Научная статья
УДК 517.935, 378

ОБ УСТОЙЧИВОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЗДЕЙСТВИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ ЛЕВЫМ КОНЦОМ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Андрей Юрьевич Вдовин[1], Светлана Сергеевна Рублева[2]
[1, 2] Уральский государственный лесотехнический университет, Екатеринбург, Россия
[1] vdovinau@m.usfeu.ru
[2] rublevass@m.usfeu.ru

Аннотация. Для многих прикладных задач в условиях цифровизации становится актуальным моделирование неизвестных величин на основании неточной информации, поступающей в режиме «реального времени». Такую задачу решает метод регуляризации, предложенный Ю. С. Осиповым, А. В. Кряжимским для восстановления неизвестного воздействия на динамическую систему. Найденное таким образом воздействие имеет минимальную норму в $L_2[a, b]$. В предлагаемой работе рассматривается модификация этого алгоритма, позволяющая моделировать иные воздействия по известным начальным условиям.

Ключевые слова: конечношаговый динамический регуляризирующий алгоритм, априорная информация, моделирование воздействия

Original article

ON SUSTAINABLE MODELING OF THE IMPACT WITH A FIXED LEFT END IN A DYNAMICAL SYSTEM

Andrey Yu. Vdovin[1], Svetlana S. Rubleva[2]
[1, 2] Ural State Forest Engineering University, Yekaterinburg, Russia
[1] vdovinau@m.usfeu.ru
[2] rublevass @m.usfeu.ru

Abstract. For many applied problems in the conditions of digitalization, modeling of unknown values on the basis of inaccurate information received in “real time” becomes relevant. Such a problem is solved by the regularization method proposed by Y. S. Osipov and A. V. Kryazhimsky to restore the unknown impact on the dynamical system. The impact found in this way has a minimum norm in $L_2[a, b]$. The proposed paper considers a modification of this algorithm which allows modeling other impacts using known initial conditions.

Keywords: finite-step dynamic regularizing algorithm, apriori information, impact modeling

Многие практические задачи, связанные с динамическими процессами, сводятся к исследованию систем обыкновенных дифференциальных уравнений, функционирующих на ограниченном временном промежутке:

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)). \tag{1}$$

Переменные в уравнении (1) будем трактовать следующим образом: t – время, $t \in [a,b] = T$; $x(t)$ – состояние системы в момент времени t; $x'(t)$ – скорость изменения этого состояния; $u(t)$ – фактор, влияющий на поведение системы, который может называться *помехой* (носить отрицательный *характер), управлением* (положительный характер), в работе для его обозначения используется термин «воздействие»; и, наконец, функция $f(\cdot)$ – закон, согласно которому развивается система.

Для подобных систем рассматриваются два типа задач:

1) *прямая* – когда по известной правой части $f(\cdot)$ и воздействию $u(\cdot)$ определяют движение $x(\cdot)$. Например, в рамках классической механики изучается задача построения траектории движения по известной силе, приложенной к системе (второй закон Ньютона);

2) *обратная* – где по наблюдаемой траектории $x(\cdot)$ и известному закону функционирования системы $f(\cdot)$ восстанавливают неизвестное воздействие $u(\cdot)$.

Остановимся на задаче 2-го типа. Ее сложность состоит в том, что одно и то же движение может порождаться различными воздействиями, т. е. множество всех таких воздействий состоит более, чем из одного элемента. Такие задачи относятся к разряду *некорректных*. Проблема состоит в построении алгоритма, который позволяет устойчиво восстанавливать какое-либо из этих воздействий, даже при неточной информации $x_h(t)$ о состоянии системы (1):

$$|x(t) - x_h(t)| \le h, \quad t \in [a,b]. \tag{2}$$

Если при этом погрешность восстановления неизвестного воздействия стремится к нулю вместе с величиной ошибки h, то такие алгоритмы называются *регуляризирующими*. Поскольку такое построение для системы (1) общего вида затруднительно, то, как правило, используется дополнительная (априорная) информация о законе $f(\cdot)$ функционирования системы. Следуя работе [1], ограничимся рассмотрением случая системы, линейной по воздействию, но нелинейной по состоянию:

