

Научная статья
УДК 519.87

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССА ПОЛИМЕРИЗАЦИИ
ИЗГОТОВЛЕНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
КАК МАТЕРИАЛОВ БУДУЩЕГО В СОВРЕМЕННОМ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОМ ПРОИЗВОДСТВЕ
В УСЛОВИЯХ ИМПОРТОЗАМЕЩЕНИЯ**

**Иван Алексеевич Акимов¹, Антон Васильевич Данилов²,
Алексей Иванович Акимов³**

^{1, 3} Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ), Санкт-Петербург, Россия

² Филиал РГУ нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина, Оренбург, Россия

¹ akimoff@mail.ru

² adanilv@mail.ru

³ akimoff11@mail.ru

Аннотация. В данной работе проведено математическое моделирование процесса полимеризации как производственный фактор в современном сельскохозяйственном производстве в условиях импортозамещения. Также исследованы задачи массообмена и теплообмена на интервалах нагрева и полимеризации в многослойных композитных цилиндрических конструкциях при помощи дифференциальных преобразований Ханкеля.

Ключевые слова: композиционные конструкции, установка Ханкеля, процесс полимеризации, теплообмен, массообмен, метод изотермических поверхностей

Original article

**MATHEMATICAL MODELING
OF THE POLYMERIZATION PROCESS
OF MANUFACTURING COMPOSITE STRUCTURES
AS MATERIALS OF THE FUTURE
IN MODERN AGRICULTURAL PRODUCTION
UNDER CONDITIONS OF IMPORT SUBSTITUTION**

Ivan A. Akimov¹, Anton V. Danilov², Alexey I. Akimov³

^{1, 3} Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (SPbPU),
Saint Petersburg, Russia

© АКИМОВ И. А., ДАНИЛОВ А. В., АКИМОВ А. И., 2024

² Branch of the Russian State University of Oil and Gas (NRU) named after I. M. Gubkin, Orenburg, Russia

¹ akimoff@mail.ru

² adanilv@mail.ru

³ akimoff11@mail.ru

Abstract. In this work, mathematical modeling of the polymerization process as a production factor in the digital economy under conditions of import substitution was carried out. The problems of mass transfer and heat transfer in the heating and polymerization intervals in multilayer composite cylindrical structures using differential Hankel transformations were also studied.

Keywords: composite structures, Hankel installation, polymerization process, heat transfer, mass transfer, isothermal surface method

В данной работе проведено математическое моделирование процесса полимеризации как производственный фактор в современном сельскохозяйственном производстве в условиях импортозамещения. Также исследованы задачи массообмена и теплообмена на интервалах нагрева и полимеризации в многослойных композитных цилиндрических конструкциях при помощи дифференциальных преобразований Ханкеля. Задачи исследованы, учитывая то, что между слоями имеет место идеальный тепловой контакт, и температура соприкасающихся поверхностей двух слоев одинакова.

Рассмотрим решение задачи «массообмена» [1]:

$$\frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} = a_{mk}^2 \frac{\partial^2 m_k(r_k, \tau)}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial r_k}, \quad R_{k-1} \leq r_k \leq R_k, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

учитывая условия конвективности тепловых потоков:

$$m_k(R_k, \tau) = m_{k+1}(R_k, \tau); \quad (2)$$

$$\lambda_{mk} \frac{\partial m_k(R_k, \tau)}{\partial r_k} = \lambda_{m(k+1)} \frac{\partial m_{k+1}(R_k, \tau)}{\partial r_{k+1}}, \quad (3)$$

где m -индекс массообмена при $W_k(r_k, \tau) = 0$:

$$P = \frac{1}{\mu_n^2} \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{a_k^2} \int_{R_{k-1}}^{R_k} r_k W_k M_0 \left(\frac{\mu_n}{a_k} r_k \right) dr_k = 0.$$

