МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Уральский государственный лесотехнический университет»
(УГЛТУ)

МАТЕМАТИКА
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Екатеринбург
2023

УДК 519.2
ББК 22.171
М34

Рецензенты:

кафедра вычислительной математики и компьютерных наук УрФУ, заведующий кафедрой д-р физ.-мат. наук, профессор *В. Г. Пименов*;

А. В. Ким, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник УрФУ

Авторы: А. Ю. Вдовин, И. Н. Демидова, Л. А. Золкина,
В. М. Мухина, С. С. Рублева, С. Н. Удинцева,
Е. С. Федоровских

М34 **Математика. Теория вероятностей** : учебное пособие / А. Ю. Вдовин, И. Н. Демидова, Л. А. Золкина [и др.] ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский государственный лесотехнический университет. – Екатеринбург : УГЛТУ, 2023. – 105 с.

ISBN 978-5-94984-872-2

Данное пособие адресовано студентам всех направлений подготовки, реализуемых в УГЛТУ и предусматривающих изучение теории вероятностей на втором году обучения. Его содержание соответствует принятым в вузе учебным программам и включает следующие разделы: основные понятия и теоремы теории вероятностей; повторные независимые испытания; важнейшие законы распределения, основные числовые характеристики случайных величин и меры их связи; начала регрессионного анализа. Приводятся задачи для самостоятельного решения, способствующего закреплению изученных вероятностных методов.

Издается по решению редакционно-издательского совета Уральского государственного лесотехнического университета.

Предназначено для обучающихся, осваивающих образовательные программы по всем направлениям.

УДК 519.2
ББК 22.171

ISBN 978-5-94984-872-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие адресовано студентам второго курса всех направлений подготовки очной и заочной форм обучения Уральского государственного лесотехнического университета и является логическим продолжением книги «Математика. Учебно-методическое пособие для обучающихся первых курсов Уральского государственного лесотехнического университета».

Его содержание соответствует принятым в вузах учебным программам и включает следующие разделы: основные понятия и теоремы теории вероятностей, повторные независимые испытания, случайные величины и их числовые характеристики, важнейшие законы распределения, основные характеристики меры связи, начала регрессионного анализа. При формировании пособия использовались библиографические источники [1–7].

Каждая из глав содержит необходимую теоретическую информацию, а также разбор примеров использования основных методов решения типовых задач с подробными разъяснениями.

Приводится разработанный на кафедре высшей математики УГЛТУ банк задач, позволяющий формировать индивидуальные задания для самостоятельного решения и закрепления изученных студентами вероятностных методов. Тщательная самостоятельная проработка материала предлагаемого пособия позволит обучающимся овладеть необходимым минимумом теоретических знаний и практических навыков, необходимых для освоения курса.

Пособие рекомендуется обучающимся очной и заочной форм обучения для подготовки к промежуточным и итоговым формам аттестации по соответствующему курсу.

Авторы выражают глубокую благодарность специалисту по учебно-методической работе кафедры высшей математики УГЛТУ Наталье Николаевне Сычевой за помощь в подготовке пособия.

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Классическое определение вероятности

Основными в теории вероятностей являются понятия опыта и события.

Под ***опытом*** подразумевается выполнение совокупности определенных условий. Малейшее их изменение приводит к необходимости рассмотрения уже другого опыта.

Событием называется любой исход опыта. Различают элементарные и сложные события. ***Элементарными*** считаются те события, которые могут произойти в результате опыта и не могут быть представлены с помощью более простых. В противном случае событие называется ***сложным***.

Пример. На поверхности Земли производится бросок куба, изготовленного из однородного твердого материала, на твердую горизонтальную поверхность (перпендикулярную силовым линиям земного притяжения). При этом каждая грань куба имеет свой номер от единицы до шести.

В этом опыте элементарными являются события, состоящие в появлении при осуществленном броске верхних граней с номерами (числами выпавших очков) от единицы до шести. Событие, состоящее в том, что число выпавших очков окажется четным, будет сложным. Заметим, что если в описании опыта заменить требование твердой поверхности на мягкую глину, то мы получили бы совсем другой опыт с другими возможными исходами, например кубик мог встать на ребро.

Если количество элементарных событий в опыте конечно и равно n, то их принято обозначать $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, а их совокупность называть ***полной группой*** событий и обозначать $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.

Событие Ω, которое обязательно произойдет в результате опыта, называется ***достоверным***. Событие, которое в результате опыта произойти не может, называется ***невозможным*** и обозначается $\varnothing$.

В рассматриваемом примере событие, состоящее в том, что число выпавших очков окажется строго меньшим 7, будет достоверным, а событие, состоящее в том, что число выпавших очков будет делиться на 7 нацело, невозможным.

Наибольший интерес теории вероятностей связан с событиями, не являющимися ни достоверными, ни невозможными. Такие события называются ***случайными,*** их принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots$.

Например, событие A, состоящее в том, что число выпавших очков окажется четным, будет случайным.

При изучении свойств случайных событий важным моментом является сравнение степени достоверности их осуществления. Для этого удобно рассматривать эту характеристику как числовую функцию $P(A)$, аргументом которой является событие. При этом полагается, что $P(\varnothing)=0\le P(A)\le 1=P(\Omega)$. Такая функция и называется ***вероятностью события A***.

Развитие понятия вероятности проходило в несколько этапов. Рассмотрим первый из них: ***классическое определение вероятности.***

В этом случае опыт предполагает выполнение двух существенных ограничений:

1) число элементарных событий в полной группе конечно: $\omega_1,\omega_2,\ \dots\ ,\omega_n$;

2) все элементарные события равновероятны, т. е. для любых i, j $P(\omega_i)=P(\omega_j)$.

Тогда

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n},}$$

где m – число элементарных событий из полной группы, благоприятствующих наступлению события A.

Задача 1. В рассмотренном выше опыте определить вероятности:

а) того, что число выпавших очков равно 5;

б) число выпавших очков кратно 3.

Решение. Пусть ω_i = {число выпавших очков равно i}, следовательно, число элементарных событий равно числу граней куба, т. е. $n=6$. Ввиду условия однородности материала, из которого изготовлен куб, выпадение любого возможного числа очков равновероятно. Значит, может быть использовано классическое определение вероятности.

Для ответа на вопрос а) требуется найти вероятность выпадения пяти очков. При этом m = 1, значит, $P(\omega_5)=\dfrac{1}{6}$.

Для ответа на вопрос б) требуется найти вероятность события A = {число выпавших очков кратно 3}, наступлению которого благоприятствуют элементарные события ω_3 и ω_6 .

Значит, в этом случае $m = 2$ и $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Замечание. Для вычисления вероятности случайного события в случае выполнения условий классического определения достаточно знать числа n и m.

В некоторых ситуациях для их поиска эффективны комбинаторные формулы.

Сведения из комбинаторики

Комбинаторика – область математики, изучающая способы подсчета числа удовлетворяющих определенным условиям комбинаций, которые можно получить из множества, состоящего из конечного числа различных элементов.

Мы рассмотрим три простейших вида комбинаций: перестановки, размещения и сочетания.

Определение 1. ***Перестановками*** из $\boldsymbol{n}$ элементов называются комбинации, содержащие все элементы множества и отличающиеся друг от друга лишь порядком элементов.

Число возможных перестановок элементов множества, состоящего из n элементов, обозначается $\boldsymbol{P_n}$. Найдем его. Первый элемент может быть выбран n способами, второй – $(n-1)$, третий – $(n-2)$, последний – единственным.

Значит, $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot \ \ldots \ \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Определение 2. ***Размещениями*** из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ называются комбинации, которые содержат ровно m элементов, выбранных из n имеющихся, и отличаются одна от другой либо составом, либо порядком их расположения.

Число возможных размещений из имеющихся n элементов по m обозначается $\boldsymbol{A_n^m}$. Найдем его. Первый элемент может быть выбран n способами, второй – $(n-1)$, последний – $(n-m+1)$. Значит, число размещений $A_n^m = n \cdot (n-1) \times \ldots \times (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Определение 3. ***Сочетаниями*** из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ называются комбинации, которые содержат ровно m элементов из n имеющихся и различаются одна от другой только составом. Число возможных сочетаний из имеющихся n элементов по m обозначается $\boldsymbol{C_n^m}$. Найдем его. Нетрудно заметить, что число сочетаний меньше аналогичного числа размещений в $m!$ раз. Значит, $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Отсюда, кстати, следует, что $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Задача 2. Из комплекта костей домино наудачу извлекаются семь. Найти вероятность, что среди них окажутся ровно шесть дублей.

Решение. Опыт состоит в случайном извлечении семи костей из 28, имеющихся в наборе. Пусть A = {извлечено шесть дублей и один не дубль}. По условию задачи важен лишь состав извлеченных семи элементов. Следовательно, число возможных элементарных исходов $n = C_{28}^7 = \dfrac{28!}{7!21!}$ является конечным. Слово «наудачу» означает, что все они равновероятны, а значит, для определения $P(A)$ может быть использовано классическое определение вероятности. Осталось определить число m элементарных исходов, благоприятствующих наступлению A. Шестерка дублей, очевидно, может быть выбрана $C_7^6 = 7$ способами, а оставшаяся седьмая кость – $(28-7)=21$ способом. Значит, $m = 7\cdot 21 = 147$, а $P(A) = \dfrac{m}{n} = 147 : \left(\dfrac{28!}{7!21!}\right) = \dfrac{147\cdot 7!}{28\cdot 27 ... 22} \approx 0{,}000124$.

2. Геометрическая вероятность

В классическом определении вероятности рассматривается полная группа, состоящая из конечного числа равновозможных событий. На практике число возможных исходов опыта может оказаться бесконечным. Например, это могут быть результаты измерений температуры, времени и т. д. В этих случаях классическое определение вероятности неприменимо. В ситуации, когда все элементарные исходы являются равновероятными, для нахождения вероятности случайного события используют подход, рассматривающий ее как меру. Мы не станем приводить строгое определение этого понятия, скажем лишь, что хорошо известны меры измерения длины, площади и объема. Поскольку все меры обладают общими свойствами, то события удобно интерпретировать как геометрические объекты, а их длины, площади или объемы отождествлять с вероятностями событий. Если возможность случайного появления точки внутри некоторой выбранной области (на прямой, плоскости или в пространстве) определяется не положением этой области и ее границами, а только ее мерой (длиной, площадью или объемом), то вероятность этого события определяется как отношение ее меры к мере всей области, в которой может появляться данная точка. Для определенности ограничимся двумерным случаем (диаграмма Эйлера – Венна).

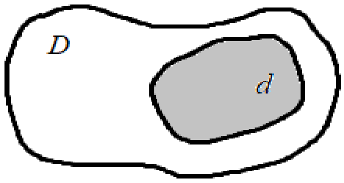


Рис. 1

Пусть на плоскости задана некоторая область D площади $mes\ D$, которая отождествляется с достоверным событием Ω, и содержащаяся в ней другая область d площади $mes\ d$, которую станем отождествлять со случайным событием A (рис. 1). В область D наудачу бросается точка. При этом предполагается, что точка может попасть в любую точку области D, и вероятность попасть в какую-либо часть области D пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения и формы. Тогда вероятность события A считается равной вероятности попадания в область d наудачу брошенной в область D точки:

$$\boxed{P(A)=\frac{mes\ d}{mes\ D}.}$$

Это определение вероятности называют ***геометрическим***.

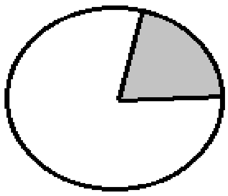


Рис. 2

Задача. Круглая мишень вращается с постоянной угловой скоростью. Пятая часть мишени (рис. 2) окрашена, а остальная – нет. По мишени производится выстрел так, что попадание в мишень – событие достоверное. Требуется определить вероятность попадания в окрашенный сектор мишени, если попадания в любую точку мишени равновероятны.

Решение. Пусть A = {выстрел попал в окрашенный серым сектор}. Поскольку попадания в любую точку мишени равновероятны, то вероятность события A равна отношению площади окрашенной части ко всей площади мишени: $P(A)=\dfrac{1}{5}$.

3. Классификация событий и действия над ними. Вероятности суммы и произведения двух событий

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении в результате испытания всех перемножаемых событий. Произведение событий будем обозначать знаком «$\bullet$».

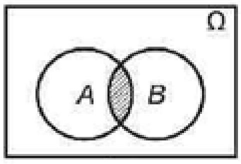


Рис. 3

Представленной геометрической интерпретации произведения событий $A \bullet B$ **(и *A* и *B*)** на диаграмме Эйлера – Венна (рис. 3) соответствует серая область.

Случайные события называются ***несовместными*** в данном опыте, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременному наступлению событий *A* и *B*, в противном случае события называются ***совместными***.

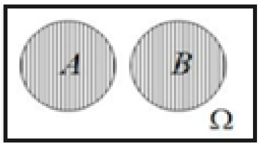


Рис. 4

На рис. 3 события *A* и *B* совместные, а на рис. 4 – несовместные.

Утверждение 1. Произведение несовместных событий (см. рис. 4) есть событие невозможное, в этом случае вероятность $P(A \cdot B) = P(\varnothing) = 0$.

Суммой событий *A* и *B* называется событие, состоящее в наступлении в результате опыта хотя бы одного из них (**или *A*, или *B***). Сумму событий будем обозначать знаком «+». На рис. 4 с помощью диаграммы Эйлера – Венна представлена геометрическая интерпретация суммы несовместных, а на рис. 5 – совместных событий. Сумме событий *A* + *B* соответствуют серые области.

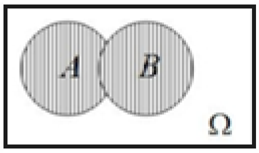


Рис. 5

Противоположным событию *A* называется несовместное с *A* событие $\bar{A}$ (читается «не A»), если в результате опыта одно из них должно обязательно произойти, т. е. ($A + \bar{A} = \Omega$). Событию $\bar{A}$ на рис. 6 соответствует заштрихованная область.

Утверждение 2. Вероятность суммы двух событий в общем случае равна

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).}$$

Это иллюстрирует рис. 5.

Следствие 1. Из утверждений 1, 2 следует, что если A и B несовместны, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Это иллюстрирует рис. 4.

Следствие 2. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна

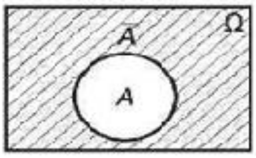


Рис. 6

$$P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=P(\Omega)=1.$$

Это иллюстрирует рис. 6.

Символом $P(A/B)$ обозначается вероятность наступления события A при условии, что произошло событие B. События A и B называются ***независимыми***, если $P(A/B)=P(A)$, и ***зависимыми*** в противном случае.

Утверждение 3. Вероятность произведения двух событий A, B равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что произошло первое:

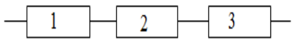
$$\boxed{P(A\cdot B)=P(B\cdot A)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).}$$

Следствие. Если события A и B независимы, то

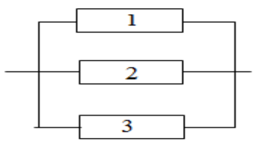
$$P(A\cdot B)=P(B\cdot A)=P(A)\cdot P(B).$$

Задача 1. Имеются две электрические цепи:

а) последовательная



б) параллельная



Пусть событие A_i = {элемент с номером i вышел из строя}, событие B = {произошел разрыв цепи}. Выразить события B и $\overline{B}$ с помощью событий A_i для обеих цепей.

Решение. а) В случае последовательного соединения разрыв произойдет, когда хотя бы один элемент выйдет из строя: $B=A_1+A_2+A_3$, $\overline{B}$ – означает, что схема не вышла из строя (все 3 элемента работают): $\overline{B}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3$.

б) В случае параллельного соединения разрыв цепи произойдет, когда все три элемента выйдут из строя: $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, цепь будет работать, если будет работать хотя бы один из элементов: $\overline{B} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$.

Задача 2. Два стрелка стреляют по мишени. Первый стрелок поражает мишень с вероятностью 0,9, второй – с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена.

Решение. Обозначим через A случайное событие, состоящее в том, что в мишень попадает первый стрелок, а через B – случайное событие, состоящее в том, что в мишень попадает второй стрелок. Тогда событие $C = A + B$ означает, что мишень поражена (случилось хотя бы одно попадание), а событие $A \cdot B$ означает, что в мишень попали оба стрелка. По условию $P(A) = 0,9$ и $P(B) = 0,8$, поскольку события A и B независимы, то в силу следствия из утверждения 3

$$P\left(A \cdot B\right) = P(A) \cdot P(B) = 0,9 \cdot 0,8 = 0,72 .$$

Воспользовавшись утверждением 2, находим:

$$P\left(C\right) = P\left(A + B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,9 + 0,8 - 0,72 = 0,98 .$$

Другой вариант решения:
вероятность того, что ни один стрелок не попал, равна:

$$P\left(\overline{C}\right) = P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{B}\right),$$

поскольку $P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0,9 = 0,1;$ $P\left(\overline{B}\right) = 1 - 0,8 = 0,2,$ поэтому в силу следствия 2

$$P\left(C\right) = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - P\left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{B}\right) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 = 0,98. .$$

Ответ: 0,98.

Задача 3. Опыт состоит в подбрасывании двух игральных костей. Одна из игральных костей окрашена в синий цвет, другая – в красный. Найти вероятность того, что на синей игральной кости выпадет тройка, а на красной игральной кости выпадет четверка.

Решение. а) Обозначим случайное событие A = {на синей игральной кости выпадает число 3}, а случайное событие B = {на красной игральной кости выпадает число 4}, события C = {на синей игральной кости выпадает число 3, и на красной игральной кости выпадает число 4}. Вероятности $P(A)=P(B)=\frac{1}{6}$, поскольку события A и B являются независимыми, то вероятность события $C=A\cdot B$ равна:

$$P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}.$$

б) Задача может быть решена и с использованием классического определения вероятности (почувствуйте разницу). Рассмотрим таблицу, в которой представлены все 36 возможных равновероятных вариантов выпадения пар чисел при подбрасывании двух игральных костей.

Красная кость	Синяя кость					
	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Наступлению события C соответствует клетка с результатом 4,3. Следовательно, m = 1, n = 36, а вероятность события C равна: $P(C)=\frac{m}{n}=\frac{1}{36}$.

4. Формулы полной вероятности и Байеса

Отметим два важных следствия из формул вероятности суммы и произведения событий, рассмотренных ранее.

Пусть требуется найти вероятность некоторого события A, осуществление которого возможно лишь совместно с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, которые принято называть ***гипотезами***.

Теорема 1. Вероятность события A равна сумме произведений вероятности каждой гипотезы на условную вероятность события A при условии наступления этой гипотезы:

$$\boxed{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i).}$$

Эта формула называется ***формулой полной вероятности***.

Доказательство. Так как гипотезы $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несовместны, то событие A может одновременно произойти только с одной из этих гипотез, значит (рис. 7):

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \ldots + H_n \cdot A,$$

где события также несовместны.

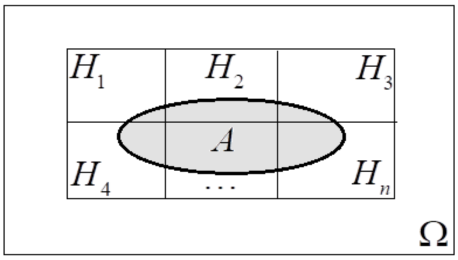


Рис. 7

Применяя к последнему равенству формулу сложения для случая несовместных событий, получаем:

$$P(A) = P\left(H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \ldots + H_n \cdot A\right) =$$

$$= P\left(H_1 \cdot A\right) + P\left(H_2 \cdot A\right) + \ldots + P\left(H_n \cdot A\right) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i \cdot A).$$

Используя для нахождения $P(H_i \cdot A)$ формулу вероятности произведения зависимых событий, имеем: $P(H_i \cdot A) = P(H_i) \cdot P(A / H_i)$.

Значит, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)$. Что и требовалось доказать.

Задача 1. Имеются три партии деталей, насчитывающих соответственно 20, 30 и 50 шт. Вероятности того, что деталь проработает заданное время, равны для этих партий 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что наудачу выбранная деталь проработает заданное время?

Решение. Пусть событие A = {наудачу взятая деталь проработала заданное время}. В качестве гипотез рассмотрим события:

H_i = {деталь выбрана из i-й партии}, где $i \in \{1, 2, 3\}$.

Найдем вероятности этих гипотез. Всего деталей 100, а первая партия насчитывает 20, по классической схеме подсчета вероятностей имеем: $P(H_1) = \frac{20}{100} = 0,2$.

Аналогично $P(H_2) = \frac{30}{100} = 0,3$ и $P(H_3) = \frac{50}{100} = 0,5$.

Из условия задачи известны вероятности $P(A / H_1) = 0,7$, $P(A / H_2) = 0,8$ и $P(A / H_3) = 0,9$.

По формуле полной вероятности найдем вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + P(H_3) \cdot P(A / H_3) =$$
$$= 0,2 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,83.$$

Пусть в результате опыта событие A произошло. Чему равны вероятности реализации каждой из гипотез при условии осуществления события A? Речь идет о том, чтобы найти условные вероятности $P(H_i / A)$ для каждой гипотезы. Для ответа на поставленный вопрос будет использован следующий результат.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для $k=1, ..., n$

$$\boxed{P(H_k / A) = \frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)} = \frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{P(A)}.}$$

Доказательство. Поскольку $P(A\cdot H_k) = P(H_k \cdot A)$, то согласно утверждению 3 о вероятности произведения зависимых событий имеем:

$$P(A)\cdot P(H_k / A) = P(H_k)\cdot P(A/H_k).$$

Выражая $P(H_k / A)$ из последнего равенства, получаем:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{P(A)}$$

Что и требовалось доказать.

Последняя формула называется ***формулой Байеса,*** или ***теоремой гипотез***.

Задача 2. Пусть вероятность брака у первого рабочего 0,9, у второго рабочего – 0,5, а у третьего – 0,2. Первый изготовил 800 деталей, второй – 600, а третий – 900. На контроль берется случайная деталь, и она оказывается бракованной. Чему равна вероятность, что эту деталь изготовил второй рабочий?

Решение. Пусть событие A = {взятая деталь оказалась бракованной}, событие H_i = {деталь изготовлена i-м рабочим}.

Тогда $P(H_1) = \dfrac{800}{2300}$; $P(H_2) = \dfrac{600}{2300}$; $P(H_3) = \dfrac{900}{2300}$, а $P(A/H_1) = 0,9$; $P(A/H_2) = 0,5$; $P(A/H_3) = 0,2$.

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{8}{23}\cdot 0,9 + \frac{6}{23}\cdot 0,5 + \frac{9}{23}\cdot 0,2 = \frac{12}{23}.$$

По формуле Байеса

$$P\left(H_2 / A\right) = \frac{P\left(H_2\right)\cdot P\left(A/H_2\right)}{P\left(A\right)} = \frac{\frac{6}{23}\cdot 0,5}{\frac{12}{23}} = 0,25.$$

Задача 3. Пусть выполнены условия задачи 1, и наудачу выбранная деталь проработала заданное время. Какова вероятность того, что она взята из первой партии?

Решение. Из условия задачи следует, что наудачу выбранная деталь проработала заданное время, т. е. событие A произошло. Требуется определить вероятность $P(H_1/A)$. Вероятности событий $A, H_1, A/H_1$ уже найдены в задаче 1.

