Научная статья
УДК 51-74

К ВОПРОСУ О КРИВИЗНЕ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЛЕСОВОЗНЫХ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ

Ксения Вадимовна Забелина[1], Елена Сергеевна Федоровских[2]
[1, 2] Уральский государственный лесотехнический университет, Екатеринбург, Россия
[1] kseniya.zabelina2017@yandex.ru
[2] fedorovskihes@m.usfeu.ru

Аннотация. При проектировании лесовозных автомобильных дорог создается план трассы, элементами которой являются кусочки кривых на плоскости. Авторы считают полезным рассмотреть некоторые способы аналитического представления плоских кривых. Целью работы является определение таких важных математических характеристик кривых как кривизна, радиус и центр кривизны. Данные показатели изогнутости кривой дают возможность достигнуть плавности кривой.

Ключевые слова: радиус кривизны, переходные кривые, лесовозные автомобильные дороги

Scientific article

TO THE QUESTION OF CURVATURE IN THE DESIGN OF LOGGING ROADS

Kseniya V. Zabelina[1], Elena S. Fedorovskikh[2]
[1, 2] Ural State Forest Engineering University, Yekaterinburg, Russia
[1] kseniya.zabelina2017@yandex.ru
[2] fedorovskihes@m.usfeu.ru

Abstract. When designing logging automotive highways, a route plan is created, elements of which are pieces of curves on a plane. The authors consider it useful to consider some methods of analytical representation of plane curves. The aim of the work is to determine such important mathematical characteristics of curves as curvature, radius and center of curvature. These curve curvature indicators make it possible to achieve a smooth curve.

Keywords: radius of curvature, transition curves, logging automotive roads

Одна из основных проблем, сдерживающих развитие лесопромышленного комплекса России, – очень низкая степень обеспеченности транспортной инфраструктурой. Слабо развитая дорожно-транспортная инфраструктура лесопользования ограничивает возможности более полного освоения эксплуатационных лесов и снижает экономическую доступность древесных лесных ресурсов [1]. Для увеличения вклада лесного комплекса в социально-экономическое развитие России необходимо совершенствовать существующие и строить новые лесовозные автомобильные дороги.

Основным назначением лесовозных автомобильных дорог является сбор и вывозка заготовленного леса. На структуру транспортной сети и размещение отдельных дорог в лесном массиве оказывает влияние целый ряд факторов [2]. Для устранения трудностей проектирования прибегают к использованию математического аппарата. Трасса лесовозных автомобильных дорог в плане состоит из совокупности элементов, к которым относятся прямая линия, круговые кривые, переходные кривые. Важной характеристикой степени искривленности кривых в различных их точках является кривизна.

На различных участках кривой средняя кривизна будет различной, но существует кривая, для которой средняя кривизна везде одинакова – это окружность [3]. Очень часто в качестве примера круговой кривой берут дугу окружности.

Рассмотрим параметрические уравнения окружности с центром в начале координат и радиусом r:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}.$$

Получим зависимость кривизны от радиуса кривизны, для этого воспользуемся формулой

$$k = \frac{y''_{tt}\cdot x'_t - x''_{tt}\cdot y'_t}{\sqrt{((x'_t)^2 + (y'_t)^2)^3}}.$$

Найдем производные первого и второго порядка:

$$x'_t = (r\cos t)' = -r\sin t \qquad x''_{tt} = (-r\sin t)' = -r\cos t$$

$$y'_t = (r\sin t)' = r\cos t \qquad y''_t = (r\cos t)' = -r\sin t.$$

Тогда

$$k = \frac{(-r\sin t)\cdot(-r\sin t) - (-r\cos t)\cdot(r\cos t)}{\sqrt{((-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2)^3}} = \frac{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}{\sqrt{(r^2(\sin^2 t + \cos^2 t))^3}} =$$

$$= \frac{r^2\cdot 1}{\sqrt{r^6}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Следовательно, $k = \dfrac{1}{r}$ или $r = \dfrac{1}{k}$. Нам удалось установить зависимость кривизны от радиуса кривизны.

Пример

Пусть дано общее уравнение окружности $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$

Найдем кривизну линии.

