



Г. Г. Ордуянц  
С. П. Санников

**ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ,  
УСТОЙЧИВОСТЬ И ПЕРЕХОДНЫЕ  
ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО  
РЕГУЛИРОВАНИЯ**

*Курсовое проектирование*

Екатеринбург  
2023

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Уральский государственный лесотехнический университет»  
(УГЛТУ)

Кафедра управления в технических системах и инновационных  
технологий

Г. Г. Ордуянц  
С. П. Санников

**ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ,  
УСТОЙЧИВОСТЬ И ПЕРЕХОДНЫЕ  
ПРОЦЕССЫ  
В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
РЕГУЛИРОВАНИЯ**

*Курсовое проектирование*

Задания и методические указания по их выполнению для курсового проектирования по дисциплине «Теория автоматического управления» для обучающихся по направлениям 15.03.04, 27.03.04 очной и заочной форм обучения

Екатеринбург  
2023

Печатается по рекомендации методической комиссии Инженерно-технического института УГЛТУ.  
Протокол № 2 от 13 октября 2022 г.

Рецензент — доцент кафедры автомобильного транспорта и транспортной инфраструктуры, канд. техн. наук Демидов Д. В.

Предназначены для всех обучающихся, осваивающих образовательные программы всех направлений и специальностей высшего образования, реализуемых в УГЛТУ.

Редактор З. Р. Картавцева  
Компьютерная верстка Л. Е. Иощенко

---

Подписано в печать 20.10.2023

Поз. 14

Плоская печать

Формат 60×84/16

Тираж 10 экз.

Заказ №

Печ. л. 1,86

Цена руб. коп.

---

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ  
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	5
Примерная рабочая программа курса .....	6
Задание 1 .....	8
Задание 2 .....	8
Задание 3 .....	9
Задание 4 .....	10
Задание 5 .....	10
Методические указания по выполнению заданий .....	14
Приложение .....	30
Библиографический список.....	31

## **ВВЕДЕНИЕ**

Выбор варианта при выполнении курсового проекта определяется последней цифрой зачетной книжки для заданий с четными номерами и предпоследней — с нечетными номерами. Отчет о выполнении каждого задания должен содержать исходные данные, методику расчета, схемы и графики.

Результаты вычислений для функций при разных значениях аргумента рекомендуется представлять в виде таблиц. В случае выполнения подобных расчетов с помощью вычислительной техники распечатку программы и результатов надо вклеить в задание.

## ПРИМЕРНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА

1. Общие принципы построения систем автоматического управления и регулирования. Классификация систем управления. САР по возмущения, отклонению и комбинированные. САС, программное регулирование, следящие системы. Статическое и астатическое регулирование.

2. Математическое описание и моделирование линейных элементов и систем управления. Общие понятия о передаточных свойствах СА. Линейные дифференциальные уравнения при описании динамики объектов СА. Операторный метод, динамические характеристики. Частотные характеристики. Основные типовые возмущающие воздействия. Расчет переходных процессов в линейных САР.

3. Характеристики и модели типовых динамических звеньев систем управления. Классификация звеньев. Пропорциональное, дифференцирующее, реальное дифференцирующее, интегрирующее, интегродифференцирующее, апериодическое I-го порядка, запаздывающее звенья. Звено 2-го порядка. Соединение звеньев автоматики. Обратные связи жесткие, гибкие. Замкнутые системы.

4. Устойчивость САР. Понятие устойчивости по Ляпунову. Критерии Рауса – Гурвица, Михайлова, Найквиста. Логарифмический критерий устойчивости. Построение областей устойчивости по одному параметру ( $D$ -разбиение).

5. Основные законы регулирования. Пропорциональное (П), интегральное (И), пропорционально-интегральное (ПИ) и пропорционально-интегрально-дифференциальное (ПИД) регулирование.

6. Переходные процессы в линейных САУ. Качество переходных процессов. Переходные процессы в автоматических системах с типовыми регуляторами. Прямые и косвенные оценки качества регулирования. Оценки качества переходного процесса в системах регулирования постоянной величины при возмущениях вида ступенчатой функции. Корневой метод оценки качества регулирования. Частотные методы анализа качества регулирования. Вещественные частотные характеристики (ВЧХ), их свойства и взаимосвязь с соответствующими им переходными процессами. Приближенное построение переходной характеристики по ВЧХ. Основные качественные оценки по вещественным частотным характеристикам. Интегральные оценки качества регулирования. 1-я, 2-я и 3-я интегральные оценки. Ошибки регулирования.

7. Синтез корректирующих элементов в простейших САР. Постановка задачи синтеза. Последовательная и параллельная коррекция по логарифмическим частотным характеристикам.

8. Основы анализа линейных импульсных систем управления. Общие сведения о дискретных системах. Математическое описание дискретных систем. Уравнения в конечных разностях. Дискретное преобразование Лапласа. Метод  $z$ -изображений в расчете импульсных САР. Реальные импульсные фильтры. Амплитудно-импульсная модуляция, экстраполятор нулевого порядка, их  $z$ -передаточные функции. Устойчивость импульсных систем. Основной критерий устойчивости, критерии Михайлова и Найквиста. Переходные характеристики импульсных систем и оценка качества импульсных систем по этим характеристикам.

9. Характеристики и основные методы анализа нелинейных систем управления. Особенности нелинейных систем. Типовые нелинейные элементы СУ и их характеристики. Метод фазовых траекторий и их построение с помощью изоклин, метод кусочно-линейной аппроксимации, метод гармонической линеаризации. Оценка абсолютной устойчивости с помощью критерия Попова.

10. Оптимальные системы управления. Введение в адаптивное управление. Задачи оптимального управления, критерии оптимальности. Методы теории оптимального управления. Управление. Понятие об адаптивном управлении.

## ЗАДАНИЕ 1

На рис. 1 приведена пассивная электрическая цепь в виде моста.

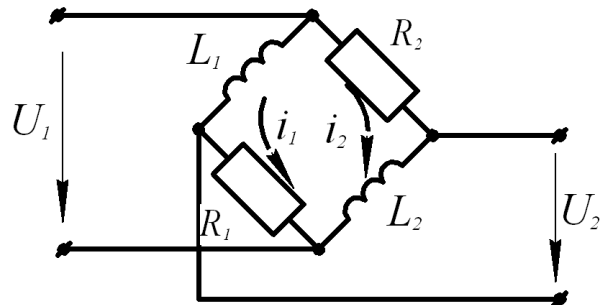


Рис. 1. Мостовая схема к задаче 1

Необходимо записать дифференциальные уравнения и найти передаточную функцию, если в качестве входного сигнала взято напряжение на первичных зажимах  $U_1$ , в качестве выходного — напряжение на вторичных зажимах  $U_2$ .

Значения параметров схемы приведены в табл. 1.

Таблица 1

Варианты параметров

Параметры схемы	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_1$ , кОм	1,0	0,33	0,43	2,2	0,82	0,33	1,0	3,3	0,82	0,43
$R_2$ , кОм	0,33	0,82	1,0	3,3	4,3	0,43	4,3	8,2	2,2	0,22
$L_1$ , Гн	0,8	0,4	0,3	1,0	0,2	0,5	0,9	0,7	1,1	0,25
$L_2$ , Гн	0,3	1,2	0,5	0,4	0,8	0,5	1,0	0,6	0,4	0,3

## ЗАДАНИЕ 2

На рис. 2 изображена структурная схема автоматической системы.