$$x'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))u(t). \tag{3}$$

В ней был предложен регуляризирующий алгоритм восстановления воздействия $u(\cdot)$ в системе (3) при следующих дополнительных предположениях: функции $g(\cdot)\colon T\times R^n \to R^n$ и $f(\cdot)\colon T\times R^n \to R^{n\times q}$ удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных, значения искомого воздействия $u(\cdot)$ принадлежат $Q\subseteq R^q$ – известному ограниченному замкнутому и выпуклому множеству. Существенной особенностью этого алгоритма является тот факт, что восстановление неизвестного воздействия происходит синхронно с реализацией движения – в «темпе реального времени». При этом временной промежуток T разбивается на конечное число частичных интервалов $T=\bigcup_{i=0}^{n-1}\left[t_i,t_{i+1}\right)$, на каждом из которых выполняется конечное число однотипных арифметических операций. Это позволило процедуру построения искомого воздействия назвать *конечношаговым динамическим регуляризирующим алгоритмом.* Результатом его работы является моделирование порождающего наблюдаемое движение $x(\cdot)$ воздействия $u_*(\cdot)$, которое обладает наименьшей нормой в пространстве $L_2[a,b]$. Значит: $\int_a^b \left|u_*^2(t)\right|dt=\min\limits_{u(\cdot)}\int_a^b\left|u^2(t)\right|dt$.

Отметим, что по результатам неточных измерений (2) движения $x_h(t_i)$ в узловых точках $t_i, i=0,1,\ldots,n-1$ могут быть приближенно найдены и значения производной $x_h'(t_i)$ (например, с помощью разностного отношения). Тогда линейная по воздействию система (3) на каждом промежутке $t\in\left[t_i,t_{i+1}\right)$ может быть разрешена относительно $u(t)$ следующим образом:

$$u_*(t)\approx f^+\left(t_i,x_h\left(t_i\right)\right)\left[g\left(t_i,x_h\left(t_i\right)\right)-x_h'\left(t_i\right)\right].$$

В результате поставленная задача сведена к поиску псевдорешений систем линейных алгебраических уравнений на каждом промежутке $\left[t_i;t_{i+1}\right)$. При помощи найденных таким образом решений строится кусочно-постоянное приближение для $u_*(\cdot)$. Отметим, что процедура псевдообращения матрицы, как и нахождение ее приближений, требуют выполнения значительного числа арифметических операций. Этот факт может явиться препятствием для поиска искомого воздействия в режиме реального времени. Предложенный в работе А. В. Кряжимского и Ю. С. Осипова [1] динамический регуляризирующий алгоритм не требовал выполнения на промежутках разбиения временного интервала операций обращения и псевдообращения матриц. В его основу положено управление вспомогательной системой – моделью по принципу обратной связи с использованием процедуры экстремального сдвига [2]. При этом работа алгоритма осуществляется по следующей схеме.

1. До начального момента a задается разбиение временного промежутка $T=[a;b]$ с постоянным шагом $|t_i - t_{i-1}| = \Delta(h)$, согласованным с величиной h ошибки измерения $x^*(t_i)$ в (3).

2. Для выбранного разбиения значения фазовых состояний упомянутой выше системы – модели – находятся по следующему правилу:

$$w_h(t) = w_h(t_i) + \left[g(t_i; x_h(t_i)) + f(t_i; x_h(t_i)) \cdot f^T(t_i; x_h(t_i)) \frac{x_h(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha(h)} \right] \cdot (t - t_i) \quad t \in (t_i; t_{i+1}],$$

$$w_h(a) = x_h(a),$$

при этом параметр метода $\alpha(h)$ согласуется с величиной ошибки измерения h.

3. В качестве приближения $u_*(t)$ при $t \in [t_i; t_{i+1})$ принимается вектор $u_h(t)$, являющийся проекцией вектора $f^T(t_i; x_h(t_i)) \dfrac{x_h(t_i) - w(t_i)}{\alpha(h)}$ на Q.

Замечание 1. Значение $u_h(t)$ при $t \in [t_0; t_1)$ есть проекция 0 на Q.

Замечание 2. Результатом применения алгоритма является кусочно-постоянная на T функция $u_h(\cdot)$.

Замечание 3. Если $\lim\limits_{h \to +0} \dfrac{\Delta(h) + h + \alpha^2(h)}{\alpha(h)} = 0$, то $w_h(\cdot) \to x(\cdot)$ в $C(T; R^n)$, $u_h(\cdot) \to u_*(\cdot)$ в $L_p(T; R^q)$ для $p \in N$.

В статье А. Ю. Вдовина и С. С. Рублевой [3] приведены условия, при выполнении которых получена гарантированная оценка точности для $u_h(\cdot)$. Рассмотрим реализацию этого алгоритма на конкретном примере.