Решение

Преобразуем уравнение окружности к каноническому виду

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковую переменную

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 10y) - 7 = 0.$$

Выделим полные квадраты по каждой переменной

$$(x^2 - 4x + 2^2) - 4 + (y^2 + 10y + 5^2) - 25 - 7 = 0,$$

откуда $(x-2)^2 + (y+5)^2 - 36 = 0$ или $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 36$.

Таким образом, радиус кривизны $r = 6$, а кривизна окружности $k = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{6}$.

Переходные кривые используются для того, чтобы кривизна трассы изменялась равномерно и плавно, избегая скачкообразных изменений кривизны вдоль всей трассы [4]. Особенно необходимо избегать резких перемен в тех точках, где происходит соединение разных участков трассы, что может привести к дорожно-транспортному происшествию. Чаще всего в роли переходных кривых берут кубическую параболу, клофоиду, венскую дугу, кадиоиду.

В качестве примера возьмем параметрические уравнения кубической параболы:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3 - 4t^3 \end{cases}.$$

При построении математических моделей участков трассы можно привести данные уравнения линии к уравнению с двумя переменными.

Для этого выразим параметр t из первого уравнения, получим $t=\dfrac{x-1}{2}$, затем подставим во второе. Имеем $y=3-4\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^3$ или $y=3-\dfrac{4(x-1)^3}{8}$.

Окончательно $y=3-\dfrac{1}{2}(x-1)^3$.

Это уравнение дает представление о кубической параболе в прямоугольных координатах.

Способы вычисления основных характеристик степени изогнутости кубической параболы приведены в таблице.

Способы вычисления показателей изогнутости кубической параболы

Характеристики кривой	Параметрические уравнения: $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3-4t^3 \end{cases}$ при $t=\dfrac{1}{2}$	Уравнение в прямоугольных координатах: $y=3-\dfrac{1}{2}(x-1)^3$ в точке $M(2;2,5)$
k (кривизна)	$k=\dfrac{y''_{tt}\cdot x'_t-x''_{tt}\cdot y'_t}{\sqrt{((x'_t)^2+(y'_t)^2)^3}}$ $x'_t=2$; $x''_{tt}=0$; $y'_t=-12t^2$; $y''_{tt}=-24t$. Тогда $y'_t\left(\dfrac{1}{2}\right)=-3$; $y''_{tt}\left(\dfrac{1}{2}\right)=-12$. $k=\dfrac{\left\|(-12)\cdot 2-0\cdot(-3)\right\|}{\sqrt{\left(2^2+(-3)^2\right)^3}}=\dfrac{\|-24\|}{\sqrt{(4+9)^3}}=$ $=\dfrac{24}{13^{\frac{3}{2}}}$ или $k\approx 0,51$	$k=\dfrac{\|y''\|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$ $y'_t=-\dfrac{3}{2}(x-1)^2$; $y''_{tt}=-3x+3$. Определим значения производных в точке $M(2;2,5)$: $y'_t(2)=-1,5$; $y''_{tt}(2)=-3$. $k=\dfrac{\|-3\|}{\left(1+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{3}{\left(\dfrac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}=$ $=\dfrac{3\cdot 2^3}{13^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{24}{13^{\frac{3}{2}}}\approx 0,51$
r (радиус кривизны)	$r=\dfrac{1}{k}$ $r=\dfrac{1\cdot 13^{\frac{3}{2}}}{24}=\dfrac{1}{0,51}\approx 1,96$	