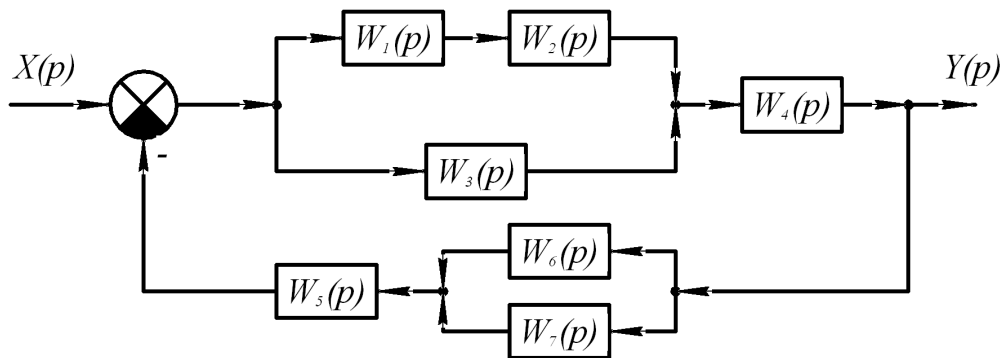


Рис. 2. Структурная схема системы



Передаточные функции имеют вид:

$$W_1(p) = K_1 \quad \text{— усилительное звено;}$$

$$W_2(p) = \frac{K_2}{p} \quad \text{— интегрирующее звено;}$$

$$W_3(p) = \frac{K_3}{T_1 p + 1} \quad \text{— инерционное (апериодическое 1-го порядка) звено;}$$

$$W_4(p) = \frac{K_4}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)} \quad \text{— апериодическое звено 2-го порядка;}$$

$$W_5(p) = K_5 \quad \text{— усилительное звено;}$$

$$W_6(p) = K_6 p \quad \text{— дифференциальное звено;}$$

$$W_7(p) = K_7 \quad \text{— усилительное звено.}$$

Значения коэффициентов передачи и постоянных времени приведены в табл. 2

Таблица 2

Варианты параметров передаточных функций

Исходные данные	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$K_1$	1,8	2,1	2,0	1,6	1,4	2,0	0,8	1,2	1,5	1,0
$K_2$	0,03	0,04	0,01	0,08	0,06	0,06	0,04	0,02	0,01	0,03
$K_3$	1,6	1,8	2,1	1,4	1,0	0,8	1,2	2,2	2,0	1,6
$K_4$	1,1	2,4	1,8	1,6	1,2	1,4	2,1	2,0	1,5	1,0
$K_5$	1,6	2,0	2,2	1,8	1,9	1,3	1,5	2,0	1,8	2,4
$K_6$	2,1	0,8	1,1	0,8	1,8	1,4	1,6	1,2	1,0	1,5
$K_7$	1,7	1,2	2,0	1,8	1,0	1,6	1,4	1,1	1,2	1,5
$T_1, c$	4,0	2,0	2,2	3,5	3,2	2,5	2,2	3,5	4,5	3,2
$T_2, c$	0,4	0,3	0,8	0,7	0,2	0,7	0,9	0,6	0,8	0,9
$T_3, c$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,2	1,1	1,3	1,5	1,4	1,8

В задаче необходимо выполнить следующее:

- 1) найти передаточную функцию разомкнутой системы;
- 2) найти передаточную функцию замкнутой системы по задающему воздействию  $X(p)$ .

### ЗАДАНИЕ 3

Апериодическое звено 2-го порядка описывается передаточной функцией следующего вида:

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

В табл. 3 приведены значения коэффициента передачи и постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$ .

Таблица 3

Значения параметров звеньев

Исходные данные	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$K$	8,0	6,0	5,0	9,0	4,0	10,0	7,0	8,0	7,0	5,0
$T_1, c$	0,01	0,012	0,02	0,015	0,02	0,01	0,03	0,01	0,018	0,016
$T_2, c$	0,1	0,12	0,15	0,2	0,3	0,25	0,2	0,1	0,3	0,24

Необходимо построить амплитудно-фазовую (АФХ) (комплексно-частотную (КЧХ)), амплитудно-частотную (АЧХ), фазочастотную (ФЧХ) и асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную (ЛАЧХ) характеристики звена.

## ЗАДАНИЕ 4

Система описывается характеристическим уравнением вида:

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Значения коэффициентов  $a_0 \div a_3$  приведены в табл. 4.

Таблица 4

Значения коэффициентов

Исходные данные	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a_3, c^3$	10,0	12,0	8,0	8,0	8,0	11,0	9,0	12,0	10,0	6,0
$a_2, c^2$	5,0	8,0	4,0	3,0	4,0	6,0	3,0	5,0	4,0	2,0
$a_1, c$	2,5	1,5	1,0	1,2	2,4	1,2	1,1	2,0	1,0	1,3
$a_0$	10,0	12,0	14,0	16,0	12,0	18,0	16,0	15,0	12,0	10,0

## ЗАДАНИЕ 5

### *Расчет переходного процесса в линейной системе автоматического регулирования*

Рассматривается система автоматического регулирования уровня связующего (или любой иной жидкости) в баке. Объект регулирования

(ОР) — бак (рис. 3), регулируемый параметр — уровень  $H$ . Возмущающим воздействием, нарушающим материальный баланс и приводящим к отклонению уровня от заданного  $H_{зад}$ , является изменение нагрузки аппарата, т. е. расход связующего  $G_p$ . Уровень жидкости измеряется с помощью датчика  $LE$ . На основе сравнения текущего значения уровня  $H$  с заданным  $H_{зад}$  автоматический регулятор (АР)  $LC$  вырабатывает управляющее воздействие, приводящее в движение исполнительный механизм (ИМ) и регулирующий орган (РО), изменяющие, в свою очередь, приток  $G_{II}$  жидкости в бак.

Вместо текущих значений переменных  $H$ ,  $G_p$  и  $G_{II}$  удобно рассматривать их отклонения от некоторого исходного состояния:

$y = H - H_{зад}$  — отклонение уровня от заданного значения (выходной параметр);

$f = G_p - G_{p_0}$  — отклонение расхода относительно начального значения (возмущение);

$x = G_{II} - G_{II_0}$  — отклонение притока относительно начального значения (управляющее воздействие).

Тогда дифференциальное уравнение объекта (ОР) может быть записано так:

$$T \frac{dy}{dt} + y = K_x x - K_f f,$$

где  $t$  — текущее время;

$T$  — постоянная времени ОР;

$K_f$  — коэффициент передачи ОР по каналу возмущения;

$K_x$  — коэффициент передачи ОР по каналу управления.

Предполагается, что возмущающее воздействие имеет вид неединичного скачка  $f(t) = f \cdot 1(t)$ ,

$$\text{где } f = \text{const, а } 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \geq 0, \\ 0 & \text{для } t < 0. \end{cases}$$

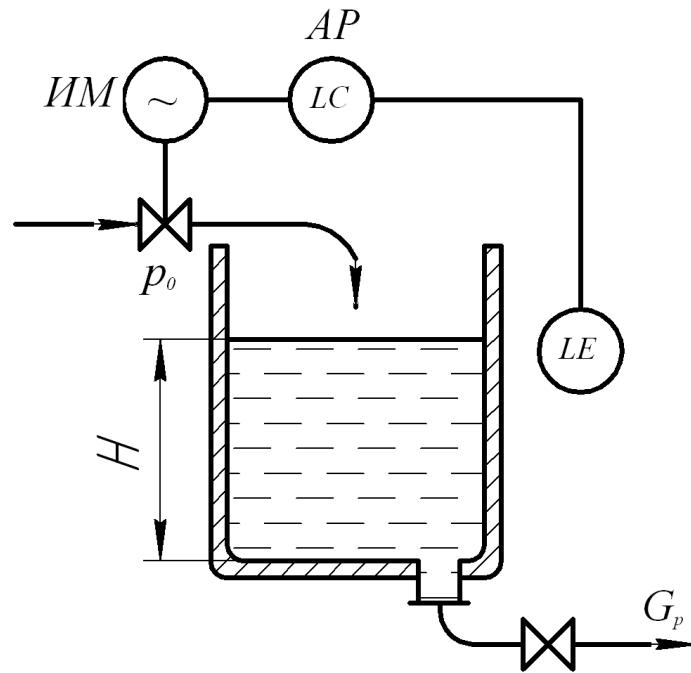


Рис. 3. Схема системы автоматического регулирования

В задаче требуется:

- 1) представить ОР в виде структурной схемы и определить передаточные функции по каналам управления  $W_x(p)$  и возмущения  $W_f(p)$ ;
- 2) рассчитать и построить кривую переходного процесса  $y(t)$  в ОР а отсутствие автоматического регулятора (АР), если возмущение имеет вид неединичного скачка заданной величины  $f$ ;
- 3) составить структурную схему системы автоматического регулирования (САР) и найти передаточную функцию замкнутой САР по каналу возмущения;
- 4) рассчитать и построить кривую переходного процесса  $y(t)$  в системе с АР при скачкообразном изменении возмущения на величину  $f$ ;
- 5) оценить влияние АР на изменение времени переходного процесса в ОР;
- 6) сделать соответствующие выводы.

