РАЗДЕЛ 6

ПЕРСПЕКТИВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ НАУЧНЫХ И МЕТОДИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ В СФЕРЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ИНЖЕНЕРНЫХ КАДРОВ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ РОССИИ

Цивилизационные перемены в России. 2023. С. 288–296.
Civilizational changes in Russia. 2023. P. 288–296.

Научная статья
УДК 517.935, 378

ОГРАНИЧЕННАЯ ВАРИАЦИЯ – НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Андрей Юрьевич Вдовин[1], Светлана Сергеевна Рублева[2]
[1, 2] Уральский государственный лесотехнический университет,
Екатеринбург, Россия
[1] vdovinau@m.usfeu.ru
[2] rublevass@m.usfeu.ru

Аннотация. На примере формулы трапеций для вычисления определенного интеграла рассматривается проблема влияния априорной информации о свойствах подынтегральной функции, а также неточной и неполной информации о ее значениях, на гарантированную оценку точности приближенного метода. Изложение ведется с использованием математического аппарата, доступного студентам технических ВУЗов. Введение в рассмотрение функций с ограниченной вариацией позволяет модернизировать изложение лекционного материала в соответствии с современными требованиями, отвечающими тренду развития цифровизации.

Ключевые слова: высшее образование, методы численного интегрирования, оценка точности, априорная информация, функции ограниченной вариации

Для цитирования: Вдовин А. Ю., Рублева С. С. Ограниченная вариация – новые возможности оценки точности методов численного интегрирования // Цивилизационные перемены в России. 2023. С. 288–296.

Scientific article

A LIMITED VARIATION – NEW POSSIBILITIES FOR ESTIMATION OF THE ACCURACY OF NUMERICAL INTEGRATION METHODS

Andrey Yu. Vdovin[1], Svetlana S. Rubleva[2]
[1, 2] Ural State Forest Engineering University, Yekaterinburg, Russia
[1] vdovinau@m.usfeu.ru
[2] rublevass @m.usfeu.ru

Abstract. Using the example of the trapezoid formula for calculating a definite integral the problem of the influence of a priori information about the properties of the integrand as well as inaccurate and incomplete information about its values on a guaranteed estimate of the accuracy of the approximate methodis considered. The presentation is carried out using the mathematical apparatus available to students of technical universities. Introduction to the consideration of functions with limited variation allows us to modernize the presentation of lecture material in accordance with modern requirements that meet the trend of digitalization development.

Keywords: higher education, numerical integration methods, accuracy estimation, a priori information, functions of limited variation

For citation: Vdovin A. Yu., Rubleva S. S. A limited variation – new possibilities for estimation of the accuracy of numerical integration methods // Civilizational changes in Russia. 2023. P. 288–296.

Обычно изучение математики в техническом ВУЗе начинается с изложения основных понятий ее ядра: линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, основ дифференциального, интегрального исчисления, теории обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом традиционно применяются аналитические методы, использующие полную и точную информацию об исследуемых объектах. Однако на практике такая информация может оказаться неполной и неточной, что делает их применение невозможным. Поэтому рассмотрение в рамках учебного курса для будущих специалистов проблемы возможных действий в такой ситуации является актуальной и, по мнению авторов, крайне значимой задачей.

В качестве примера рассмотрим проблему нахождения определенного интеграла $\int_a^b f(x)a$. Ее важность обуславливается необходимостью использования при решении широкого круга задач, которые возникают как при рассмотрении многих прикладных вопросов, так и внутренних теоретических проблем самой математики. Классический подход при нахождении определенного интеграла состоит в применении важнейшей формулы Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для подынтегральной функции $f(x)$. Отметим, что точное нахождение первообразной возможно лишь при аналитическом задании $f(x)$ на промежутке $[a;\, b]$. В этой ситуации, при наличии упомянутой выше информации, как правило, первообразная $F(x)$ может быть определена путем нахождения неопределенного интеграла с помощью применения одного из многочисленных аналитических приемов [1]. Однако это возможно далеко не всегда. Например, такой подход неприменим, если первообразная не может быть представлена в виде конечного числа арифметических операций над элементарными функциями. В этом случае интеграл от $f(x)$ может оказаться «не берущимся» в силу невозможности осуществления бесконечного числа таких операций за ограниченное время. Кроме того, на практике приходится сталкиваться с ситуацией, когда $f(x)$ задается таблично. В этом случае информация о значениях $f(x_i)$ доступна лишь в некоторых узлах $a = x_0 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$ разбиения отрезка интегрирования $[a;\, b]$.