Осталось воспользоваться формулой Байеса:

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P\left(H_1\right)\cdot P\left(A/H_1\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0,2\cdot 0,7}{0,83}\approx 0,1687.$$

Задача 4. Пациента обследуют на наличие заболевания, которое имеется у 1 % жителей страны. Используемый тест дает верные результаты в 95 % случаев. Какова вероятность, что человек, тест которого оказался положительным, действительно болен?

Решение. На первый взгляд кажется, что искомая вероятность должна быть достаточно высока. Найдем ее реальное значение. Пусть A = {получение теста с результатом о наличии заболевания}.

Рассмотрим гипотезы: H_1 = {пациент болен}, тогда $P(H_2)$ = 0,01, и H_2 = {пациент здоров}, при этом $P(H_2)$ = 0,99.

Вероятность определения тестом заболевания у больного $P(A/H_1)$ = = 0,95, а у здорового – $P(A/H_2)$ = 0,05.

Тогда вероятность получения теста с результатом о наличии заболевания

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)=0,01\cdot 0,95+0,99\cdot 0,05=0,059.$$

Теперь вероятность безошибочного определения тестом заболевания у больного может быть получена по формуле Байеса:

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P\left(H_1\right)\cdot P\left(A/H_1\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0,01\cdot 0,95}{0,059}\approx 0,161.$$

Таким образом, верная диагностика заболевания составляет всего лишь 16,1 %. Так отличается строгая математическая оценка от интуитивной.

5. Повторные независимые испытания

5.1. Формула Бернулли

Рассмотрим часто встречающиеся на практике вероятностные задачи, которые характеризуются следующими тремя условиями:

1) условия опыта воспроизводятся конечное число раз, которое принято обозначать n;

2) в результате каждого опыта могут реализоваться лишь некоторое событие A и противоположное ему $\overline{A}$, которые принято условно называть успехом и неуспехом;

3) предполагается, что исходы опытов являются независимыми, а вероятность успеха во всех опытах постоянна и не равна 0, ее принято обозначать p, а вероятность неуспеха $q = 1 - p$.

Такая последовательность опытов называется схемой Бернулли.

Рассмотрим задачу определения $P_n(m)$ – вероятности того, что в n опытах произойдет ровно m успехов и, соответственно, $n - m$ неуспехов.

Теорема 1. Справедливо равенство

$$\boxed{P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m},}$$

которое носит название ***формула Бернулли***.

Доказательство. Любой благоприятный результат реализации схемы Бернулли можно трактовать как произведение n событий, состоящее из m событий A и $n - m$ событий $\overline{A}$. Вероятность каждого такого события ввиду независимости исходов в разных опытах равна $p^m q^{n-m}$. Все благоприятные результаты реализации схемы попарно несовместны, их количество равно C_n^m – числу способов распределения m успехов среди n проведенных испытаний.

Следовательно, искомая вероятность $P_n(m)$ равна сумме C_n^m одинаковых (равных $p^m q^{n-m}$) слагаемых, т. е. $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Что и требовалось доказать.

Замечание 1.1. Формула Бернулли дает точный результат при вычислении с ее помощью значения $P_n(m)$ для любых *n, m, p*.

Следствие. ***Наиболее вероятное число*** успехов m_* в n испытаниях Бернулли удовлетворяет неравенству

$$\boxed{np - q \le m_* \le np + p.}$$

Доказательство. Если m_* – наиболее вероятное число успехов, то

$$\frac{P_n(m_*+1)}{P_n(m_*)} \le 1 \text{ и } \frac{P_n(m_*-1)}{P_n(m_*)} \le 1.$$

Из первого неравенства следует, что

$$\frac{C_n^{m_*+1} p^{m_*+1} q^{n-m_*-1}}{C_n^{m_*} p^{m_*} q^{n-m_*}} = \frac{(n-m_*)p}{(m_*+1)q} \le 1 \Rightarrow np - m_* p \le m_* q + q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow np - q \le m_*(q+p) \Rightarrow np - q \le m_*,$$

поскольку $q + p = P(\bar{A}) + P(A) = 1$.

Аналогично из второго неравенства следует (проверьте самостоятельно), что $m_*(q+p) \le np + p \Rightarrow m_* \le np + p$.

И окончательно $np - q \le m_* \le np + p$.

Что и требовалось доказать.

Замечание 1.2. Поскольку длина найденного числового отрезка равна $(np+p)-(np-q) = p+q = 1$, то всегда найдется по крайней мере одно целое число целое m_*, ему принадлежащее. Если же $np + p$ – целое число, то таких значений окажется два – $m_*^{(1)} = np - q$; $m_*^{(2)} = np + p$.

5.2. Формула Пуассона

В случае, когда число повторных испытаний n велико, нахождение $P_n(m)$ по формуле Бернулли сопряжено с вычислительными проблемами. Пусть, например, n = 100, тогда величина n! оканчивается 21 нулем, поэтому не воспринимается большинством вычислительных устройств. В то же время величина $p^m q^{n-m}$ крайне мала и также ими не воспринимается. Однако их произведение есть обычное число из отрезка [0; 1]. Поэтому при больших значениях n для определения $P_n(m)$ используют более простые для вычислений приближенные формулы. Они называются ***асимптотическими***. Одна из них называется ***формулой Пуассона,*** или ***законом редких событий***.

Теорема 2. Будем предполагать, что $\lim\limits_{n\to\infty} np = \lambda = \text{const}$, тогда вероятность появления ровно m успехов в n повторных испытаниях удовлетворяет предельному равенству

$$\boxed{P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.}$$

Доказательство. В формуле Бернулли заменим p на $\dfrac{\lambda}{n}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m!}\underbrace{n(n-1)\ldots(n-m+1)}_{m\ \text{штук}}\frac{\lambda^m}{n^m}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!}\lim_{n\to\infty} \underbrace{1\cdot\frac{(n-1)}{n}\ldots\frac{(n-m+1)}{n}}_{m\ \text{штук}}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \overset{(1)}{\approx} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

(1) Предел произведения равен произведению пределов. Пределы m первых и предпоследнего множителя равны 1. Согласно второму замечательному пределу $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$, из этого следует справедливость утверждения теоремы.

Замечание 2.1. Ошибка, возникающая при использовании для нахождения $P_n(m)$ приближенного равенства $P_n(m) \approx \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, удовлетворяет неравенству $\left|P_n(m) - \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\right| \le \dfrac{2\lambda^2}{n}$.

Замечание 2.2. Вообще говоря, требование теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} np = \lambda = const$ влечет стремление $p \to 0$ при $n \to \infty$, что противоречит третьему условию схемы Бернулли, согласно которому вероятность успеха в испытании p постоянна и не равна 0. Однако если вероятность успеха p мала, а n велико, то при $\lambda = np \le 10$ погрешность асимптотической формулы $\left|P_n(m) - \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\right| \le \dfrac{2\lambda^2}{n}$ становится незначительной.

5.3. Локальная формула Муавра – Лапласа

Рассмотрим еще одну асимптотическую формулу для вычисления значения $P_n(m)$, если значение n велико.

Теорема 3 (***локальная Муавра – Лапласа***). Если вероятность наступления случайного события A в схеме Бернулли постоянна, то при достаточно больших значениях n (при $np > 10$)

$$\boxed{P_n(m) \approx \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}},}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – ***функция Гаусса***, а $x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Замечание 3.1. Табличные значения функции Гаусса $\varphi(x)$ (прил. 1) в большинстве книг по теории вероятностей приводятся только на промежутке $x \in [0;5]$, поскольку она четная. При $x > 5$ ее значения практически равны 0 (график $y = \varphi(x)$ приведен на рис. 8).

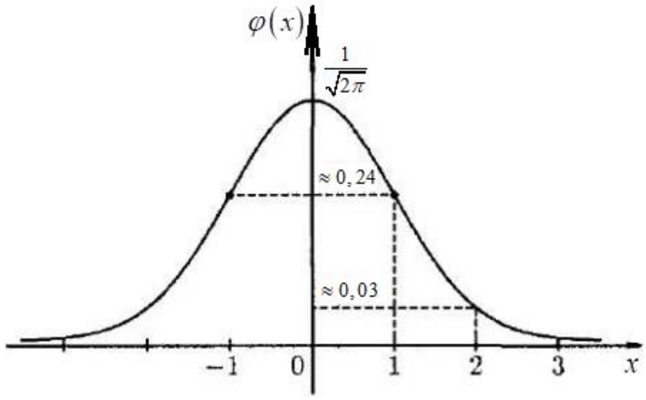


Рис. 8

Замечание 3.2. Пусть $0 < p < 1$, $|x_m| = \left|\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right| \le C$, где C – любая постоянная, тогда существует постоянная C_m такая, что ошибка локальной формулы Лапласа удовлетворяет неравенству

$$P_n(m) - \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} \le C_m \frac{\varphi(x_m)}{n\sqrt{pq}} .$$

Резюме: вероятность $P_n(m)$ того, что в n опытах произойдет ровно m успехов, следует находить с помощью:

- формулы Бернулли при $n < 20$;
- формулы Пуассона при $n > 20$ и $np < 10$;
- локальной формулы Лапласа при $n > 20$ и $np > 10$.

Задача 1. Найти вероятность того, что при 10 бросках монеты орел выпадет 3 раза.

Решение. Поскольку число испытаний *n* = 10, используем формулу Бернулли $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$. В данном случае *m* = 3 – количество испытаний, в которых должен появиться орел; $p=\frac{1}{2}$ – вероятность появления орла в каждом испытании; $q=1-p=\frac{1}{2}$ – вероятность появления решки в каждом испытании.

Таким образом, вероятность того, что при 10 бросках монеты орел выпадет ровно 3 раза $P_{10}(3)=C_{10}^3 p^3 q^{10-3}=120\cdot\frac{1}{2^{10}}\approx 0,1171875.$

Задача 2. Вероятность того, что при броске мяча баскетболист попадает в корзину, равна 0,3. Найти наивероятнейшее число попаданий при 8 бросках и его вероятность.

Решение. Для оценки наивероятнейшего числа попаданий используем двойное неравенство $np-q\le m_*\le np+p$. В данном случае бросков всего 8, значит *n* = 8; вероятность успеха (попадания при каждом броске) равна *p* = 0,3; вероятность промаха при каждом броске *q* = 1 – *p* = 0,7.

Таким образом, наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках находится в пределах:

$$8\cdot 0,3-0,7\le m_*\le 8\cdot 0,3+0,3,$$

$$1,7\le m_*\le 2,7$$

Поскольку границы – дробные числа, то существует единственное наивероятнейшее значение m_* и оно равно 2.

Используя формулу Бернулли, вычислим вероятность того, что при 8 бросках будет ровно 2 попадания:

$$P_8(2)=C_8^2(0,3)^2(0,7)^6=\frac{8!}{2!6!}(0,3)^2(0,7)^6=0,29647548.$$

Ответ: наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках равно двум, соответствующая вероятность $P_8(2)=0,29647548$.

Задача 3. Численность студентов на факультете составляет 1825 чел. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?

Решение. Поскольку вероятность p того, что день рождения студента 1 сентября, мала и равна $\frac{1}{365}$, n = 1825 – велико, а $\lambda = np = \frac{1825}{365} = 5 < 10$, то применяем формулу Пуассона $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ и получаем $P_{1825}(4) \approx \frac{e^{-5}5^4}{4!} = 0{,}1755$.

Задача 4. Производство электронно-лучевых трубок дает в среднем 12 % брака. Определить вероятность наличия ровно 215 годных трубок в партии из 250 шт.

Решение. Станем считать успехом годность трубки, тогда $p = 1 - 0{,}12 = 0{,}88;\, q = 0{,}12$.

По условию задачи n = 250, m = 215, тогда np = 250·0,88 = 220 > 10, поэтому воспользуемся локальной теоремой Муавра – Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}},$$

где $x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Итак,

$$x_m = \frac{215 - 220}{\sqrt{250 \cdot 0{,}88 \cdot 0{,}12}} \approx -0{,}9731.$$

В силу четности φ (x) по таблице найдем значение φ (0,9731) = = 0,248.

Отсюда

$$P_{250}(215) = \frac{0{,}248}{\sqrt{250 \cdot 0{,}88 \cdot 0{,}12}} = 0{,}04827.$$

6. Нахождение вероятности попадания числа успехов в схеме Бернулли в заданный числовой интервал. Теорема Бернулли. Статистическое определение вероятности

Рассмотрим задачу определения вероятности того, что число m успехов, полученных в n повторных независимых испытаниях, принадлежит промежутку $[m_1; m_2]$, где m_1, m_2 – неотрицательные целые числа. Договоримся обозначать ее $P_n(m_1; m_2)$. По правилу нахождения вероятности суммы несовместных событий

$$P_n(m_1; m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1 + 1) + \ldots + P_n(m_2) = \sum_{i=m_1}^{m_2} P_n(m_i).$$

Замечание 1. При небольших значениях m_2 $(m_2 < 20)$ для нахождения $P_n(m_i)$ следует использовать формулу Бернулли, а при больших n и $np < 10$ – формулу Пуассона.

В ситуациях, рассмотренных в замечании 1, число слагаемых, присутствующих в правой части формулы, незначительно, а значит, невелики и вычислительные затраты. В случае, когда $np > 10$ и следует применять для вычисления $P_n(m_i)$ локальную формулу Лапласа, то число слагаемых в формуле, а значит, и вычислительные затраты, могут оказаться очень большими. Существенно уменьшить объем вычислений позволяет ***интегральная формула Муавра – Лапласа***.

Теорема. Если вероятность наступления события A в каждом из испытаний Бернулли постоянна, причем $0 < p < 1$, а величины $a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$ ограничены, тогда для вероятности того, что событие A появится в n испытаниях от m_1 до m_2 раз, справедливо предельное соотношение

$$\boxed{P_n(m_1; m_2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0.}$$

Доказательство. Пусть i меняется от 0 до $m_2 - m_1$, обозначим $x_i = \dfrac{m_1 + i - np}{\sqrt{npq}}$, тогда

$$\triangle x = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Поэтому по замечанию 3.2 из теоремы 3

$$P_n\left(m_1;m_2\right) = P_n\left(m_1\right) + P_n\left(m_1+1\right) + \ldots + P_n\left(m_2\right) = \sum_{i=0}^{m_2-m_1} P_n\left(m_1+i\right) \approx$$

$$\approx \sum_{i=0}^{m_2-m_1}\left(\varphi\left(x_i\right)\triangle x + \frac{C_i\varphi\left(x_i\right)}{n\sqrt{pq}}\right) \text{ или } P_n\left(m_1;m_2\right) - \sum_{x_i=a}^{b}\varphi\left(x_i\right)\triangle x \approx \sum_{i=0}^{m_2-m_1}\left(\frac{C_i\varphi\left(x_i\right)}{n\sqrt{pq}}\right).$$

При $n \to \infty$ предел правой части равен 0, а $\triangle x \to 0$, тогда согласно понятию определенного интеграла получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{x_i=a}^{b}\varphi\left(x_i\right)\triangle x = \lim_{\triangle x\to 0}\sum_{x_i=a}^{b}\varphi\left(x_i\right)\triangle x = \int_a^b \varphi\left(x\right)dx.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 2. Для нахождения $P_n(m_1;\, m_2)$ при $np > 10$ удобно использовать ***интегральную формулу Муавра – Лапласа***:

$$\boxed{P_n\left(m_1;m_2\right) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),}$$

где функция $\Phi\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x}\varphi\left(x\right)dx - \dfrac{1}{2}$ называется ***функцией Лапласа.***

Замечание 3. Табличные значения функции Лапласа $\Phi\left(x\right)$ (прил. 2) в большинстве книг по теории вероятностей приводятся лишь на промежутке $x \in [0;\, 5]$. Это объясняется тем, что она нечетная, а при $x > 5$ ее значения практически равны 0,5 (график $y = \Phi\left(x\right)$ приведен на рис. 9).

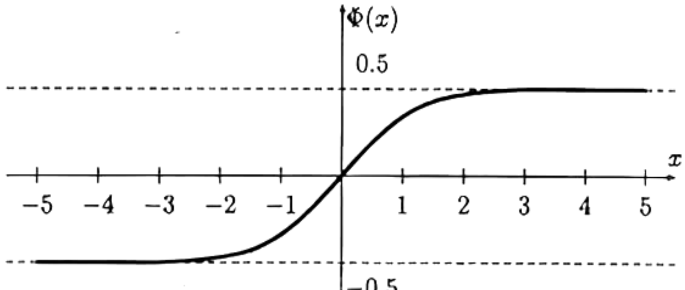


Рис. 9

Определение 1. Частное $\dfrac{m}{n}$ называют ***частотой*** появления события A (успеха) в схеме повторных независимых испытаний. Рассмотрим событие, состоящее в том, что величина отклонения частоты от вероятности успеха не превышает числа $\delta > 0$.

Теорема (Бернулли). $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left\{\left|\dfrac{m}{n} - p\right| < \delta\right\} = 1$.

Доказательство. Рассмотрим предел вероятности этого события при $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \delta\right\} \overset{(1)}{=} \lim_{n\to+\infty} P\left\{n\left(p-\delta\right) < m < n\left(p+\delta\right)\right\} \overset{(2)}{=}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left\{\Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-n\delta}{\sqrt{npq}}\right)\right\} \overset{(3)}{=} 2\lim_{n\to+\infty}\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\sqrt{pq}}\right) \overset{(4)}{=} 2\cdot 0{,}5 = 1.$$

(1) следует из правила раскрытия модуля;

(2) следует из интегральной формулы Муавра – Лапласа;

(3) следует из нечетности функции Лапласа;

(4) следует из того, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi\left(x\right) = 0{,}5$.

Замечание 4. Процедуру приближения неизвестного значения $P(A) = p$ частотой $\dfrac{m}{n}$, если m получено опытным путем, называют ***статистическим*** определением вероятности.

Задача 1. Студент получит зачет, если ответит правильно на 25 и более вопросов теста, состоящего из 40 вопросов с ответами «верно» – «неверно». Какова вероятность получить зачет, если студент отвечает наугад?

Решение. По условию $n = 40$; $m_1 = 25$; $m_2 = 40$; $p = q = 0{,}5$; $np > npq = 10$. Значит, вероятность получить зачет можно найти по интегральной формуле Лапласа:

$$P_{40}\left(25;40\right) \approx \Phi\left(\frac{40-0{,}5\cdot 40}{\sqrt{40\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}\right) - \Phi\left(\frac{25-0{,}5\cdot 40}{\sqrt{40\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}\right) = \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(6{,}3246\right) - \Phi\left(1{,}5811\right) \overset{(1)}{\approx} 0{,}5 - 0{,}4430 = 0{,}057.$$

(1) по таблице значений $\Phi\left(x\right)$ с учетом замечания 3.

Задача 2. Вероятность детали быть не принятой ОТК равна 0,2. Найти вероятность, что среди 400 случайно отобранных на проверку деталей непринятыми окажутся от 70 до 100.

Решение. По условию $n = 400;\ m_1 = 70;\ m_2 = 100;\ p = 0,2; q = 0,8;$ $np > npq = 64.$

Значит, искомую вероятность можно найти по интегральной формуле Лапласа:

$$P_{40}\left(25;40\right) \approx \Phi\left(\frac{100-0,2\cdot 400}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}\right) - \Phi\left(\frac{70-0,2\cdot 400}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}\right) = \Phi\left(\frac{20}{8}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{8}\right) \overset{(1)}{\approx}$$

$$\approx \Phi\left(2,5\right) + \Phi\left(1,25\right) \approx 0,4938 + 0,3944 = 0,8882\ .$$

[(1)] по таблице значений $\Phi\left(x\right)$ с учетом ее нечетности.

Задача 3. Сколько нужно провести испытаний, чтобы частота $\frac{m}{n}$ отличалась от вероятности успеха p не более чем на $\delta = 0,01$ с вероятностью 0,95?

Решение. Чтобы подобрать наименьшее n, нужно решить неравенство $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \delta\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) > 0,95.$ Отметим, что p нам неизвестно. Рассмотрим произведение $pq = p\left(1-p\right)$ как функцию p. Ее график – парабола, ветви которой направлены вниз. Значит, ее единственный экстремум – максимум. Найдем его: $\left(p\left(1-p\right)\right)' = 1-2p = 0,$ значит, $p = \frac{1}{2}$ является точкой максимума, а $\max\left(pq\right) = \frac{1}{4}$.

Поэтому

$$2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right) = 2\Phi\left(2\delta\sqrt{n}\right) > 0,95.$$

Для определения числа испытаний n получено уравнение $\Phi\left(2\delta\sqrt{n}\right) = 0,475.$ По таблице значений функции Лапласа найдем, что $\Phi\left(1,960\right) = 0,475.$

Отсюда $2\delta\sqrt{n} = 1,960 \Rightarrow$ при $\delta = 0,01$ $\sqrt{n} = 98 \Rightarrow n = 9604.$

Задача 4. В страховой компании 10 тыс. клиентов. Страховой взнос каждого клиента составляет 500 руб. При наступлении страхового случая, вероятность которого по имеющимся данным и оценкам экспертов можно считать равной $p = 0{,}005$, страховая компания обязана выплатить клиенту страховую сумму размером 50 тыс. руб. На какую прибыль может рассчитывать страховая компания с надежностью 0,95?

Решение. Размер прибыли компании составляет разность между суммой взносов всех клиентов и страховой суммой, выплаченной m клиентам при наступлении страхового случая:

$$П = 500 \cdot 10000 - 50000 \cdot m = 50000\,(100 - m) \text{ руб.}$$

Для определения m применим интегральную формулу Муавра – Лапласа (требование $npq > 10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995 = 49{,}75 \geq 10$ выполнено). По условию задачи

$$P_{10000}(0; m) = \Phi\left(\frac{m - 0{,}005 \cdot 10000}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}005 \cdot 10000}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{m - 50}{7{,}053}\right) - \Phi(-7{,}09) = 0{,}95.$$

Поскольку $\Phi(-7{,}09) \approx -0{,}5$, то $\Phi\left(\frac{m-50}{7{,}053}\right) \approx 0{,}45$. Отсюда по таблице функции Лапласа получаем, что $\frac{m-50}{7{,}053} \approx 1{,}65$.

Тогда

$$m \approx 50 + 7{,}053 \cdot 1{,}65 \approx 61{,}63745.$$

Таким образом, размер прибыли компании с надежностью 0,95 будет равен $П_{0,95}$ = 50000(100 – 61,63745) = 1918127,5 руб.

7. Дискретные случайные величины. Закон распределения случайной величины. Операции над случайными величинами. Основные числовые характеристики

Наряду со случайными событиями одним из основных понятий теории вероятностей является понятие ***случайной величины***.

Определение 1. Случайная величина (с. в.) – правило, которое ставит в соответствие каждому возможному элементарному исходу опыта

ω из множества всех элементарных событий Ω некоторое действительное число.

Более строго: случайную величину X можно рассматривать, как функцию $X(\omega)$ от элементарного события ω со значениями из множества действительных чисел, заданную на множестве элементарных событий Ω так, что для любого события $A=\{X < x\}$ определена его вероятность $P(A) = P(X < x)$.

Случайные величины в зависимости от множества их возможных значений можно разбить на два класса – ***дискретные*** и ***непрерывные***.

Определение 2. Дискретной называется случайная величина, множество возможных значений которой состоит из конечного или из счетного множества чисел (элементы которого можно пронумеровать).

