 C + \left(ES \frac{p}{a} \right)^2 \right] \sin \frac{p}{a} l = 0. \quad (82)$$

Корни частного уравнения (82) P_K ($K = 1, 2, \dots$) являются частотами свободных колебаний стержня с сосредоточенной массой и упругим заземлением.

4.3. Задание к выполнению лабораторной работы

Исходные данные и варианты стержней с различными концевыми условиями приведены в табл. 4.

5. Лабораторная работа «Исследование вынужденных частот поперечно-изгибных колебаний роторов»

5.1. Методика выполнения лабораторной работы

При расчете вынужденных колебаний ротора определяются: площадь S , м², и момент инерции сечения ротора I , м⁴

$$S = \frac{\pi}{4} (d_n^2 - d_6^2); \quad I = \frac{\pi}{64} (d_n^4 - d_6^4);$$

относительные жесткости распределенной η_0 и сосредоточенных η опор по формулам (24), (25);

критические частоты вращения ω_0 , рад·с⁻¹, ротора по двум-трем формам путем решения частотного уравнения (28) с использованием зависимости (22) на ПК;

частоты вращения ротора ω , рад·с⁻¹, и частотное отношение

$$\omega = \frac{V_M}{30d_n}, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \eta;$$

масса вала m_6 , кг

$$m_6 = S \cdot l \cdot \rho;$$

коэффициенты жесткости ротора, колеблющегося по первой C_{61} и второй C_{62} формам по формулам (31), (32);

соотношение масс μ и жесткостей K_Z и K_K по формулам (40), (44);

частоты собственных колебаний парциальных систем $\lambda_{6,Z,K}$ по формуле (41);

коэффициенты динамического усиления $\mathcal{H}_{6,Z,K}$ при резонансе парциальных систем по формуле (42);

частотные отношения парциальных систем $\eta_{6,Z,K}$ по формуле (43);

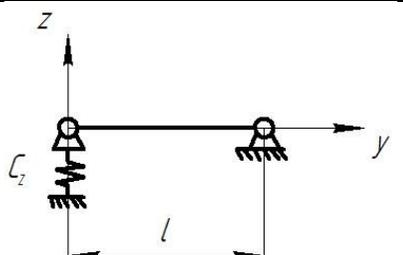
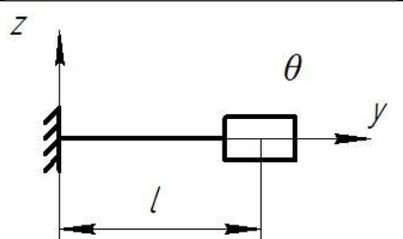
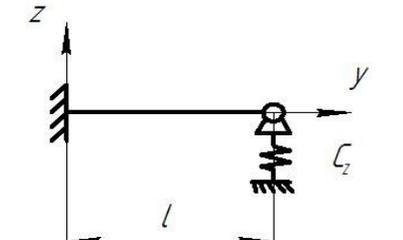
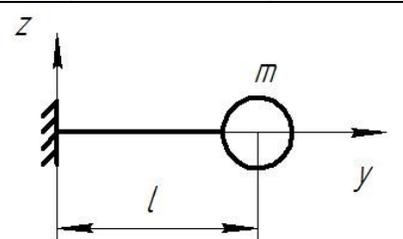
корни уравнений (45) $S_{61,2}$; $S_{\psi 1,2}$; $S_{\kappa 1,2}$ на ПК;

амплитуды виброперемещений центра масс вала, цапфы и корпуса подшипника $S_{ia,m}$ по формуле (46).

5.2. Задание к выполнению лабораторной работы

Исходные данные для расчета приведены в табл. 5.