В случаях, перечисленных выше, для нахождения значения интеграла приходится использовать методы приближенных вычислений, применяя ту или иную квадратурную формулу [2] из весьма широкого списка известных:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i), \qquad (1)$$

где α_i – числовые коэффициенты. В зависимости от способа задания коэффициентов возникают различные методы интегрирования (методы прямоугольников, трапеций, парабол и др.). Полученное таким образом значение определенного интеграла, очевидно, будет неточным. Погрешность результата

$$R(f,\Delta) = \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \right|$$

будет зависеть не только от выбора формулы и шага $\Delta = \max_i |x_{i+1} - x_i|$, $i = 0, \ldots, n-1$, но и от ряда априори известных характеристик, которыми обладает интегрируемая функция $f(x)$. Последние, как правило, связаны с непрерывностью функции, находящейся под знаком интеграла, а также от свойств ее производных некоторого порядка. Сказанное выше означает, что гарантируемые оценки точности результатов применения одной и той же квадратурной формулы для функций, обладающих разными свойствами, могут существенно различаться. Кроме того, в реальности вместо точных значений $f(x_i)$ могут быть доступны лишь их приближенные значения $f_h(x_i)$, задаваемые с ошибкой

$$\left|f(x_i)-f_h(x_i)\right|\le h,$$

обусловленной погрешностью вычислений или измерений.

Таким образом, на точность результата будут влиять:

1) степень гладкости функции $f(x)$;

2) погрешность используемого метода для функций этого класса при выбранном шаге Δ;

3) значение h максимальной возможной ошибки $f_h(x_i)$ относительно истинного значения $f(x_i)$.

Учету влияния совокупности всех трех указанных факторов на итоговую ошибку уделяется, по нашему мнению, недостаточное внимание в рамках курсов для обучающихся на инженерных направлениях подготовки. Для демонстрации влияния всех пунктов, перечисленных выше, остановимся лишь на одной квадратурной формуле – методе трапеций, что, с одной стороны, позволит изложить идею авторов, а с другой стороны, не будет утяжелять статью громоздкими математическими выкладками.

Пусть промежуток $[a;\ b]$ разбит на n частичных интервалов $[x_i;\ x_{i+1}]$ длины $\Delta=\dfrac{b-a}{n}$. Тогда для метода трапеций квадратурная формула (1) принимает вид:

$$I\left(f\right)=\int_a^b f(x)dx\approx\frac{\Delta}{2}\left(f(a)+f(b)\right)+\Delta\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)=I\left(f,\Delta\right). \qquad (2)$$

Классический подход, применяемый при получении верхней оценки погрешности $R(f,\ \Delta)$, состоит в следующих пунктах, представленных ниже [3].

Утверждение 1. Пусть подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, обладает непрерывной второй производной на интервале $(a;\ b)$ и имеет предельное значения $f''(a), f''(b)$.

Тогда, если $\max\limits_{[a,b]}\left|f''(x)\right|=M_2$, то

$$R_1(f,\Delta)\le\frac{M_2(b-a)}{12}\Delta^2. \qquad (3)$$

Доказательство. На промежутке $[x_i;\ x_{i+1}]$ для функции $f(x)$ составим интерполяционный многочлен Лагранжа для двух точек:

$$f(x) = P_1(x) + E_1(x) = f(x_i)\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f(x_{i+1})\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} + E_1(x),$$

где остаточный член $E_1(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_i)}{2!} f''(\theta_i)$, где $\theta_i \in [x_i;\ x_{i+1}]$. Тогда интеграл от $f(x)$ по промежутку $[x_i;\ x_{i+1}]$ принимает вид:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = f(x_i)\frac{(x - x_{i+1})^2}{2(x_i - x_{i+1})}\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} + f(x_{i+1})\frac{(x - x_i)^2}{2(x_{i+1} - x_i)}\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_1(x)dx =$$

$$= \left(0 + f(x_i)\frac{\Delta}{2}\right) + \left(f(x_{i+1})\frac{\Delta}{2} - 0\right) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1}) f''(c(x))}{2}dx.$$

Множитель $(x - x_i)\ (x - x_{i+1})$ не меняет знак на промежутке $[x_i;\ x_{i+1}]$, а производная $f''(c(x))$ по условию непрерывна. Поэтому по теореме о среднем значении для интеграла следует существование такого значения c_i, что

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{\Delta}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big) + f''(c_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2}dx.$$