Примеры дискретных случайных величин:

а) X – число очков, выпавшее на верхней грани брошенного кубика, здесь возможные значения X: $\{1, 2, \dots , 6\}$;

б) X – число попаданий в мишень при произведенных n выстрелах, здесь возможные значения X: $\{ 0,1, \dots , n\}$;

в) X – число выстрелов, произведенных стрелком до первого попадания в мишень при неограниченном числе патронов, если вероятность попадания в каждом постоянна и меньше 1, здесь возможные значения X: $\{1,2, \dots , \infty\}$.

Основные задачи теории вероятностей, связанные с дискретными случайными величинами, – это определение закона распределения случайной величины, а также нахождение ее числовых характеристик.

Определение 3. Законом распределения дискретной случайной величины X называется правило, ставящее в соответствие каждому ее возможному значению x_i вероятность $p_i = P\left(X = x_i\right)$, с которой случайная величина это значение принимает.

Примеры способов задания закона распределения:

а) ***аналитический*** в виде математического выражения, отражающего зависимость вероятности от значения случайной величины X: $p_i = f\left(x_i\right)$ для $i = 1, 2, \dots , n(\infty)$;

б) ***графический*** в виде многоугольника распределения с вершинами, абсциссы которых – возможные значения случайной величины X, а ординаты – вероятности того, что она примет эти значения (рис. 10);

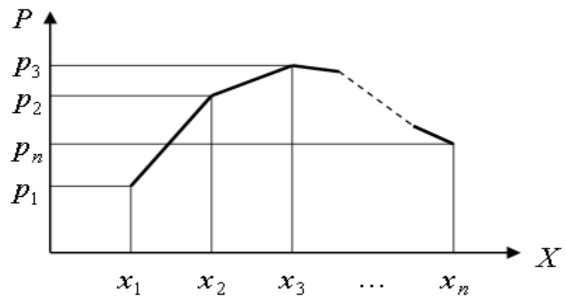


Рис. 10

в) в виде ***таблицы***, в которой представлены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности $p_i = P(X = x_i)$:

$X = x_i$	x_1	x_2	…	x_n
$P = p_i$	p_1	p_2	…	P_{n}

Последний способ используется наиболее часто.

Замечание. Поскольку события $X = x_i$ несовместны при разных значениях i, то $\sum\limits_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1.$.

Определение 4. ***Функцией распределения*** случайной величины X называется функция $F(x)$ с областью определения $(-\infty;+\infty)$ и областью значений $[0;1]$ такая, что $F(x) = P(X < x)$.

Свойства функции распределения:

- $F(x)$ неубывающая;
- $F(x) = 0$ при $x \le x_1$;
- $F(x) = 1$ при $x > x_n\left(x_\infty\right)$;
- $F(x)$ – непрерывна слева, постоянна на каждом промежутке $\left(x_{i-1}; x_i\right]$, где $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{i-1} p_k$, для $i = 2, \ldots, n$(или ∞);
- в точках x_i имеет разрывы первого рода с величиной скачка, равной p_i.

Для того чтобы построить график $F(x)$, нужно разбить числовую ось точками x_i на промежутки. На первом, самом левом, промежутке $(-\infty; x_1]$ значения $F(x)$ будут равны 0, на втором $\left(x_1; x_2\right]$ – $F(x) = p_1$, на третьем $(x_2;x_3]$ – $F(x)=p_1+p_2$, и так значения увеличиваются до 1 на самом правом промежутке $(x_n;+\infty)$ (рис. 11).

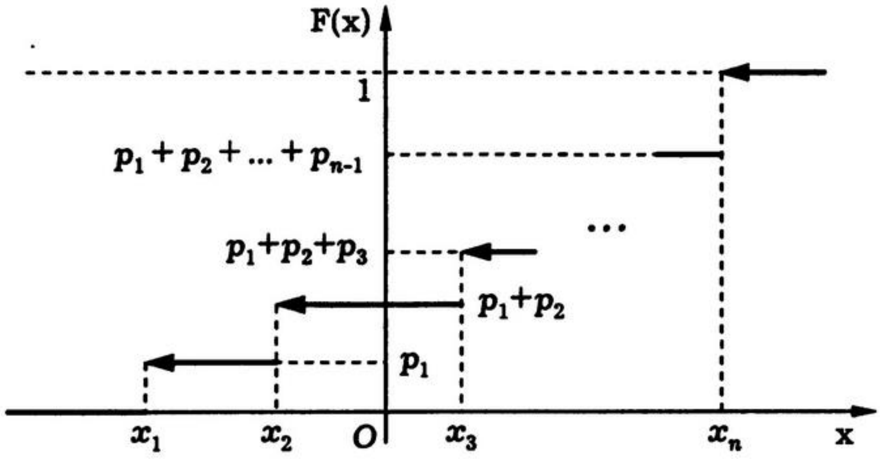


Рис. 11

Рассмотрим дискретные с. в. X, Y со значениями x_i ($i = 1, \ldots, n$ (или ∞)), y_j $\left(j=1, \ldots, m(\text{или}\,\infty)\right)$.

Определение 5. С. в. X, Y называются ***независимыми***, если любая пара событий $X = x_i$ и $Y = y_j$ являются независимыми. В противном случае X, Y являются ***зависимыми***.

Определение 6. ***Суммой*** (***разностью*** или ***произведением***) с. в. X, Y называются с. в., принимающие все возможные значения $x_i + y_j$ $\left(x_i - y_j \text{ или } x_i \cdot y_j\right)$..

Ниже рассмотрим основные числовые характеристики дискретных случайных величин и их свойства.

Определение 7. ***Математическим ожиданием*** дискретной с. в. называется число

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n(\text{или}\,\infty)} x_i p_i.$$

Замечание. Математическое ожидание является характеристикой среднего значения с. в. и измеряется в тех же единицах, что и сама случайная величина.

Свойства математического ожидания:

• математическое ожидание постоянной C равно этой постоянной: $M(C)=C$;

• постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е. $M(CX)=CM(X)$;

• математическое ожидание суммы двух (конечного числа) с. в. равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y) \qquad \left(M\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right);$$

• математическое ожидание произведения двух (конечного числа) ***независимых*** с. в. равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y) \qquad \left(M\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)=\prod_{k=1}^{n} M(X_k)\right).$$

Определение 8. ***Дисперсией*** $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от своего математического ожидания: $D(X)=M\left[\left(X-M(X)\right)^2\right]$.

Замечание. Дисперсия с. в. X является мерой ее рассеяния (разброса) относительно своего математического ожидания и имеет размерность квадрата с. в. X.

Свойства дисперсии (следуют из свойств математического ожидания):

• дисперсия постоянной C равна 0: $D(C)=0$;

• постоянный множитель C при вынесении за знак дисперсии следует возвести в квадрат: $D(CX)=C^2D(X)$;

• практическое вычисление дисперсии с. в. X удобно осуществлять по формуле

$$\boxed{D(X)=M(X^2)-M^2(X);}$$

• дисперсия суммы двух (конечного числа) ***независимых*** с. в. равна сумме их дисперсий:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y), \qquad \left(D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\sum_{k=1}^{n} D(X_k)\right).$$

То обстоятельство, что дисперсия с. в. X имеет размерность ее квадрата, часто неудобно на практике. Так, если с. в. X измеряется в рублях, то ее дисперсия – в рублях в квадрате! Поэтому для оценки меры ее рассеяния относительно математического ожидания используют величину

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{D(X)},}$$

которая измеряется в тех же единицах, что и сама с. в., и называется ***средним квадратическим отклонением***.

Свойства среднего квадратического отклонения $\boldsymbol{\sigma(X)}$ (следуют из свойств дисперсии):

- постоянный множитель C можно выносить за знак среднего квадратического отклонения под знаком модуля: $\sigma(CX)=|C|\sigma(X)$;
- среднее квадратическое отклонение постоянной $\sigma(C)=0$;
- практическое вычисление среднего квадратического отклонения с. в. X удобно осуществлять по формуле

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{M(X^2)-M^2(X)};}$$

- среднее квадратическое отклонение суммы двух (конечного числа) ***независимых*** с. в. равна квадратному корню из суммы их дисперсий:

$$\sigma(X+Y)=\sqrt{D(X)+D(Y)}\,,\qquad \left(\sigma\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}D(X_k)}\right).$$

Задача. Стрелок имеет три патрона и стреляет в цель до первого попадания или пока не израсходует все патроны. Вероятность попадания стрелка в цель при любом выстреле равна 0,8. Случайная величина X – число израсходованных патронов. Найти:

а) таблицу ее распределения;

б) функцию распределения;

в) вероятность того, что $X\in[0{,}5;\ 2]$;

г) $M(X)$;

д) $D(X)$;

е) $\sigma(X)$.

Решение. В результате опыта с. в. X принимает значения 1, 2, 3. Рассмотрим независимые события A_i = {i-й выстрел попал в цель} и несовместные $B_i = \{X = i\}$, где $i \in \{1;\ 2;\ 3\}$.

а) Тогда, используя теоремы о вероятности суммы и произведения, получим закон распределения в аналитическом виде:

$$p_1 = P(B_1) = P(A_1) = 0{,}8,$$

$$p_2 = P(B_2) = P\left(\bar{A}_1\right) \cdot P(A_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16,$$

$$p_3 = P(B_3) = P\left(\bar{A}_1\right) \cdot P\left(\bar{A}_2\right) \cdot P(A_3) + P\left(\bar{A}_1\right) \cdot P\left(\bar{A}_2\right) \cdot P\left(\bar{A}_3\right) =$$

$$= 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$$

или проще $p_3 = P(B_3) = 1 - P(B_1) - P(B_2) = 1 - 0{,}8 - 0{,}16 = 0{,}04.$

Представим полученные результаты в виде таблицы.

X_i	1	2	3
X_i^2	1	4	9
p_i	0,8	0,16	0,04

Вторая строка таблицы приведена намеренно. Она будет использована при нахождении дисперсии;

б) Значения x_i разбивают числовую ось на четыре интервала: $(-\infty;\ 1]$, $(1;\ 2]$, $(2;\ 3]$, $(3;\ +\infty)$. На первом интервале значения $F(x)$ равны 0, на втором: p_1 = 0,8, на третьем: $(p_1 + p_2) = 0{,}8 + 0{,}16 = 0{,}96$, на четвертом: $(p_1 + p_2 + p_3) = 0{,}8 + 0{,}16 + 0{,}04 = 1\cdot$

Итак,
$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in (-\infty; 1]; \\ 0{,}8, \text{ если } x \in (1; 2]; \\ 0{,}96, \text{ если } x \in (2; 3]; \\ 1, \text{ если } x \in (3; +\infty); \end{cases}$$

в) $\{X \in [0{,}5;\ 2]\} = B_1 + B_2$, ввиду несовместности B_1 и B_2 вероятность попадания в этот промежуток

$$P\{X \in [0{,}5;\ 2]\} = P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) = 0{,}8 + 0{,}16 = 0{,}96;$$

г) $M(X)=X_1\cdot p_1+X_2\cdot p_2+X_3\cdot p_3=1\cdot 0,8+2\cdot 0,16+3\cdot 0,04=1,24;$

д) $D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=1\cdot 0,8+4\cdot 0,16+9\cdot 0,04-1,24^2=$

$=1,8-1,5376=0,2624;$

е) $\sigma(X)=\sqrt{0,2624}\approx 0,5122.$

8. Часто встречающиеся на практике законы распределения дискретных случайных величин

Рассмотрим формулы для вычисления числовых характеристик некоторых важных дискретных случайных величин.

1. ***Равномерное распределение с параметром*** $n\in N$

Случайная величина X_1 имеет равномерное распределение, если число n ее возможных значений конечно и для любого из этих значений x

$$P\{X_1=x\}=\frac{1}{n}.$$

2. ***Гипергеометрическое распределение***

Пример. Пусть $N>M,\ n<N$ – натуральные числа. Из имеющихся N элементов M являются окрашенными. Случайная величина X_2 равна числу окрашенных из n наудачу извлеченных элементов.

У случайной величины X_2, имеющей гипергеометрическое распределение:

$$P\{X_2=m\}=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\ m=0,1,\ \dots,\ \min\{n,M\}.$$

$$M(X_2)=\frac{nM}{N};\quad D(X_2)=\frac{n\left(\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{M}{N}\right)(N-n)}{N-1}.$$

3. ***Геометрическое распределение***

Пример. Пусть случайная величина X_3 равна числу m патронов, истраченных стрелком до первого попадания, если вероятность попадания в каждом выстреле равна p.

У случайной величины X_3, имеющей геометрическое распределение:

$$P\{X_3 = m\} = q^{m-1}p, \text{ где } 0 < p < 1,\ q = 1 - p,\ m = 1,\ \ldots,\infty.$$

$$M(X_3) = \frac{1}{p}; \quad D(X_3) = \frac{q}{p^2}.$$

4. ***Распределение Пуассона***

Целочисленная случайная величина X_4 со значениями из $[0;+\infty)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если

$$P\{X_4 = m\} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},\ m \in [0;+\infty).$$

$$M(X_4) = \lambda; \quad D(X_4) = \lambda.$$

5. ***Биномиальное распределение***

Пример. Пусть происходят n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может наступить с одной и той же вероятностью p. Тогда целочисленная случайная величина X_5, равная количеству испытаний, в которых появилось событие A, имеет биномиальное распределение. $P\{X_5 = m\}$ задается формулой Бернулли, т. е.

$$P\{X_5 = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } m \in \{0;1;\ \ldots,n\},\ 0 < p < 1,\ q = 1 - p.$$

Получим формулы для математического ожидания и дисперсии с.в. X_5, для этого рассмотрим случайные величины x_i, равные числу наступлений события A в i-м испытании.

Закон распределения для них одинаков:

x_i	0	1
P	q	p

В рассматриваемом случае $M(x_i) = M(x_i^2) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$ значит $D(x_i) = p^2 - p = p(1-p) = pq.$ Поскольку случайные величины x_i независимы, то

$$M(X_5) = \sum_{i=1}^{n} M(x_i) = np,\ D(X_5) = \sum_{i=1}^{n} D(x_i) = npq.$$

Приведенные формулы целесообразно запомнить, чтобы не выводить их при решении конкретной задачи.

9. Непрерывные случайные величины

Рассмотренные ранее дискретные случайные величины имели значения, которые изолированы друг от друга на числовой прямой. Важные с точки зрения практики с. в. могут принимать любое значение из некоторого числового интервала с конечными или бесконечными границами. В качестве примеров можно привести результаты измерений времени, длины, массы, температуры, давления и т. д. Законы распределения таких величин в отличие от дискретных не могут быть заданы в табличном виде. Для этого применяется, рассмотренная ранее ***функция распределения*** $F(x)$, которая для действительного числа $x \in (-\infty; +\infty)$ и с. в. X определяет вероятность того, что X примет значение меньше x:

$$\boxed{F(x) = P(X < x).}$$

Определение 1. Случайная величина называется ***непрерывной***, если ее функция распределения есть непрерывная функция, обладающая кусочнонепрерывной производной.

Остаются верны сформулированные ранее свойства функции распределения:

1) $\forall x \;\; 0 \le F(x) \le 1;$

2) $\forall x_1 \le x_2 \;\; F(x_1) \le F(x_2);$

3) $F(-\infty) = 0; \;\; F(+\infty) = 1;$

Непрерывная с. в. обладает собственными свойствами:

4) $P(X = x) = 0;$

5) $P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$

Определение 2. Производная $F'(x) = f(x)$ функции распределения непрерывной случайной величины называется ее ***плотностью распределения***.

Свойства плотности распределения

1. $f(x) \ge 0,$ поскольку $F(x)$ не убывает (свойство 2).
2. $f(-\infty) = f(+\infty) = 0.$
3. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$
4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1.$

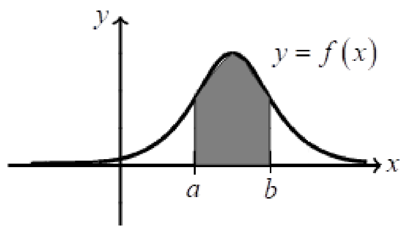


Рис. 12

Из формулы Ньютона – Лейбница и в силу свойства 5 функции распределения следует:

5. $$P(a<X<b)=P(a\le X<b)=$$
$$=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)=$$
$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Эта вероятность численно равна площади, выделенной серым цветом на рис. 12.

Замечание. Поскольку функцию распределения можно найти, зная плотность, то информация о последней также является способом задания закона распределения случайной величины.

Определение 3. ***Математическим ожиданием*** непрерывной случайной величины X называется величина $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx,$ обладающая теми же свойствами, что и в случае дискретной с. в. (раздел 7).

Определение 4. ***Дисперсией*** непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения с. в. от своего математического ожидания и находится по формуле

$$\boxed{D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\,f(x)\,dx;}$$

и в этом случае она обладает теми же свойствами, что и для дискретной с. в. (раздел 7). При этом

$$\boxed{D(X)=M(X^2)-M^2(X),}$$

где $M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx.$

Определение 5. ***Средним квадратическим отклонением*** непрерывной случайной величины X называется квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Задача. Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ 3x^2, \text{ при } 0 < x \le 1; \\ 0, \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Найти:

1) функцию распределения с. в. X;

2) $P(0{,}1 < X < 0{,}5)$;

3) математическое ожидание X;

4) дисперсию X;

5) среднее квадратическое отклонение X.

Решение

1. Пусть $x \le 0$, тогда $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0.$

Если $0 < x \le 1$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{x} 3x^2 \cdot dx = 0 + x^3\Big|_0^x = x^3.$$

Наконец, если $x > 1$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{1} 3x^2 \cdot dx + \int\limits_{1}^{x} 0 \cdot dx = 0 + x^3\Big|_0^1 + 0 = 1.$$

В итоге: $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } 0 \le x; \\ x^3, \text{при } 0 < x \le 1; \\ 1, \text{ при } x > 1. \end{cases}$

2. $P(0{,}1 < X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}1) = 0{,}5^3 - 0{,}1^3 = 0{,}125 - 0{,}001 = 0{,}124.$

3. $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{1} x \cdot 3x^2 dx + \int\limits_{1}^{+\infty} 0 \cdot dx = \int\limits_{0}^{1} 3x^3 dx =$

$$= 0 + \frac{3x^4}{4}\Bigg|_0^1 + 0 = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

4. Для определения дисперсии найдем $M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{1} x^2 \cdot 3x^2 dx + \int\limits_{1}^{+\infty} 0 \cdot dx = \int\limits_{0}^{1} 3x^4 dx = 0 + \frac{3x^5}{5}\Bigg|_0^1 + 0 = \frac{3}{5}.$$

И теперь $D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}=0,0375.$

5. $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,0375}\approx 0,1936$.

10. Часто встречающиеся законы распределения непрерывных случайных величин

I. Нормальное распределение

Случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами μ и σ, если ее плотность распределения имеет вид

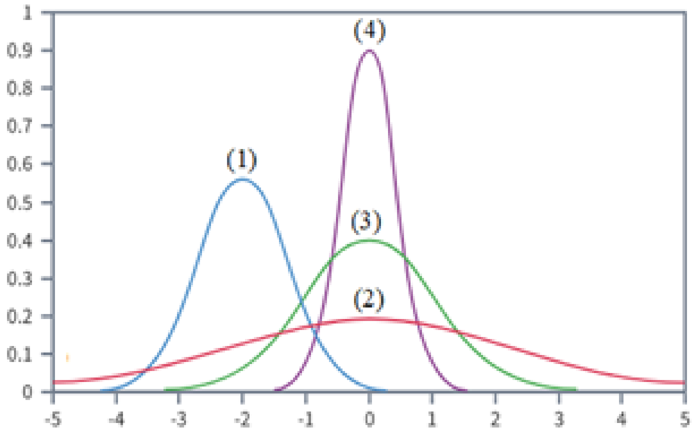
$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},}$$

где $-\infty<x<+\infty$, μ – любое, а $\sigma>0$.

В самом деле, $f(x)>0$ является плотностью, поскольку интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}$, а значит,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\begin{bmatrix} z=\dfrac{x-\mu}{\sigma} \\ dz={dx}/{\sigma}\end{bmatrix}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=1.$$

Ее графики имеют колоколообразный вид (рис. 13) и определяются лишь значениями параметров μ и σ:



(1) $\mu=-2;\ \sigma=0,66;$
(2) $\mu=0;\ \sigma=2;$
(3) $\mu=0;\ \sigma=1,1;$
(4) $\mu=0;\ \sigma=0,5.$

Рис. 13

Максимальное значение, равное $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, достигается при $x=\mu$.

Найдем основные числовые характеристики.

1. ***Математическое ожидание***:

$$M\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\begin{bmatrix} z=\dfrac{x-\mu}{\sigma} \\ x=z\sigma+\mu \\ dz={dx}/{\sigma} \end{bmatrix}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\mu\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz=\mu\ ,$$

первый интеграл равен 0, поскольку берется от нечетной функции по симметричному относительно 0 промежутку, а второй, как отмечено выше, равен μ .

2. ***Дисперсия:***

$$D\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\mu\right)^2 f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x-\mu\right)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\begin{bmatrix} z=\dfrac{x-\mu}{\sigma} \\ x=z\sigma+\mu \\ dy={dx}/{\sigma} \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\begin{bmatrix} \text{по частям:} \\ u=z;\ du=dz \\ dv=ze^{-\frac{z^2}{2}}dz;\ v=-e^{-\frac{z^2}{2}} \end{bmatrix}=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left\{-ze^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right\}\overset{(*)}{=}\sigma^2.$$

(*) первое слагаемое в фигурных скобках равно 0, а второе, как уже отмечалось, равно $\sqrt{2\pi}$.

3. Из предыдущего пункта следует, что ***среднеквадратическое отклонение*** $\sigma\left(X\right)=\sigma.$

Замечание. Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение дают полную информацию о нормально распределенной случайной величине.

4. Вероятность того, что нормально распределенная с. в. примет значение из промежутка от α до β, может быть определена по формуле

$$P\left(\alpha < X < \beta\right) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = \begin{bmatrix} z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \\ x = z\sigma + \mu \\ dz = dx/\sigma \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-\mu}{\sigma}}^{\frac{\beta-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right),$$

где $\Phi\left(x\right)$ – функция Лапласа (прил. 2).

5. Вероятность того, что модуль отклонения значения, принятого нормально распределенной с. в., от своего математического ожидания не превзойдет числа ε , равна

$$P\left(\left|X-\mu\right| < \varepsilon\right) = \int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \begin{bmatrix} z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \\ dz = dx/\sigma \end{bmatrix} = \int_{-\frac{\varepsilon}{\sigma}}^{\frac{\varepsilon}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

При $\varepsilon = 3\sigma$ получим так называемое правило ***трех сигм***:

$$P\left(\left|X-\mu\right| < 3\sigma\right) = 2\Phi\left(3\right) \approx 0{,}9973.$$

Факт широкого распространения нормального закона распределения ввиду механизма его возникновения обосновывает ***центральная предельная теорема А. М. Ляпунова.*** В ней утверждается, что случайная величина, образованная в результате сложения большого числа независимых случайных величин, дисперсии которых малы по сравнению с дисперсией суммы, имеет закон распределения, близкий к нормальному. Многие встречающиеся на практике случайные величины порождаются большим количеством случайных факторов, следовательно, имеют распределения, близкие к нормальному.

