

Научная статья  
УДК 630\*53

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА ДРЕВОСТОЕВ ПО ДАННЫМ ПОВТОРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

**Александр Вячеславович Лебедев**

Российский государственный аграрный университет – МСХА имени  
К. А. Тимирязева, Москва, Россия  
alebedev@rgau-msha.ru

**Аннотация.** Динамические уравнения находят широкое применение при построении моделей роста древостоев по данным повторных наблюдений. В статье для древостоев, произрастающих в схожих почвенно-климатических условиях, показаны наилучшие модели для моделирования динамики средних высот и диаметров, изреживания.

**Ключевые слова:** модели роста древостоев, эмпирические модели, многолетние наблюдения

**Благодарности:** исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-76-01016, <https://rscf.ru/project/23-76-01016/>

Original article

## MODELING GROWTH OF FOREST STANDS FROM REPEATED OBSERVATIONS

**Aleksandr V. Lebedev**

Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural  
Academy, Moscow, Russia  
alebedev@rgau-msha.ru

**Abstract.** Dynamic equations are widely used in constructing forest stand growth models based on repeated observation data. The article shows the best models for simulating the dynamics of average heights and diameters, and thinning for forest stands growing in similar soil and climatic conditions.

**Keywords:** forest stand growth models, empirical models, long-term observations

**Acknowledgments:** this study has been supported by the grants the Russian Science Foundation, RSF 23-76-01016, <https://rscf.ru/en/project/23-76-01016/>

Рост древостоя может быть описан математической функцией зависимости таксационного показателя от возраста [1]. Среди множества эмпирических моделей роста и производительности древостоев выделяют две основные группы: статические и динамические. Принято, что в статических моделях выбирается фиксированный базовый возраст, относительно которого проводится выравнивание таксационных показателей [2]. Например, большое распространение получил метод моделирования хода роста древостоев по классам бонитета, где каждый таксационный показатель является строго увязанным со значением, например в возрасте 100 лет. Методы, основанные на базовом возрасте, имеют ряд недостатков: 1) полученные ростовые кривые актуальны только для выбранного фиксированного базового возраста, 2) так как кривая проходит через заранее определенную базовую точку, то уравнения не являются инвариантными, 3) оценки параметров уравнения могут быть смещенными и зависимыми от предварительно заданного базового возраста.

Недостатки статических моделей устранены в динамических [3]. Например, обобщенный алгебраический разностный подход (*GADA*) позволяет варьировать несколько параметров базовой функции роста и получать полиморфные кривые, специфичные для каждого уровня производительности древостоя [4]. Это происходит при выполнении условия, что с помощью некоторого алгебраического преобразования все варьируемые параметры могут быть выражены как функция фиксированных или глобальных параметров и только одного изменяющегося параметра. Данный метод в последние годы находит широкое применение при построении моделей роста и производительности древостоев по данным повторных наблюдений [5–7].

В России большой объем данных повторных наблюдений за таксационными показателями древостоев на постоянных пробных площадях накоплен в Лесной опытной даче Российского государственного аграрного университета – МСХА имени К. А. Тимирязева. С 1862 г. проведены работы на более чем 250 постоянных пробных площадях, накоплены ряды многолетних наблюдений за древостоями сосны естественного и искусственного происхождения, за культурами ели и лиственницами, за древостоями березы и дуба [8]. Можно считать, что весь лесной массив на площади 248 га находится в схожих почвенно-климатических условиях. Оценки обобщающей способности рассматриваемых моделей динамики таксационных показателей даны с использованием таких показателей, как квадратный корень из среднеквадратической ошибки (*RMSE*), средний абсолютный процент ошибки (*MAPE*), коэффициент детерминации ( $R^2$ ) и скорректированный коэффициент детерминации ( $R^2\text{-adj.}$ ) [2].

Проведенные исследования показали, что для древостоев на сравнительно небольшой площади наилучшим для моделирования роста по средней высоте и среднему диаметру является динамическое уравнение, основанное на ростовой функции Митчерлиха [9]:

$$y = a \left( \frac{y_0}{a} \right)^{\frac{\ln(1-\exp(-bt))}{\ln(1-\exp(-bt_0))}},$$

где  $y$  – значение таксационного показателя в возрасте;

$t$ ,  $y_0$  – начальное значение таксационного показателя в возрасте;

$t_0$ ,  $a$  и  $b$  – параметры уравнения.

Для древостоев сосны и ели в среднем ошибка прогноза средних высот составляет 0,9–1,3 м (2,7–5,3 %), а для лиственницы, дуба и березы – 2,2–2,6 м (6,4–9,6 %). Величины  $RMSE$  и  $MAPE$  связаны с первым коэффициентом ростовой функции  $a$ , отвечающим за асимптотическое максимально возможное значение средней высоты. Для древостоев сосны и ели он составляет 23,6–27,1 и для лиственницы, березы и дуба – 29,1–32,3. Прослеживается тесная прямая корреляционная связь ( $r = 0,878$ ) между параметром  $a$  и  $RMSE$ , а для его связи с  $MAPE$   $r = 0,734$ . Таким образом, для более производительных древостоев (лиственница, береза и дуб) ошибка прогноза несколько выше, чем для менее производительных (сосна и ель).