Пример 1. Пусть задана система:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} v(t), \quad t \in [0,25; 0,75]$$

и ее движение:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{2}{5}\sqrt{t^5} \\ t + \dfrac{2}{3}\sqrt{t^3} \end{pmatrix}.$$

Нормальное воздействие, найденное аналитически (что удается реализовать далеко не для каждой системы), принимает вид

$$v_*(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2} \begin{pmatrix} t^3 + t^{3,5} + t + t^{1,5} \\ t^2 + t^{2,5} + 1 + t^{0,5} \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 демонстрируется построение приближения воздействия по каждой из координат, черные линии – первая и вторая координаты точного решения, красные линии – результат применения метода динамической регуляризации при $h = 0{,}001$ и выборе параметров, предложенном в О гарантированной точности процедуры динамического восстановления управления с ограниченной вариацией в системе, зависящей от него линейно [3]:

$$\Delta(h) = h; \alpha(h) = \sqrt{h}.$$

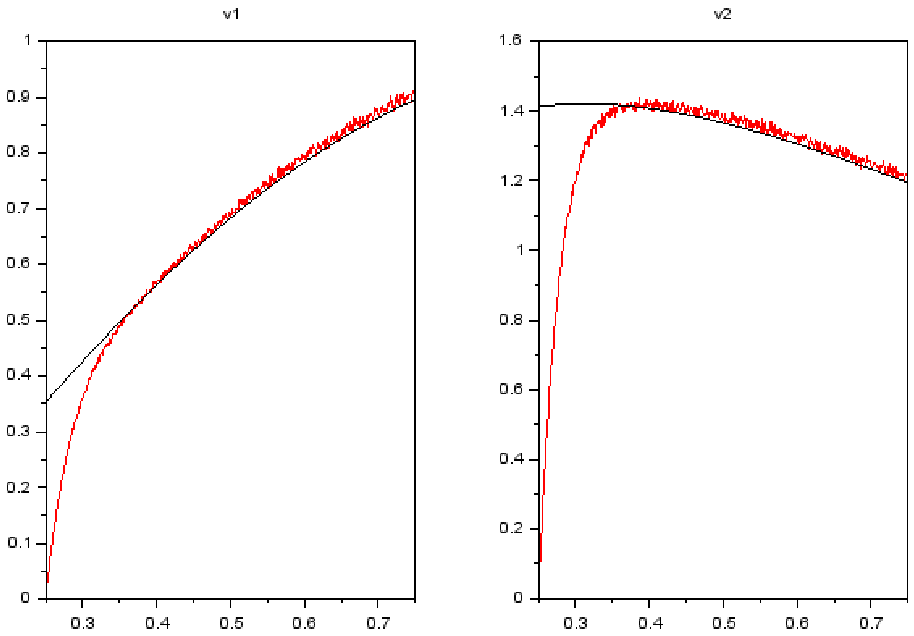

Рис. 1. $\Delta(h) = h;\ \alpha(h) = \sqrt{h}$

В предлагаемой работе в рамках динамического подхода рассматривается возможность восстановления других воздействий, порождающих наблюдаемое движение $x(\cdot)$ по известным начальным условиям $u(a)$. Такая постановка возникла после обсуждения алгоритма с практиками, которые предположили, что в начальный момент времени воздействие на систему, как правило, известно.

Обсуждение целей алгоритма. Для правой части системы (3) будем предполагать выполнение указанных выше условий. Зададимся разбиением $T = [a; b]$ с шагом Δ. Кроме того, для порождающего движение воздействия, обладающего ограниченной вариацией, задано значение $u(a)$. Рассмотрим на $T_\Delta = [a - \Delta; b]$:

1) систему с запаздыванием, совпадающей на T, с (3):
$$x'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))u(t-\Delta) + f(t, x(t))[u(t) - u(t-\Delta)],\quad x(a) = x_0, \quad (4)$$
где $u(t) = u(a)$ при $t \in [a - \Delta; a]$;

2) функции $u_\Delta(t)=\dfrac{1}{\Delta}\int\limits_{t-\Delta}^{t} u(\tau)\,d\tau$.

Отметим, что на промежутке T_Δ функции $u_\Delta(\cdot)$ удовлетворяют условиям:

1) непрерывны;

2) их производная, существующая почти всюду, равна $u'_\Delta(t)=\dfrac{1}{\Delta}\big(u(t)-u(t-\Delta)\big)$;

3) несложно убедиться, что вариация $u_\Delta(\cdot)$ также ограничена.