Пример. Рассмотренная ранее с. в. X, равная числу успехов в серии из n испытаний Бернулли, есть сумма успехов, наступивших в каждом испытании. Дисперсия успеха в отдельном испытании, равная pq, мала по сравнению с дисперсией общего числа успехов npq при больших значениях n. Поскольку $M\left(X\right)=np$, а $\sigma\left(X\right)=\sqrt{npq}$, то интегральная формула Лапласа

$$P\left(\alpha \le X \le \beta\right) \approx \Phi\left(\frac{\beta-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

является частным случаем центральной предельной теоремы.

II. Равномерный закон распределения

Определение. Случайная величина X распределена по ***равномерному закону*** на отрезке $[a, b]$, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & x>b. \end{cases}$$

График плотности равномерного распределения приведен на рис. 14):

При этом ее математическое ожидание

$$M(X)=\frac{a+b}{2};$$

дисперсия

$$D(X)=\frac{\left(b-a\right)^2}{12};$$

среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

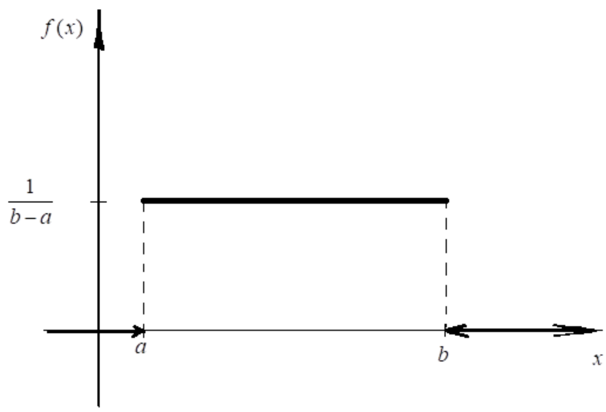


Рис. 14

Получите этот результат самостоятельно, используя определения 3, 4 из раздела 9.

Равномерная с. в. представляет собой обобщение на непрерывный случай ситуации ***равновозможных*** исходов. Она реализуется, например, в эксперименте со случайным бросанием точки на отрезок $[a, b]$.

III. Показательный закон распределения

Определение. Случайная величина X распределена по ***показательному закону***, если ее плотность распределения имеет вид ($\lambda > 0$ – постоянная):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

График плотности вероятностей показательного закона показан на рис. 15.

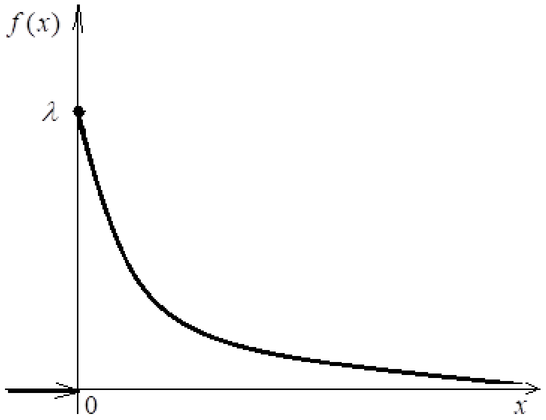


Рис. 15

При этом ее математическое ожидание

$$M(X) = \frac{1}{\lambda};$$

дисперсия

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2};$$

среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Получите этот результат самостоятельно при помощи определений 3, 4 из раздела 9.

Показательное распределение возникает в теории массового обслуживания (X – время ожидания при обслуживании или длительность телефонного разговора), в теории надежности (X – срок службы аппаратуры). Параметр λ характеризует интенсивность потока событий (количество отказов в единицу времени в теории надежности или количество обращений в единицу времени).

11. Взаимосвязь случайных величин, ее числовые характеристики. Парная линейная регрессия

Пусть в одном опыте реализуются две случайные величины X_1 и X_2, тогда удобно рассматривать двумерную случайную величину (X_1; X_2). Ранее уже возникали вопросы вычисления математического ожидания произведения и дисперсии суммы случайных величин, при этом появляется необходимость иметь информацию об их зависимости или независимости. Эта информация может иметь и сугубо практическое значение, например, важен вопрос: существует ли связь между с. в. X_1 – количеством присадок в топливе и с. в. X_2 –

степенью износа автомобильного двигателя. Зависимость случайных величин может носить функциональный или статистический характер. Функциональная зависимость существует в том случае, когда каждому допустимому значению одной из них соответствует одно вполне определенное значение другой. Чаще между случайными величинами встречаются статистические зависимости. В этом случае каждому значению одной величины может соответствовать не единственное значение другой, а некоторое множество значений с определенным законом распределения. Например, связь между возрастом и ростом детей выражается в том, что каждому значению возраста соответствует определенное распределение роста (а не одно единственное значение). Частным случаем статистической зависимости между X_1 и X_2 является корреляционная зависимость, когда каждому значению X_2 ставится в соответствие математическое ожидание распределения другой величины X_1.

Простейшие числовые характеристики $M(X_i)$, $D(X_i)$ $i \in \{1;\ 2\}$ не дают информацию о наличии связи между X_1 и X_2 или ее отсутствии. Для этого используется еще одна числовая характеристика – ковариация.

Определение 1. ***Ковариацией*** σ_{ij} случайных величин X_i и X_j называется математическое ожидание произведения отклонений значений этих величин от своих математических ожиданий:

$$\boxed{\sigma_{ij} = M\left(\left(X_i - M\left(X_i\right)\right)\left(X_j - M\left(X_j\right)\right)\right).}$$

Свойства ковариации

1. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

2. $\sigma_{ii} = D(X_i)$.

3. Если случайные величины X_i и X_j независимы, то $\sigma_{ij} = 0$.

Доказательство:

$$\sigma_{ij} = M\left(X_i X_j - X_i M\left(X_j\right) - M\left(X_i\right) X_j + M\left(X_i\right) M\left(X_j\right)\right) \overset{(1)}{=}$$

$$= M\left(X_i X_j\right) - M\left(X_i M\left(X_j\right)\right) - M\left(M\left(X_i\right) X_j\right) + M\left(M\left(X_i\right) M\left(X_j\right)\right) \overset{(2)}{=}$$

$$= M\left(X_i\right) M\left(X_j\right) - M\left(X_j\right) M\left(X_i\right) - M\left(X_i\right) M\left(X_j\right) + M\left(X_i\right) M\left(X_j\right) = 0$$

(1) математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий;

(2) математическое ожидание произведения независимых с. в. равно произведению их математических ожиданий, постоянные

$M(X_i)$ и $M(X_j)$ вынесены за знаки математических ожиданий, математическое ожидание константы равно этой константе.

4. $\sigma_{ij} = M(X_i X_j) - M(X_i)M(X_j)$. Если $\sigma_{ij} \neq 0$, то случайные величины X_i и X_j зависимы и $M(X_i X_j) = M(X_i)M(X_j) + \sigma_{ij}$.

5. $D(X_1 \pm X_2) = D(X_1) + D(X_2) \pm 2\sigma_{12}$.

Доказательство:

$$D(X_1 \pm X_2) = M\left(\left(X_1 \pm X_2 - M(X_1 \pm X_2)\right)^2\right) = M\left(\left(\left(X_1 - M(X_1)\right) \pm\right.\right.$$

$$\left.\left.\pm\left(X_2 - M(X_2)\right)\right)^2\right) = M\left(\left(X_1 - M(X_1)\right)^2\right) + M\left(\left(X_2 - M(X_2)\right)^2\right) \pm$$

$$\pm 2M\left(\left(X_1 - M(X_1)\right)\left(X_2 - M(X_2)\right)\right) = D(X_1) + D(X_2) \pm 2\sigma_{12}.$$

6. Ковариация σ_{12} имеет размерность, равную произведению размерностей X_1 и X_2.

Последнее свойство имеет негативный оттенок, поскольку для оценки степени связи удобнее использовать безразмерные характеристики. Пусть $\sigma(X_i) = \sigma_i$. Случайная величина $Y_i = \dfrac{X_i - M(X_i)}{\sigma_i}$ называется ***нормированной*** для X_i.

Свойства нормированной случайной величины

1. Нормированная с. в. Y_i безразмерна.
2. $M(Y_i) = 0$.
3. $D(Y_i) = \sigma(Y_i) = 1$.

Определение 2. Ковариация нормированных с. в. Y_i и Y_j равна

$$\boxed{\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}}$$

и называется ***коэффициентом корреляции*** с. в. X_i и X_j.

Определение 3. Случайные величины X_i и X_j называются ***некоррелированными***, если $\rho_{ij} = 0$.

Свойства коэффициента корреляции

1. Коэффициент корреляции безразмерен.
2. У независимых с. в. X_i и X_j коэффициент корреляции $\rho_{ij} = 0$.

3. Модуль коэффициента корреляции не превосходит единицы:

$$\boxed{\left|\rho_{ij}\right| \le 1.}$$

Доказательство. На основании неотрицательности дисперсии, свойства 5 ковариации, определения коэффициента корреляции и его свойства 3

$$D\left(Y_i \pm Y_j\right) = 2 \pm 2\rho_{ij} = 2\left(1 \pm \rho_{ij}\right) \ge 0.$$

Отсюда $1+\rho_{ij} \ge 0, 1-\rho_{ij} \ge 0$ или $-1 \le \rho_{ij} \le 1$, что равносильно неравенству $\left|\rho_{ij}\right| \le 1.$

4. $\left|\rho_{ij}\right| = 1$ тогда и только тогда, когда между X_i и X_j существует функциональная линейная зависимость, т. е. $X_i = aX_j + b,$ причем $\rho_{ij} = 1$, если $a > 0$, и $\rho_{ij} = -1$, если $a < 0$.

Доказательство. Пусть $\left|\rho_{ij}\right| = 1$, тогда $D\left(Y_i - Y_j\right) = 2\left(1 - \rho_{ij}\right) = 0$, отсюда следует, что $Y_i - Y_j = c = \text{const}.$ Значит $M\left(Y_i - Y_j\right) = M\left(c\right).$ Из свойств математического ожидания и свойства 3 нормированных с. в. следует, что $c = 0$, т. е. $Y_i = Y_j$.

Следовательно:

$$\frac{X_i - M\left(X_i\right)}{\sigma_i} = \frac{X_j - M\left(X_i\right)}{\sigma_j} \quad \text{и} \quad X_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_j} X_j + \left(M\left(X_i\right) - \frac{\sigma_i}{\sigma_j} M\left(X_i\right)\right).$$

При этом $a = \dfrac{\sigma_i}{\sigma_j} > 0$, $b = M\left(X_i\right) - \dfrac{\sigma_i}{\sigma_j} M\left(X_i\right).$

Аналогично, если $\left|\rho_{ij}\right| = -1,$, то $D\left(Y_i + Y_j\right) = 2\left(1 + \rho_{ij}\right) = 0$, откуда следует

$$X_i = -\frac{\sigma_i}{\sigma_j} X_j + \left(M\left(X_i\right) + \frac{\sigma_i}{\sigma_j} M\left(X_i\right)\right).$$

Таким образом доказано, что при $\left|\rho_{ij}\right| = 1$ имеет место линейная зависимость $X_i = aX_j + b$ и знаки ρ_{ij} и a совпадают.

Приступим к доказательству обратного утверждения:

$$\rho_{ij} = \begin{cases} -1 \text{ при } a < 0, \\ \ \ 1 \text{ при } a > 0. \end{cases}$$

Пусть $X_i = aX_j + b$, тогда

$$Y_i = \frac{X_i - M(X_i)}{\sigma_i} = \frac{aX_j + b - M(aX_j + b)}{\sigma(aX_j + b)} = \frac{a(X_j - M(X_j))}{|a|\sigma_j} = \frac{a}{|a|}Y_j.$$

$$\rho_{ij} = \rho_{ji} = M\left(\left(Y_j - M(Y_j)\right)\left(\frac{a}{|a|}Y_j - M\left(\frac{a}{|a|}Y_j\right)\right)\right) = \frac{a}{|a|}M\left(\left(Y_j - M(Y_j)\right)^2\right) =$$

$$= \frac{a}{|a|}D(Y_j) = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & \text{при } a > 0, \\ -1, & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим вопрос о построении уравнения линейной регрессионной зависимости между случайными величинами X_1 и X_2. Задача состоит в определении коэффициентов a и b таким образом, чтобы для с. в. $Z = X_2 - aX_1 - b$ математическое ожидание $M(Z) = 0$, а дисперсия $D(Z)$ была минимальной. Уравнение $X_2 = aX_1 + b$ называется ***уравнением линейной регрессии*** X_1 и X_2. Регрессионный анализ величины X_2, определяемой по величине X_1 весьма важен в случае, когда X_2 измерить сложно, а X_1 – достаточно легко.

Пусть $Y_i = \dfrac{X_i - M(X_i)}{\sigma_i}$, отсюда $X_i = \sigma_i Y_i + M(X_i)$.

Тогда первое условие будет иметь вид:

$$M\left(\sigma_2 Y_2 + M(X_2) - a(\sigma_1 Y_1 + M(X_1)) - b\right) = M(X_2) - aM(X_1) - b = 0.$$

Значит, $b = M(X_2) - aM(X_1)$.

Рассмотрим второе условие:

$$\min_a D\left(\sigma_2 Y_2 + M(X_2) - a(\sigma_1 Y_1 + M(X_1)) - \sigma_2 - M(X_2) + a\sigma_1 + aM(X_1)\right) =$$

$$= \min_a D(\sigma_2 Y_2 - a\sigma_1 Y_1) = \min_a \left(\sigma_2^2 D(Y_2) + a^2\sigma_1^2 D(Y_1) - 2a\sigma_1\sigma_2\rho_{12}\right) =$$

$$= \min_a \left(\sigma_2^2 + a^2\sigma_1^2 - 2a\sigma_1\sigma_2\rho_{12}\right).$$

Минимум этой квадратичной относительно a функции с положительным коэффициентом при a^2 достигается в точке, где ее производная обращается в 0: $\left(\sigma_2^2 + a^2\sigma_1^2 - 2a\sigma_1\sigma_2\rho_{12}\right)'_a = 2\sigma_1(a\sigma_1 - \sigma_2\rho_{12}) = 0$.

Значит, $a=\rho_{12}\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$ и уравнение регрессии X_1 на X_2 имеет вид

$$\boxed{X_2-M\left(X_2\right)=\rho_{12}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\left(X_1-M\left(X_1\right)\right).}$$

Аналогично уравнение регрессии X_2 на X_1 имеет вид

$$\boxed{X_1-M\left(X_1\right)=\rho_{12}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(X_2-M\left(X_2\right)\right).}$$

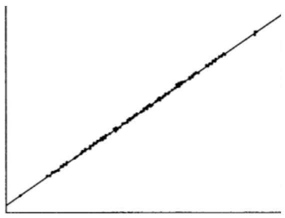
Заметим, что точка пересечения этих прямых имеет координаты $\left(M\left(X_1\right);M\left(X_2\right)\right)$.

Тангенс угла между этими прямыми равен:

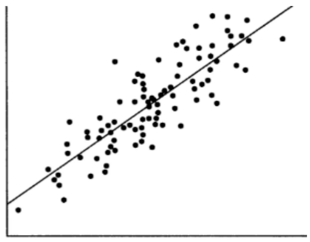
$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1\rho_{12}}-\rho_{12}\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}}{1+\left(\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2}=\frac{\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\left(\dfrac{1-\rho_{12}^2}{\rho_{12}}\right)}{1+\left(\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2}=\frac{\sigma_1\sigma_2\left(\dfrac{1-\rho_{12}^2}{\rho_{12}}\right)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Очевидно, что при $|\rho_{12}|=1$ $\operatorname{tg}\theta=0$ – прямые совпадают, при $|\rho_{12}|=0$ уравнение регрессии X_1 и X_2 имеет вид $X_2=M\left(X_2\right)$ – график параллелен оси X_1, а уравнение регрессии X_2 на X_1 имеет вид $X_1=M\left(X_1\right)$ – график параллелен оси X_2, а сами прямые перпендикулярны. Коэффициент корреляции может рассматриваться, как характеристика тесноты линейной связи между случайными величинами. Для этой же цели может быть использована величина угла θ.

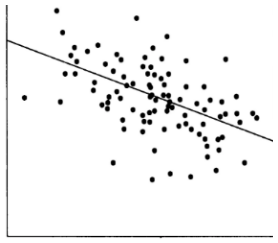
Значение коэффициента корреляции	***Теснота линейной связи***
До 0,2	Очень слабая
До 0,5	Слабая
До 0,7	Средняя
До 0,9	Высокая
Свыше 0,9	Очень высокая



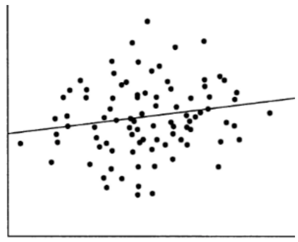
Функциональная зависимость $\rho = +1$



Высокая положительная корреляция $\rho = +0,85$



Средняя отрицательная корреляция $\rho = -0,55$



Слабая корреляционная зависимость$\rho = +0,15$

Пример. Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y, имеющие следующее совместные распределение

X \ Y	20	25	30	35	40
16	0,04	0,06			
26		0,08	0,1		
36			0,32	0,03	0,09
46			0,04	0,12	0,06
56				0,01	0,05

Найти уравнения прямой и обратных регрессий, построить их графики.

Решение

Распределение случайной величины X имеет вид:

x_i	20	25	30	35	40
$p_i = P\,(X = x_i)$	0,04	0,14	0,46	0,16	0,2

а ее числовые характеристики: $M(X) = 31,7;\ \sigma(X) = 5,35.$

Распределение случайной величины Y имеет вид:

y_j	16	26	36	46	56
$p_j = P\,(Y = y_j)$	0,1	0,18	0,44	0,22	0,06

а числовые характеристики: $M(Y) = 35,6;\ \sigma(Y) = 10,2.$

Далее по свойству 4 ковариации вычислим

$$\sigma_{XY} = M(X\,Y) - M(X)M(Y),$$

где

$$M(X\,Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}; \qquad p_{ij} = P\left(X = x_i,\, Y = y_j\right).$$

$$M(X\,Y) = 20\cdot16\cdot0,04 + 25\cdot(16\cdot0,06 + 26\cdot0,08) + 30\cdot(26\cdot0,1 + 36\cdot0,32 +$$
$$+46\cdot0,04) + 35\cdot(36\cdot0,03 + 46\cdot0,12 + 56\cdot0,01) + 40\cdot(36\cdot0,09 + 46\cdot0,06 +$$
$$+56\cdot0,05) = 1170,2.$$

$$\sigma_{XY} = 1170,2 - 31,7\cdot35,6 = 41,68\,.$$

По определению коэффициента корреляции

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{41,68}{5,35\cdot10,2} = 0,76,$$

таким образом, имеет место высокая положительная корреляция.

Используя эту информацию, по формулам

$$Y - M(Y) = \rho_{XY}\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\left(X - M(X)\right) \text{ и}$$

$$X - M(X) = \rho_{XY}\frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}\left(Y - M(Y)\right)$$

определим уравнения линий регрессии Y по X:

$$Y - 35,6 = 0,76\cdot\frac{10,2}{5,35}(X - 31,7) \quad \text{и} \quad Y = 1,46X - 10,58,$$

X по Y: $X = 0,4(Y - 35,6) + 31,7$ и $X = 0,4Y + 17,41.$

Их графики имеют вид, показанный на рис. 16.

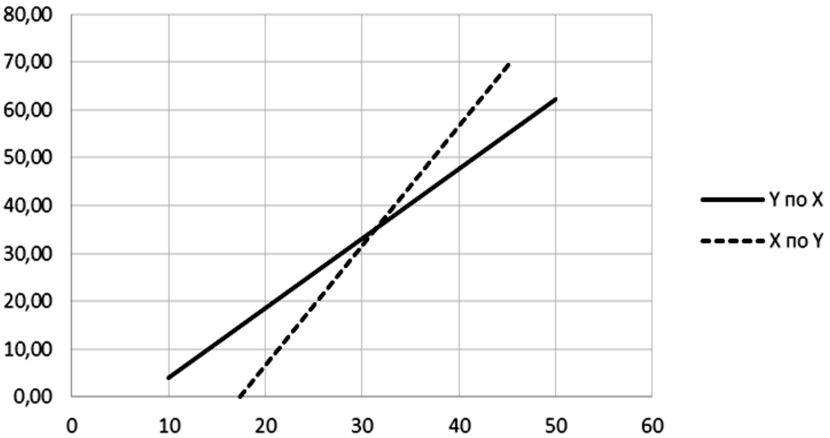


Рис. 16

II. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Классическое определение вероятности события

1.1. Найти вероятность выпадения четного числа очков при одном броске игральной кости.

1.2. Найти вероятность выпадения числа очков, кратного 3, при одном броске игральной кости.

1.3. Найти вероятность выпадения числа очков, отличного от 5, при одном броске игральной кости.

1.4. Чему равна вероятность выпадения числа, большего 6 очков, при одном броске игральной кости?

1.5. На экзамен «Теория вероятностей» вынесено 20 вопросов. Студент не выучил 7 из этих вопросов. Найти вероятность того, что студенту попадется вопрос, который он знает.

1.6. На экзамен по «Математической статистике» вынесено 25 вопросов. Студент выучил 17 из этих вопросов. Найти вероятность того, что студенту попадется вопрос, который он выучил.

1.7. Из букв слова «ФУНКЦИЯ» случайным образом выбирается одна. Какова вероятность того, что эта буква окажется гласной?

1.8. Из букв слова «МАТЕМАТИКА» случайным образом выбирается одна. Какова вероятность того, что это буква М?

1.9. Из букв слова «КОМПЬЮТЕР» случайным образом выбирается одна. Какова вероятность того, что эта буква окажется согласной?

1.10. В среднем из 50 карманных фонариков 4 являются неисправными. Найти вероятность покупки работающего фонарика.

1.11. В среднем из 100 аккумуляторов, поступивших в продажу, 91 полностью заряжен. Найдите вероятность того, что купленный аккумулятор заряжен не полностью.

1.12. В каждой десятой банке кофе, согласно условиям акции, есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Найдите вероятность того, что одна купленная банка кофе окажется без приза.

1.13. В коробке с карандашами лежат 5 красных, 8 синих и 7 желтых карандашей. Какова вероятность того, что взятый наугад карандаш окажется синим?

1.14. В коробке с новогодними украшениями лежат 12 красных, 7 синих и 11 желтых шаров. Какова вероятность того, что взятый наугад шар окажется красным?

1.15. В коробке лежит 25 красных, 28 зеленых и 27 желтых бусин. Их поочередно нанизывают на нить в случайном порядке. Какова вероятность того, что последняя бусина окажется зеленой?

1.16. На тарелке 20 пирожков одинаковой формы: 5 с мясом, 9 с капустой и 6 с вишней. Наугад берется один пирожок. Найти вероятность того, что он окажется с вишней.

1.17. В таксопарке в данный момент свободно 10 машин: 5 черных, 1 желтая и 4 зеленых. На заказ выехала одна из машин. Найти вероятность того, что к заказчику приедет зеленое такси.

1.18. На столе в вазе лежат 7 красных и 8 зеленых яблок. Найти вероятность того, что наудачу взятое яблоко окажется зеленым.

1.19. У бабушки 12 чашек: 8 красных, остальные синие. Бабушка наливает чай в случайно выбранную чашку. Найти вероятность того, что случайно взятая бабушкой чашка окажется синей.

1.20. Ребенок решил покататься на колесе обозрения. Всего на колесе обозрения 12 кабинок: 3 синие, 6 зеленых, остальные красные. Кабинки по очереди подходят к платформе для посадки. Найдите вероятность того, что он сядет в красную кабинку.

