МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Уральский государственный лесотехнический университет»
(УГЛТУ)

ВЫПОЛНЕНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Екатеринбург
УГЛТУ
2024

УДК 519.2
ББК 22.171
В25

Рецензенты:

кафедра математики и информатики УрГАУ, профессор, д-р физ.-мат. наук *А. В. Ким*;

А. Б. Ложников, канд. физ.-мат. наук, доцент, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Авторы: А. Ю. Вдовин, С. С. Рублева, И. Н. Демидова,
Л. А. Золкина, В. М. Мухина, С. Н. Удинцева,
Е. С. Федоровских

В25 **Выполнение индивидуальных заданий по теории вероятностей**: учебно-методическое пособие / А. Ю. Вдовин, С. С. Рублева, И. Н. Демидова [и др.] ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский государственный лесотехнический университет. – Екатеринбург : УГЛТУ, 2024. – 73 с.

ISBN 978-5-94984-915-6

Содержание учебно-методического пособия соответствует принятым в вузе учебным программам, предусматривающим изучение теории вероятностей на втором году обучения. Каждый из разделов первой части включает: справочный материал и решение типовых примеров. Вторая часть содержит варианты индивидуальных контрольных заданий.

Предназначено для обучающихся, осваивающих образовательные программы всех направлений.

Издается по решению редакционно-издательского совета Уральского государственного лесотехнического университета.

УДК 519.2
ББК 22.171

ISBN 978-5-94984-915-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие адресовано студентам второго курса всех направлений подготовки очной и заочной форм обучения Уральского государственного лесотехнического университета, изучающим дисциплину «Теория вероятностей», и основано на материалах книги «Математика. Теория вероятностей», авторы: А. Ю. Вдовин [и др.].

Содержание пособия соответствует принятым в вузах учебным программам и включает следующие разделы: основные понятия теории вероятностей, повторные независимые испытания, случайные величины и их числовые характеристики, важнейшие законы распределения, основные характеристики меры связи случайных величин, начала регрессионного анализа.

Каждый из представленных разделов содержит необходимую теоретическую информацию, а также разбор примеров использования основных методов решения типовых задач с подробными разъяснениями.

Тщательная самостоятельная проработка материала предлагаемого пособия позволит обучающимся овладеть достаточным объемом теоретических знаний и практических навыков, необходимых для успешного освоения курса.

Пособие рекомендуется обучающимся очной и заочной форм обучения для использования при выполнении индивидуальных заданий, при подготовке к промежуточным и итоговым формам аттестации по соответствующему курсу.

Для выполнения индивидуальных заданий обучающиеся заочной формы выбирают номер варианта задания по последней цифре номера зачетной книжки (цифре 0 соответствует вариант 10).

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Случайные события. Вычисление вероятности событий

Справочный материал

Случайное событие – это явление, которое может произойти или не произойти при осуществлении определенного комплекса условий, называемого ***испытанием*** (или опытом). Результаты испытания называются ***исходами***.

Достоверное событие (D, Ω – обозначения) – событие, которое обязательно наступает при данном испытании.

Невозможное событие (H, $\varnothing$ – обозначения) – событие, которое заведомо не произойдет при данном испытании.

Виды случайных событий

1. ***Несовместные, совместные события***

События называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других в одном и том же испытании, в противном случае – ***совместными***.

2. ***Равновозможные события***

События называются ***равновозможными***, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другие.

3. ***Полная группа событий***

Несколько событий образуют ***полную группу***, если в результате испытания обязательно появится хотя бы одно из них. Итак, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие.

4. ***Противоположное событие***

Событие называется ***противоположным*** к событию A, если оно состоит в ненаступлении события A. Обозначение: $\overline{A}$.

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется число, равное отношению числа исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу всех несовместных, равновозможных исходов испытания, образующих полную группу.

Вероятность события A определяется формулой $P(A)=\frac{m}{n}$,

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих A,

n – общее число возможных элементарных исходов испытания.

Свойства вероятности

1. $0 \le P(A) \le 1$**.**

2. Вероятность достоверного события равна единице, т. е. $P(D)=1$.

3. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е. $P(H)=0$.

4. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Действия над событиями.
Вероятность суммы и произведения двух событий

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении всех перемножаемых событий. Произведение событий будем обозначать знаком «·».

Произведение несовместных событий есть событие невозможное, в этом случае вероятность $P(A \cdot B)=P(H)=0$.

Суммой событий A и B называется событие, состоящее в наступлении в результате опыта хотя бы одного из них (или A, или B, или обоих событий вместе). Сумму событий обозначим знаком «+».