Из (4) следует, что:

$$f(t,x(t))\big[u(t)-u(t-\Delta)\big]=x'(t)-g(t,x(t))-f(t,x(t))u(t-\Delta).$$

Рассмотрим последовательность функций $u^*_\Delta(\cdot)$ такую, что:

$$u^*_\Delta(t)=u^*_\Delta(t-\Delta)+f^+(t,x(t))\big(x'(t)-g(t,x(t))-f(t,x(t))u^*_\Delta(t-\Delta)\big)\quad. \qquad (5)$$

Утверждение 1. Последовательность $u^*_\Delta(\cdot)$, согласно второй теореме Хелли, при $\Delta\to+0$ всюду на T, за исключением, быть может, точек разрыва функции, сходится к некоторой функции $u^*(\cdot)$ из множества воздействий с начальным условием $u(a)$. Значит, имеет место сходимость $u^*_\Delta(\cdot)\to u^*(\cdot)$ и в $L_p(T;R^q)$ для $p\in N$.

Существенно, что $u^*_\Delta(t_i)$, найденные согласно правилу (5), совпадают со значениями в узлах разбиения $u^э_\Delta(t_i)$ – ломаных метода Эйлера, примененного для решения следующей задачи Коши:

$$u'(t)=f^+(t,x(t))\frac{x'(t)-g(t,x(t))-f(t,x(t))\cdot u(t-\Delta)}{\Delta},\quad u(a)=u_0. \qquad (6)$$

Следовательно, для ломаных $u^э_\Delta(\cdot)$ справедливо утверждение аналогичное утверждению 1. По сути дела, установлена возможность предельного перехода при $\Delta\to 0$ для решений системы уравнений (5) и (6), где последнее является уравнением с малым параметром при производной.

Способ регуляризации рассматриваемой нами задачи для предлагаемого алгоритма состоит в построении приближений воздействия $u^*(\cdot)$.

Случай точной информации $(h=0)$. По причинам, приведенным ранее, постараемся избежать использования операции псевдообращения. Для этого на $T_\Delta=[a-\Delta;b]$ введем в рассмотрение непрерывную систему-модель:

$$w'(t)=g(t,x(t))+f(t,x(t))u(t-\Delta)+f(t,x(t))\cdot f^T(t,x(t))\frac{x(t)-w(t)}{\alpha},\ \ w(a)=x_0 \qquad (7)$$

или:

$$w'(t) = G(t, x(t), u(t-\Delta)) + A(t, x(t))\frac{x(t)-w(t)}{\alpha},$$

где $G(t, x(t), u(t-\Delta)) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))u(t-\Delta)$, $A(t, x(t)) = f(t, x(t)) \cdot f^T(t, x(t))$

Отметим, что в силу сделанных предположений на промежутке $T_\Delta = [a-\Delta; b]$ вектор $G(t, x(t), u(t-\Delta))$ при $t_1, t_2 \in [a; b]$ удовлетворяет условиям:

$$\int_{a-\Delta}^{b} \left|G(t_1, x(t_1)) - G(t_2, x(t_2))\right| dt \le \int_{a-\Delta}^{b} \left|g(t_1, x(t_1)) - g(t_2, x(t_2))\right| dt +$$

$$+ \int_{a-\Delta}^{b} \left|f(t_1, x(t_1)) - f(t_2, x(t_2))\right| |u(t_1)| + \max\left|f(t, x(t))\right| \int_{a-\Delta}^{b} \bigvee_{t_1}^{t_2} u(t) dt \le L\left(|t_1 - t_2| + |x(t_1) - x(t_2)|\right).$$

Этот факт позволяет повторить рассуждения, приведенные в работе А. Ю. Вдовина, С. С. Рублевой [3], при дополнительном предположении о постоянстве ранга $f(t, x(t))$ вдоль движения на промежутке T_Δ.

