Список источников

1. Salem M. Z. M., Böhm M. Understanding of formaldehyde emissions from solid wood: An overview // BioResources. 2013. Vol. 8(3). P. 4775-4790.
2. Влияние функционального состава карбамидоформальдегидной смолы на свойства древесностружечных плит. Часть 1. изменение функционального состава КФС при длительном хранении / В. Г. Бурындин [и др.] // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17. № 6. С. 164–166.
3. Разработка датчика, газоанализатора и детектора аммиака на основе пьезосенсора / Т. А. Кучменко, Р. У. Умарханов, Ж. Ю. Кочетова, Н. В. Бельских // Журнал аналитической химии. 2012. Т. 67. № 11. С. 1032-1039.
4. Применение восьмисенсорного «электронного носа» для оценки загрязнения воды керосином и ацетоном / Ж. Ю. Кочетова, Т. А. Кучменко, П. А. Карлов, О. В. Тимошинов // Успехи современного естествознания. 2017. № 11. С. 12-17.
5. Определение влажности воздуха в широком диапазоне температур и концентраций / Ж. Ю. Кочетова [и др.] // Аналитика и контроль. 2012. Т. 16. № 1. С. 53-60.

Научная статья
УДК 519.2

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Даниил Юрьевич Дворянкин [1], Андрей Юрьевич Вдовин [2]
[1,2]Уральский государственный лесотехнический университет, Екатеринбург, Россия
[1] daniil.dvoryankin.02@mail.ru
[2] vdovinau@m.usfeu.ru

Аннотация: Рассматривается задача построения уравнения линейной стохастической зависимости между двумя случайными величинами. В качестве упомянутого уравнения предлагается использовать биссектрису угла, образованного линиями прямой и обратной регрессий.

Ключевые слова: теория вероятностей, случайные величины, уравнения линейной регрессии

Scientific article

ON THE QUESTION OF CONSTRUCTING A LINEAR RELATIONSHIP BETWEEN TWO RANDOM VARIABLES

Dvoryankin Y. Daniil[1], Vdovin Y. Andrey[2]
[1]daniil.dvoryankin.02@mail.ru
[2] vdovinau@m.usfeu.ru

Abstract. The paper considers the problem of constructing an equation of linear stochastic dependence between 2 random variables. As the above equation, it is proposed to use the bisector of the angle formed by the lines of direct and reverse regressions.

Keywords: theory of probability, random variables, linear regression equations

Вопрос о поиске взаимосвязи между случайными величинами является важным с практической точки зрения. Различные подходы к его решению рассматриваются как в классической теории вероятностей [1], так и в эконометрике [2] и в математической статистке. Классический подход решения заключается в построении уравнений прямой или обратной регрессии.

Уравнение прямой регрессии или регрессии *Y* на *X* задается формулой

$$y - M(Y) = \rho\left(\frac{\sigma(y)}{\sigma(x)}\right)\left(x - M(x)\right), \qquad (1)$$

а обратное уравнение регрессии *X* на *Y* —

$$x - M(\mathrm{X}) = \rho\left(\frac{\sigma(x)}{\sigma(y)}\right)\left(y - M(y)\right), \qquad (2)$$

Здесь *M(X), M(Y)* – известные математические ожидания случайных величин *X* и *Y*; σ(*X*), σ(*Y*) – их среднеквадратичные отклонения; ρ – коэффициент корреляции.

Линии, задаваемые этими уравнениями, проходят через точку с координатами *(M(X), M(Y)),* но имеют разные угловые коэффициенты. Поэтому в силу равноправия величин *X* и *Y* не всегда очевидно, какое из уравнений выбрать для описания неизвестной зависимости между ними.

В работе предложено выбрать в качестве искомой зависимости некоторую промежуточную прямую. Отметим, что угловые коэффициенты

$K_1 = \rho \dfrac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}$ и $K_2 = \dfrac{\sigma(Y)}{\rho\ \sigma(X)}$ линий прямой и обратной регрессий имеют одинаковый знак.

В качестве упомянутой промежуточной прямой предлагается выбрать биссектрису угла, образованного ими. Поскольку K_i = tgφ_i, для i = 1,2; где φ_i угол, образованный соответствующей линией с положительным направлением оси *OX*, то неизвестный угловой коэффициент *K* биссектрисы равен:

$$K = \mathrm{tg}\frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}. \tag{3}$$

Для его нахождения воспользуемся известными тригонометрическими тождествами:

$$\sin(\varphi_1) + \sin(\varphi_2) = \frac{2\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}\left(\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}\right), \tag{4}$$

$$\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_2) = \frac{2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}\left(\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}\right), \tag{5}$$

Разделим выражение (4) на выражение (5), чтобы получить из (3)

$$K = \frac{\sin(\varphi_1) + \sin(\varphi_2)}{\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2)}$$

Для определения sinφ_i, cosφ_I, входящих в данную формулу, воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin\varphi_1 = \frac{\rho\sigma(Y)}{\sqrt{\rho^2\sigma^2(Y)+\sigma^2(X)}},\quad \cos\varphi_1 = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{\rho^2\sigma^2(Y)+\sigma^2(X)}},$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{\sigma(Y)}{\sqrt{\rho^2\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}},\quad \cos\varphi_2 = \frac{\rho\sigma(X)}{\sqrt{\rho^2\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}}.$$

Теперь запишем уравнение биссектрисы с помощью уравнения прямой, проходящей через точку с координатами *(M(X), M(Y))*, с угловым коэффициентом *K*:

$$y - M(Y) = \frac{\dfrac{\rho\sigma(Y)}{\sqrt{\rho^2\sigma^2(Y)+\sigma^2(X)}} + \dfrac{\sigma(Y)}{\sqrt{\rho^2\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}}}{\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{\rho^2\sigma^2(Y)+\sigma^2(X)}} + \dfrac{\rho\sigma(X)}{\sqrt{\rho^2\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}}}$$

$$y - M(Y) = \frac{(\sigma(Y))\cdot(\sqrt{\rho^2\sigma^2(Y)+\sigma^2(X)})+\sqrt{\rho^2\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}}{(\sigma(X))(\rho\sqrt{\rho^2\sigma^2(Y)+\sigma^2(X)}+\sqrt{\rho^2\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)})}(x - M(X)). \qquad (6)$$

Уравнение (6) предлагается использовать в качестве неизвестной линейной зависимости.