Вероятность суммы двух событий в общем случае равна

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B).$$

Следствие. Если A и B несовместны, то $P(A \cdot B)=0$ и

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Символом $P(A/B)$ обозначается вероятность наступления события A при условии, что произошло событие B.

Вероятность произведения двух событий A и B равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что произошло первое:

$$P(A\cdot B)=P(B\cdot A)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Следствие. Если события A и B независимы, то

$$P(A\cdot B)=P(B\cdot A)=P(A)\cdot P(B).$$

Правило умножения вероятностей можно распространить на случай произвольного числа ***n*** перемножаемых событий:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}).$$

Полная вероятность

Пусть требуется найти вероятность некоторого события *A*, осуществление которого возможно лишь совместно с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, которые называются ***гипотезами***.

Вероятность события **А** равна сумме произведений вероятности каждой гипотезы на условную вероятность события *A* при условии наступления этой гипотезы:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i).$$

Эта формула называется ***формулой полной вероятности***.

Вариант задания по теме

1.1. В группе всего 20 студентов, из них 12 девушек, остальные юноши. На студенческую конференцию выбирают одного кандидата. Найти вероятность того, что на конференцию будет выбран юноша.

1.2. На участке работают 10 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам отобраны наудачу 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся женщинами.

1.3. Испытываются два прибора на надежность. Вероятность выхода из строя первого прибора равна 0,1, второго – 0,2. Найти вероятность того, что:

1) все приборы работают;
2) только один прибор выйдет из строя;
3) хотя бы один прибор выйдет из строя.

1.4. На складе есть три партии деталей, насчитывающих соответственно 100, 300 и 400 шт. Вероятности того, что деталь стандартна для каждой партии, соответственно равны 0,92; 0,96 и 0,95. Какова вероятность того, что наудачу выбранная на складе деталь стандартна?

Методические указания к решению заданного варианта

1.1. В группе всего 20 студентов, из них 12 девушек, остальные юноши. На студенческую конференцию выбирают одного кандидата. Найти вероятность того, что на конференцию будет выбран юноша.

Решение

Событие A: на конференцию выбран юноша.

Вычислим вероятность события A, пользуясь формулой

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где $\boldsymbol{m}$ – число исходов, благоприятствующих A, $\boldsymbol{n}$ – общее число возможных элементарных исходов испытания.

Число исходов испытания $\boldsymbol{m}$, благоприятствующих данному событию, равно числу юношей этой группы: $\boldsymbol{m} = 20 - 12 = 8$. Число всех исходов $\boldsymbol{n}$ равно числу студентов группы, тогда

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{8}{20}=0,4.$$

Ответ: $P(A) = 0,4$.

1.2. На участке работают 10 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам отобраны наудачу 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся женщинами.

Решение

Вариант 1 решения

Событие A: по табельным номерам отобраны наудачу 3 женщины. Всего на участке работает 15 человек, из них 5 женщин.

Общее число $\boldsymbol{n}$ всех возможных исходов равно числу комбинаций, которыми можно выбрать 3 человека из 15, т. е. числу сочетаний из 15 элементов по 3:

$$n=C_{15}^{3}=\frac{15!}{3!\cdot(15-3)!}=\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot(12\cdot11\cdot\ldots\cdot2\cdot1)}=\frac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2\cdot1}=455.$$

Определим число исходов $\boldsymbol{m}$, благоприятствующих интересующему нас событию A (отобраны наудачу 3 женщины).

Выбрать 3 женщин из 5 можно C_5^3 способами:

$$m = C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10.$$

Вычислим вероятность события *A*: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{455} = \frac{2}{91} \approx 0,022.$

Вариант 2 решения

Событие *A* (по табельным номерам отобраны наудачу 3 женщины) можно рассматривать как произведение трех зависимых событий A_1, A_2, A_3, где событие A_i (*i* = 1, 2, 3) – выбор женщины при *i* –м отборе. Итак, $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2 / A_1)\cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2).$$

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13} = \frac{60}{2730} = \frac{2}{91} \approx 0,022.$$

Ответ: $P(A) = \frac{2}{91} \approx 0,022.$

1.3. Испытываются два прибора на надежность. Вероятность выхода из строя первого прибора равна 0,1, второго – 0,2. Найти вероятность того, что:

1) все приборы работают;
2) только один прибор выйдет из строя;
3) хотя бы один прибор выйдет из строя.

Решение

1. Введем события: *A* = {все приборы работают};

A_1 = {первый прибор выйдет из строя};

A_2 = {второй прибор выйдет из строя}.

По условию $P(A_1) = 0,1;\ P(A_2) = 0,2$.