Исходные данные для расчета приведены в табл. 5.

Таблица 5

Исходные данные системы

Исходные данные	Номер варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T, \text{с}$	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0
$K_f, \text{с/м}^2$	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	5,0	3,2	4,0	3,8
$K_x, \text{с/м}^2$	1,2	1,4	1,2	1,4	1,5	1,7	1,6	1,8	1,9	1,0

Окончание табл. 5

$f \cdot 10^{-2}$ , м <sup>3</sup> /с	2,0	2,2	1,6	1,8	2,4	2,6	1,4	1,2	2,8	2,0
Тип регулятора	П	П	ПИ	ПИ	П	П	ПИ	ПИ	П	ПИ
$K_p$	1,8	2,0	2,2	2,5	3,0	2,8	2,2	2,6	1,6	1,6
$T_{из}$	–	–	4,0	4,5	2,0	2,0	5,0	5,5	–	6,0

Там же указаны размерности этих величин. Размерность выходного параметра  $[y] = м$ . Размерность управляющего воздействия  $[x] = м^3/с$ .

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ

### Задание 1

В качестве примера рассмотрим нахождение передаточной функции для пассивной цепи, схема которой изображена на рис. 4.

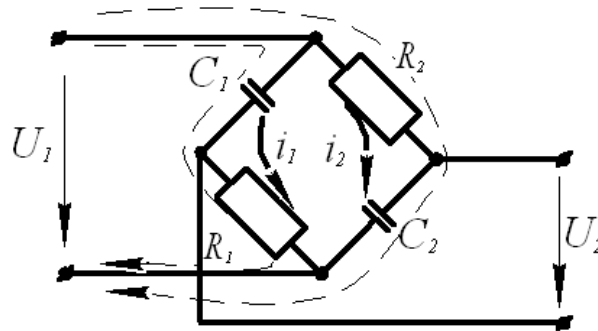


Рис. 4. Схема пассивной цепи

Запишем дифференциальное уравнение для контуров, обозначенных на рис. 4:

$$i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt = U_1,$$

$$i_2 R_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = U_1.$$

В операторной форме эти уравнения запишутся так:

$$I_1(p)R_1 + \frac{1}{pC_1} I_1(p) = U_1(p),$$

$$I_2(p)R_2 + \frac{1}{pC_2} I_2(p) = U_1(p),$$

откуда

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)pC_1}{T_1 p + 1}, \quad I_2(p) = \frac{U_1(p)pC_2}{T_2 p + 1},$$

где

$$T_1 = C_1 R_1,$$

$$T_2 = C_2 R_2,$$

$p$  — оператор Лапласа.

Напряжение  $U_2(t)$  на вторичных зажимах можно определить следующим образом:

$$U_2(t) = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt - i_1 R_1,$$

или в операторной форме:

$$U_2(p) = \frac{1}{pC_2} I_2(p) - I_1(p)R_1.$$

Подстановка выражений для токов  $I_1(p)$  и  $I_2(p)$  позволяет найти связь между входным  $U_1(p)$  и выходным  $U_2(p)$  сигналами:

$$U_2(p) = \frac{1}{pC_2} \frac{pC_2}{T_2 p + 1} U_1(p) - \frac{R_1 p C_1}{T_1 p + 1} U_1(p) = U_1(p) \frac{1 - T_1 T_2 p^2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

откуда передаточная функция получается равной:

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1 - T_1 T_2 p^2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

## Задание 2

Напомним, что при последовательном соединении звеньев (рис. 5, а) общая передаточная функция определяется произведением передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p),$$

а при параллельном соединении (рис. 5, б) — их суммой:

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

При соединении с обратной связью (рис. 5, в) общая передаточная функция замкнутой системы находится так:

$$W_z(p) = \frac{W(p)}{1 \mp W(p)W_{o.c.}(p)}.$$

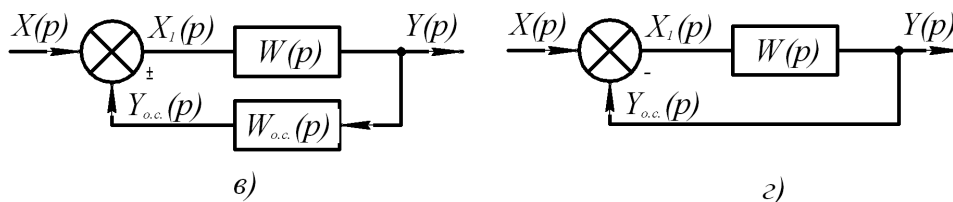
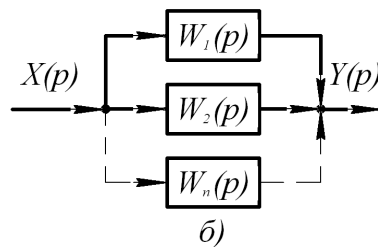
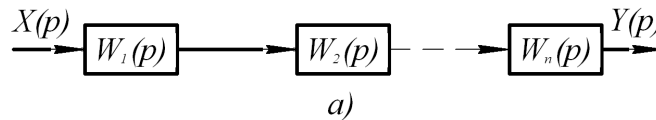


Рис. 5. Соединение звеньев автоматики

В этом выражении знак (–) относится к положительной обратной связи, когда  $X_1(p) = X(p) + Y_{o.c.}(p)$ , а знак (+) — к отрицательной обратной связи, когда  $X_1(p) = X(p) - Y_{o.c.}(p)$ .

Для случая весьма распространенной единичной отрицательной обратной связи (рис. 5, *з*) выражение для  $W_3(p)$  получается таким:

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}.$$

В качестве примера рассмотрим нахождение передаточной функции разомкнутой и замкнутой систем, структурная схема которой изображена на рис. 6.