Таким образом, приходим к решению вида [2]:

$$m_k(r_k, \tau) = C_{mk} + D_{mk} \ln(r_k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\left(\frac{\mu_{nn} r_k}{a_{mk}}\right)}{\sum_{k=1}^N \|M_k\|^2} e^{-\mu_{nn}^2 \tau} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{mk}}{a_{mk}^2} \int_{R_k}^{R_{k+1}} r_k [\varphi_k(r_k) - \psi_{mk}(r_k)] M\left(\frac{\mu_{mn} r_k}{a_{mk}}\right) dr_k. \quad (4)$$

Опишем следующими уравнениями теплообмен:

$$\frac{\partial U_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} = a_{gk}^2 \left(\frac{\partial^2 U_k(r_k, \tau)}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial U_k(r_k, \tau)}{\partial r_k} \right) + \sigma \frac{c_{mk}}{c_{gk}} \frac{d_k}{1-d_k} \cdot \frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} + W_k(r_k, \tau), \quad (5)$$

$$\frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} = a_{mk}^2 \frac{1-d_k}{r_k} \cdot \frac{\partial}{\partial r_k} \left(r_k \frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial r_k} \right), \quad (6)$$

Рассмотрим задачу массообмен:

$$\frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial r} = a_{mk}^2 (1-d_k) \left(\frac{\partial^2 m_k(r_k, \tau)}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial m_k(r_k, \tau)}{\partial r_k} \right), \quad (7)$$

Используя метод изотермических поверхностей, приходим к виду:

$$m_k(r_k, \tau) = C_{mk} + D_{mk} \ln(r_k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\left(\frac{\mu_{mn} r_k}{c_{mk}}\right)}{\sum_{k=1}^N \|M_k\|^2} \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{mk}}{c_{mk}^2} \int_{R_k}^{R_{k+1}} r_k [g_k(r_k) - \psi_{mk}(r_k)] \times$$

$$\times M\left(\frac{\mu_{mn} r_k}{c_{mk}}\right) dr_k e^{-(\mu_{mn}^2 \tau)}, \quad (8)$$

при $C_{mk} = a_{mk}^2 (1-d_k)$.

Опишем второй этап производства композитов в виде уравнения:

$$\frac{\partial U_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} = a_k^2 \left(\frac{\partial^2 U_k(r_k, \tau)}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial U_k(r_k, \tau)}{\partial r_k} \right) + W_k(r_k, \tau), \quad (9)$$

Будем иметь в виду, что

$$W_k(r_k, \tau) = \frac{q_v(r_k, \tau)}{c \cdot \rho}, \quad U_k(r_k, 0) = \varphi_k(r_k) \quad (10)$$

Будем исследовать решение в виде [3]:

$$U_k(r_k, \tau) = \psi_k(r_k) + T_k(r_k, \tau), \quad \text{где } T_k(r_k, \tau) = U_k(r_k, \tau) - \psi_k(r_k), \quad (11)$$

$$\frac{d^2 \psi_k(r_k)}{dr_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{d\psi_k(r_k)}{dr_k} = 0, \quad R_{k-1} \leq r_k \leq R_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (12)$$

Решение стационарной задачи имеет вид:

$$\psi_k(r_k) = C_k + D_k \ln(r_k), \quad k = 1, 2, \dots, n., \quad (13)$$

$$\frac{\partial T_k(r_k, \tau)}{\partial \tau} = a_k^2 \left(\frac{\partial^2 T_k(r_k, \tau)}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial T_k(r_k, \tau)}{\partial r_k} \right) + W_k(r_k, \tau), \quad (14)$$

$$R_{k-1} \leq r_k \leq R_k, \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Синтез определен стандартно [4]:

$$\overline{T_k(\mu_k, \tau)} = \int_{R_k}^{R_{k-1}} r_k T_k(r_k, \tau) M_k(\mu_n, t) dr_k - \text{«изображение по Ханкелю»};$$