Найдем вероятности противоположных событий, т. е. вероятности того, что приборы не выйдут из строя:

$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,1 = 0,9;\ P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,2 = 0,8.$

Тогда $A = \overline{A_1}\cdot\overline{A_2}$, где A_1 и A_2 – независимые события.

Следовательно, $P(A) = P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}) = P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})$ = 0,9·0,8 = 0,72.

2. Событие *B* = {только один прибор выйдет из строя}.

Данное событие состоит из суммы двух несовместных событий: первый прибор выйдет из строя и второй будет работать или первый прибор работает и второй выйдет из строя.

На языке «алгебры событий» этот факт запишется следующей формулой: $B = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$.

Сначала используем теорему сложения вероятностей несовместных событий, затем – теорему умножения вероятностей независимых событий:

$$P(B) = P\left(A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2\right) = P\left(A_1 \cdot \overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1} \cdot A_2\right) = P(A_1) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) + \\ + P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P(A_2) = 0,1 \cdot 0,8 + 0,9 \cdot 0,2 = 0,08 + 0,18 = 0,26.$$

3. Событие C = {хотя бы один прибор выйдет из строя}.

Перейдем к вероятности противоположного события $\overline{C}$: $P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right)$, где $\overline{C}$ = {ни один прибор не выйдет из строя}, т. е. $\overline{C} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$, причем $P\left(\overline{C}\right) = P(A) = 0,72$ (см. пункт 1)).

Тогда $P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right)$ = 1– 0,72 = 0,28.

Ответы: 1) 0,72; 2) 0,26; 3) 0,28.

1.4. На складе есть три партии деталей, насчитывающих соответственно 100, 300 и 400 шт. Вероятности того, что деталь стандартна для каждой партии, соответственно равны 0,92; 0,96 и 0,95. Какова вероятность того, что наудачу выбранная на складе деталь стандартна?

Решение

Событие A – наудачу выбранная деталь стандартна.
Задачу решим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i).$$

Сформулируем события H_i (i=1, 2, 3):

событие H_1 – деталь принадлежит первой партии,

H_2 – второй партии,

H_3 – третьей партии.

Вычислим вероятности этих событий:

$$P(H_1) = \frac{100}{100 + 300 + 400} = \frac{100}{800} = 0,125,$$

$$P(H_2)=\frac{300}{800}=0{,}375,\ P(H_3)=\frac{400}{800}=0{,}5.$$

Так как $H_i\,(i=1,\,2,\,3)$ – полная группа событий, то

$$P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=0{,}125+0{,}375+0{,}5=1.$$

Определим условные вероятности $P(A/H_i)$:

- $P(A/H_1)=0{,}92$ – вероятность того, что деталь стандартна при условии, что она принадлежит первой партии;
- $P(A/H_2)=0{,}96$ – вероятность того, что деталь стандартна при условии, что она принадлежит второй партии;
- $P(A/H_3)=0{,}95$ – вероятность того, что деталь стандартна при условии, что она принадлежит третьей партии.

Тогда вероятность события *А*, что наудачу выбранная деталь стандартна, вычислим по формуле

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3),$$

$$P(A)=0{,}125\cdot 0{,}92+0{,}375\cdot 0{,}96+0{,}5\cdot 0{,}95=0{,}95.$$

Ответ: $P(A)$ = 0,95.

Контрольные вопросы

1. Случайные события. Достоверное и невозможное события. Привести примеры. Классическое определение вероятности события.

2. Виды случайных событий. Привести примеры совместных и несовместных, зависимых и независимых событий.

3. Определение суммы событий. Привести примеры. Теорема о вероятности суммы двух событий. Вероятность суммы несовместных событий.

4. Определение произведения событий. Привести примеры. Условная вероятность. Теорема о вероятности произведения событий. Вероятность произведения независимых событий.

5. Полная вероятность. Постановка задачи. Формула полной вероятности.

2. Повторные независимые испытания

Справочный материал

Производится ***n*** испытаний, в каждом из которых событие A может наступить либо не наступить. Испытания называются ***независимыми относительно*** события A, если вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний.

Постановка задачи. Пусть производится серия из ***n*** повторных независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p, т. е. $P(A) = p$. Вероятность непоявления события A: $P(\overline{A}) = 1 - p = q$.

Вычислить вероятность того, что в ***n*** повторных независимых испытаниях событие A наступит ровно m раз (и не наступит (***n–m***) раз). Обозначим искомую вероятность $P_n(m)$. Поставленную задачу можно решить с помощью формулы Бернулли.