1.21. Длительность научной конференции составляет три дня. Всего запланировано 25 докладов: в первый день 7 докладов, а остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Какова вероятность того, что доклад Иванова окажется запланированным на последний день конференции?

1.22. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 3 спортсмена из Дании, 5 спортсменов из Швеции и 4 спортсмена из Финляндии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найти вероятность того, что последний выступающий спортсмен окажется из Дании.

1.23. Контролю подлежит 24 детали, из которых 3 нестандартные. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной.

1.24. Иванов оказался в оздоровительном лагере. По окончании смены для перевозки 120 отдыхающих в город было выделено 3 автобуса, каждый из которых имеет 40 посадочных мест. Найти вероятность того, что отдыхающий Иванов попадет в последний автобус.

1.25. В студенческой группе 9 девушек и 11 юношей. На группу был выделен 1 бесплатный билет в музей, который разыграли по жребию. Найти вероятность того, что билет достался девушке.

1.26. В группе туристов 5 девушек и 13 юношей. Каждый день по жребию определяют дежурного по костру. Найти вероятность того, что в первый день дежурила девушка.

1.27. В корзине лежат 24 груши, из которых 6 червивые. Найти вероятность того, что наугад взятая груша окажется червивой.

1.28. Игральный кубик подбрасывают дважды. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность, что при втором броске выпало 2 очка.

1.29. Игральный кубик подбрасывают дважды. Известно, что в сумме выпало 10 очков. Найдите вероятность, что при первом броске выпало 6 очков.

1.30. Игральный кубик подбрасывают дважды. Известно, что в сумме выпало 9 очков. Найдите вероятность, что при втором броске выпало 5 очков.

2. Вычисление вероятности событий с использованием формул комбинаторики

2.1. Из партии, в которой 21 деталь без дефектов и 5 с дефектами, берут наудачу 3 детали. Чему равна вероятность того, что все 3 детали без дефектов?

2.2. Из 50 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 40. Найти вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов.

2.3. Из колоды в 36 карт наугад выбирают 3 карты. Какова вероятность того, что среди них окажутся две дамы?

2.4. Устройство состоит из пяти элементов, среди которых два изношенных. При использовании устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

2.5. Собрание, на котором присутствует 25 чел., в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из трех человек. Считая, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть избран, найти вероятность того, что в делегацию войдут 2 женщины и один мужчина.

2.6. В конверте среди тридцати фотографий находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлекается десять фотографий. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

2.7. В коробке лежат 12 белых и 18 черных перчаток. Наудачу берут 4 перчатки. Найти вероятность того, что достанут 2 белых и 2 черных перчатки.

2.8. В магазин поступило 25 телевизоров, причем 15 из них фирмы LG. Найти вероятность того, что среди пяти проданных телевизоров окажутся 3 телевизора фирмы LG.

2.9. В школьную библиотеку поступило 40 учебников, из них четыре с дефектами переплета. Какова вероятность того, что среди двух взятых наудачу учебников окажется один с дефектами переплета?

2.10. В группе из 25 студентов, среди которых 10 девушек, разыгрывается 7 билетов в кино. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 3 девушки и 4 юноши.

2.11. Для оформления витрины выделено 10 смартфонов, 5 планшетов и 3 ноутбука. Наудачу выбрали 5 предметов. Найти вероятность того, что на витрине окажутся 2 планшета, 1 ноутбук и 2 смартфона.

2.12. В ящике 12 деталей, среди которых 7 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

2.13. В группе из 15 чел. домашнее задание не сделали 7 студентов. Преподаватель опрашивает 5 чел. Найти вероятность того, что преподаватель вызовет двух человек из числа не сделавших домашнее задание.

2.14. В урне 9 белых и 3 черных шара. Из этой урны наудачу извлечены 2 шара. Какова вероятность того, что эти шары разного цвета?

2.15. Среди 15 участников международной конференции английский язык знают 10. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных пяти участников трое знают английский язык?

2.16. На дереве сидели 8 воробьев и 7 синиц. Подул сильный ветер. Часть птиц улетела. Найти вероятность того, что после порыва ветра на дереве останутся 4 воробья и 5 синиц.

2.17. В классе 12 девочек и 18 мальчиков. Нужно выбрать двух дежурных. Какова вероятность (если считать выбор случайным), что выбраны девочка и мальчик?

2.18. Среди 35 электрических лампочек 4 нестандартные. Найти вероятность того, что 2 взятые одновременно электрические лампочки окажутся стандартны.

2.19. У сборщика 10 деталей, мало отличающихся друг от друга. Из них четыре первого, по три второго и третьего видов. Какова вероятность того, что среди шести взятых одновременно деталей 3 окажутся первого вида, две второго и одна третьего?

2.20. В кошельке лежат 10 купюр по 500 руб. и 8 купюр по 100 руб. Найти вероятность того, что при извлечении наудачу трех купюр из кошелька все они окажутся по 500 руб.

2.21. Контролю подлежит 26 деталей, из которых 3 нестандартных. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу двух деталей окажется одна нестандартная?

2.22. В коробке 6 одинаковых мячей, причем 2 из них красные. Наудачу извлечены 3 мяча. Найти вероятность того, что среди трех извлеченных мячей будет один красный.

2.23. Из десяти билетов выигрышными являются 2. Найти вероятность того, что из взятых наудачу пяти билетов один окажется выигрышным.

2.24. На участке работают 16 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам отобраны наудачу 3 чел. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

2.25. В лабораторию на исследование поступило 7 банок кофе Jacobs, среди которых 3 подделки. Какова вероятность того, что среди 5 наудачу взятых банок 3 окажутся фирменными?

2.26. В автобусе ехали 13 пенсионеров, 3 военнослужащих и 10 студентов. На остановке вышли 5 чел. Какова вероятность того, что среди вышедших окажутся 2 военнослужащих и 3 пенсионера?

2.27. На работу приняли 5 охранников с лицензией и 12 охранников без лицензии. Какова вероятность того, что в смену из 3 чел. войдут 2 охранника без лицензии?

2.28. На осенней распродаже бытовой техники в течение часа побывало 30 мужчин и 5 женщин. Какова вероятность того, что среди 3 посетителей, купивших в течение часа товар, окажется 1 женщина, если покупательская способность у мужчин и женщин одинакова?

2.29. В магазин поступило 30 телевизоров, среди которых 5 имеют скрытые дефекты корпуса. Наудачу отбирают 3 телевизора для проверки. Найти вероятность того, что 2 телевизора из отобранных не имеют скрытых дефектов корпуса.

2.30. На автостоянке к концу смены осталось 9 машин марки Toyota и 5 машин марки BMW. В течение часа забрали 7 машин и новых не поставили. Найти вероятность того, что среди забранных машин 5 марки Toyota.

3. Теоремы сложения и умножения

3.1. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы, равны по 0,9, на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса.

3.2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле по мишени выбьет 10 очков, равна 0,4; 9 очков – 0,2; 8 очков – 0,2; 7 очков – 0,1; 6 очков или менее – 0,1. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет не менее восьми очков.

3.3. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

3.4. Вероятность того, что научная статья студента будет опубликована в течение года в журнале «Студенческий вестник», равна 0,67, а в журнале «Аспирант» – 0,29. Какова вероятность публикации статьи в течение года в одном из этих журналов?

3.5. Имеются 3 ящика, содержащие по 10 деталей. В первом ящике 6 стандартных изделий, во втором – 9, в третьем – 7. Из каждого ящика наудачу выбирают по одной детали. Найти вероятность того, что все 3 детали стандартны.

3.6. В студии телевидения имеются 3 видеокамеры. Для каждой видеокамеры вероятность того, что она включена, равна 0,6. Найти вероятность того, что включена ровно одна камера.

3.7. В первом ящике 1 белый, 2 красных и 3 синих шара, во втором ящике 2 белых, 6 красных и 4 синих шара. Из каждого ящика наудачу извлекают по шару. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров нет синих?

3.8. Вероятность того, что в течение дня произойдет неполадка станка, равна 0,02. Полагая появление неполадки станка в разные дни событиями независимыми, найти вероятность работы станка в течение двух дней подряд.

3.9. В устройстве содержится три независимо работающих блока, от которых зависит работа всего устройства. Вероятность безотказной работы первого блока – 0,8; второго – 0,75; третьего – 0,9. Найти вероятность работы устройства, если для этого достаточно безотказной работы двух блоков.

3.10. Вероятность обращения в течение года в страховую компанию с иском о возмещении ущерба для первого клиента равна 0,4. Для второго клиента вероятность такого же обращения равна 0,2, а для третьего клиента – 0,1. Найти вероятность того, что в течение года в страховую компанию обратится хотя бы один клиент, если обращения клиентов – независимые события.

3.11. Магазином отправлена за товаром автомашина на 3 различных склада. Вероятность наличия товара на первом складе равна 0,7; на втором – 0,4; на третьем – 0,9. Найти вероятность того, что нужного товара не окажется только на одном складе.

3.12. Областная больница города объявила о проведении тендера по определению поставщиков лекарственных средств. Заявки на участие были поданы тремя организациями. Вероятность заключения контракта с первой организацией равна 0,6, со второй – 0,9, с третьей – 0,8. Найти вероятность того, что поставщиком лекарственных средств станет только одна из указанных организаций.

3.13. При изготовлении детали заготовка должна пройти 3 операции. Полагая появление брака на отдельных операциях событиями независимыми, найти вероятность изготовления стандартной детали, если вероятность брака на первой операции равна 0,15, на второй – 0,1 и на третьей – 0,03.

3.14. Вероятность того, что книга имеется в фондах первой библиотеки, равна 0,3, второй – 0,8 и третьей – 0,6. Определить вероятность наличия книги в фондах хотя бы одной библиотеки.

3.15. Деталь с вероятностью 0,01 имеет дефект A, с вероятностью 0,02 – дефект B и с вероятностью 0,005 имеет оба дефекта. Найти вероятность того, что деталь имеет хотя бы один дефект, если наличие дефектов A и B независимы.

3.16. Рабочий обслуживает 4 работающих независимо друг от друга станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй – 0,4, третий – 0,7, четвертый – 0,4. Найти вероятность того, что в течение часа ни один станок не потребует внимания рабочего.

3.17. Студент в течение семестра должен выполнить три контрольных работы по физике. Вероятность сдать первую контрольную работу на положительную оценку равна 0,4, вторую контрольную работу равна 0,7, третью контрольную работу – 0,6. Найти вероятность того, что студент не выполнит на положительную оценку только одну работу.

3.18. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.

3.19. Среди десяти хоккеистов 6 человек имеют звание «мастер спорта». Найти вероятность того, что в наудачу выбранной пятерке игроков не менее четырех мастеров спорта.

3.20. Швея принимает заказы на дому. Необходимые материалы продаются в двух магазинах. Вероятность наличия нужного материала в первом магазине равна 0,6, во втором – 0,7. Найти вероятность того, что только в одном магазине не окажется нужного материала.

3.21. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и кольца соответственно равны 0,2; 0,15 и 0,1. Найти вероятность попадания в мишень.

3.22. По каналу связи передано 3 сообщения. Полагая искажение каждого сообщения при передаче событиями независимыми, найти вероятность того, что по крайней мере два сообщения искажено помехами, если вероятность первому сообщению быть искаженным равна 0,1, второму – 0,2, а третьему – 0,3.

3.23. Охотник выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он попадет два раза.

3.24. В ящике находится 7 деталей 1-го вида и 3 детали 2-го вида. Из ящика поочередно достают 2 детали, причем вынутые детали обратно в ящик не возвращаются. Найти вероятность извлечения деталей разных видов.

3.25. Специалист обрабатывает информацию с помощью двух вычислительных устройств, работающих независимо друг от друга. Каждое устройство имеет вероятность отказа, равную 0,2. Определить вероятность того, что при обработке информации откажет только одно устройство, а другое будет исправно.

3.26. На военных учениях радист трижды вызывает штаб. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. События, состоящие в том, что данный вызов будет принят, независимы. Найти вероятность того, что штаб услышит вызов.

3.27. Из коробки, содержащей 5 красных и 3 черных шариковых ручки, извлекают поочередно 2 ручки. Найти вероятность того, что ручки разных цветов, при условии, что извлеченная первой ручка не возвращается в коробку.

3.28. Для охраны коммерческого киоска установлено 2 независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при вторжении в киоск сработает первый сигнализатор, равна 0,95, второй – 0,9. Найти вероятность того, что при вторжении в киоск сработает только один сигнализатор.

3.29. Две фирмы независимо друг от друга взяли кредиты в банке. Вероятность вернуть кредит в срок для первой фирмы равна 0,75, а для второй – 0,8. Найти вероятность того, что, хотя бы одна фирма вернет кредит в срок.

3.30. Студент первого курса в течение семестра должен выполнить контрольные работы по трем предметам: математика, физика и химия. Вероятность сдать на положительную оценку контрольную работу по математике равна 0,6, по физике – 0,7, по химии – 0,9. Найти вероятность того, что студент не выполнит на положительную оценку только одну контрольную работу.

4. Повторные независимые испытания (формулы Бернулли, Пуассона, локальная и интегральная формулы Лапласа)

В заданиях а) и б) вычислить $P_n(k)$ – вероятность наступления события A ровно k раз в серии из n независимых испытаний, если p – вероятность наступления этого события в одном испытании.

В задании в) при тех же условиях найти $P_n(k_1;k_2)$ – вероятность наступления события не менее k_1 раз и не более k_2 раз.

4.1 а) $p=0,7; k=3; n=5;$ б) $p=0,01; k=2; n=500;$ в) $p=0,3;\ k_1=80;\ k_2=90;$ $n=250$.	4.2 а) $p=0,12; k=45; n=250;$ б) $p=\frac{2}{3};\ k=2;\ n=3;$ в) $p=0,8;\ k_1=200;\ k_2=230;$ $n=300$.
4.3 а) $p=0,006; k=6; n=500;$ б) $p=0,45; k=4; n=7;$ в) $p=0,3;\ k_1=488;\ k_2=548;$ $n=864$.	4.4 а) $p=0,35; k=3; n=8;$ б) $p=0,36; k=90; n=225;$ в) $p=0,8;\ k_1=290;\ k_2=390;$ $n=400$.

4.5 а) $p=0{,}16;\ k=20;\ n=100;$ б) $p=0{,}4;\ k=4;\ n=6;$ в) $p=0{,}4;\ k_1=120;\ k_2=140;$ $n=384.$	4.6 а) $p=0{,}2;\ k=76;\ n=330;$ б) $p=0{,}2;\ k=5;\ n=7;$ в) $p=0{,}4;\ k_1=120;\ k_2=210;$ $n=530.$
4.7 а) $p=0{,}05;\ k=4;\ n=800;$ б) $p=0{,}8;\ k=3;\ n=7;$ в) $p=0{,}7;\ k_1=357;\ k_2=378;$ $n=525.$	4.8 а) $p=0{,}8;\ k=4;\ n=6;$ б) $p=0{,}25;\ k=85;\ n=300;$ в) $p=0{,}8;\ k_1=300;\ k_2=340;$ $n=400.$
4.9 а) $p=0{,}25;\ k=2;\ n=4;$ б) $p=0{,}003;\ k=0;\ n=100;$ в) $p=0{,}15;\ k_1=45;\ k_2=70;$ $n=400.$	4.10 а) $p=0{,}5;\ k=2;\ n=6;$ б) $p=0{,}001;\ k=5;\ n=4000;$ в) $p=0{,}32;\ k_1=90;\ k_2=100;$ $n=250.$
4.11 а) $p=0{,}36;\ k=150;\ n=400;$ б) $p=0{,}6;\ k=4;\ n=8;$ в) $p=0{,}6;\ k_1=366;\ k_2=372;$ $n=600.$	4.12 а) $p=0{,}9;\ k=3;\ n=5;$ б) $p=0{,}002;\ k=3;\ n=1000;$ в) $p=0{,}9;\ k_1=790;\ k_2=830;$ $n=900.$
4.13 а) $p=0{,}002;\ k=4;\ n=4000;$ б) $p=0{,}85;\ k=3;\ n=7;$ в) $p=0{,}3;\ k_1=90;\ k_2=140;$ $n=336.$	4.14 а) $p=0{,}75;\ k=4;\ n=8;$ б) $p=0{,}49;\ k=176;\ n=400;$ в) $p=0{,}2;\ k_1=70;\ k_2=90;$ $n=400.$
4.15 а) $p=0{,}5;\ k=3;\ n=5;$ б) $p=0{,}003;\ k=3;\ n=2000;$ в) $p=0{,}5;\ k_1=150;\ k_2=200;$ $n=400.$	4.16 а) $p=0{,}1;\ k=1;\ n=5;$ б) $p=0{,}02;\ k=4;\ n=200;$ в) $p=0{,}6;\ k_1=220;\ k_2=235;$ $n=400.$
4.17 а) $p=0{,}004;\ k=5;\ n=5000;$ б) $p=0{,}4;\ k=1;\ n=4;$ в) $p=0{,}3;\ k_1=90;\ k_2=100;$ $n=380.$	4.18 а) $p=\frac{2}{3};\ k=3;\ n=4;$ б) $p=0{,}4;\ k=210;\ n=530;$ в) $p=0{,}48;\ k_1=100;\ k_2=120;$ $n=300.$

4.19 а) $p=0,25;\ k=75;\ n=300;$ б) $p=0,4;\ k=1;\ n=5;$ в) $p=0,55;\ k_1=130;\ k_2=200;$ $n=400.$	4.20 а) $p=0,8;\ k=3;\ n=5;$ б) $p=0,25;\ k=85;\ n=300;$ в) $p=0,5;\ k_1=300;\ k_2=380;$ $n=800.$
4.21 а) $p=0,2;\ k=2;\ n=6;$ б) $p=0,01;\ k=6;\ n=200;$ в) $p=0,25;\ k_1=120;\ k_2=230;$ $n=520.$	4.22 а) $p=0,75;\ k=170;\ n=244;$ б) $p=0,7;\ k=2;\ n=5;$ в) $p=0,18;\ k_1=55;\ k_2=90;$ $n=250.$
4.23 а) $p=0,65;\ k=4;\ n=5;$ б) $p=0,003;\ k=5;\ n=3000;$ в) $p=0,01;\ k_1=70;\ k_2=110;$ $n=900.$	4.24 а) $p=0,55;\ k=3;\ n=6;$ б) $p=0,25;\ k=115;\ n=432;$ в) $p=0,7;\ k_1=480;\ k_2=520;$ $n=756.$
4.25 а) $p=0,1;\ k=2;\ n=5;$ б) $p=0,01;\ k=5;\ n=400;$ в) $p=0,8;\ k_1=710;\ k_2=740;$ $n=900.$	4.26 а) $p=0,25;\ k=6;\ n=8;$ б) $p=0,8;\ k=750;\ n=900;$ в) $p=0,4;\ k_1=570;\ k_2=630;$ $n=1500.$
4.27 а) $p=0,001;\ k=5;\ n=1000;$ б) $p=0,8;\ k=2;\ n=5;$ в) $p=0,5;\ k_1=90;\ k_2=110;$ $n=200.$	4.28 а) $p=0,8;\ k=4;\ n=5;$ б) $p=0,5;\ k=110;\ n=200;$ в) $p=0,85;\ k_1=425;\ k_2=450;$ $n=500.$
4.29 а) $p=0,0001;\ k=4;\ n=10000;$ б) $p=0,5;\ k=5;\ n=8;$ в) $p=0,4;\ k_1=570;\ k_2=630;$ $n=1500.$	4.30 а) $p=0,5;\ k=2;\ n=5;$ б) $p=0,01;\ k=4;\ n=200;$ в) $p=0,8;\ k_1=75;\ k_2=85;$ $n=100.$

5. Повторные независимые испытания. Определение вероятности появления *k* успехов в серии из *n* независимых испытаний ($P_n(k)$)

5.1. 30 % изделий данного предприятия – это продукция высшего сорта. Покупатель приобрел 6 изделий, изготовленных на этом предприятии. Чему равна вероятность того, что 4 из них высшего сорта?

5.2. Вероятность получения с конвейера изделия первого сорта равна 0,9. Определить вероятность того, что из взятых с конвейера на проверку 600 изделий 530 будут первого сорта.

5.3. Вероятность изделию быть бракованным равна 0,05. Найти вероятность того, что среди 1000 изделий 40 бракованных.

5.4. Вероятность того, что данное изделие будет забраковано, равна 0,2. Определить вероятность того, что в партии из 400 изделий 104 будут забракованы.

5.5. Завод отправил заказчику партию из 500 изделий. Вероятность повреждения изделий в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что заказчик получит 3 поврежденных изделия.

5.6. В первые классы должно быть принято 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

5.7. Вероятность того, что расход воды в течение дня окажется выше нормы, равна 0,3. Найти вероятность того, что расход воды будет в пределах нормы в течение 5 дней из ближайших 7 дней.

5.8. Среди семян пшеницы 0,6 % сорняков. Какова вероятность при проверке 1000 семян обнаружить ровно 6 семян сорняков?

5.9. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян не взойдет 130, если всхожесть семян имеет вероятность 0,75.

5.10. Стрелок совершает 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна 0,85. Найти вероятность того, что стрелок попадет ровно 2 раза.

5.11. Игральную кость бросают 6 раз. Найти вероятность того, что 5 очков выпадут ровно 5 раз.

5.12. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что стотысячный тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

5.13. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Какова вероятность того, что среди 1000 новорожденных окажется ровно 480 девочек?

5.14. Вероятность нарушения герметичности банки консервов равна 0,0005. Найти вероятность того, что среди 2000 банок ровно две окажутся с нарушениями герметичности.

5.15. Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орел выпадет ровно 225 раз.

5.16. Вероятность зараженности зерна вредителями равна 0,01. Определить вероятность того, что в выборке из 100 зерен окажется ровно 3 зараженных зерна.

5.17. Вероятность рождения мальчика равна 0,52. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется ровно 30 девочек.

5.18. Вероятность изготовления бракованного генератора для автомобильного двигателя равна 0,0002. Определить вероятность того, что в изготовленной партии из 500 генераторов окажется только один бракованный.

5.19. В обычный учебный день вероятность присутствия студента на лекции равна 0,8. Найти вероятность того, что из 100 студентов на лекции будет присутствовать только половина студентов.

5.20. В ботаническом саду посажено 7 саженцев вишни. Каждый саженец приживается с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что не приживутся ровно 2 саженца.

5.21. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,3. Найти вероятность того, что среди 100 выпущенных изделий будет ровно 60 изделий без брака.

5.22. Контрольный тест состоит из 5 вопросов. На каждый вопрос предлагается 4 варианта ответа, среди которых только один правильный. Найти вероятность правильно ответить только на 3 вопроса теста, если ответ выбирается наудачу.

5.23. Для нормальной работы вычислительного центра необходима безотказная работа в течение дня как минимум 5 компьютеров. Какова вероятность того, что при наличии 6 компьютеров вычислительный центр будет работать нормально, если вероятность отказа для каждого компьютера в течение дня равна 0,05?

5.24. Вероятность обращения в поликлинику каждого взрослого человека в период эпидемии гриппа равна 0,75. Найти вероятность того, что из 2000 жителей микрорайона в поликлинику обратится 1200.

5.25. Вероятность покупки бракованного комплекта посуды равна 0,1. Найти вероятность того, что из 7 купленных комплектов только 5 будет без брака.