Введем замену переменной $t = \frac{x - x_i}{\Delta}$ $(x = x_i + \Delta t)$ в последнем интеграле правой части:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{\Delta}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big) + \frac{f''(c_i)}{2}\int_0^1 \Delta t\Delta(t - 1)\Delta dt =$$

$$= \frac{\Delta}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big) + \frac{f''(c_1)\Delta^3}{2}\int_0^1 (t^2 - t)dt = \frac{\Delta}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big) - \frac{f''(c_i)\Delta^3}{12}.$$

Переходя к интегрированию по всему промежутку $[a;\ b]$, приходим к суммам в правой части:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\Delta}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big) - \frac{\Delta^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(c_i).$$

Первая сумма есть формула метода трапеций, вторая – погрешность. Поскольку $\Delta = \frac{b - a}{n}$, то последнюю можно представить в виде

$\frac{\Delta^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(c_i) = \frac{(b-a)\Delta^2}{12}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(c_i)\right)$, выражение в скобках есть среднее значение второй производной в узлах промежутка [a; b] и

$$R_1(f,\Delta) \le \frac{M_2(b-a)}{12}\Delta^2.$$

Утверждение доказано.

Таким образом, погрешность $R_1(f,\Delta) = O(\Delta^2)$. В этом случае говорят, что метод имеет двойной порядок точности относительно шага. Если же требуется иметь более высокий порядок точности, то следуют другие существующие квадратурные формулы. Заметим, что требование о непрерывности второй производной может быть ослаблено.

Получим верхнюю оценку точности метода трапеций при более слабых требованиях к функции $f(x)$.

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left|g(x_{i+1}) - g(x_i)\right| = \mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b g(\cdot)$, то говорят, что функция $g(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке [a; b].

Замечание 1. Функция, обладающая на [a; b] ограниченной вариацией, является ограниченной и обладает конечной производной почти всюду на этом промежутке.

Утверждение 2. Пусть подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a; b], ее первая производная имеет предельные значения $f'(a)$, $f'(b)$, а также ограниченную вариацию на промежутке [a; b]. Тогда, если $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right| = M_1$, то

$$R_2(f,\Delta) \le \left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\Delta\right| \le \frac{\Delta^2}{4}\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b f'(\cdot).$$

Доказательство.

Оценим погрешность метода трапеций на промежутке [x_i; x_{i+1}]:

$$r_i(f,\Delta) = \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)\frac{\Delta}{2} - f(x)dx\right| = \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)}{2} - \frac{2f(x)}{2}\right)dx\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\left(f(x_{i+1})-f(x)\right)-\left(f(x)-f(x_i)\right)\right)dx\right|.$$

Имеющаяся информация позволяет представить $f(x_i), f(x_{i+1})$ в виде суммы двух членов ряда Тейлора в окрестности точки x:

$$r_i(f,\Delta) = \frac{1}{2}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\left(f(x) + f'(\theta_{i+1})(x_{i+1}-x) - f(x)\right) - \left(f(x) - f(x) - f'(\theta_i)(x_i - x)\right)\right] dx\right|,$$

где $\theta_i \in (x_i; x)$, $\theta_{i+1} \in (x; x_{i+1})$ – константы. Тогда

$$r_i(f,\Delta) = \frac{1}{2}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f'(\theta_{i+1})(x_{i+1}-x) + f'(\theta_i)(x_i - x)\right] dx\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f'(\theta_{i+1})(x_{i+1}-x) - f'(\theta_i)(x_{i+1} - x) + f'(\theta_i)(x_{i+1} - 2x + x_i)\right] dx\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f'(\theta_{i+1})(x_{i+1}-x) - f'(\theta_i)(x_{i+1} - x)\right] dx\right| + \frac{1}{2}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\theta_i)(x_{i+1} - 2x + x_i)\, dx\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\mathop{\mathrm{V}}_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\cdot)\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x) dx\right| + \frac{1}{2}M_1\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - 2x + x_i)\, dx\right| \le \frac{\Delta^2}{4}\mathop{\mathrm{V}}_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x).$$

Переходя к оценке на всем промежутке $[a; b]$, с учетом того, что $\sum_{i=0}^{n-1}\mathop{\mathrm{V}}_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\cdot) = \mathop{\mathrm{V}}_{a}^{b} f'(\cdot)$, приходим к окончательному результату:

$$R_2(f,\Delta) \le \sum_{i=0}^{n-1} r_i(f,\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\Delta^2}{4}\mathop{\mathrm{V}}_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\cdot) \le \frac{\Delta^2}{4}\mathop{\mathrm{V}}_{a}^{b} f'(\cdot).$$

Утверждение доказано.