Формула Бернулли

Вероятность того, что в ***n*** повторных независимых испытаниях событие A наступит ровно ***m*** раз:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m},$$

где C_n^m – число сочетаний из ***n*** элементов по ***m***.

Замечание. Формулой Бернулли удобно пользоваться при небольшом числе испытаний. При больших значениях ***n*** и ***m*** вычисления становятся громоздкими.

Формула Пуассона

Постановка задачи. Производится серия из ***n*** повторных независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A: $P(A) = p$, причем ***n*** велико, а ***p*** мала ($p \leq 0{,}1$).

Найти вероятность того, что в ***n*** независимых испытаниях событие A наступит ровно ***m*** раз. В этих условиях $P_n(m)$ может быть найдена по приближенной ***формуле Пуассона***

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!},$$ где $\lambda = np$, e – число Эйлера ($e = 0{,}71828\ldots$).

Локальная теорема Лапласа

Постановка задачи. Производится серия из ***n*** повторных независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A: $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = 1 - p = q$, причем ***n*** велико, а ***p*** и ***q*** не малы ($npq > 10$).

Найти вероятность того, что в ***n*** независимых испытаниях событие A наступит ровно ***m*** раз. В этих условиях $P_n(m)$ может быть найдена по формуле (***локальная теорема Лапласа***)

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (функция Гаусса), $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\varphi(x)$ приводятся только на промежутке $x \in [0;5]$, поскольку она четная. При $x > 5$ ее значения практически равны 0 (см. табл. 1, раздел «Приложения»).

Интегральная теорема Лапласа

Постановка задачи. Производится серия из ***n*** повторных независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A: $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = 1 - p = q$, причем ***n*** велико, а ***p*** и ***q*** не малы ($npq > 10$).

Найти вероятность того, что в ***n*** независимых испытаниях событие A наступит не менее m_1 и не более m_2 раз: $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$.

Вероятность этого события можно найти по формуле (***интегральная теорема Лапласа***)

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – ***функция Лапласа***;

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\Phi(x)$ приводятся лишь на промежутке $x \in [0; 5]$. Это объясняется тем, что она нечетная, а при $x > 5$ ее значения практически равны 0,5 (см. табл. 2, раздел «Приложения»).

Вариант задания по теме

2.1. Вероятность того, что расход электроэнергии на предприятии в течение одних суток не превысит нормы, равна $p = 0{,}75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2.2. По результатам проверки налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушения финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных предприятий не менее 480 имеют нарушения.

Методические указания к решению заданного варианта

2.1. Вероятность того, что расход электроэнергии на предприятии в течение одних суток не превысит нормы, равна $p = 0{,}75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение

Событие A – расход электроэнергии в течение одних суток не превысит нормы. $P(A) = p = 0{,}75$, $P(\overline{A}) = q = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Вероятность события A можно найти по формуле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Здесь число испытаний $n = 6$, а количество испытаний, в которых должно произойти событие A, $m = 4$. Искомая вероятность

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot (0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot (0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 =$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 = 0{,}3.$$

Ответ: 0,3.

2.2. По результатам проверки налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушения финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных предприятий не менее 480 имеют нарушения.

Решение

Событие A – предприятие, выбранное наудачу, нарушает финансовую дисциплину. $P(A) = p = 0{,}5$, $P(\overline{A}) = q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

$n = 1000$, $m_1 = 480$, $m_2 = 1000$, $npq = 1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 250 > 10$.

Нужно вычислить $P_{1000}(480 \le m \le 1000)$, а для этого воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x)$ – ***функция Лапласа***.

Итак, $P_{1000}(480 \le m \le 1000) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$.

Вычислим значения аргументов x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{480 - 1000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{250}} = \frac{-20}{15{,}81} = -1{,}27;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1000 - 1000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{250}} = \frac{500}{15{,}81} = 31{,}62 > 5.$$

Находим значения функции $\Phi(x)$ (см. табл. 2, «Приложения»):

$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}27) = -\Phi(1{,}27) = -0{,}3980$ (использовано свойство нечетности функции $\Phi(x)$);

$$\Phi(x_2) = \Phi(31{,}62) = \Phi(x > 5) = 0{,}5.$$

$P_{1000}(480 \le k \le 1000) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}5 - (-0{,}3980) = 0{,}898$.

Ответ: 0,898.

Контрольные вопросы

1. Повторные независимые испытания. Постановка задачи нахождения вероятности в схеме Бернулли.
2. Формула Пуассона в схеме Бернулли. В каких случаях применяется эта формула?
3. Сформулировать локальную теорему Лапласа. В каких случаях применяется эта теорема?
4. Сформулировать интегральную теорему Лапласа.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Случайные события

1. Бросаются два игральных кубика. Событие С = {выпало 14 очков}...