Д моделей роста по среднему диаметру  $R^2$  находится в диапазоне от 0,806 (дубовые древостои) до 0,929 (сосновые древостои естественного происхождения). Во всех случаях  $R^2-adj.$  указывает на отсутствие избыточного количества параметров в используемых моделях. По значениям  $RMSE$  и  $MAPE$  средняя ошибка прогноза среднего диаметра по моделям составляет 1,6–4,2 см (3,9–8,5 %). Наибольшую среднюю ошибку прогноза дают модели для культур лиственницы (4,1 см или 7,9 %) и для древостоев дуба (4,2 см или 8,5 %).

Модель естественного изреживания древостоев, которая наилучшим образом соответствует фактическим данным, представлена трехпараметрическим уравнением [10]:

$$y = \left( y_0^{b_0} + b_1(t-t_0) + b_2 \ln \left( \frac{t}{t_0} \right) \right)^{\frac{1}{b_0}},$$

где  $y$  – густота в возрасте  $t$ ;

$y_0$  – начальная густота в возрасте  $t_0$ ;

$b$  – параметры уравнения.

Для полученных уравнений  $R^2$  находится в диапазоне от 0,828 (культуры ели) до 0,926 (сосновые древостои естественного происхождения). По значениям  $RMSE$  и  $MAPE$  средняя ошибка прогноза числа деревьев составляет 68–363 шт. (13,8–24,3 %). Наибольшей средней ошибкой прогноза характеризуются модели для культур ели (363 шт. или 24,3 %).

Значения сумм площадей поперечных сечений и запасов древесины могут быть рассчитаны с использованием стандартных зависимостей, применяемых в лесной таксации:

$$G = \pi N \left( \frac{D}{200} \right)^2,$$
$$M = GHF,$$

где  $G$  – сумма площадей сечений, м<sup>2</sup>;

$M$  – запас, м<sup>3</sup>;

$N$  – число деревьев, шт.;

$D$  – средний диаметр, см;

$HF$  – видовая высота;

$H$  – средняя высота, м;

$F$  – среднее видовое число.

Для суммы площадей сечений ошибка определения составляет 3,4–5,3 м<sup>2</sup> (11–14 %), а для запаса – 31–99 м<sup>3</sup> (12–15 %). Для лиственницы высокое значение  $RMSE$  (99,4) для запаса, выделяющееся относительно других древесных пород, объясняется высокой производительностью древостоев. Поэтому  $MARE$  не принимает сравнительно высокого значения (13,2 %).

Таким образом, на примере сосновых, лиственничных, еловых, дубовых и березовых древостоев, произрастающих в сходных почвенно-климатических условиях, выявлены лучшие динамические, инвариантные относительно базового возраста уравнения для моделирования роста и изреживания по данным долговременных наблюдений на постоянных пробных площадях. По комплексу метрик качества уравнения являются надежным инструментом для моделирования роста и производительности древостоев.

### Список источников

1. Нагимов З. Я., Нагимов В. З., Артемьева И. Н. Ход роста сосновых древостоев в лишайниковом типе леса Ханты-Мансийского автономного округа // Известия высших учебных заведений. Лесной журнал. 2010. № 5. С. 7–12.

2. Лебедев А. В. Прогнозирование роста по средней высоте культур сосны с использованием обобщенного алгебраического разностного подхода // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2022. № 238. С. 49–66. DOI 10.21266/2079-4304.2022.238.49-66

3. Cieszewski C. J., Bailey R. L. Generalized algebraic difference approach: theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes // Forest Science. 2000. № 46. P. 116–126.

4. Динамическая модель роста культур сосны по среднему диаметру / Н. Н. Дубенок, А. В. Лебедев, В. В. Кузьмичев, С. Н. Волков // Лесохозяйственная информация. 2023. № 1. С. 31–43. DOI 10.24419/ЛНИ.2304-3083.2023.1.03
5. Дубенок Н. Н., Лебедев А. В., Кузьмичев В. В. Динамическая модель изреживания культур сосны // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2022. № 239. С. 6–21. DOI 10.21266/2079-4304.2022.239.6-21. EDN FIKCRJ
6. Stankova T. V. A dynamic whole-stand growth model, derived from allometric relationships // *Silva Fennica*. 2016. Vol. 50, № 1. P. 1406. DOI 10.14214/sf.1406
7. Allen II M. G., Antón-Fernández C., Astrup R. A stand-level growth and yield model for thinned and unthinned managed Norway spruce forests in Norway // *Scandinavian Journal of Forest Research*. 2020. № 35(5–6). P. 238–251. DOI 10.1080/02827581.2020.1773525
8. 160 лет Лесной опытной даче Тимирязевской сельскохозяйственной академии (1862–2022) / Н. Н. Дубенок [и др.] // Лесохозяйственная информация. 2022. № 4. С. 5–14. DOI 10.24419/ЛНИ.2304-3083.2022.4.01
9. Лебедев А. В., Кузьмичев В. В. Построение бонитетной шкалы с использованием обобщенного алгебраического разностного подход // Сибирский лесной журнал. 2022. № 3. С. 48–58. DOI 10.15372/SJFS20220307
10. Thapa R., Burkhart H. E. Modeling Stand-Level Mortality of Loblolly Pine (*Pinus taeda* L.) Using Stand, Climate, and Soil Variables // *Forest Science*. 2015. № 61. P. 1–13. DOI 10.5849/forsci.14-125