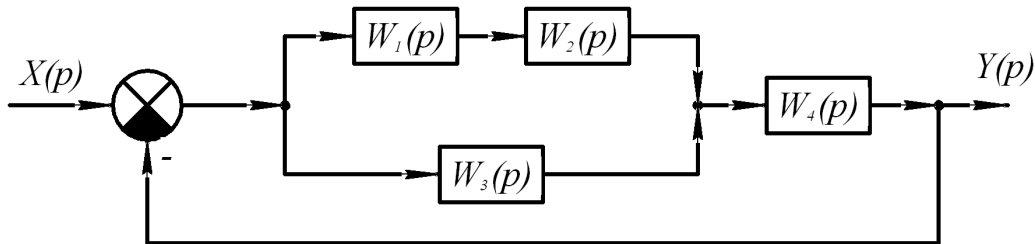


Рис. 6. Структурная схема системы

Звенья с передаточными функциями  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  соединены последовательно, а потому их общая передаточная функция:

$$W_{12}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p).$$

В свою очередь, звенья с передаточными функциями  $W_{12}(p)$  и  $W_3(p)$  соединены параллельно, а потому их общая передаточная функция:

$$W_{123}(p) = W_{12}(p) + W_3(p).$$

Звено с такой передаточной функцией соединено последовательно со звеном, имеющим передаточную функцию  $W_4(p)$ . Тогда:

$$W_{1234}(p) = W_{123}(p) + W_4(p).$$

Это и будет передаточная функция разомкнутой системы, которая теперь запишется так:

$$W_{раз}(p) = W_{1234}(p) = W_4(p)[W_3(p) + W_1(p)W_2(p)].$$

При нахождении  $W_3(p)$  учтем, что обратная связь — единичная отрицательная, следовательно:

$$W_3(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{W_4(p)[W_3(p) + W_1(p)W_2(p)]}{1 + W_4(p)[W_3(p) + W_1(p)W_2(p)]}.$$

### Задание 3

В качестве примера рассмотрим построение частотных характеристик звена с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{10}{p(0,25p + 1)}.$$



Амплитудно-фазовой (АФХ) (комплексной частотной (КЧХ)) характеристикой называется геометрическое место концов вектора  $W(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega(0,25j\omega+1)} = \frac{\overbrace{10}^{A(\omega)}}{\omega\sqrt{(0,25\omega)^2+1}} \angle \overbrace{-90^\circ - \arctg 0,25\omega}^{\phi(\omega)}.$$

Зависимость модуля  $A(\omega)$  функции  $W(j\omega)$  от частоты есть амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), зависимость фазы  $\phi(\omega)$  функции  $W(j\omega)$  от частоты — фазо-частотная характеристика (ФЧХ).

Данные расчета сведены в табл. 6.

Таблица 6

Расчетные данные звена

$\omega, c^{-1}$	0	1	2	4	10	$\infty$
$A(\omega)$	$\infty$	9,98	4,45	1,77	0,37	0
$\phi(\omega)$	$-90^\circ$	$-104^\circ$	$-126^\circ 34'$	$-135^\circ$	$-153^\circ 30'$	$-180^\circ$

По данным табл. 6 строим АФХ, АЧХ, ФЧХ (рис. 7).

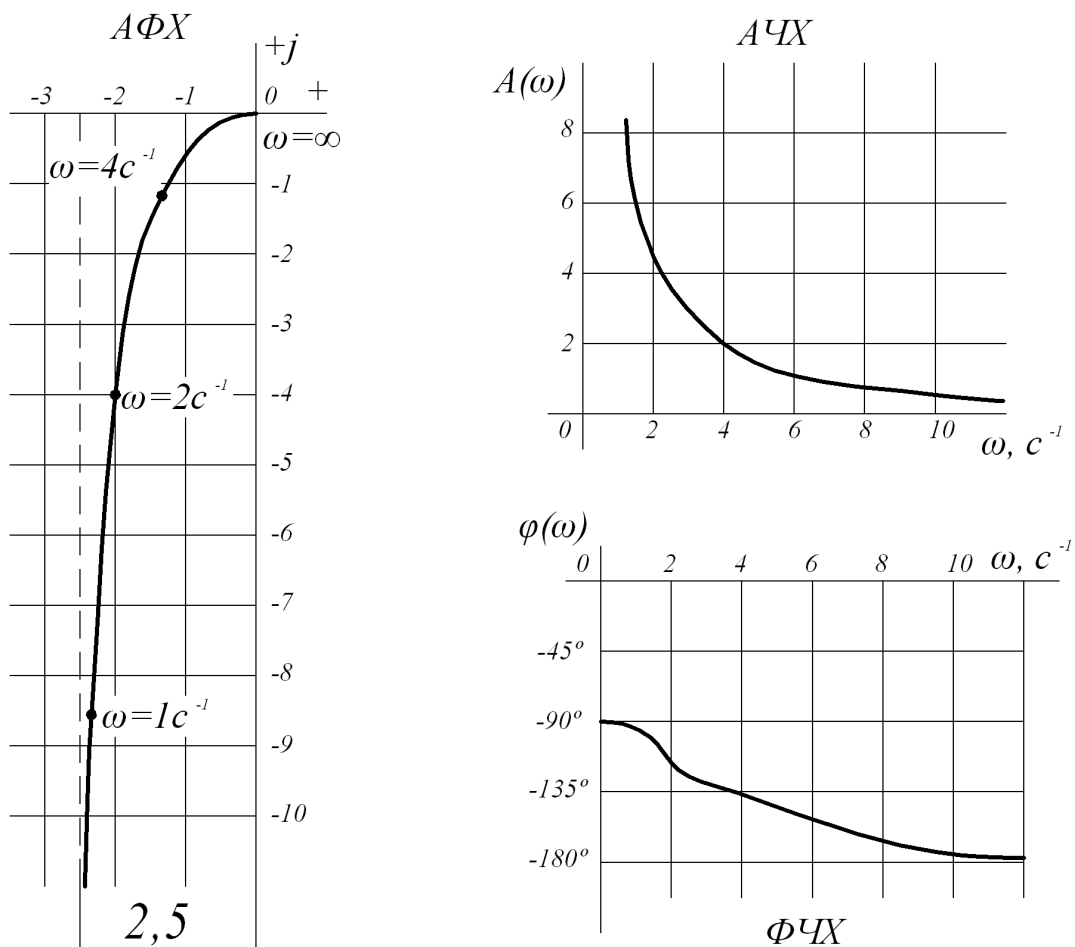


Рис. 7. Частотные характеристики звена

Асимптотическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 8) соответствует выражению:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{10}{\omega \sqrt{(0,25\omega)^2 + 1}} = 20 \lg \frac{10}{\omega} - 10 \lg [(0,25\omega)^2 + 1].$$

По оси абсцисс отложен логарифм частоты  $\omega$  в декадах (и сама частота  $\omega$ ,  $\text{с}^{-1}$ ), по оси ординат —  $L(\omega)$  в децибелах.

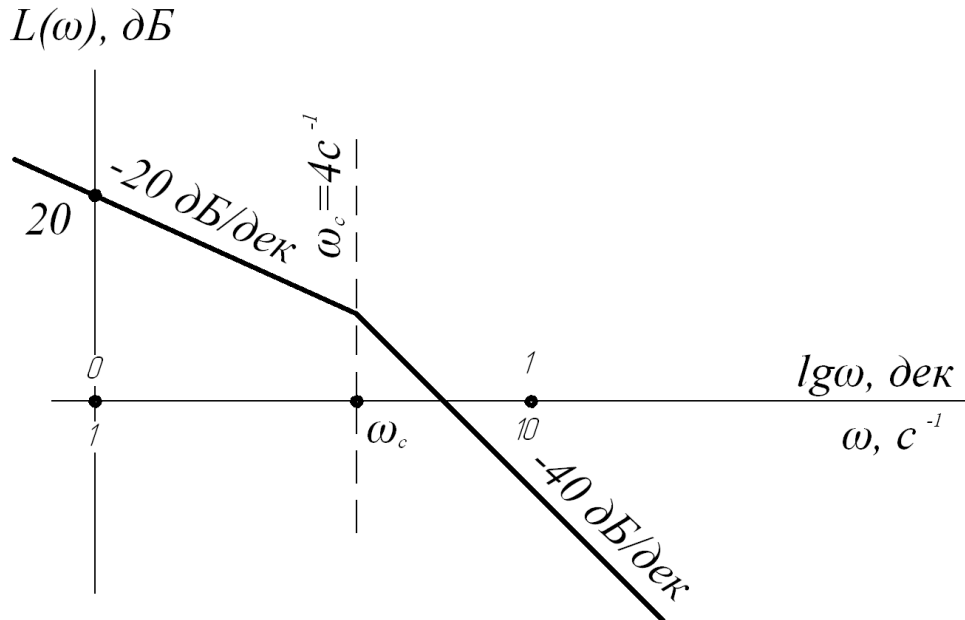


Рис. 8. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика звена

Начальный участок характеристики соответствует интегрирующему звену ( $20 \lg \frac{10}{\omega}$ ) и представляет собой прямую, проходящую с наклоном  $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$  через точку  $(0; 20 \lg 10)$ . В точке, соответствующей частоте сопряжения  $\omega_c = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ с}^{-1}$  наклон изменяется еще на  $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$ , в результате чего общий наклон 2-го участка равен  $-40 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$ .