5.26. В приборе 5 ламп. Вероятность выхода из строя каждой лампы в течение года равна 1/6. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить только одну лампу?
5.27. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность ровно двух попаданий в цель, если число выстрелов равно 5000.
5.28. Известно, что 70 % родившихся ягнят обычно имеют хорошие наследственные признаки. Какова вероятность того, что из восьми родившихся ягнят хорошие наследственные признаки будут иметь ровно шесть?
5.29. Вероятность выигрыша игрока на бирже в течение одного дня – 0,25. Найти вероятность того, что в течение 8 дней он выиграет ровно 6 раз.
5.30. В партии 5000 изделий. Вероятность брака каждого изделия составляет 0,0002. Найти вероятность того, что в партии ровно 3 бракованных изделия.

6. Повторные независимые испытания. Определение вероятности того, что в серии из *n* независимых испытаний число успехов окажется в промежутке от k_1 до k_2 ($P_n(k_1;k_2)$)

6.1. Всхожесть семян растения данного вида составляет 90 %. Найти вероятность того, что из 800 посеянных семян взойдет не менее 700.
6.2. В мастерской имеется 12 моторов. При определенной температуре вероятность того, что мотор в данный момент работает с полной нагрузкой, равна 0,8. Найти вероятность того, что при этой температуре не менее 10 моторов работает с полной нагрузкой.
6.3. Производится залп из 6 орудий по некоторому объекту. Вероятность поражения объекта каждым орудием при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо не менее 4 попаданий.
6.4. В производственном процессе вероятность брака для каждой детали равна 0,02. При обнаружении в партии из 150 деталей более 5 бракованных вся партия задерживается. Определить вероятность того, что партия будет принята.
6.5. Вероятность изделию быть бракованным равна 0,05. Найти вероятность того, что среди 1 000 изделий число бракованных находится в промежутке от 40 до 70 включительно.

6.6. Прибор состоит из 200 деталей, каждая из которых за время t может выйти из строя с вероятностью, равной 0,01. Найти вероятность того, что за время t выйдут из строя не более 3 деталей.

6.7. Вероятность поражения мишени при 1 выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз.

6.8. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее 8 автомашин, а их имеется 10. Вероятность невыхода каждой автомашины на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы автобазы.

6.9. Прибор состоит из 200 деталей, каждая из которых за время t может выйти из строя с вероятностью, равной 0,01. Найти вероятность того, что за время t выйдут из строя не менее 2 деталей.

6.10. Учебник издан тиражом 100 000 экз. Вероятность того, что он сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит менее 3 бракованных книг.

6.11. Нужно исследовать 400 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе одинакова и равна 0,8. Определить вероятность того, что число проб с промышленным содержанием металла будет заключено между 290 и 350.

6.12. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение этого срока из 6 телевизоров не более 1 потребует ремонта.

6.13. При передаче одного знака вероятность его искажения составляет 0,1. Какова вероятность того, что из 5 переданных знаков искаженных окажется не более 3?

6.14. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 100 покупателей обувь 41-го размера потребуется не более 30.

6.15. Всхожесть семян некоторого растения составляет 70 %. Какова вероятность того, что из 10 посеянных семян взойдут не менее 3?

6.16. Вероятность брака при выпуске резцов равна 0,009. Резцы укладываются в коробки по 100 шт. Найти вероятность того, что в коробке число бракованных резцов окажется не более 3.

6.17. Завод отправил на базу 5 000 годных изделий. Вероятность повреждения каждого из них в пути равна 0,0002. Найдите вероятность того, что среди 5 000 изделий в пути будет повреждено не более 3.

6.18. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором вероятность их включения составляет 0,8. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

6.19. Вероятность брака при сборке прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что из 500 приборов небракованными окажутся от 410 до 430 (включительно).

6.20. При штамповке металлических клемм получается в среднем 90 % годных. Найти вероятность того, что среди 900 клемм окажется от 790 до 820 (включительно) годных.

6.21. Среди изделий, произведенных на станке-автомате, в среднем 60 % изделий первого сорта. Какова вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4 изделий первого сорта.

6.22. Вероятность поражения стрелком мишени равна 0,7. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 65 до 80 раз.

6.23. В здании имеется 2500 ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что вечером будет включено не менее 1250 и не более 1275 ламп.

6.24. Производится 8 выстрелов по цели, в каждом из которых вероятность попадания равна 0,1. Найти вероятность того, что цель будет поражена хотя бы два раза.

6.25. Вероятность изделию оказаться бракованным равна 0,005. Найти вероятность того, что из 10 000 наугад взятых изделий бракованных окажется не более 80.

6.26. Каждый студент посещает столовую на большой перемене с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что в учебный день столовая на большой перемене будет заполнена не более чем на две трети, если в институте обучается 1 000 студентов, а в столовой имеется 105 посадочных мест?

6.27. Прибор состоит из четырех элементов, включенных параллельно. Вероятность безотказной работы каждого элемента равна 0,8. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы два элемента были исправны. Какова вероятность того, что прибор будет работать безаварийно?

6.28. Вероятность неточной сборки прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 500 приборов окажется от 420 до 430 (включительно) точных.

6.29. В результате проверки качества приготовленного к посеву зерна было установлено, что 90 % зерен всхожи. Требуется определить вероятность того, что из 1 000 высаженных зерен взойдут от 880 до 920 шт.

6.30. При стрельбе вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,2. Какова вероятность того, что при пяти выстрелах будет не менее 2 попаданий?

7. Формула полной вероятности

7.1. Имеется 6 одинаковых по внешнему виду урн. В одной 2 белых и 3 черных шара, в двух – 3 белых и 2 черных шара, а в остальных трех – по 1 черному и по 4 белых шара. Наудачу выбирается урна и из нее наудачу извлекается шар. Чему равна вероятность того, что этот шар окажется белым?

7.2. Прибор может работать в трех режимах: нормальном, форсированном и недогруженном. Нормальный режим наблюдается в 60 % случаев работы прибора, форсированный – в 30 % и недогруженный – в 10 %. Надежность работы прибора при нормальном режиме равна 0,8, при форсированном – 0,5, при недогруженном – 0,9. Найти вероятность надежной работы прибора.

7.3. Известно, что в партии из 600 электрических лампочек 200 изготовлены заводом № 1, 250 – заводом № 2, 150 – заводом № 3. Вероятности изготовления стандартной лампочки заводами № 1, № 2, № 3 соответственно равны 0,97; 0,91; 0,93. Найти вероятность того, что взятая наудачу лампочка окажется стандартной.

7.4. На базу поступили одинаковые по объему партии холодильников с двух разных заводов. Вероятность того, что холодильник проработает без поломок в течение гарантийного срока, равна 0,85, если холодильник собран на первом заводе, и 0,95, если на втором. Найти вероятность того, что наугад взятый холодильник не сломается в течение гарантийного срока.

7.5. Частица пролетает мимо трех счетчиков, причем она может попасть в каждый из них с вероятностями 0,3; 0,2 и 0,5. Если частица попадает в первый счетчик, то она регистрируется с вероятностью 0,6, во второй – 0,5 и в третий – 0,7. Найти вероятность того, что частица будет зарегистрирована.

7.6. Имеется пять мишеней типа A, три – типа B, две – типа C. Производится наудачу один выстрел по одной из них. Вероятность попадания в мишень типа A равна 0,4, B – 0,1, C – 0,6. Найти вероятность попадания.

7.7. Предприятие, производящее компьютеры, получает одинаковые комплектующие детали от трех поставщиков. Первый поставляет 50 % всех комплектующих деталей, второй – 20 %, третий – 30 % деталей. Известно, что в продукции первого поставщика брак составляет 4 %, второго – 5 %, третьего – 2 %. Определить вероятность того, что деталь, выбранная наудачу из всех полученных, будет бракованной.

7.8. В студенческой группе 3 чел. имеют высокий уровень подготовки, 13 чел. – средний и 4 – низкий. Вероятности успешной сдачи экзамена для данных студентов соответственно равны: 0,8; 0,7 и 0,4. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент сдаст экзамен.

7.9. В первой коробке находится 20 деталей, из них 18 стандартных, во второй коробке – 10 деталей, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята одна деталь и переложена в первую коробку. Какова вероятность того, что деталь, наудачу извлеченная после этого из первой коробки, окажется стандартной?

7.10. Студент разыскивает нужную ему тему в трех учебниках. Вероятности того, что тема содержится в первом, втором и третьем учебниках соответственно равны 0,6; 0,3 и 0,9. Найти вероятность того, что в наудачу выбранном учебнике есть нужная студенту тема.

7.11. Объемы выполняемых тремя работниками заказов относятся как 5:4:1. Доля успешно выполненных заказов для каждого из них составляет соответственно 98, 95 и 90 %. Найти вероятность успешного выполнения заказа.

7.12. На делянке береза составляют 70 %, ель – 10 % и сосна – 20 %. При таксации диаметр у комля больше 20 см для 20 % берез, 30 % елей и 70 % сосен. Найти вероятность того, что диаметр наудачу выбранного дерева окажется больше 20 см.

7.13. Вероятности несвоевременной доставки груза для первой, второй и третьей транспортных фирм равны 0,02; 0,04 и 0,03. Найти вероятность того, что отправленный груз случайно выбранной фирмой будет доставлен своевременно.

7.14. Зерна пшеницы могут быть разбиты на 3 группы. Зерна первой группы составляют 95 %, второй – 3 % и третьей – 2 %. Вероятности того, что зерна дадут колос, содержащий не менее 50 зерен, для семян указанных групп, равны соответственно 0,5; 0,6 и 0,2. Найти вероятность того, что из взятого наудачу зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

7.15. В избирательную комиссию поступило 1 200 бюллетеней с участка № 1, 1 500 – участка № 2 и 1 300 – участка № 3. Среди бюллетеней с участка № 1 в среднем 90 % действительных, с участка № 2 – 80 %, с участка № 3 – 60 %. Найти вероятность того, что наугад взятый бюллетень окажется недействительным.

7.16. Имеются три партии ламп, насчитывающих соответственно 40, 130 и 30 шт. Вероятности того, что лампа проработает заданное время, для каждой партии соответственно равны 0,7; 0,8 и 0,4. Какова вероятность того, что наудачу выбранная лампа проработает заданное время?

7.17. Детали производятся на трех станках. Изготовленные объемы относятся как 6:3:1. Первый станок дает 1 % брака, второй – 2 %, третий – 3 %. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь оказалась стандартной.

7.18. В первой урне 7 белых и 8 черных шаров, во второй – 8 белых и 5 черных. Из второй урны случайным образом перекладывают в первую один шар, после чего из первой урны берут один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется белым?

7.19. В автобусном парке находится 12 автобусов маршрута № 24 и 8 автобусов маршрута № 1. Найти вероятность того, что вторым по порядку из парка выехал автобус маршрута № 24.

7.20. В группе спортсменов 10 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму равна для лыжника 0,9, для велосипедиста – 0,7, для бегуна – 0,8. Найти вероятность того, что вызванный наудачу спортсмен выполнит норму.

7.21. На склад поступают изделия трех фабрик. Продукция первой фабрики составляет 1 000 изделий, второй – 2 000, третьей – 2 500. Известно, что процент нестандартных изделий первой фабрики равен 3, второй – 2, третьей – 1. Найти вероятность того, что наугад взятое на складе изделие окажется нестандартным.

7.22. Среди покупателей салона 50 % женщин, 40 % мужчин и 10 % детей. Женщины покупают телефон Honor в 55 % случаев, мужчины – в 35 % и дети – в 15 %. Найти вероятность того, что случайный покупатель приобретет этот телефон.

7.23. В первом ящике 10 деталей, а во втором – 12. В каждом ящике одна бракованная деталь. Из первого ящика во второй перекладывают одну деталь, а затем из второго ящика наудачу берут одну деталь. Какова вероятность, что эта деталь стандартна?

7.24. Экономист рассчитал, что вероятность роста стоимости акции его компании в следующем году составит 0,75, если экономика страны будет на подъеме, и 0,3, если будет финансовый кризис. По мнению экспертов, вероятность экономического подъема 0,6. Оценить вероятность того, что акции компании в следующем году поднимутся в цене.

7.25. Среди 20 стрелков 3 отличных, 9 хороших и 8 посредственных. Вероятность поражения цели для отличного стрелка равна 0,9, для хорошего – 0,7, для посредственного – 0,5. Найти вероятность того, что наудачу выбранный стрелок поразит цель.

7.26. В фирму по продаже автомобилей ежедневно поступают автомобили марки BMW – 50 %, марки Audi – 30 %, марки Mercedes – 20 % всех привезенных машин. Среди автомобилей марки BMW в черный цвет покрашены 80 % машин, Audi – 60 % , Mercedes – 90 %. Найти вероятность того, что наудачу купленный автомобиль покрашен в черный цвет.

7.27. Три охотника одновременно стреляют в одну мишень. Известно, что вероятность попадания первого охотника равна 0,3, второго – 0,6, третьего – 0,8. Найти вероятность отсутствия попаданий в мишень.

7.28. Двигатель работает в трех режимах: нормальном, форсированном и на холостом ходу. 70 % времени двигатель работает в нормальном режиме, а 20 % – в форсированном. В режиме холостого хода вероятность его выхода из строя равна 0,1, при нормальном режиме работы – 0,2, а при форсированном – 0,7. Какова вероятность выхода из строя двигателя во время работы?

7.29. На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25 %, второй – 35 %, третий – 40 % всех замков. Брак составляет соответственно 6, 4 и 2 %. Найти вероятность того, что случайно выбранный замок будет качественным.

7.30. Вероятность дождливого дня в городе равна 0,2. Известно, что вероятность выиграть футбольный матч команде в дождливый день равна 0,4, а в сухой – 0,7. Определить вероятность того, что команда, играя в этом городе, выиграет.

8. Формула Байеса

8.1. На общий конвейер поступают детали с трех автоматов. Вероятность того, что деталь отличного качества, для первого автомата равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7, их производительности относятся как 2:3:5. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь отличного качества изготовлена на втором автомате.

8.2. В первом ящике 12 деталей, а во втором – 10. В каждом ящике две бракованные детали. Из второго ящика в первый перекладывают одну деталь, а затем из первого ящика наудачу берут одну, которая оказывается бракованной. Найти вероятность того, что из второго ящика в первый переложили стандартную деталь.

8.3. Компания продает договоры страхования жизни трех уровней: первого, второго и третьего. Из всех застрахованных 50 % приобретают договор первого уровня, 40 % – второго и 10 % – третьего. Вероятность заболеть в течение года для имеющего первый уровень страхования равна 0,01, второй – 0,005, третий – 0,001. Найти вероятность того, что заболевший застрахованный имеет договор третьего уровня.

8.4. В трамвайном депо имеются 8 трамваев маршрута № 2 и 11 трамваев маршрута № 5, которые выходят на линию в случайном порядке. Известно, что вторым из депо вышел трамвай № 2. Найти вероятность того, что первым из депо выехал трамвай маршрута № 5.

8.5. Три автомата с одинаковой производительностью закатывают банки. Доля укупорки с дефектом для первого автомата составляет 1 %, а для второго – 0,5 %, для третьего – 0,2 %. Взятая наугад банка имеет дефект укупорки. Какова вероятность того, что она закатана первым автоматом?

8.6. В первой урне 9 белых и 5 черных шаров, во второй – 8 белых и 6 черных. Из второй урны случайным образом перекладывают в первую один шар, после чего из первой урны берут один шар, который оказывается белым. Какой цвет вероятнее всего имел шар, переложенный из второй урны в первую?

8.7. У рыбака есть три излюбленных места рыбалки. Эти места он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность поимки рыбы с первого заброса на первом месте равна 0,5, на втором – 0,4, на третьем – 0,25. Известно, что рыбак вытащил рыбу с первого заброса. Какова вероятность того, что это случилось на первом месте?

8.8. В двух пакетах находятся конфеты. В первом пакете 15 конфет «Белочка» и 5 шт. «Трюфель», во втором 12 шт. «Белочка» и 7 конфет «Трюфель». Из первого пакета на удачу взяли и переложили во второй одну конфету. Взятая случайным образом из второго пакета конфета оказалась «Белочкой». Какова вероятность того, что из первого пакета во второй переложили «Трюфель»?

8.9. Литье в болванках поступает из двух заготовительных цехов: 60 % из первого цеха и 40 % из второго цеха. Литье первого цеха имеет 5 % брака, второго – 10 %. Взятая наудачу болванка оказалась без брака. Какова вероятность ее изготовления первым цехом?

8.10. В первой бригаде 12 рабочих имеют стаж менее 5 лет и 4 рабочих – 5 и свыше пяти лет. Во второй бригаде 8 рабочих имеют стаж менее 5 лет и 6 рабочих – 5 лет и выше. Из первой бригады во вторую переведен один рабочий. Наудачу выбранный из нового состава второй бригады рабочий оказался со стажем менее пяти лет. Найти вероятность того, что во вторую бригаду был переведен рабочий со стажем менее 5 лет.

8.11. Автомашина используется для перевозки товара в три магазина. Вероятность того, что машина будет разгружена в течение 30 мин для первого магазина равна 0,77, для второго – 0,67 и третьего – 0,62. На базу сообщили, что машина разгружена за 30 мин. Определить вероятность того, что это произошло в первом магазине.

8.12. При разрыве снаряда образуются осколки трех весовых категорий: крупные, средние и мелкие. Их доля соответственно составляет 0,2; 0,3 и 0,5 от общего числа осколков. При попадании в броню крупный осколок пробивает ее с вероятностью 0,9, средний – 0,2 и мелкий – 0,05. В броню попал один осколок этого снаряда и пробил ее. Найти вероятность того, что пробоина возникла от крупного осколка.

8.13. В давние времена пассажир мог обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно 0,5; 0,3 и 0,2. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы 0,2, для второй – 0,4, для третьей – 0,6. Пассажир направился в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что это произошло в первой кассе.

8.14. В студенческих отборочных спортивных соревнованиях участвуют 4 студента из первой группы, из второй – 6, из третьей – 5. Вероятности того, что студент из первой, второй, третьей групп попадет в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7; 0,8. Один из студентов в итоге соревнования попал в сборную команду. К какой группе вероятнее всего он принадлежит?

8.15. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0,1 % бракованных, со второго – 0,2 %, с третьего – 0,25 %. Производительности их относятся соответственно как 3:5:2. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на первом станке.

8.16. На трех дочерей – Юлю, Марину и Лену – в семье возложена обязанность мыть посуду. Поскольку Юля старшая, ей приходится выполнять 40 % всей работы. Остальные 60 % работы приходятся поровну на Марину и Лену. Вероятность разбить что-нибудь из посуды (в течение одного мытья) для Юли – 0,02, для Марины – 0,03, для Лены – 0,04. Родители не знают, кто дежурил вечером, но они слышали звон разбитой посуды. Какова вероятность того, что посуду мыла Юля?

8.17. Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей по трем классам: класс 1 (мало рискует), класс 2 (рискует средне), класс 3 (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застрахованных у нее, 30 % принадлежат классу 1, 50 % – классу 2, 20 % – классу 3. Вероятность того, что в течение года водитель класса 1 попадет хотя бы в одно ДТП, равна 0,01; для водителя класса 2 эта вероятность равна 0,03, а для водителя класса 3 – 0,1. Водитель страхует свою машину у этой компании и в течение года попадает в ДТП. Какова вероятность того, что он относится к классу 3?

8.18. В группе из 25 чел., пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей, имеется 5 отличников, 12 подготовленных хорошо, 5 – удовлетворительно и 3 чел. плохо подготовлены. Отличники знают все 30 вопросов программы, хорошо подготовленные – 25, подготовленные удовлетворительно – 15, плохо подготовленные знают лишь 10 вопросов. Выбранный наудачу студент ответил на заданный вопрос. Найти вероятность того, что это был плохо подготовленный студент.

8.19. Предприятие, производящее компьютеры, получает одинаковые комплектующие детали от трех поставщиков. Первый поставляет 50 % всех комплектующих деталей, второй – 20 %, третий – 30 % деталей. В продукции первого поставщика брак составляет 4 %, у второго – 5 %, у третьего – 2 %. Деталь, выбранная наудачу из всех полученных, оказалась бракованной. Определить вероятность того, что эта деталь второго поставщика.

8.20. При решении задачи на компьютере могут возникнуть ошибки трех видов: 1) при обработке текста программы транслятором – 40 %, 2) при работе редактора внешних связей – 50 % и 3) в процессе исполнения программы – 10 %. Вероятности выявления ошибок первого вида – 0,8; второго – 0,6; третьего – 0,4. При решении задачи была выявлена ошибка. Найти вероятность того, что она возникла в процессе исполнения программы.

8.21. Комплекты деталей изготавливают мастер и ученик: мастер – 70 % деталей, а ученик – 30 %. Мастер допускает брак в пяти случаях из 100, а ученик портит каждую пятую деталь. Для контроля наугад взяли одну деталь, и она оказалась бракованной. Кто вероятнее всего изготовил деталь, мастер или ученик?

8.22. По трассе, на которой стоит автозаправочная станция, проезжают три типа транспортных средств: грузовые, легковые и автобусы, в соотношении 3:5:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,4, легковая – 0,5, автобус – 0,2. Найти вероятность того, что к автозаправочной станции подъехала легковая машина.

8.23. По статистике объем выдаваемых кредитов в банке таков: 10 % государственным органам, 30 % – юридическим, остальное – физическим лицам. Вероятности невозврата кредита соответственно равны: 0,01; 0,2 и 0,4. По одному из кредитов произошел невозврат. Какова вероятность того, что данный кредит выдан юридическому лицу?

8.24. В пирамиде стоят 15 винтовок, 3 из них имеют оптический прицел, а остальные нет. Вероятность попадания из винтовки с оптическим прицелом составляет 0,8, а из винтовки без оптического прицела – 0,4. Стрелок поразил мишень. Из какой винтовки он вероятнее всего стрелял?

8.25. В городе – 300 гостиничных номеров. Из них 150 номеров – в первой гостинице, 80 – во второй, остальные – в третьей. В турфирме известно, что вероятности наличия в них свободного номера нужного клиенту класса составляют соответственно 0,6; 0,9 и 0,8. Определить вероятность того, что его поселили в первую гостиницу.

8.26. На базу поступили одинаковые по объему партии холодильников с двух разных заводов. Вероятность того, что холодильник, собранный на первом заводе, проработает без поломок в течение гарантийного срока, равна 0,8 и на втором – 0,9. Холодильник вышел из строя в течение гарантийного срока. Каким заводом он вероятнее всего был изготовлен?

8.27. В студенческой группе 2 чел. имеют высокий уровень подготовки, 13 чел. – средний и 5 – низкий. Вероятности успешной сдачи экзамена для данных студентов соответственно равны: 0,9; 0,7 и 0,4. Студент сдал экзамен. Какова вероятность того, что он имел средний уровень подготовки?

8.28. Человек, заблудившийся в лесу, вышел на поляну, откуда вели 4 дороги. Вероятности выхода из леса за час для них соответственно равны 0,6; 0,5; 0,4; 0,1. Выбрав дорогу, человек вышел из леса через час. Чему равна вероятность того, что он пошел по первой дороге?

8.29. Из 20 пациентов 3 чел. имеют заболевание A, 10 – заболевание B и 7 – C. Вероятность выздоровления после заболевания A равна 0,9; после B – 0,7 и после C – 0,5. Найдите вероятность того, что выписавшийся из больницы пациент победил заболевание C.