Решение линейной системы (7) принимает вид:

$$w(t) = Y(t, a)x_0 + \int_{a-\Delta}^{t} Y(t, \tau)\left(G(\tau, x(\tau)) + \frac{1}{\alpha}A(\tau, x(\tau))x(\tau)\right)d\tau,$$

где $[Y_\tau(t, \tau)]' = \dfrac{1}{\alpha}Y(t, \tau)A(\tau, x(\tau))$ с начальным условием

$$Y(t, t) = E. \tag{8}$$

Проводя интегрирование по частям в пределах от $a-\Delta$ до t с учетом (8), приходим к виду:

$$w(t) = Y(t, a-\Delta)x_0 + \int_{a-\Delta}^{t} Y(t, \tau)G(\tau, x(\tau), u(\tau-\Delta))d\tau +$$

$$+ \int_{a-\Delta}^{t} \frac{Y(t, \tau)}{\alpha}A(\tau, x(\tau))x(\tau)d\tau = x(t) + \int_{a-\Delta}^{t} Y(t, \tau)G(\tau, x(\tau), u(\tau-\Delta))d\tau -$$

$$- \int_{a-\Delta}^{t} Y(t, \tau)G(\tau, x(\tau), u(\tau-\Delta))d\tau - \int_{a-\Delta}^{t} Y(t, \tau)f(\tau, x(\tau))[u(\tau) - u(\tau-\Delta)]d\tau$$

Из последнего получаем:

$$\frac{x(t)-w(t)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_{a-\Delta}^{t} Y(t, \tau)f(\tau, x(\tau))[u(\tau) - u(\tau-\Delta)]d\tau$$

или

$$\frac{x(t)-w(t)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_{a-\Delta}^{t} Y(t, \tau)A(\tau, x(\tau))\left(f^T(\tau, x(\tau))\right)^{+}[u(\tau) - u(\tau-\Delta)]d\tau.$$

Как было показано в [3], правая часть последнего равенства дает приближение:

$$\left(f^T(t, x(t))\right)^{+}[u(t) - u(t-\Delta)] = P_1(A(t, x(t))\frac{x(t)-w(t)}{\alpha} + R_1\left(\alpha, \delta, \left(\frac{\alpha}{\lambda\delta}\right)\right), \tag{9}$$

где $P_1(A(t,x(t)))$ – проектор на подпространство собственных векторов матрицы $A(t,x(t))$, число $\lambda = \inf\limits_t \lambda(t)$ – собственных положительных чисел матрицы $A(t,x(t))$ в точке t, а $\delta > 0$. Из (9) следует:

$$[u(t)-u(t-\Delta)]_* = f^T\left(t,x(t)\right)\frac{x(t)-w\left(t\right)}{\alpha} + f^T\left(t,x(t)\right)R_1\left(\alpha,\delta,\left(\frac{\alpha}{\lambda\delta}\right)\right).$$

Утверждение 2. Пусть $\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$ стремятся к 0 при $h \to 0$. На T_Δ $g(t,x(t))$, $f(t,x(t))$ удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных, $f(t,x(t))$ обладает постоянным рангом вдоль движения, для $u(t)$ ограниченной вариации задано начальное условие $u(a), 0 \in Q$, тогда:

1) при $h \to 0$ $w(t) \to x(t)$ почти всюду;

2) приближение $v_*(t)$ неизвестного воздействия $u^*(t)$ задается равенством

$$v_*(t) = v_*(t-\Delta) + f^T\left(t,x(t)\right)\frac{x(t)-w\left(t\right)}{\alpha}. \tag{10}$$

Таким образом, полученное по правилу (10) $v_*(t)$ моделирует искомое воздействие $u^*(t)$ при $t \in T_\Delta$, при этом удается избежать процедуры псевдообращения матрицы $f(t,x(t))$.

Однако остается открытым вопрос о том, как получить численное решение дифференциального уравнения (7) для реализации (10). В нижеприведенном примере для этого используется *полунеявный* метод Эйлера. При этом вспомогательная система-модель – строится по правилу:

$$w_h(t_{i+1}) = w_h(t_i) + \left[g(t_{i+1}) + f(t_{i+1})v(t_i)\right]\Delta + \Delta f(t_{i+1})f^T(t_{i+1})\frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_{i+1})}{\alpha}.$$

Отсюда

$$w_h(t_{i+1}) = \left(E + \frac{\Delta}{\alpha}f(t_{i+1})f^T(t_{i+1})\right)^{-1}\Big(w_h(t_i) + \left[g(t_{i+1}) + f(t_{i+1})v(t_i)\right]\Delta + + f(t_{i+1})f^T(t_{i+1})\frac{\Delta x_h(t_{i+1})}{\alpha}\Big), \tag{10}$$

а приближение $v(t)$ на $\left[t_{i,}t_{i+1}\right)$ искомого воздействия $u^*(t)$:

$$v(t) = v(t_i) + f^T(t_{i+1})\frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_{i+1})}{\alpha}, \quad v(a) = u(a).$$

Отметим, что при близких к нулю значениях $\dfrac{\Delta}{\alpha}$ для обратной матрицы в правой части (10) справедливо равенство:

$$\left(E + \frac{\Delta}{\alpha}f(t_{i+1})f^T(t_{i+1})\right)^{-1} = E + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{\Delta}{\alpha}f(t_{i+1})f^T(t_{i+1})\right)^k.$$

При этом для динамической реализации алгоритма приходится ряд из правой части последнего равенства заменить конечной суммой слагаемых.