#### Задание 4

Критерий Рауса – Гурвица позволяет оценить устойчивость системы, описываемой характеристическим уравнением вида:

$$H(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Составим определитель из коэффициентов этого уравнения:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \overline{a_{n-1}} & \overline{a_{n-3}} & \overline{a_{n-5}} & \dots & 0 \\ \overline{a_n} & \overline{a_{n-2}} & \overline{a_{n-4}} & \dots & 0 \\ 0 & \overline{a_{n-1}} & \overline{a_{n-3}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

При заполнении определителя по главной диагонали ставятся все коэффициенты характеристического уравнения, начиная со второго ( $a_{n-1}$ ). Выше диагонального члена ставятся коэффициенты при более низких степенях  $p$ , ниже — при более высоких. На место коэффициентов, индексы которых больше  $n$  или меньше нуля, ставятся нули. Диагональные миноры выделены пунктирными линиями.

САР устойчива, если при  $a_n > 0$  определитель  $\Delta_n$  (Рауса – Гурвица) и все его диагональные миноры, получающиеся вычеркиванием из предыдущего определителя последней строки и последнего столбца, положительны.

Например, характеристическое уравнение САР имеет вид:

$$H(p) = 6p^3 + 3p^2 + p + 10 = 0.$$

Тогда

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 10 - 6 \cdot 10 \cdot 10 < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 60 < 0,$$

$$\Delta_1 = |3| = 3 > 0.$$

Система неустойчива, т. к.  $\Delta_3$  и  $\Delta_2$  отрицательны.

Для оценки устойчивости по критерию Михайлова надо построить кривую Михайлова (геометрическое место концов вектора  $H(j\omega)$ ). Если она начинается на вещественной положительной оси, поворачивается с ростом частоты в положительном направлении (против часовой стрелки), проходит последовательно  $n$  квадрантов, нигде не обращаясь в ноль, и в  $n$ -ом квадранте уходит в бесконечность, то САР устойчива.

Оценим устойчивость системы, характеристическое уравнение которой таково:

$$H(p) = 0,2p^3 + p^2 + p + 10 = 0.$$

Запишем  $H(j\omega)$ :

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= 0,2(j\omega)^3 + (j\omega)^2 + j\omega + 10 = -0,2j\omega^3 - \omega^2 + j\omega + 10 = \\ &= (10 - \omega^2) + j\omega(1 - 0,2\omega^2) = A(\omega) + jB(\omega) = 0. \end{aligned}$$

Результаты расчета  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  для разных частот  $\omega$  сведем в табл. 7.

Таблица 7

Расчетные данные для построения

$\omega, \text{с}^{-1}$	0	0,5	1	1,5	2	3	4
$A(\omega)$	10	9,75	9	7,75	6	1	-6
$B(\omega)$	0	0,475	0,8	0,8	0,4	-2,4	-8,8

По данным расчета строим семейство векторов, огибающая концов которых (рис. 9) и есть кривая Михайлова.

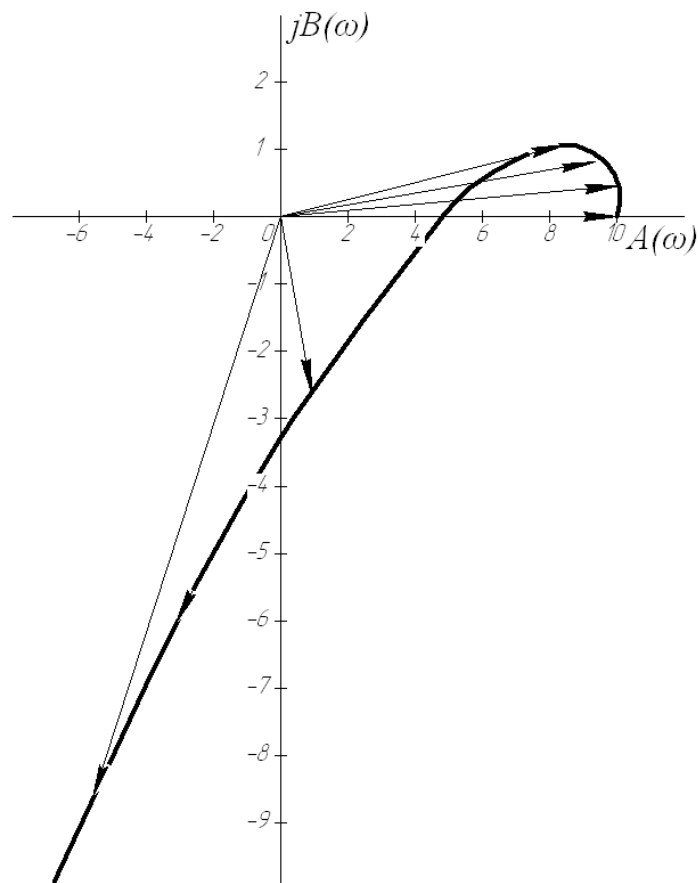


Рис. 9. Кривая Михайлова

Видно, что САР неустойчива, т. к. не соблюдается последовательность прохождения квадрантов.

## Задание 5.

Рассмотрим пример расчета для следующих исходных данных:  $T = 10$ ;  $K_f = 4,5$ ;  $K_x = 1,5$ ;  $f = 2 \cdot 10^{-2}$ ; параметр П-регулятора:  $K_p = 2$ ; параметры ПИ-регулятора —  $K_p = 2$ ;  $T_{uz} = 5$ .

1. Анализ объекта регулирования.

Запишем уравнение движения объекта в операторной форме:

$$TpY(p) + Y(p) = K_x X(p) - K_f F(p),$$

или

$$Y(p)(Tp + 1) = K_x X(p) - K_f F(p).$$

Отсюда

$$Y(p) = \frac{K_x}{Tp + 1} X(p) - \frac{K_f}{Tp + 1} F(p) = W_x(p)X(p) - W_f(p)F(p),$$

где  $W_x(p)$  — передаточная функция ОР по управляющему воздействию;  
 $W_f(p)$  — передаточная функция ОР по возмущению.

Тогда структурную схему ОР можно представить в таком виде (рис. 10).

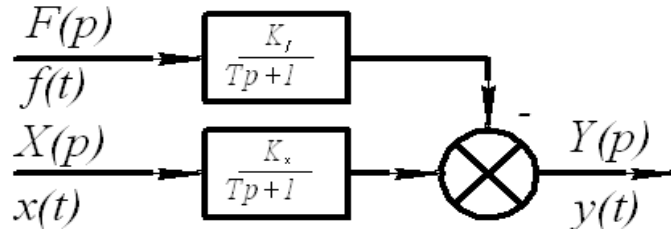


Рис. 10. Структурная схема ОР

2. Построение переходного процесса  $y(t)$  в ОР в отсутствие автоматического регулятора (АР) в случае, когда возмущение имеет вид единичного сигнала  $f(t) = f \cdot 1(t) = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1(t)$ .

Положим в исходном уравнении  $x(t) = 0$ . Тогда получим:

$$T \frac{dy}{dt} + y = -K_f f.$$

Решением этого уравнения является функция:

$$y(t) = -K_f f (1 - e^{-t/T}) = -9 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-t/10}) \text{ м.}$$

Расчет переходного процесса следует вести для интервала времени  $0 \leq t \leq 5T = 50 \text{ с.}$

Выберем шаг по времени  $\Delta t = 5 \text{ с.}$

Данные расчета сведем в табл. 8.