8.30. Три завода выпускают одинаковые изделия, причем первый завод производит 50 %, второй – 20 % и третий – 30 %. Брак в продукции первого завода составляет 1 %, второго – 2 % и третьего – 3 %. Наудачу выбранное изделие оказалось бракованным. Найти вероятность того, что оно изготовлено на втором заводе.

9. Закон распределения дискретной случайной величины

Дан закон распределения дискретной случайной величины X. Найти функцию распределения $F(x)$, значение $F(x_0)$, вычислить вероятность $P(\alpha,\beta)$ того, что случайная величина X примет значения из промежутка (α,β). Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины

9.1 $x_0 = 0;\ \alpha = 0;\ \beta = 3$

X	–2	0	1	3
P	0,2	0,1	0,5	0,2

9.2 $x_0 = 2;\ \alpha = 0;\ \beta = 3$

X	0	1	2	3
P	0,1	0,1	0,3	0,5

9.3	X	–0,3	0	0,1	1	$x_0 = 1$; $\alpha = 0$; $\beta = 1$
	P	0,3	0,1	0,4	0,2	
9.4	X	0	2	4	6	$x_0 = 0$; $\alpha = 0$; $\beta = 6$
	P	0,1	0,1	0,2	0,6	
9.5	X	1	3	5	7	$x_0 = 3$; $\alpha = 0$; $\beta = 3$
	P	0,2	0,3	0,1	0,4	
9.6	X	0	2	3	4	$x_0 = 4$; $\alpha = 0$; $\beta = 3$
	P	0,2	0,2	0,3	0,3	
9.7	X	2	2,4	3	3,5	$x_0 = 2,4$; $\alpha = 0$; $\beta = 2,4$
	P	0,2	0,1	0,3	0,4	
9.8	X	5	10	15	20	$x_0 = 15$; $\alpha = 5$; $\beta = 16$
	P	0,4	0,3	0,1	0,2	
9.9	X	1	3	5	6	$x_0 = 5$; $\alpha = 1$; $\beta = 6$
	P	0,2	0,15	0,25	0,4	
9.10	X	–0,2	0	0,2	0,3	$x_0 = 0,3$; $\alpha = 0$; $\beta = 0,3$
	P	0,3	0,1	0,3	0,3	
9.11	X	1	3	5	7	$x_0 = 5$; $\alpha = 1$; $\beta = 5$
	P	0,3	0,2	0,2	0,3	
9.12	X	–2	0	2	4	$x_0 = 4$; $\alpha = –3$; $\beta = 2$
	P	0,1	0,2	0,5	0,2	
9.13	X	–0,5	0	0,5	1	$x_0 = 0,5$; $\alpha = 0$; $\beta = 1$
	P	0,1	0,4	0,3	0,2	
9.14	X	–1	0	1	2	$x_0 = 1$; $\alpha = - 1$; $\beta = 2$
	P	0,2	0,3	0,4	0,1	
9.15	X	–1	0	0,5	1	$x_0 = 0$; $\alpha = –1$; $\beta = 1$
	P	0,3	0,1	0,3	0,3	

9.16	X	3	6	9	12	$x_0 = 9;\ \alpha = 6;\ \beta = 12$
	P	0,3	0,4	0,2	0,1	
9.17	X	3	4	5	7	$x_0 = 5;\ \alpha = 3;\ \beta = 5$
	P	0,3	0,1	0,4	0,2	
9.18	X	–1	0	1	2	$x_0 = 1;\ \alpha = 0;\ \beta = 1$
	P	0,2	0,15	0,25	0,4	
9.19	X	0	1	2	3	$x_0 = 3;\ \alpha = -1;\ \beta = 2$
	P	0,2	0,1	0,4	0,3	
9.20	X	0	2	3	5	$x_0 = 2;\ \alpha = -1;\ \beta = 3$
	P	0,1	0,2	0,3	0,4	
9.21	X	–2	0	1	5	$x_0 = 0;\ \alpha = -2;\ \beta = 5$
	P	0,15	0,2	0,15	0,5	
9.22	X	–1	0	1	1,5	$x_0 = 0;\ \alpha = -1;\ \beta = 1$
	P	0,4	0,1	0,2	0,3	
9.23	X	1	3	5	7	$x_0 = 5;\ \alpha = 1;\ \beta = 5$
	P	0,1	0,1	0,3	0,5	
9.24	X	1	3	5	7	$x_0 = 1;\ \alpha = -2;\ \beta = 1$
	P	0,1	0,1	0,5	0,3	
9.25	X	–3	1	3	4	$x_0 = 4;\ \alpha = 0;\ \beta = 3{,}5$
	P	0,3	0,2	0,1	0,4	
9.26	X	–3	1	3	4	$x_0 = 6;\ \alpha = 2;\ \beta = 6$
	P	0,3	0,2	0,4	0,1	
9.27	X	–3	0	1	3	$x_0 = 1;\ \alpha = -3;\ \beta = 0{,}5$
	P	0,4	0,2	0,3	0,1	
9.28	X	–5	2	3	6	$x_0 = 2;\ \alpha = 3;\ \beta = 7$
	P	0,1	0,4	0,3	0,2	

9.29	$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline X & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline P & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ \hline \end{array}$	$x_0 = 6$; $\alpha = 2$; $\beta = 6$
9.30	$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline X & 5 & 7 & 10 & 15 \\ \hline P & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ \hline \end{array}$	$x_0 = 10$; $\alpha = 5$; $\beta = 12$

10. Функция распределения дискретной случайной величины

Построить график функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X. Составить таблицу распределения случайной величины X.

10.1 $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 0{,}3, & 2 < x \le 3; \\ 0{,}5, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$	10.2 $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 3; \\ 0{,}3, & 3 < x \le 6; \\ 0{,}7, & 6 < x \le 9; \\ 1, & x > 9. \end{cases}$
10.3 $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}3, & 0 < x \le 2; \\ 0{,}6, & 2 < x \le 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$	10.4 $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}4, & 0 < x \le 2; \\ 0{,}5, & 2 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$
10.5 $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -2; \\ 0{,}2, & -2 < x \le 0; \\ 0{,}6, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$	10.6 $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}3, & 0 < x \le 2; \\ 0{,}6, & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$
10.7 $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 0{,}3, & 2 < x \le 3; \\ 0{,}5, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$	10.8 $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 5; \\ 0{,}4, & 5 < x \le 10; \\ 0{,}8, & 10 < x \le 15; \\ 1, & x > 15. \end{cases}$
10.9 $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 3; \\ 0{,}3, & 3 < x \le 4; \\ 0{,}7, & 4 < x \le 7; \\ 1, & x > 7. \end{cases}$	10.10 $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}3, & 0 < x \le 1; \\ 0{,}6, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

10.11 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ 0{,}2, & 2<x\le 3;\\ 0{,}6, & 3<x\le 3{,}5;\\ 1, & x>3{,}5.\end{cases}$	10.12 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ 0{,}5, & -1<x\le 0;\\ 0{,}7, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$
10.13 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 0{,}3, & 1<x\le 5;\\ 0{,}7, & 5<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$	10.14 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 0{,}2, & 1<x\le 3;\\ 0{,}5, & 3<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$
10.15 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3;\\ 0{,}15, & 3<x\le 5;\\ 0{,}4, & 5<x\le 8;\\ 1, & x>8.\end{cases}$	10.16 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}3, & 0<x\le 2;\\ 0{,}5, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$
10.17 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -0{,}3;\\ 0{,}3, & -0{,}3<x\le 0;\\ 0{,}5, & 0<x\le 0{,}1;\\ 1, & x>0{,}1.\end{cases}$	10.18 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 0{,}3, & 1<x\le 3;\\ 0{,}8, & 3<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$
10.19 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ 0{,}5, & -2<x\le -1;\\ 0{,}7, & -1<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$	10.20 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ 0{,}4, & -1<x\le 0;\\ 0{,}65, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$
10.21 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -0{,}2;\\ 0{,}4, & -0{,}2<x\le 0;\\ 0{,}6, & 0<x\le 0{,}2;\\ 1, & x>0{,}2.\end{cases}$	10.22 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ 0{,}4, & -1<x\le 0;\\ 0{,}6, & 0<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$
10.23 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ 0{,}25, & -2<x\le 0;\\ 0{,}65, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$	10.24 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -0{,}5;\\ 0{,}2, & -0{,}5<x\le 0;\\ 0{,}7, & 0<x\le 0{,}5;\\ 1, & x>0{,}5.\end{cases}$
10.25 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ 0{,}2, & -3<x\le 2;\\ 0{,}25, & 2<x\le 7;\\ 1, & x>1.\end{cases}$	10.26 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3;\\ 0{,}2, & 3<x\le 5;\\ 0{,}5, & 5<x\le 7;\\ 1, & x>7.\end{cases}$

10.27 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -0{,}2;\\ 0{,}15, & -0{,}2<x\le 1;\\ 0{,}4, & 1<x\le 2{,}5;\\ 1, & x>2{,}5.\end{cases}$	10.28 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ 0{,}45, & -2<x\le 1;\\ 0{,}6, & 1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$
10.29 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0{,}4;\\ 0{,}05, & 0{,}4<x\le 2;\\ 0{,}3, & 2<x\le 3{,}7;\\ 1, & x>3{,}7.\end{cases}$	10.30 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 5;\\ 0{,}2, & 5<x\le 7;\\ 0{,}25, & 7<x\le 10;\\ 1, & x>10.\end{cases}$

11. Дискретная случайная величина. Текстовые задачи

11.1. В баскетбольную корзину бросают мяч до первого попадания, разрешается делать не более трех бросков. Составить закон распределения числа совершенных бросков, если вероятность попадания при любом броске равна 0,7. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение числа бросков.

11.2. Монету подбрасывают 3 раза. Найти таблицу распределения, математическое ожидание и дисперсию числа выпадения герба.

11.3. Даются 3 попытки завести мотоцикл. Вероятность того, что мотоцикл заведется в любой из попыток, равна 0,6. Составить закон распределения – числа X осуществленных попыток, найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

11.4. На витрине лежат три торта. Вероятность того, что в составе любого торта есть сгущенное молоко, равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины – числа тортов со сгущенкой. Найти: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

11.5. В студии имеется три видеокамеры, работающие независимо друг от друга. Для каждой камеры вероятность включения в фиксированный момент равна 0,6. Найти закон распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение числа включенных видеокамер.

11.6. На пути движения автомашины 4 светофора. Каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение автомашины с вероятностью 0,5. Найти закон распределения числа остановок на этих светофорах. Чему равны математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины?

11.7. Из 20 контрольных работ, среди которых 5 оценены на отлично, наугад извлекают 3 работы. Найти закон распределения числа оцененных на отлично работ среди извлеченных, вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

11.8. Вероятность того, что в библиотеке есть необходимая студенту книга, равна 0,4. Составить закон распределения числа библиотек, которые посетит студент для того, чтобы получить книгу, если в городе четыре библиотеки. Вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

11.9. Вероятность изготовления нестандартного изделия при налаженном технологическом процессе постоянна и равна 0,1. Для проверки качества всей партии отдел технического контроля (ОТК) берет 3 детали. При обнаружении нестандартного изделия проверка прекращается, а вся партия задерживается. Составить закон распределения числа изделий, подвергшихся ОТК. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

11.10. Вероятности своевременного прибытия каждой из трех пожарных машин к очагу возгорания равны 0,9, 0,8 и 0,7. Составить закон распределения числа X пожарных машин, прибывших вовремя к очагу возгорания. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

11.11. Предполагая одинаковыми вероятности рождения мальчика и девочки, составить закон распределения количества мальчиков в семьях, имеющих 3 детей. Найти математическое ожидание и дисперсию числа мальчиков в семьях.

11.12. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0,8. Составить закон распределения, найти среднее значение и дисперсию числа израсходованных патронов.

11.13. Рабочий обслуживает 3 независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Составить закон распределения числа станков, которые потребуют внимания рабочего. Найти математическое ожидание и дисперсию числа таких станков.

11.14. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента при включении равна 0,2. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа отказавших элементов при включении.

11.15. В шкафу находятся 10 приборов, из них 6 новых и 4 бывших в употреблении. Из шкафа наугад вынимаются 3 прибора. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа новых приборов среди вынутых.

11.16. Вероятность появления события в отдельном опыте равна 0,3. Опыты проводятся до первого появления события, после чего они прекращаются. Число проводимых опытов ограничено тремя. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа проведенных опытов.

11.17. Вероятность того, что в отдельном магазине района есть сертификаты качества для полного ассортимента товаров, равна 0,7. Комиссия проверила их наличие в четырех магазинах района. Составить закон распределения, вычислить математическое ожидание и дисперсию числа магазинов, в которых при проверке не обнаружены сертификаты на полный ассортимент товаров.

11.18. На переэкзаменовку по теории вероятностей явились 3 студента. Вероятность того, что первый сдаст экзамен, равна 0,8, второй – 0,7, третий – 0,9. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа студентов, сдавших экзамен.

11.19. Передается 4 сообщения по каналу связи. Каждое сообщение с вероятностью 0,2 независимо от других искажается. Случайная величина X – число искаженных сообщений. Найти ее закон распределения, математическое ожидание и дисперсию.

11.20. В коробке лежат 10 карандашей, из которых 7 синих. Наудачу извлекается 3 карандаша. Случайная величина X – число синих карандашей среди извлеченных. Найти ее закон распределения, математическое ожидание и дисперсию.

11.21. У электромонтера 3 лампочки, каждая их которых может иметь дефект с вероятностью 0,1. Лампочка ввинчивается наудачу, если она работает, то работа прекращается, а если она дефектная, то сразу перегорает, после чего заменяется другой. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа использованных лампочек.

11.22. Вероятность того, что денежный приемник автомата при опускании монеты сработает правильно, равна 0,97. Составить закон распределения числа опусканий монет в автомат до первого срабатывания. Найти математическое ожидание и дисперсию количества опусканий монет, если имеется 3 монеты.

11.23. Автомашины доставляют сырье на завод от трех поставщиков. Вероятность прибытия в срок машины от любого из поставщиков постоянна и равна 0,8. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайного числа прибывших в срок автомашин.

11.24. Производится набрасывание колец на колышек. Вероятность попадания при одном броске равна 0,3. Найти закон распределения, среднее значение и дисперсию числа наброшенных колец при трех бросках.

11.25. Выбирается надежный прибор из трех имеющихся. Каждый следующий прибор испытывается лишь в том случае, когда предыдущий оказался ненадежным. Вероятность быть надежным для каждого прибора равна 0,9. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа испытанных приборов.

11.26. Водитель делает не более трех попыток для того, чтобы выбраться на машине из колеи. Вероятность выбраться с первой попытки равна 0,3, со второй – 0,6, с третьей – 0,8. Составить закон распределения числа попыток вывести машину из колеи, найти математическое ожидание и дисперсию.

11.27. Вероятность того, что студент получит повышенную оценку на экзамене, равна 0,9. Составить закон распределения, вычислить математическое ожидание и дисперсию числа студентов, получивших повышенную оценку, из опрошенных четырех.

11.28. Мальчик играет в игровые автоматы до первого выигрыша, при этом денег у него хватит только на три игры. Вероятность выигрыша в каждой игре равна 0,1. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа выигрышей.

11.29. Проводятся соревнования по прыжкам с шестом. Каждому спортсмену дается не более трех попыток. Вероятность взять нужную высоту с первой попытки для данного спортсмена равна 0,6, со второй попытки – 0,8, с третьей – 0,9. Составить закон распределения числа использованных попыток для взятия нужной высоты, найти математическое ожидание и дисперсию.

11.30. В команде 8 спортсменов, из них 3 – первого разряда и 5 – второго. Наудачу отобраны 3 спортсмена. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ дискретной случайной величины X – числа спортсменов второго разряда среди отобранных.

12. Плотность вероятности непрерывной случайной величины

Случайная величина задана функцией распределения $F(x)$.

Найти:

1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;

2) вероятность того, что в результате одного испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (α,β);

3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

12.1 $F(x)=\begin{cases}0. & x\le 1;\\ 0{,}5\cdot(x-1), & 1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$	$\alpha=2{,}5;\ \beta=3{,}5$
12.2 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$	$\alpha=0{,}5;\ \beta=2$
12.3 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \dfrac{(x-2)^2}{4}, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$	$\alpha=3;\ \beta=3{,}5$
12.4 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ (x-1)^2, & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$	$\alpha=1{,}2;\ \beta=2{,}5$
12.5 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^3, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$	$\alpha=0{,}4;\ \beta=3$
12.6 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$	$\alpha=2;\ \beta=5$
12.7 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \dfrac{x}{2}-1, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$	$\alpha=1;\ \beta=3$

12.8 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x^2}{4}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$	$\alpha=-1;\ \beta=0{,}5$
12.9 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 4;\\ (x-4)^2, & 4<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$	$\alpha=4{,}5;\ \beta=5$
12.10 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ -\frac{x^2}{4}+x, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$	$\alpha=1;\ \beta=3$
12.11 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{3}x, & 0<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$	$\alpha=0{,}5;\ \beta=2$
12.12 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \frac{x+2}{9}, & -2<x\le 7;\\ 1, & x>7.\end{cases}$	$\alpha=-2;\ \beta=3$
12.13 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \frac{x^2-x}{2}, & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$	$\alpha=0{,}5;\ \beta=1{,}5$
12.14 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x^2+x}{2}, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$	$\alpha=0{,}5;\ \beta=2$
12.15 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ (x-2)^2, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$	$\alpha=2{,}5;\ \beta=3{,}5$
12.16 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3;\\ x^2-6x+9, & 3<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$	$\alpha=3{,}5;\ \beta=4$

12.17	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{3x+3}{4}, & -1<x\le \dfrac{1}{3};\\ 1, & x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$	$\alpha=-0{,}5;\ \beta=1$
12.18	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{x+1}{2}, & -1<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$	$\alpha=-0{,}5;\ \beta=0{,}5$
12.19	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ (x-1)^3, & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$	$\alpha=1{,}5;\ \beta=2$
12.20	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \dfrac{1}{4}x^2-x+1, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$	$\alpha=3;\ \beta=3{,}5$
12.21	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{x^2-1}{3}, & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$	$\alpha=1{,}5;\ \beta=2$
12.22	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \dfrac{x-2}{3}, & 2<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$	$\alpha=2;\ \beta=3{,}5$
12.23	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{16}x^2, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$	$\alpha=2;\ \beta=3{,}2$
12.24	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ 4-4x+x^2, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$	$\alpha=2;\ \beta=2{,}8$
12.25	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{(x-1)^2}{4}, & 1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$	$\alpha=2{,}5;\ \beta=3{,}5$

12.26	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{(x+1)^2}{4}, & -1<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$	$\alpha=0;\ \beta=2$
12.27	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \dfrac{1}{3}(x+1), & -1<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$	$\alpha=0;\ \beta=2$
12.28	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3;\\ \dfrac{x-3}{2}, & 3<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$	$\alpha=3{,}5;\ \beta=5$
12.29	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2+x}{12}, & 0<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$	$\alpha=1;\ \beta=2$
12.30	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{1}{4}x^2+x+1, & -2<x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$	$\alpha=-1;\ \beta=1$

13. Функция распределения непрерывной случайной величины

Случайная величина задана плотностью вероятности $f(x)$.

Найти:

1) функцию распределения $F(x)$;

2) вероятность того, что в результате одного испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (α,β);

3) математическое ожидание $M(X)$.

13.1	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{3\cdot x^2}{8}, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$	$\alpha=-1;\ \beta=0{,}5$

13.2	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{3\cdot(x-1)^2}{8}, & 1<x\le 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$	$\alpha=2;\ \beta=2{,}5$
13.3	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2x, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$	$\alpha=0{,}25;\ \beta=0{,}5$
13.4	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$	$\alpha=1;\ \beta=2$
13.5	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ x-\dfrac{1}{2}, & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$	$\alpha=1{,}5;\ \beta=2$
13.6	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{1}{4}, & -1<x\le 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$	$\alpha=0;\ \beta=2$
13.7	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{1}{3}, & 1<x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$	$\alpha=3;\ \beta=5$
13.8	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-\dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$	$\alpha=0;\ \beta=1$
13.9	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{2\cdot x}{25}, & 0<x\le 5;\\ 0, & x>5.\end{cases}$	$\alpha=3;\ \beta=6$
13.10	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ \dfrac{x+3}{2}, & -3<x\le -1;\\ 0, & x>-1.\end{cases}$	$\alpha=-2{,}5;\ \beta=-2$

13.11	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leq -2; \\ \dfrac{x}{2}+1, & -2<x\leq 0; \\ 0, & x>0. \end{cases}$	$\alpha=-1;\ \beta=0$
13.12	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leq -1; \\ \dfrac{x+1}{2}, & -1<x\leq 1; \\ 0, & x>1. \end{cases}$	$\alpha=-0{,}5;\ \beta=0{,}5$
13.13	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 2; \\ \dfrac{3}{8}\cdot(x-2)^2, & 2<x\leq 4; \\ 0, & x>4. \end{cases}$	$\alpha=3;\ \beta=3{,}5$
13.14	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 1; \\ \dfrac{2x}{3}, & 1<x\leq 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$	$\alpha=1;\ \beta=1{,}5$
13.15	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 4; \\ \dfrac{1}{8}, & 4<x\leq 12; \\ 0, & x>12. \end{cases}$	$\alpha=5;\ \beta=7.$
13.16	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 2; \\ 2x-4, & 2<x\leq 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$	$\alpha=2{,}5;\ \beta=3$
13.17	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 0; \\ x+\dfrac{1}{2}, & 0<x\leq 1; \\ 0, & x>1. \end{cases}$	$\alpha=0;\ \beta=0{,}5$
13.18	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 0; \\ \dfrac{2x}{9}, & 0<x\leq 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$	$\alpha=1;\ \beta=4$

13.19	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ 6^{x+2}, & 0<x\le \dfrac{1}{3}; \\ 0, & x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$	$\alpha=0$; $\beta=0{,}25$
13.20	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{6}, & 0<x\le 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$	$\alpha=1{,}5$; $\beta=2{,}5$
13.21	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$	$\alpha=0{,}5$; $\beta=2{,}5$
13.22	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{8}, & 0<x\le 1; \\ 0, & x>1. \end{cases}$	$\alpha=0{,}25$; $\beta=0{,}75$
13.23	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ 3x^2, & 0<x\le 1; \\ 0, & x>1. \end{cases}$	$\alpha=\dfrac{1}{3}$; $\beta=\dfrac{2}{3}$
13.24	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{1}{8}x, & 0<x\le 4; \\ 0, & x>4. \end{cases}$	$\alpha=2{,}5$; $\beta=3{,}5$
13.25	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ 3(x-1)^2, & 1<x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$	$\alpha=0{,}5$; $\beta=2{,}5$

13.26	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{6}, & 1<x\le 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$	$\alpha = 2$; $\beta = 3$
13.27	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2; \\ \frac{x}{2}-1, & 2<x\le 4; \\ 0, & x>4. \end{cases}$	α =2,5 ; β = 3,5
13.28	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2, & 0<x\le 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$	$\alpha = 1$; $\beta = 2$
13.29	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ x-\frac{x^3}{4}, & 0<x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$	α = 0,5 ; β = 1,5
13.30	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2; \\ 2(x-2), & 2<x\le 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$	α = 2,25; β = 2,75

14. Равномерный закон распределения непрерывной случайной величины

Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[a,b]$. Записать $f(x)$, вычислить $M[X]$, $D[X]$.