Замечание 2. Утверждение 2 показывает возможность получения оценки погрешности второго порядка относительно шага разбиения для метода трапеций при более слабых требованиях к подынтегральной функции $f(x)$, но с иной константой.

Утверждение 3. Пусть подынтегральная функция $f(x)$ обладает ограниченной вариацией на отрезке $[a; b]$: $\mathop{\mathrm{V}}_{a}^{b} f(\cdot) < +\infty$. Тогда

$$R_3(f,\Delta) \le \left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(f(x_i) + f(x_{i+1}))}{2}\Delta\right| \le \Delta\mathop{\mathrm{V}}_{a}^{b} f(x).$$

Доказательство. Оценим погрешность метода трапеций на промежутке $[x_i;\, x_{i+1}]$:

$$\left|\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx-\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)\frac{\Delta}{2}\right|=\left|\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{2f(x)}{2}-\frac{\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)}{2}\right)dx\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{f(x)-f(x_i)}{2}-\frac{f(x)-f(x_{i+1})}{2}\right)dx\right|\le\frac{1}{2}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left|f(x)-f(x_i)\right|dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left|f(x)-f(x_{i+1})\right|dx\le\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\mathop{\mathrm{V}}\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(\cdot)dx=\Delta\mathop{\mathrm{V}}\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(\cdot).$$

Переходя к оценке на всем промежутке $[a;\, b]$, приходим к окончательному результату:

$$R_3(f,\Delta)\le\left|\int\limits_a^b f(x)dx-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)}{2}\Delta\right|\le\Delta\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b f(\cdot).$$

Утверждение доказано.

Замечание 3. Метод трапеций для подынтегральной функции ограниченной вариации обладает более низким порядком гарантированной оценки точности относительно шага Δ по сравнению с ситуацией, когда она обладает более высокой степенью гладкости. Зато в этом случае он позволяет получить такую оценку даже для функций, имеющих счетное число точек разрыва.

Замечание 4. Аналогичные результаты приведены в монографии [4], однако они получены с использованием тории непрерывных модулей гладкости, которая является довольно сложной для восприятия студентами технических ВУЗов.

Как уже отмечалось выше, значения функции $f(x_i)$ могут быть заданы с погрешностью $|f(x_i) - f_h(x_i)| \le h$. Известно, что в отличие от задачи численного дифференцирования, задача численного интегрирования является корректной. Поэтому погрешность h вносит лишь дополнительную добавку в точность приближенно вычисленного интеграла. Величина этой добавки стремится к нулю вместе с h. Следующее практически очевидное утверждение подтверждает сказанное выше.

Утверждение 4. Пусть приближенные значения функции $f_h(x)$ в узлах разбиения удовлетворяют условию $|f(x_i) - f_h(x_i)| \le h$, а

$$\frac{\Delta}{2}\left(f_h(a)+f_h(b)\right)+\Delta\sum_{i=1}^{n-1}f_h(x_i)=I_h\left(f,\Delta\right).$$

Тогда погрешность при любой априорной информации о подынтегральной функции

$$\left|I-I_h\left(f,\Delta\right)\right|\le R\ \left(f,\Delta\right)+O(h),\quad k=1,2,3.$$

Доказательство.

$$\left|I_h(f,\Delta)-I\right| \le \left|I_h(f,\Delta)-I(f,\Delta)\right| + \left|I-I(f,\Delta)\right| \le$$
$$\le \left|\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\Delta - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f_h(x_i)+f_h(x_{i+1})}{2}\Delta\right| +$$
$$+R(f,\Delta) \le \left|\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)-f_h(x_i)}{2}\Delta + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_{i+1})-f_h(x_{i+1})}{2}\Delta\right| + R_{ê}(f,\Delta) \le$$
$$\le h(b-a) + R_{ê}(f,\Delta).$$

Утверждение доказано.

Замечание 5. Использование априорной информации об ограниченности вариации производных подынтегральной функции определенного порядка позволяет улучшить оценки точности и других известных методов приближенного вычисления определенных интегралов.

Список источников

1. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М. : Наука, 1978. 224 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. СПб. : Лаборатория знаний, 2020. 636 с.
3. Мэтьюз, Джон. Г., Финк Куртис Д. Численные методы: использование MATLAB / под ред. Ю. В. Козаченко ; пер. с англ. Л. Ф. Козаченко. 3-е изд. М. : Издательский дом «Вильямс», 2001. 720 с.
4. Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости / пер. с болг. Ю. А. Кузнецова, К. И. Осколкова. М. : Мир, 1988. 328 с.