Таблица 8

Расчетные данные для построения  $y(t)$

$t, c$	0	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>20</b>	<b>25</b>
$t/10$	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$e^{-t/10}$	1	0,61	0,37	0,22	0,14	0,08
$1-e^{-t/10}$	0	0,39	0,63	0,78	0,86	0,92
$y = -4,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-t/10})$	0	$-3,54 \cdot 10^{-2}$	$-5,68 \cdot 10^{-2}$	$-7 \cdot 10^{-2}$	$-7,78 \cdot 10^{-2}$	$-8,26 \cdot 10^{-2}$
$t, c$	0	<b>30</b>	<b>35</b>	<b>40</b>	<b>45</b>	<b>50</b>
$t/10$	0	3	3,5	4	4,5	5
$e^{-t/10}$	1	0,05	0,03	0,02	0,01	0,007
$1-e^{-t/10}$	0	0,95	0,97	0,98	0,99	0,993
$y = -4,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-t/10})$	0	$-8,55 \cdot 10^{-2}$	$-8,73 \cdot 10^{-2}$	$-8,84 \cdot 10^{-2}$	$-8,9 \cdot 10^{-2}$	$-8,94 \cdot 10^{-2}$

По данным табл. 8 строится график  $y(t)$  (рис. 11). Из графика видно, что  $y_{ycm} = -K_f f = -0,9$  м, а время регулирования (с точностью  $\delta = \pm 0,05 y_{ycm}$ ) равно  $t_{II} \cong 30$  с.

3. Структурная схема замкнутой САР изображена на рис. 12.

Отклонение выходного параметра  $y(t)$  от установившегося значения появляется как следствие возникновения возмущения  $f(t)$ . На входе АР сигнал  $\Delta y(t) = g(t) - y(t)$ , где  $g(t)$  — задающее воздействие (в нашем случае —  $H_{зад}$ ). В зависимости от величины и знака этого отклонения АР формирует управляющее воздействие  $x(t)$ , действие которого на ОР противоположно действию возмущения  $f(t)$ . В результате этого отклонения  $y$  либо ликвидируется полностью, либо значительно уменьшается (в зависимости от типа регулятора).

Передаточные функции регуляторов:

«П» —  $W_{II}(p) = K_p$ ;

«ПИ» —  $W_{III}(p) = K_p + K_{II} \frac{1}{p} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_{уз} p}\right) = \frac{K_p (T_{уз} p + 1)}{T_{уз} p}$ .

Параметры  $K_p$  и  $T_{уз}$  являются настроечными, т. е. могут изменяться при настройке АР.

В соответствии со структурной схемой (рис. 12) найдем передаточные функции замкнутой САР по возмущению.

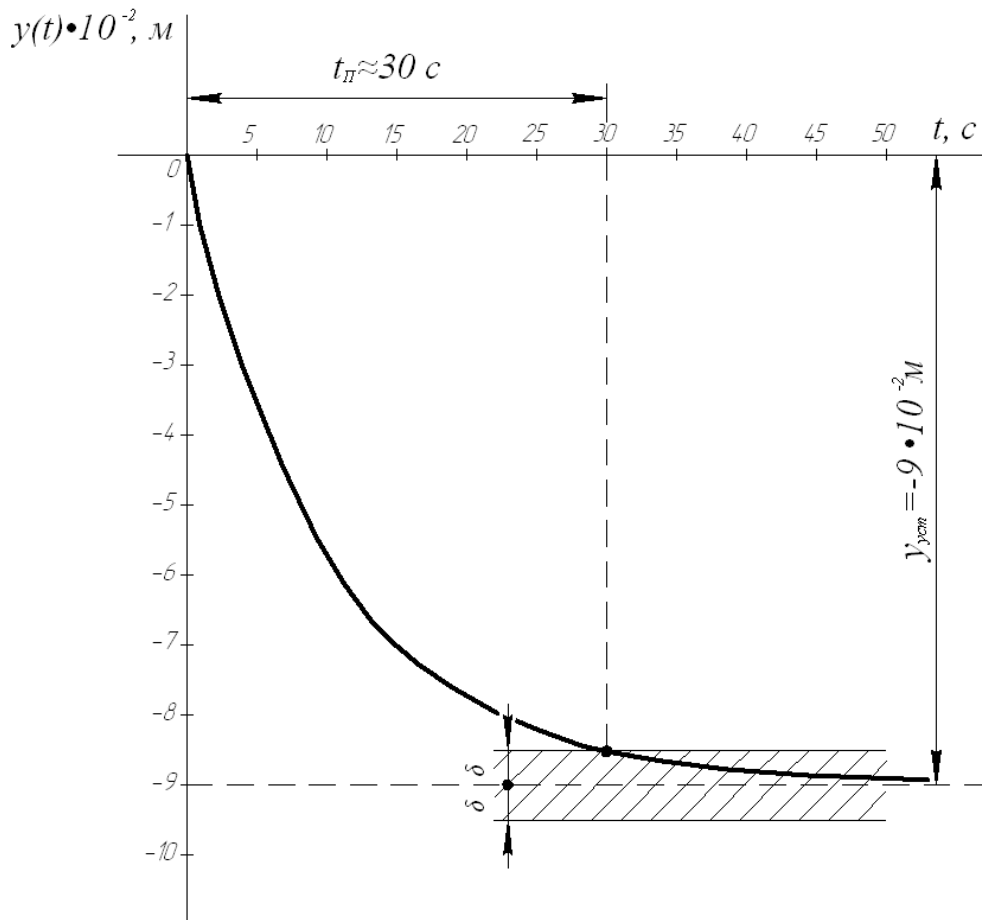


Рис. 11. График переходного процесса в ОП

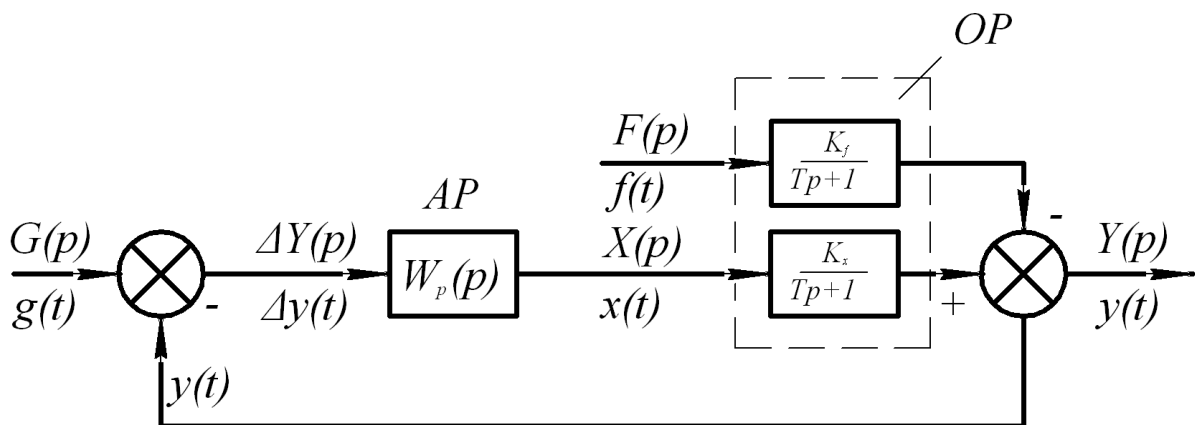


Рис. 12. Структурная схема САР

$$W_{f \text{ зам}}(p) = \frac{y(p)}{F(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W_p(p)W_x(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W_x(p)W_p(p)}$$

Тогда для системы с П-регулятором передаточная функция будет равна:

$$W_{f_{\text{зам}} \text{ "II"}}(p) = \frac{-K_f}{Tp + 1 + K_p K_x},$$

для системы с ПИ-регулятором:

$$W_{f_{\text{зам}} \text{ "III"}}(p) = \frac{-K_f T_{уз} p}{T_p T_{уз} p^2 + p T_{уз} (1 + K_p K_x) + K_p K_x}.$$

4. Построение кривой переходного процесса в системе с АР при скачкообразном изменении возмущения  $f(t)$ .