$$T_k(r_k, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k(\mu_n, r_k)}{\|M_k\|^2} \overline{T_k(\mu_n, \tau)} - \text{«оригинал по Ханкелю»}, \quad \rho(r_k) = r_k;$$

$$M_k(\mu_n, r_k) = J_0\left(\frac{\mu_n}{R_k} r_k\right) Y_0(\mu_k) - J_0(\mu_n) Y_0\left(\frac{\mu_n}{R_k} r_k\right) - \text{«ядро по Ханкелю»};$$

$$\|M_k\|^2 = \frac{2R_k^2 \left[J_0^2(\mu_n) - J_0^2\left(\mu_n \frac{R_{k+1}}{R_k}\right) \right]}{\pi^2 \mu_n^2 J_0^2\left(\mu_n \frac{R_{k+1}}{R_k}\right)} - \text{«норма в квадрате»};$$

Исследуем уравнение [5]:

$$J_0(\mu)Y_0\left(\mu\frac{R_{k+1}}{R_k}\right) - Y_0(\mu)J_0\left(\mu\frac{R_{k+1}}{R_k}\right) = 0.$$

Синтез примет вид:

$$T_k(r_k, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\left(\frac{\mu_n r_k}{a_k}\right)}{\sum_{k=1}^N \left\| M_k\left(\frac{\mu_n r_k}{a_k}\right) \right\|^2} \cdot \left\{ \left[\sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{a_k^2} \int_{R_k}^{R_{k+1}} r_k (\varphi_k(r_k) - \psi_k(r_k)) M\left(\frac{\mu_n r_k}{a_k}\right) dr_k - P \right] e^{-\mu_n^2 \tau} + P \right\}. \quad (15)$$

Получим следующий вид решения:

$$U_k(r_k, \tau) = C_k + D_k \ln(r_k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\left(\frac{\mu_n r_k}{a_k}\right)}{\sum_{k=1}^N \left\| M_k\left(\frac{\mu_n r_k}{a_k}\right) \right\|^2} \times \left\{ \left[\sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{a_k^2} \int_{R_k}^{R_{k+1}} r_k (\varphi_k(r_k) - C_k - D_k \ln(r_k)) M\left(\frac{\mu_n r_k}{a_k}\right) dr_k - P \right] e^{-\mu_n^2 \tau} + P \right\}. \quad (16)$$

Исследования показывают, что нужно строго придерживаться технологических режимов поддержания температуры на внешнем контуре изделия композитов. Изготовление композиционных конструкций дешево и без брака – большой рывок в устойчивости развития композитов в условиях импортозамещения во всех отраслях промышленности.

Список источников

1. Акимов А. И., Акимов А. И., Каракулина Е. О. Исследование теплопередачи в многослойных цилиндрических изделиях на первом этапе производства композиционных // Научно-технический вестник Поволжья. 2015. № 2. С. 68–72.

2. Акимов А. И. Применение метода изотермических поверхностей для решения задач тепломассообмена в многослойных конструкциях с изменяющимся агрегатным состоянием материалов // Образовательная среда сегодня и завтра: VIII Междунар. науч.-практ. конф. М.: Моск. техн. ин-т, 2013. С. 312–314.

3. Акимов А. И. Матричный метод решения комплексированных задач теплообмена, массообмена и термонапряжений в многослойных конструкциях с фазовыми переходами // Научно-технический вестник Поволжья. 2013. № 3. С. 60–63.

4. Исследование задачи массообмена и теплообмена на интервалах нагрева и полимеризации в многослойных композиционных цилиндрических конструкциях при помощи дифференциальных преобразований Ханкеля / А. И. Акимов, А. С. Колбинцева, Н. Г. Марченкова [и др.] // Прикладная физика и математика. 2023. № 2. С. 11–15.

5. Акимов А. И., Елисеев В. Н. Решения задачи массообмена на втором этапе полимеризации производства композиционных материалов в установках автоматического ведения технологического процесса аналитическим методом // Инженерная физика. 2022. № 6. С. 3–6.