Пример 2. Рассмотрим систему, приведенную в примере 1 и функционирующую на том же временном промежутке. Пусть для неизвестного воздействия начальное условие $u(a) = (4;0,5)^T$.

Ниже приводятся примеры моделирования неизвестного воздействия при разных значениях параметров. На рис. 2 при $h = 0.001; \Delta(h) = h; \alpha(h) = h^{0,5}$, на рис. 3 при $h = 0.001; \Delta(h) = \sqrt{h}; \alpha(h) = h^{0,1}$.

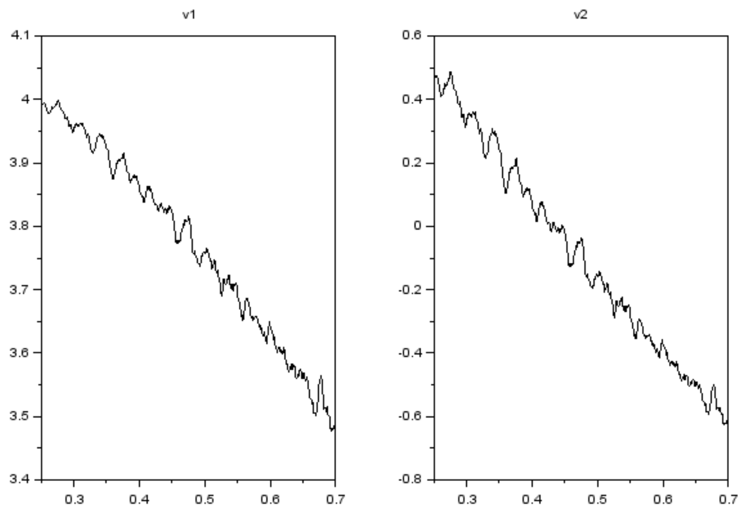

Рис. 2. $h = 0,001;\ \Delta(h) = h;\ \alpha(h) = h^{0,5}$

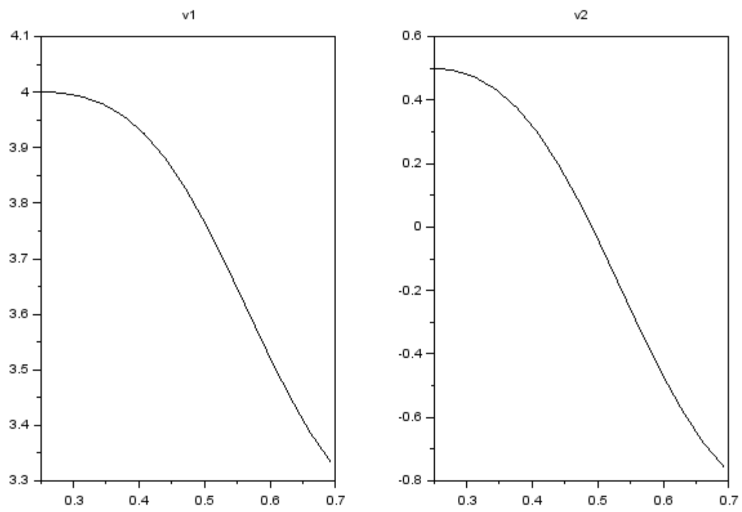

Рис. 3. $h = 0,001;\ \Delta(h) = \sqrt{h};\ \alpha(h) = h^{0,1}$

Отсюда следует, что значения параметров существенно влияют на точность полученных приближений. Для их оптимального выбора требуются дополнительные исследования.

Список источников

1. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.

2. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М. : Наука, 1985. 520 с.

3. Вдовин А. Ю., Рублева С. С. О гарантированной точности процедуры динамического восстановления управления с ограниченной вариацией в системе, зависящей от него линейно // Математические заметки. 2010. Т. 87, № 3. С. 337–358.