В операторной форме выходной сигнал может быть найден так:

$$Y(p) = W_{f_{\text{зам}}}(p) \cdot F(p) = \frac{G(p)}{H(p)},$$

где  $F(p) = \frac{f}{p}$  — изображение неединичного возмущения.

Для перехода от  $Y(p)$  к  $y(t)$  можно воспользоваться теоремой разложения.

Изображению  $Y(p) = \frac{G(p)}{H(p)}$  соответствует оригинал:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t},$$

где  $G(p_k) = G(p)$  при  $p = p_k$ ,

$$H'(p_k) = \frac{d}{dp} [H(p)] \text{ при } p = p_k,$$

$p_k$  — корни уравнения  $H(p) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Корни уравнения  $H(p) = p(10p + 4) = 0$  получаются равными  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -0,4$ . Откуда  $H'(p_1) = 4, H'(p_2) = -4$ .

Тогда для системы с П-регулятором получается:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{-K_f f}{p[Tp + 1 + K_p K_x]} = \frac{-4,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{p[10p + 1 + 2 \cdot 1,5]} = \frac{-9 \cdot 10^{-2}}{p(10p + 4)} = \\ &= y(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t} = -9 \cdot 10^{-2} \left( \frac{1}{4} e^{0 \cdot t} + \frac{1}{-4} e^{-0,4t} \right) = \\ &= -2,25 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-t/2,5}), \end{aligned}$$

где  $G(p_1) = G(p_2) = 9 \cdot 10^{-2}$ .

Расчет проведен для  $0 \leq t \leq 5T$ , где  $T = 2,5$ с.

Данные расчета сведены в табл. 9.



Таблица 9

## Результаты расчета

$t, c$	0	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
$0,4t$	0	0,4	0,8	1,2	1,6
$e^{-0,4t}$	1	0,67	0,45	0,3	0,2
$1 - e^{-0,4t}$	0	0,33	0,55	0,7	0,8
$y = -2,25 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-0,4t}), M$	0	$-0,74 \cdot 10^{-2}$	$-1,24 \cdot 10^{-2}$	$-1,57 \cdot 10^{-2}$	$-1,8 \cdot 10^{-2}$
$t, c$	0	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
$0,4t$	0	2,0	2,4	2,8	3,2
$e^{-0,4t}$	1	0,14	0,09	0,06	0,04
$1 - e^{-0,4t}$	0	0,86	0,91	0,94	0,96
$y = -2,25 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-0,4t}), M$	0	$-1,94 \cdot 10^{-2}$	$-2,05 \cdot 10^{-2}$	$-2,11 \cdot 10^{-2}$	$-2,16 \cdot 10^{-2}$
$t, c$	0	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>14</b>
$0,4t$	0	3,6	4	4,8	5,6
$e^{-0,4t}$	1	0,03	0,02	0,01	0,004
$1 - e^{-0,4t}$	0	0,97	0,98	0,99	0,996
$y = -2,25 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-0,4t}), M$	0	$-2,19 \cdot 10^{-2}$	$-2,21 \cdot 10^{-2}$	$-2,23 \cdot 10^{-2}$	$-2,25 \cdot 10^{-2}$

Для системы с ПИ-регулятором:

$$\begin{aligned}
 Y(p) &= \frac{-K_{uz} T_{uz} f}{T T_{uz} p^2 + T_{uz} (1 + K_p K_x) p + K_p K_x} = \frac{-4,5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{10 \cdot 5 p^2 + 5(1 + 2 \cdot 1,5) p + 2 \cdot 1,5} = \\
 &= \frac{-0,9 \cdot 10^{-2}}{p^2 + 0,4 p + 0,06} = y(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t} = \\
 &= -0,9 \cdot 10^{-2} \left[ \frac{1 \cdot e^{(-0,2 + j0,14)t}}{2(-0,2 + j0,14) + 0,4} + \frac{1 \cdot e^{(-0,2 - j0,14)t}}{2(-0,2 - j0,14) + 0,4} \right] = \\
 &= -6,42 \cdot 10^{-2} e^{-0,2t} \sin 0,14t.
 \end{aligned}$$

При расчете учитывалось, что уравнение

$$H(p) = p^2 + 0,4p + 0,06 = 0$$

имеет корни  $p_1 = -0,2 + j0,14$ ,  $p_2 = -0,2 - j0,14$ ;

$$H'(p) = 2p + 0,4.$$

График  $y(t)$  в этом случае представляет собой отрицательную синусоиду с амплитудой 6,42 и частотой  $\omega = 0,14c^{-1}$ , вписанную в экспоненту  $e^{-0,2t}$  с постоянной времени  $T = \frac{1}{0,2} = 5c$ .

Для расчета графика по точкам следует выбрать интервал времени  $0 \leq t \leq 4T = 20\text{ с}$  с шагом  $\Delta t = 2\text{ с}$ .

Данные расчета сведены в табл. 10.

*Таблица 10*

Данные расчета переходного процесса

$t, \text{ с}$	0	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
$-0,2t$	0	-0,4	-0,8	-1,2	-1,6
$e^{-0,2t}$	1	0,67	0,45	0,3	0,2
$0,14t$	0	0,28	0,56	0,84	1,12
$\sin 0,14t$	0	0,28	0,53	0,75	0,9
$y(t) = -6,42 \cdot 10^{-2} e^{-0,2t} \sin 0,14t$	0	$-1,18 \cdot 10^{-2}$	$-1,53 \cdot 10^{-2}$	$-1,44 \cdot 10^{-2}$	$-1,16 \cdot 10^{-2}$
$t, \text{ с}$	0	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>14</b>	<b>16</b>
$-0,2t$	0	-2	-2,4	-2,8	-3,2
$e^{-0,2t}$	1	0,14	0,09	0,06	0,04
$0,14t$	0	1,4	1,68	1,96	2,24
$\sin 0,14t$	0	0,98	0,99	0,93	0,78
$y(t) = -6,42 \cdot 10^{-2} e^{-0,2t} \sin 0,14t$	0	$-0,85 \cdot 10^{-2}$	$-0,58 \cdot 10^{-2}$	$-0,36 \cdot 10^{-2}$	$-0,21 \cdot 10^{-2}$
$t, \text{ с}$	0	<b>18</b>	<b>20</b>	<b>22</b>	<b>24</b>
$-0,2t$	0	-3,6	-4,0	-4,4	-4,8
$e^{-0,2t}$	1	0,03	0,02	0,012	0,008
$0,14t$	0	2,52	2,8	3,08	3,36
$\sin 0,14t$	0	0,58	0,34	0,062	-0,22
$y(t) = -6,42 \cdot 10^{-2} e^{-0,2t} \sin 0,14t$	0	$-0,1 \cdot 10^{-2}$	$-0,04 \cdot 10^{-2}$	$-0,005 \cdot 10^{-2}$	$0,011 \cdot 10^{-2}$
$t, \text{ с}$		<b>26</b>	—	—	—
$-0,2t$		-5,2	—	—	—
$e^{-0,2t}$		0,006	—	—	—
$0,14t$		3,64	—	—	—
$\sin 0,14t$		-0,48	—	—	—
$y(t) = -6,42 \cdot 10^{-2} e^{-0,2t} \sin 0,14t$		$0,018 \cdot 10^{-2}$	—	—	—

По данным табл. 9 и 10 построены графики переходного процесса (рис. 13). Кривая 1 — переходный процесс в САР с П-регулятором, кривая 2 — с ПИ-регулятором.