№	a	b	№	a	b	№	a	b
14.1	1,5	3,7	14.11	1,6	4,8	14.21	2,3	4,7
14.2	1,3	3,7	14.12	0,5	1,5	14.22	0,4	2,0
14.3	1,7	5,9	14.13	0,2	3,4	14.23	0,3	2,3
14.4	1,3	5,3	14.14	0,1	2,3	14.24	1,5	3,5
14.5	1,4	7,6	14.15	2,0	6,0	14.25	2,8	5,8
14.6	1,2	7,4	14.16	2,0	8,0	14.26	3,4	7,6
14.7	1,0	5,0	14.17	1,0	3,0	14.27	1,6	6,6

№	a	b	№	a	b	№	a	b
14.8	1,0	7,0	14.18	1,1	3,3	14.28	0,5	5,5
14.9	4,4	6,2	14.19	2,0	4,0	14.29	6,3	8,3
14.10	5,0	11,2	14.20	2,4	4,4	14.30	5,7	9,7

15. Показательный закон распределения непрерывной случайной величины

Распределение случайной величины X подчинено показательному закону с параметром λ. Записать $f(x)$, вычислить $M[X]$, $D[X]$.

15.1. $\lambda = 2,1$	15.11. $\lambda = 7,0$	15.21. $\lambda = 6,0$
15.2. $\lambda = 3,2$	15.12. $\lambda = 6,2$	15.22. $\lambda = 1,1$
15.3. $\lambda = 4,3$	15.13. $\lambda = 5,2$	15.23. $\lambda = 1,4$
15.4. $\lambda = 5,4$	15.14. $\lambda = 4,2$	15.24. $\lambda = 0,1$
15.5. $\lambda = 6,1$	15.15. $\lambda = 3,1$	15.25. $\lambda = 5,7$
15.6. $\lambda = 1,2$	15.16. $\lambda = 2,2$	15.26. $\lambda = 6,4$
15.7. $\lambda = 2,4$	15.17. $\lambda = 2,0$	15.27. $\lambda = 4,6$
15.8. $\lambda = 0,2$	15.18. $\lambda = 3,0$	15.28. $\lambda = 3,4$
15.9. $\lambda = 0,3$	15.19. $\lambda = 4,0$	15.29. $\lambda = 2,6$
15.10. $\lambda = 2,3$	15.20. $\lambda = 5,0$	15.30. $\lambda = 1,7$

16. Нормальный закон распределения

Распределение случайной величины подчинено нормальному закону с параметрами a и σ.

Записать $f(x)$, $F(x)$, найти $P(\alpha, \beta)$, $P(|X-a|<\varepsilon)$.

№	a	σ	α	β	ε	№	a	σ	α	β	ε
16.1	7	6	1	15	7	16.16	8	4	3	15	5
16.2	5	4	0	10	6	16.17	20	5	15	25	4
16.3	8	6	2	20	7	16.18	6	5	2	12	6
16.4	12	8	2	26	10	16.19	10	2	12	14	3
16.5	8	5	3	15	6	16.20	6	4	1	12	5
16.6	12	10	0	30	8	16.21	3	4	1	10	3
16.7	9	8	1	20	9	16.22	6	3	2	10	4

№	a	σ	α	β	ε	№	a	σ	α	β	ε
16.8	12	6	5	20	7	16.23	3	2	1	5	2
16.9	10	4	5	16	5	16.24	7	5	1	15	6
16.10	15	10	3	30	9	16.25	20	5	5	10	3
16.11	4	5	2	15	6	16.26	50	3,6	32	40	5
16.12	10	8	4	20	9	16.27	19	18	11	30	19
16.13	4	3	0	10	4	16.28	5	0,9	4	7	2
16.14	10	5	4	16	6	16.29	16	10	11	22	11
16.15	0	10	5	15	15	16.30	10	5	7	12	2

17. Применение нормального закона при решении практических задач

17.1. Дисперсия случайной величины, распределенной по нормальному закону, равна 4 см^2, а $M(X)$ = 16 см. Определить границы интервала, симметричные относительно математического ожидания, которому с вероятностью 0,95 принадлежит значение случайной величины X.

17.2. Длина изготавливаемой детали X имеет нормальное распределение $N(50;3,6)$. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали находится в границах от 55 до 68 мм.

17.3. Масса случайной пойманной рыбы распределена по нормальному закону с параметрами $M(X)$ = 375 г и σ = 25 г. Найти вероятность того, что ее масса составит не более 450 г.

17.4. Диаметр детали является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $M(X)$ = 4,5 см и σ = = 0,005 см. Найти вероятность того, что размер диаметра наудачу взятой детали отличается от математического ожидания не более чем на 1 мм.

17.5. Размер диаметра детали распределен по нормальному закону с параметрами $M(X)$ = 5 см и $D(X)$ = 0,81 см^2. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали отличается от математического ожидания не более чем на 2 см.

17.6. Результаты измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону с параметрами $M(X)$ = = 16 км и σ = 100 м. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами не превосходит 16,25 км.

17.7. Диаметр детали является случайной величиной, распределенной по нормальному закону, с дисперсией 0,0001 и математическим ожиданием 2,5. Найти границы, симметричные относительно $M(X)$, в которых с вероятностью 0,9973 заключен диаметр наудачу взятой детали.

17.8. Случайная величина распределена по нормальному закону с $M(X) = 10$ и $\sigma = 5$. Определить вероятность того, что отклонение значений случайной величины от математического ожидания не превзойдет по абсолютной величине 2.

17.9. Известно, что вес некоторых плодов подчиняется нормальному закону с $M(X) = 175$ г и $\sigma = 25$ г. Определить вероятность того, что вес наудачу взятого плода будет заключен в пределах от 125 до 250 г.

17.10. Длина детали – случайная величина, распределенная по нормальному закону, со средним значением 20 см и дисперсией, равной 0,2 см^2. Определить вероятность того, что длина наудачу взятой детали будет заключена в пределах от 19,7 до 20,3 см.

17.11. При измерении расстояния ошибка подчинена нормальному закону со средним значением 20 м и дисперсией 1600 см^2. Определить вероятность того, что измеренное расстояние отклонится от действительного в ту или иную сторону не более чем на 30 м.

17.12. Диаметр деталей распределяется по нормальному закону с $M(X) = 4{,}9$ см и $\sigma = 0{,}5$ см. Определить вероятность того, что диаметр взятой наудачу детали отклонится от математического ожидания менее чем на 1 см.

17.13. Средний диаметр детали 6 см, и дисперсия равна 0,0004 см^2. Определить максимальное отклонение размера диаметра наудачу взятой детали от среднего размера, которое можно гарантировать с вероятностью не менее чем 0,9973.

17.14. Изделия, выпускаемые цехом, по своим линейным размерам распределяются по нормальному закону с $M(X) = 5$ см. Известна вероятность, равная 0,9758, что одно наудачу взятое изделие будет иметь размеры в границах от 4,95 до 5,05 см. Найти дисперсию этой случайной величины.

17.15. Длина изготовляемой автоматом детали представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону с $M(X) = 15$ см и $\sigma = 0{,}2$ см. Какую точность длины изготовленной автоматом детали можно гарантировать с вероятностью 0,97?

17.16. Случайная величина, распределенная по нормальному закону, имеет $M(X) = 5$ м и дисперсию 16 м^2. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение не менее 6 м и не более 8 м.

17.17. Ведется артиллерийская стрельба по цели из орудия. Средняя дальность полета снаряда 1200 м. Определить, какой процент выпускаемых снарядов дает перелет от 0 до 60 м, если дисперсия дальности полета равна 1600 м^2.

17.18. Результаты измерения подчинены нормальному закону с $M(X)$ = = 15 м и σ = 6 м. Производится два независимых измерения. Какова вероятность того, что оба значения будут отклоняться от математического ожидания по абсолютной величине не более 15 м?

17.19. Длина детали, изготовленной на станке, есть нормальная случайная величина с $M(X)$ = 45 см и σ = 0,4 см. Найти вероятность того, что размер наудачу взятой детали имеет отклонение от $M(X)$ по абсолютной величине не более 0,16 см.

17.20. Некоторая категория людей имеет средний вес 60 кг и σ = 3 кг. Определить вероятность того, что вес случайно взятого человека из этой категории отличается от 60 кг не более чем на 5 кг, если вес человека имеет нормальное распределение.

17.21. Величина X отклонения радиуса подшипника от стандарта распределена по нормальному закону, с $M(X)$ = 5 и σ = 0,9. Найти вероятность того, что $4 \le X \le 7$.

17.22. Рост взрослых женщин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с $M(X)$ = 164 см и σ = 5,5 см. Найти вероятность того, что наудачу взятая женщина имеет рост от 162 до 166 см.

17.23. Длина детали является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с σ = 0,2 мм. Найдите интервал, середина которого совпадает с $M(X)$ = 22 мм, в который с вероятностью 0,9544 попадет длина наудачу взятой детали.

17.24. Диаметр валиков – нормально распределенная случайная величина со средним значением 10 мм. Каково значение σ, если с вероятностью 0,99 диаметр заключен в интервале от 9,7 до 10,3 мм?

17.25. Случайная величина распределена по нормальному закону с $M(X)$ = 10 и σ = 5. Определить вероятность того, что случайная величина примет значение от 7 до 12.

17.26. Диаметр втулок можно считать нормально распределенной случайной величиной с $M(X)$ = 2,5 и σ = 0,001. Найти границы интервала, симметричного относительно $M(X)$, в которых с вероятностью 0,9973 следует ожидать значение случайной величины.

17.27. Случайная величина, распределенная по нормальному закону, имеет $\sigma = 4$ см. Указать границы промежутка, симметричного относительно $M(X)$, в котором с вероятностью 0,92 следует ожидать значение случайной величины.

17.28. Определить вероятность того, что случайная величина X примет значение от 158 до 162, если известно, что она распределена по нормальному закону с $M(X) = 168$ и $\sigma = 5{,}92$.

17.29. Определить σ случайной величины, распределенной по нормальному закону, если известно, что ее отклонение от математического ожидания, не превосходящее 0,1 см, имеет место с вероятностью 0,823.

17.30. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону с $\sigma = 100$ м. Найти вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м.

18. Система двух дискретных случайных величин

Система двух дискретных случайных величин $(X; Y)$ задана законом распределения.

1) Найти законы распределения составляющих и их числовые характеристики.

2) Вычислить корреляционный момент (коэффициент ковариации) и коэффициент линейной корреляции между X и Y. Найти уравнения регрессии X на Y *и* Y на X.

1

X Y	–3	–1	1	3
1	0,06	0,02	0,04	0,08
0	0,15	0,05	0,10	0,20
1	0,09	0,03	0,06	0,12

2

X Y	10	20	30	40
0,5	0,05	0,12	0,08	0,04
2,5	0,04	0,16	0,05	0,10
4,5	0,05	0,14	0,06	0,11

3

X Y	–1	0	1	3
1	0,05	0,10	0,15	0,10
2	0,05	0,15	0,15	0,05
3	0,10	0,05	0	0,05

4

X Y	–2	–1	1	2
–1	0,06	0,15	0,17	0,12
0	0,05	0,10	0,10	0,05
2	0,05	0,08	0,07	0

5

X Y	0	2	3	5
1	0,06	0,09	0,12	0,03
4	0,08	0,12	0,16	0,04
5	0,06	0,09	0,12	0,03

6

X Y	0	1	2	3
–1	0,02	0,03	0,09	0,01
0	0,04	0,20	0,16	0,10
1	0,05	0,10	0,15	0,05

7

X Y	-2	-1	0	2
1	0,02	0,04	0,08	0,06
3	0,05	0,10	0,16	0,12
5	0,06	0,06	0,16	0,09

8

X Y	2	4	6	8
1	0,05	0,10	0,05	0
2	0,05	0,10	0,15	0,10
3	0,05	0,15	0,1	0,10

9

X Y	5	10	15	20
4	0,07	0,05	0,10	0,03
5	0,12	0,14	0,15	0,06
6	0,06	0,12	0,05	0,05

10

X Y	21	26	31	36
3	0,05	0,04	0,11	0,05
7	0,06	0,20	0,07	0,12
10	0,03	0,10	0,12	0,05

11

X Y	2	5	8	11
0,5	0,07	0,14	0,12	0,15
1	0,08	0,05	0,10	0,08
1,5	0,05	0,06	0,03	0,07

12

X Y	6	10	14	18
3	0,10	0,05	0,12	0,04
5	0,14	0,08	0,13	0,05
7	0,08	0,05	0,12	0,04

13

X Y	0	2	4	6
1	0,04	0,20	0,16	0,10
3	0,10	0,05	0,02	0,03
5	0,06	0,02	0,17	0,05

14

X Y	–1	0	2	4
1	0,06	0,18	0,16	0,10
2	0,05	0,10	0,02	0,03
3	0,06	0,04	0,12	0,08

15

X Y	1	2	3	4
0	0,05	0,10	0,08	0,02
1	0,15	0,18	0,02	0,05
4	0,18	0,04	0,03	0,10

16

X Y	0	1	2	3
–1	0,06	0,03	0,12	0,09
0	0,10	0,18	0,05	0,17
1	0,04	0,10	0,02	0,04

17

X Y	10	15	20	25
2	0,05	0,10	0,10	0,05
4	0,06	0,14	0,07	0,08
6	0,03	0,10	0,15	0,07

18

X Y	1	3	5	7
2,5	0,12	0,15	0,05	0,08
4	0,05	0,18	0,05	0,07
5,5	0,06	0,10	0,03	0,06

19.

X Y	–1	1	4	7
4	0,08	0,05	0,07	0
6	0,14	0,08	0,13	0,15
8	0,08	0,05	0,12	0,05

20

X Y	–2	–1	0	1
2	0,05	0,02	0,12	0,04
3	0,10	0,05	0,07	0,08
4	0,09	0,20	0,13	0,05

21

X Y	–3	–1	2	4
–1	0,06	0,15	0,10	0
1	0,10	0,05	0,12	0,13
3	0,06	0,04	0,11	0,08

22

X Y	–1	1	3	4
0	0,05	0,10	0,08	0,15
1	0,10	0,15	0,02	0,05
2	0,12	0,05	0,03	0,10

23

X Y	4	7	10	13
1,5	0,06	0,03	0,12	0,03
3	0,18	0,10	0,14	0,10
4,5	0	0,12	0,05	0,07

24

X Y	10	20	30	40
0,4	0,05	0,10	0,03	0,07
0,7	0,16	0,14	0,06	0,04
1	0,05	0,10	0,15	0,10

25

X Y	–1	3	7	11
2	0,05	0,10	0,15	0
4	0,11	0,08	0,05	0,07
5	0,20	0,10	0,03	0,06

26

X Y	1	3	4	7
2	0,01	0,05	0,10	0
5	0,18	0,12	0,03	0,15
8	0,06	0,05	0,20	0,05

27

X Y	2,7	3,9	5,1	6,3
17	0,12	0,09	0,15	0,08
20	0,10	0,15	0,05	0,16
25	0,05	0,03	0,02	0

28

X Y	15	17	19	21
7	0,06	0,10	0,10	0,08
9	0	0,14	0,05	0,03
11	0,13	0,09	0,17	0,05

29

X Y	12	15	21	24
2	0,12	0,15	0,06	0,11
5	0,05	0,18	0,04	0,07
8	0,06	0,10	0	0,06

30

X Y	11	13	15	18
5	0,08	0,15	0,04	0,06
7	0,04	0,07	0,13	0
9	0,10	0,05	0,12	0,06

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Высшая математика. Стандартные задачи с основами теории : учебное пособие для вузов / А. Ю. Вдовин, Л. В. Михалева, В. М. Мухина [и др.]. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 188 с. – ISBN 978–5–8114–9437–8.

2. Федоткин, М. А. Модели в теории вероятностей / М. А. Федоткин. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 608 с. – ISBN 978–5–9221–1384–7.

3. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей : учебное пособие для студентов втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., испр. – Москва : Академия, 2003. – 448 с. – ISBN 5–7695–1054–4.

4. Теория вероятностей. Индивидуальные задания для студентов дневной и заочной форм обучения всех специальностей // Studfile: [сайт]. – Первоуральск, УГТУ-УПИ, 2009. – URL: https://studfile.net/preview/4229194/ (дата обращения: 28.02.2023).

5. Контрольные задания и методические указания к выполнению контрольных работ по математике : учебное пособие / С. А. Белоконов, Д. В. Степовой [и др.]. – Зерноград : ФГОУ ВПО АЧГАА, 2008.

6. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч. 4. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика : учебное пособие / А. П. Рябушко. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышейшая школа, 2007. – 336 с. – ISBN 978–985–06–1312–7.

7. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2023. – 406 с. – (Высшее образование). – ISBN 978–5–534–08389–7.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

x	**Сотые доли x**									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	Значения функции $\varphi(x)$									
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	6765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0476	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	00363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290

Окончание таблицы

x	**Сотые доли x**									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	Значения функции $\varphi(x)$									
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0040
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
5,0	0,0000015									

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0,00	0,0000	0,37	0,1443	0,74	0,2703	1,11	0,3665	1,48	0,4306
0,01	0,0040	0,38	0,1480	0,75	0,2734	1,12	0,3686	1,49	0,4319
0,02	0,0080	0,39	0,1517	0,76	0,2764	1,13	0,3708	1,50	0,4332
0,03	0,0120	0,40	0,1554	0,77	0,2794	1,14	0,3729	1,51	0,4345
0,04	0,0160	0,41	0,1591	0,78	0,2823	1,15	0,3749	1,52	0,4357
0,05	0,0199	0,42	0,1628	0,79	0,2852	1,16	0,3770	1,53	0,4370
0,06	0,0239	0,43	0,1664	0,80	0,2881	1,17	0,3790	1,54	0,4382
0,07	0,0279	0,44	0,1700	0,81	0,2910	1,18	0,3810	1,55	0,4394
0,08	0,0319	0,45	0,1736	0,82	0,2939	1,19	0,3830	1,56	0,4406
0,09	0,0359	0,46	0,1772	0,83	0,2967	1,20	0,3849	1,57	0,4418
0,10	0,0398	0,47	0,1808	0,84	0,2995	1,21	0,3869	1,58	0,4429
0,11	0,0438	0,48	0,1844	0,85	0,3023	1,22	0,3883	1,59	0,4441
0,12	0,0478	0,49	0,1879	0,86	0,3051	1,23	0,3907	1,60	0,4452
0,13	0,0517	0,50	0,1915	0,87	0,3078	1,24	0,3925	1,61	0,4463
0,14	0,0557	0,51	0,1950	0,88	0,3106	1,25	0,3944	1,62	0,4474
0,15	0,0596	0,52	0,1985	0,89	0,3133	1,26	0,3962	1,63	0,4484
0,16	0,0636	0,53	0,2019	0,90	0,3159	1,27	0,3980	1,64	0,4495
0,17	0,0675	0,54	0,2054	0,91	0,3186	1,28	0,3997	1,65	0,4505
0,18	0,0714	0,55	0,2088	0,92	0,3212	1,29	0,4015	1,66	0,4515
0,19	0,0753	0,56	0,2123	0,93	0,3238	1,30	0,4032	1,67	0,4525
0,20	0,0793	0,57	0,2157	0,94	0,3264	1,31	0,4049	1,68	0,4535
0,21	0,0832	0,58	0,2190	0,95	0,3289	1,32	0,4066	1,69	0,4545
0,22	0,0871	0,59	0,2224	0,96	0,3315	1,33	0,4082	1,70	0,4554
0,23	0,0910	0,60	0,2257	0,97	0,3340	1,34	0,4099	1,71	0,4564
0,24	0,0948	0,61	0,2291	0,98	0,3365	1,35	0,4115	1,72	0,4573
0,25	0,0987	0,62	0,2324	0,99	0,3389	1,36	0,4131	1,73	0,4582
0,26	0,1026	0,63	0,2357	1,00	0,3413	1,37	0,4147	1,74	0,4591
0,27	0,1064	0,64	0,2389	1,01	0,3438	1,38	0,4162	1,75	0,4599
0,28	0,1103	0,65	0,2422	1,02	0,3461	1,39	0,4177	1,76	0,4608
0,29	0,1141	0,66	0,2454	1,03	0,3485	1,40	0,4192	1,77	0,4616
0,30	0,1179	0,67	0,2486	1,04	0,3508	1,41	0,4207	1,78	0,4625
0,31	0,1217	0,68	0,2517	1,05	0,3531	1,42	0,4222	1,79	0,4633
0,32	0,1255	0,69	0,2549	1,06	0,3554	1,43	0,4236	1,80	0,4641
0,33	0,1293	0,70	0,2580	1,07	0,3577	1,44	0,4251	1,81	0,4649
0,34	0,1331	0,71	0,2611	1,08	0,3599	1,45	0,4265	1,82	0,4656
0,35	0,1368	0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,46	0,4279	1,83	0,4664
0,36	0,1406	0,73	0,2673	1,10	0,3643	1,47	0,4292	1,84	0,4671

Окончание таблицы

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
1,85	0,4678	2,00	0,4772	2,30	0,4893	2,60	0,4953	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,02	0,4783	2,32	0,4898	2,62	0,4956	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,04	0,4793	2,34	0,4904	2,64	0,4959	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,06	0,4803	2,36	0,4909	2,66	0,4961	2,96	0,4985
1,89	0,4708	2,08	0,4812	2,38	0,4913	2,68	0,4963	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,10	0,4821	2,4	0,4918	2,70	0,4965	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,12	0,4830	2,42	0,4922	2,72	0,4967	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,14	04838	2,44	0,4927	2,74	0,4969	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,16	0,4846	2,46	0,4931	2,76	0,4971	3,60	0,49984
1,94	0,4738	2,18	0,4854	2,48	0,4934	2,78	0,4973	3,80	0,49992
1,95	0,4744	2,20	0,4861	2,50	0,4938	2,80	0,4974	4,00	0,49996
1,96	0,4750	2,22	0,4868	2,52	0,4941	2,82	0,4976	4,50	0,49999
1,97	0,4756	2,24	0,4875	2,54	0,4945	2,84	0,4977	5,00	0,49999
1,98	0,4761	2,26	0,4881	2,56	0,4948	2,86	0,4979		
1,99	0,4767	2,28	0,4887	2,58	0,4951	2,88	0,4980		

Учебное издание

***Вдовин** Андрей Юрьевич, **Демидова** Ирина Николаевна,*
***Золкина** Людмила Александровна, **Мухина** Валерия Михайловна,*
***Рублева** Светлана Сергеевна, **Удинцева** Светлана Николаевна,*
***Федоровских** Елена Сергеевна*

МАТЕМАТИКА
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор Е. Л. Михайлова
Оператор компьютерной верстки О. А. Казанцева

ISBN 978-5-94984-872-2

Подписано в печать 30.06.2023. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать.
Уч.-изд. л. 4,68. Усл. печ. л. 6,28.
Тираж 300 экз. (1-й завод 36 экз.).
Заказ № 7691

ФГБОУ ВО «Уральский государственный лесотехнический университет».
620100, Екатеринбург, Сибирский тракт, 37.
Редакционно-издательский отдел. Тел.: 8(343) 221-21-44.

Типография ООО «ИЗДАТЕЛЬСТВО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР УПИ».
620062, РФ, Свердловская область, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2.
Тел.: 8(343)362-91-16.