C (центр кривизны)	$\begin{cases}\xi = x(t) - y'_t \dfrac{x_t'^2 + y_t'^2}{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}},\\ \eta = y(t) + x'_t \dfrac{x_t'^2 + y_t'^2}{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}.\end{cases}$ Воспользуемся предыдущими вычислениями: $x'_t = 2;$ $x''_{tt} = 0;$ $y'_t\left(\frac{1}{2}\right) = -3;$ $y''_{tt}\left(\frac{1}{2}\right) = -12.$ Тогда $\begin{cases}\xi = 2 - \dfrac{(-3)\cdot(4+9)}{2\cdot(-12)-(-3)\cdot 0},\\ \eta = 2{,}5 + \dfrac{2\cdot(4+9)}{2\cdot(-12)-(-3)\cdot 0}.\end{cases}$ $\begin{cases}\xi = 0{,}375,\\ \eta \approx 1{,}417.\end{cases}$ Координаты центра кривизны: $C(0{,}375;1{,}417)$.	$\begin{cases}\xi = x + \dfrac{y'\left(1+(y')^2\right)}{\lvert y''\rvert},\\ \eta = y - \dfrac{1+(y')^2}{\lvert y''\rvert}.\end{cases}$ Воспользуемся предыдущими вычислениями: $y'_t(2) = -1{,}5;$ $y''_{tt}(2) = -3.$ Центр кривизны в т. $M(2;2{,}5)$: $\begin{cases}\xi = 2 + \dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{9}{4}\right)}{\lvert -6+3\rvert},\\ \eta = 2{,}5 - \dfrac{1+\frac{9}{4}}{\lvert -6+3\rvert}.\end{cases}$ Следовательно, $\begin{cases}\xi = 0{,}375,\\ \eta \approx 1{,}417.\end{cases}$ Координаты центра кривизны в т. $M(2;2{,}5)$: $C(0{,}375;1{,}417)$.

Обратим внимание на построение графика кубической параболы для случая, если ее уравнение задано в виде $y = 3 - \frac{1}{2}(x-1)^3$.

График можно построить, применяя правила сдвига и растяжения. В качестве основной функции рассмотрим $y_1 = -x^3$, затем построим график функции $y_2 = -\frac{1}{2}x^3$ и, наконец, график $y_3 = 3 - \frac{1}{2}(x-1)^3$. Графики рассмотренных ранее функций представлены на рисунке.

Таким образом, для достижения требуемой безопасности движения на лесовозных автомобильных дорогах необходимо учитывать количественные показатели изогнутости кривой: кривизну и радиус кривизны, а также уметь работать с разными способами задания кривых на плоскости.

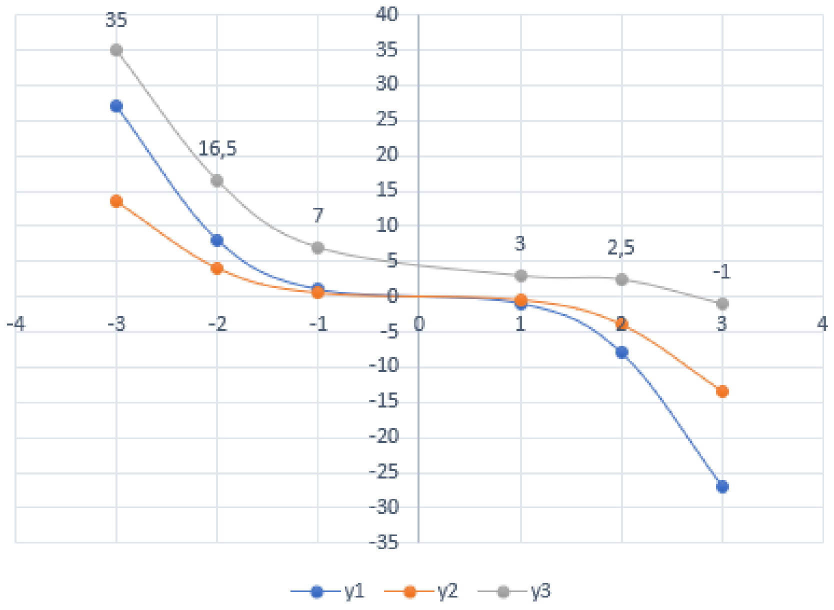

График кубической параболы

Список источников

1. Лесные дороги. НИИ леса Финляндии. – URL: https://projects.luke.fi/bsrforest/wp-content/uploads/sites/40/2009/11/Lesnye-dorogi.pdf (дата обращения: 02.12.2022).

2. Методы проектирования лесовозных автомобильных дорог, основанные на расчете однозначно определенной трассы / Е. В. Чирков, А. В. Скрыпников, В. Г. Козлов // Лесной вестник = Forestry Bulletin, – 2020. – Т. 24, № 5. – С. 128–137.

3. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 томах. Том 1 / Г. М. Фихтенгольц. – 14-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2020. – 608 с.

4. Захаров Д. Д. Характеристики плоских и пространственных гладких кривых / Д. Д. Захаров, Г. В. Черников, А. И. Гусев. – Москва, 2013. – 35 с.