В качестве модельного примера рассмотрим построение зависимости массы влаги Y (м^3/га) от глубины почвенного разреза X (мм) на границе горизонтов вмывания и вымывания (таблица).

Зависимость массы влаги (Y) от глубины почвенного разреза (X) на границе горизонтов вымывания и вмывания

Y, м^3/га	X, мм			Всего, p_n^y
	-279,5	-258,5	-237,5	
522,5	0,087	0,304	0,022	0,413
565,5	0,5	0,065		0,565
608,5	0,022			0,022
Всего, p_n^x	0,609	0,369	0,022	$\sum = 1$

$$M(X) = \sum x_i \cdot p_i^x = -270{,}827;$$

$$M(Y) = \sum y_i \cdot p_i^y = 548{,}687;$$

$$D(X) = \sum x_i^2 \cdot p_n^x - M^2(X) = 126{,}316;$$

$$D(Y) = \sum y_i^2 \cdot p_n^y - M^2(Y) = 521{,}638;$$

$$\sigma_x = 11{,}23;$$

$$\sigma_y = 22{,}839;$$

$$\rho = -0{,}6561.$$

С помощью найденных значений запишем уравнения прямой (1), обратной (2) регрессий, а также уравнение биссектрисы (6):

Уравнение прямой регрессии (1):

$$y = -1{,}33x + 187{,}55.$$

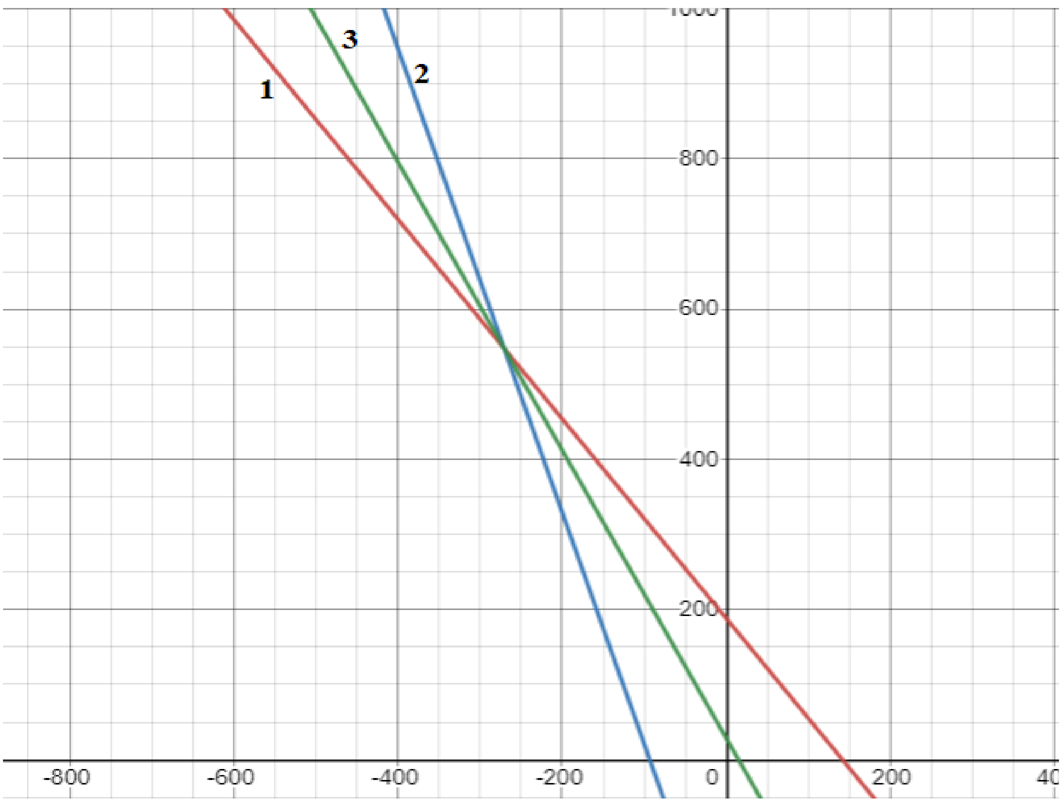
Уравнение обратной регрессии (2):

$$y = -3{,}09x - 289{,}1.$$

Полученное уравнение (3):

$$y = -1{,}92x + 27{,}764.$$

Графики полученных уравнений показаны на рисунке.



Графики уравнений прямой (1), обратной (2) и полученной (3) регрессий

Построенный график соответствует ситуации, когда количество влаги на поверхности практически равно 0.

Список источников

1. Колемаев В. А., Староверов О. В., Турундаевский В. Б. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для эконом. спец. вузов / под ред. В. А. Колемаева. М. :Высш.шк., 1991. 400 с.

2. Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. Эконометрика. Начальный курс. М. : Дело, 1997. 248 с.