Исходные данные и варианты стержней

№ зад.	Схема стержня	№ вар.	Вид исследуемых колебаний	Длина l , м	Наружный диаметр D , м	Внутренний диаметр d , м	Коэффициент жесткости C_z , Н/м	Масса груза m	Момент инерции груза θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		1 2 3 4 5	Поперечно-изгибные	1,0 1,2 1,5 2,0 2,5	0,12 0,15 0,18 0,20 0,22	0,10 0,12 0,15 0,16 0,18	$1 \cdot 10^6$ $2 \cdot 10^6$ $8 \cdot 10^6$ $1 \cdot 10^7$ $2 \cdot 10^7$		
2		1 2 3 4 5	Поперечно-изгибные	1,2 3,0 4,0 5,0 6,0	0,15 0,25 0,32 0,40 0,50	0,12 0,20 0,25 0,32 0,42			$\theta = \frac{2m_{cm}(5D^2)}{8}$
3		1 2 3 4 5	Поперечно-изгибные	1,5 2,0 2,5 3,0 4,0	0,18 0,20 0,22 0,25 0,32	0,15 0,16 0,18 0,20 0,25	$8 \cdot 10^6$ $1 \cdot 10^7$ $2 \cdot 10^7$ $5 \cdot 10^7$ $1 \cdot 10^8$		
4		1 2 3 4 5	Поперечно-изгибные	2,0 2,5 3,0 4,0 5,0	0,20 0,22 0,25 0,32 0,40	0,16 0,18 0,20 0,25 0,32		$m = 5m_{cm}$	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5		1 2 3 4 5	Поперечно-изгибные, продольные	3,0 2,0 2,5 3,5 4,0	0,62 0,60 0,58 0,42 0,40	0,56 0,54 0,54 0,36 0,32			
6		1 2 3 4 5	Продольные	1,5 2,0 2,5 2,6 3,0	0,22 0,24 0,30 0,36 0,40	0,16 0,18 0,24 0,30 0,35		$m = 5m_{cm}$	
7		1 2 3 4 5	Поперечно-изгибные	1,8 2,4 2,6 3,2 4,0	0,55 0,52 0,50 0,48 0,30	0,46 0,46 0,44 0,42 0,30			
8		1 2 3 4 5	Поперечно-изгибные	2,0 1,8 1,6 1,2 1,0	0,46 0,38 0,30 0,28 0,18	0,40 0,32 0,26 0,24 0,12			
9		1 2 3 4 5	Продольные	8,0 6,0 1,0 1,2 1,5	0,80 0,50 0,12 0,15 0,18	0,70 0,42 0,10 0,12 0,15	$5 \cdot 10^8$ $3 \cdot 10^8$ $1 \cdot 10^6$ $2 \cdot 10^6$ $8 \cdot 10^6$	$m = 5m_{cm}$	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10		1 2 3 4 5	Поперечно-изгибные, продольные	7,5 6,2 3,0 4,0 5,5	0,56 0,62 0,42 0,40 0,32	0,50 0,58 0,38 0,36 0,28		$m = 5m_{cm}$	
11		1 2 3 4 5	Поперечно-изгибные, продольные	7,2 6,5 3,5 3,2 2,5	0,60 0,52 0,46 0,35 0,32	0,54 0,48 0,42 0,30 0,26			
12		1 2 3 4 5	Поперечно-изгибные	3,5 2,6 2,4 1,5 1,4	0,28 0,22 0,20 0,32 0,18	0,24 0,18 0,16 0,28 0,14	$2 \cdot 10^8$ $6 \cdot 10^8$ $1 \cdot 10^9$ $2 \cdot 10^7$ $1 \cdot 10^7$		
13		1 2 3 4 5	Поперечно-изгибные	5,2 5,0 3,5 2,5 2,2	0,36 0,32 0,40 0,24 0,20	0,32 0,28 0,36 0,20 0,16	$1 \cdot 10^6$ $8 \cdot 10^6$ $2 \cdot 10^7$ $6 \cdot 10^7$ $1 \cdot 10^8$		

Площадь поперечного сечения стержня $S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$, м².

Момент инерции поперечного сечения стержня $I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$, м⁴.

Масса стержня $m_{cm} = S \cdot l \cdot \rho$, кг.

Исходные данные для расчета

Исходные данные	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Длина пролета l , м	1	1,2	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8
Диаметры сечения ротора										
наружный d_n , м	0,12	0,15	0,18	0,20	0,22	0,25	0,32	0,40	0,50	0,80
внутренний d_b , м	0,10	0,12	0,15	0,16	0,18	0,20	0,25	0,32	0,42	0,70
Приведенная масса корпусов подшипников m_k , кг	2	5	10	20	50	100	200	250	500	1000
Удельные дисбалансы роторов										
e_c , мкм	200	250	300	320	280	400	320	300	250	200
e_M , мкм	50	80	100	100	100	120	100	100	80	50
Коэффициенты жесткости:										
C_Z , Н·м ⁻¹	$1 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^8$
C_K , Н·м ⁻¹	$5 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^8$	$1 \cdot 10^9$
C_0 , Н·м ⁻¹	$0,2 \cdot 10^6$	$0,3 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^7$	$1,2 \cdot 10^7$
Коэффициенты неупругих сопротивлений:										
подшипников										
b_Z , Н·с·м ⁻¹	$1 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^7$
корпусов подшипников										
b_K , Н·с·м ⁻¹	$5 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$
распределенной опоры										
b_0 , Н·с·м ⁻¹	$2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$
Скорость машины (окружная скорость ротора) V_M , м*мин ⁻¹	120	200	250	400	500	600	800	1000	1200	1600

6. Лабораторная работа «Расчет волновода»

Волновод предназначен для присоединения вибропреобразователя к объекту диагностирования. Он выполняется в виде стержня, одним концом связанного с объектом диагностирования, другим – с вибропреобразователем. К объекту диагностирования волновод может быть приварен, связан с ним резьбовым соединением или иметь контакт с силовым прижимом. В последнем случае волновод выполняется в виде щупа.