Можно перейти от изображения  $Y(p)$  к оригиналу  $y(t)$  с помощью табличных операторов (см. приложение). Продемонстрируем этот прием для системы с П-регулятором.

$$Y(p) = \frac{-9 \cdot 10^{-2}}{p(10p + 4)} = y(t) = ?$$

«Подгоним» выражение для  $Y(p)$  под табличный оператор вида:

$$\frac{1}{p(p+a)} = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}).$$

Для этого вынесем в знаменателе функции  $Y(p)$  за скобку число 10. Получим:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{-9 \cdot 10^{-2}}{10p \left( p + \frac{4}{10} \right)} = \frac{-9 \cdot 10^{-2}}{10} \cdot \frac{1}{p(p+0,4)} = \\ &= y(t) = -9 \cdot 10^{-3} \frac{1}{0,4} (1 - e^{-0,4t}) = -2,25 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-t/2,5}), \end{aligned}$$

что совпадает с результатом, полученным с помощью теоремы разложения.

Аналогичным образом можно найти оригинал  $y(t)$  для

$$Y(p) = \frac{-0,9 \cdot 10^{-2}}{p^2 + 0,4p + 0,06},$$

«сводя» при этом выражение  $Y(p)$  к табличному оператору следующего вида:

$$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} = e^{-at} \sin \omega t.$$

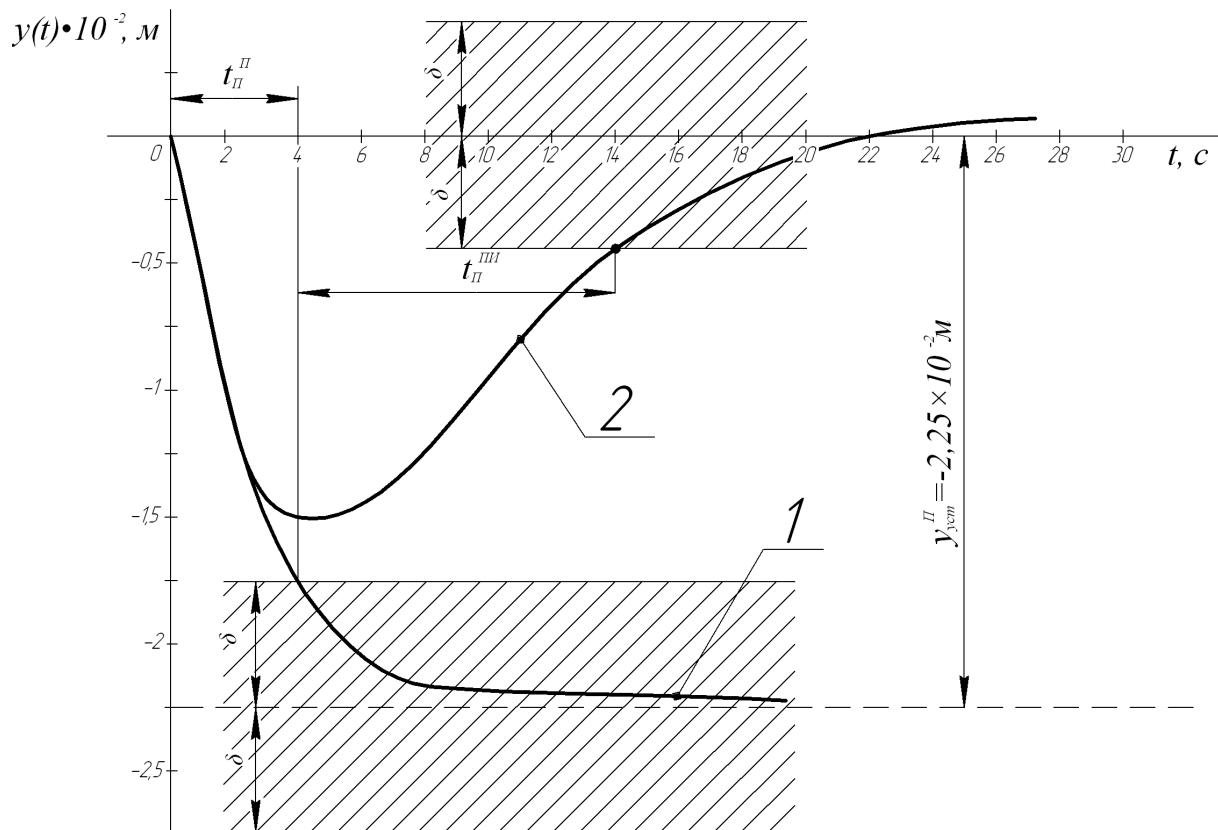


Рис. 13. Графики переходных процессов в САР с П- и ПИ-регуляторами

5. Найдем время переходного процесса  $t_{\text{П}}$  в системе без регулятора и с П- и ПИ-регуляторами.

Под временем  $t_{\text{П}}$  понимают отрезок времени, по истечении которого выходной параметр  $y(t)$  отличается от своего нового установившегося значения не более чем на заранее установленную величину  $\delta$ , которую обычно принимают равной  $0,05y_{\text{уст}}$  в системе без регулятора. В рассматриваемом примере

$$\delta = 0,05 \cdot 9 \cdot 10^{-2} = 0,45 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Выделив на графиках  $y(t)$  зоны, ограниченные  $\pm\delta$ , получим:

- для системы без регулятора  $t_{\text{П}} = 30$  с (рис. 11);
- для системы с П-регулятором  $t_{\text{П}}^{\text{П}} = 4$  с (рис. 13);
- для системы с ПИ-регулятором  $t_{\text{П}}^{\text{ПВ}} = 14$  с (рис. 13).

6. Подведем итоги.

1) для варианта с П-регулятором.

Его применение позволило уменьшить время переходного процесса с 30 до 4 с. Установившееся значение отклонения выходного параметра уменьшилось в  $(1 + K_p K_x)$  раз с  $-9 \cdot 10^{-2}$  м до  $-2,25 \cdot 10^{-2}$  м. Наличие этого отклонения (статической ошибки) является характерной особенностью си-

стем этого типа с П-регулятором. Уменьшение статической ошибки возможно за счет увеличения настроечного параметра ( $K_p$ ) П-регулятора, но чрезмерно это делать нельзя из-за возможной потери устойчивости системой.

2) для системы с ПИ-регулятором.

Применение регулятора этого типа позволило уменьшить время переходного процесса с 30 до 14 с и полностью устранить остаточное отклонение выходного параметра. Статическая ошибка регулирования в этом случае равна нулю.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Изображение по Лапласу функций времени

Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\mp at}$	$\frac{1}{p \pm a}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гальперин, М. В. Автоматическое управление / М. В. Гальперин. – Москва : ИНФА-М: ФОРУМ, 2007.
2. Ким, Д. П. Теория автоматического управления / Д. П. Ким. – Москва : Физматлит, 2003.
3. Лукас, В. А. Теория автоматического управления : учебник для вузов / В. А. Лукас. 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Недра, 2004.
4. Ким, Д. П. Сборник задач по теории автоматического регулирования. Линейные системы / Д. П. Ким, Н. Д. Дмитриева. – Москва : Физматлит, 2007.
5. Теория автоматического управления : учебник для вузов. В 2 ч. / под ред. А. А. Воронова. 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1986.
6. Теория автоматического управления : учебник для вузов. В 2 ч. / под ред. В. А. Нетушила. 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1976.
7. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления : учебное пособие для вузов / под ред. В. А. Бесекерского. 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1978.
8. Цыпкин, Я. С. Теория линейных импульсных систем / Я. С. Цыпкин, Ю. С. Попков. – Москва : Наука, 1973.