Расчет волновода заключается в проектном определении его геометрических размеров с последующим построением графика передаточной функции, т.е. зависимости передаточной функции от частоты вибрации диагностируемого объекта. Динамическая модель волновода показана на рис. 5г, где обозначено:

m – масса вибропреобразователя, кг;

S, l – площадь сечения, m^2 и длина волновода, м;

ρ – плотность материала волновода, $kg \cdot m^{-3}$;

C – жесткость контакта волновода с объектом диагностирования, $N \cdot m^{-1}$.

Исходные данные для расчета:

масса вибропреобразователя m , кг;

требуемая частота свободных продольных колебаний волновода (с учетом массы вибропреобразователя и жесткости контакта волновода с объектом диагностирования) f_0 , Гц;

способ контакта волновода с объектом диагностирования.

Методика выполнения лабораторной работы

1. Выбираются материал и диаметр волновода d , м. По табл. 6 определяются характеристики материала E и ρ . Диаметр волновода в виде стержня может быть принят в пределах 2-4% от длины волны, распространяющейся по волноводу с заданной частотой f_0 , Гц

$$d_g \approx (0,02 \dots 0,04) \frac{a}{f_0}, \quad (83)$$

где a – скорость распространения волны, $m \cdot s^{-1}$, определяемая по формуле (57).

2. Определяется жесткость контакта волновода C , $N \cdot m^{-1}$, в виде щупа и поверхности детали диагностируемого объекта, зависящая от материала волновода и детали, с которой контактирует волновод, от шероховатости поверхности детали и от усилия прижима волновода и детали

$$C = K_{RZ} \sqrt[3]{\frac{F}{\eta_E^2} R_{np}}, \quad (84)$$

где K_{RZ} – коэффициент, зависящий от шероховатости поверхности детали (табл. 6);

F – усилие прижима волновода, Н;

$$R_{np} = \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 \pm R_1}, \quad (85)$$

R_2 и R_1 – радиусы кривизны соответственно поверхности детали диагностируемого объекта и контактной поверхности волновода.

Знак “–” соответствует вогнутой поверхности детали. В случае, когда зона контакта на детали выполнена по плоскости

$$\begin{aligned} R_{np} &= R_1 \\ \eta_E &= \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} + \frac{1 - \mu_1^2}{E_1}, \end{aligned} \quad (86)$$

где E_2, μ_2 и E_1, μ_1 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно детали диагностируемого объекта и волновода (табл. 7).

Таблица 6

Характеристики материалов волновода

Материал волновода	Модуль Юнга, $E \cdot 10^{-11}, \text{Н} \cdot \text{м}^{-2}$	Плотность материала, $\rho, \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$	Коэффициент Пуассона, μ
Сталь	2,0-2,2	7850	0,28-0,29
Чугун	1,0-1,6	6500-7500	0,23-0,27
Медь	1,1-1,3	8900	0,33
Алюминиевые сплавы	0,7-0,72	2600-2900	0,26-0,33
Титановые сплавы	1,1	4500	0,3
Бронза	0,9-1,1	8500-9400	0,3
Бетон	0,15-0,23	2400	0,16-0,18
Дерево вдоль волокон	0,09-0,14	300-800	-

Таблица 7

Примерные значения коэффициента

$R_z, \text{мкм}$	<0,4	0,4-0,8	0,8-1,6	1,6-3,2	3,2-6,3	6,3-10	> 10
K_{RZ}	1,2	0,8	0,6	0,4	0,25	0,2	0,16

Жесткость контакта увеличивается на 25% при наличии между волноводом и деталью смазки.

При резьбовом соединении волновода с деталью жесткость контакта определяется по формуле

$$C = 1,25dE_1 \quad (87)$$

где d – наружный диаметр резьбы, м.

Если волновод приварен к детали, то жесткость контакта принимается равной бесконечности.

3. Определяется угловая частота собственных колебаний волновода $P, \text{рад} \cdot \text{с}^{-1}$

$$P = 2\pi f_0,$$

4. Определяются коэффициенты K_m и K_C по формулам

$$K_m = \frac{m}{m_{CT}}; \quad K_C = \frac{C_{CT}}{C} \quad (88)$$

и по зависимостям (73) и $ES \frac{\partial \xi}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + F_a \sin \omega t$ рассчитывается передаточная функция волновода в диапазоне частот $f = 0 \dots 2f_0$ с интервалом не менее $0,1f_0$.

Строится график передаточной функции $\eta = \eta(f)$.

Расчеты и построение графика рекомендуется производить на ПК.

Литература

1. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х томах. Т.1 / Под ред. А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1983.
2. Расчеты на прочность в машиностроении. Т.3 / Под ред. С.Д. Пономарева. М.: Машгиз, 1959.
3. Санников А.А., Куцубина Н.В. Поперечно-изгибные колебания роторов машин: метод. указ. Урал. гос. лесотехн. ун-т. Екатеринбург, 1995. 28 с.
4. Санников А.А., Куцубина Н.В. Продольные волны в конструкциях машин и оборудования: метод. указ. Урал. гос. лесотехн. ун-т. Екатеринбург, 1995. 26 с.