1) достоверное; 2) возможное;
3) маловероятное; 4) невозможное.

2. Игральная кость бросается ***один раз***.
Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет ***более одного очка***, равна…

1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{1}{6}$.

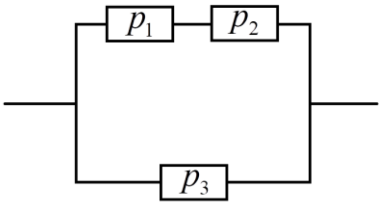
3. В коробке 6 карандашей, из них 1 красный, 3 синих, 2 зеленых.
Извлекаются 2 карандаша. Вероятность того, что они будут одного цвета равна…

1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{1}{5}$; 3) $\frac{1}{15}$; 4) $\frac{4}{15}$.

4. Устройство состоит из двух независимо работающих элементов. Вероятности их безотказной работы за время t равны соответственно 0,8 и 0,7. Тогда вероятность того, что за время t безотказно будет работать хотя бы один элемент, равна…

1) 0,75; 2) 0,38; 3) 0,56 ; 4) 0,94.

5. Дана схема. Вероятность безотказной работы каждого элемента равна p_i. Тогда вероятность безотказной работы схемы равна…



1) $p_1 \cdot p_2 + p_3$; 2) $(p_1 + p_2) \cdot p_3$;
3) $p_1 \cdot p_3 + p_2$; 4) $p_1 + p_2 + p_3$.

6. Два стрелка одновременно делают выстрел по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,4. Тогда вероятность того, что при одном залпе попадет только один стрелок, равна…

1) 0,5; 2) 0,2; 3) 0,9; 4) 0,3.

7. Имеются три одинаковые урны. В первой находится 2 белых и 3 черных шара, во второй – 4 белых и 1 черный шар, в третьей – 3 белых шара. Экспериментатор подходит к одной из урн и вынимает шар. Вероятность того, что это белый шар, равна…

1) $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$; 2) $\frac{9}{13}$;

3) $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}$.

8. Событие A может наступить лишь при условии одного из двух независимых событий B_1, B_2, образующих полную группу несовместных событий. Известны вероятность $P(B_1)=\frac{1}{3}$ и условные вероятности $P(A/B_1)=\frac{1}{2}$, $P(A/B_2)=\frac{1}{4}$. Тогда вероятность $P(A)$ равна…

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{1}{3}$.

9. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Тогда вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков, может быть вычислена по формуле…

1) $P \approx 0,49^{50}0,51^{1}$;

2) $P \approx \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0,51\cdot 0,49}}\varphi\left(\frac{50-100\cdot 0,51}{\sqrt{100\cdot 0,51\cdot 0,49}}\right)$;

3) $P \approx (0,51)^{50}(1-0,51)^{50}$;

4) $P \approx \Phi\left(\frac{100-100\cdot 0,51}{\sqrt{100\cdot 0,51\cdot 0,49}}\right)-\Phi\left(\frac{50-100\cdot 0,51}{\sqrt{100\cdot 0,51\cdot 0,49}}\right)$.

10. Точную вероятность появления события ***m*** раз в серии из ***n*** испытаний дает формула…

1) Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$;

2) Пуассона $P_n(m) = \dfrac{\lambda^m e^{-m}}{m!}$;

3) локальная теорема Лапласа $P_n(m) = \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$,

где $\varphi(x)$ – функция Гаусса;

4) $P_n(m) = q^{m-1} p$.

11. Монету подбрасывают 5 раз. Вероятность того, что "герб" выпадет менее двух раз, равна (здесь $P_n(m)$ – вероятность того, что в ***n*** испытаниях событие наступит ***m*** раз)…

1) $C_5^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-2}$;

2) $1 - \left(P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)\right)$;

3) $C_5^0 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^5$;

4) $C_5^0 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 + C_5^1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^5$.

3. Дискретные случайные величины

Справочный материал

Величина называется ***случайной***, если в результате испытания она принимает одно и только одно из возможных значений, заранее неизвестно, какое именно.

Обозначают случайные величины прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения строчными буквами x, y, z соответственно.

Случайные величины бывают ***дискретными*** и ***непрерывными***.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные друг от друга возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Примеры дискретных случайных величин:

а) X – число очков, выпавшее на верхней грани брошенного кубика, здесь возможные значения X: $\{1,2, \dots ,6\}$;

б) Y – число бракованных изделий в партии из ***n*** деталей, здесь возможные значения Y: $\{0,1, \dots , n\}$.

Закон распределения случайной величины – всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

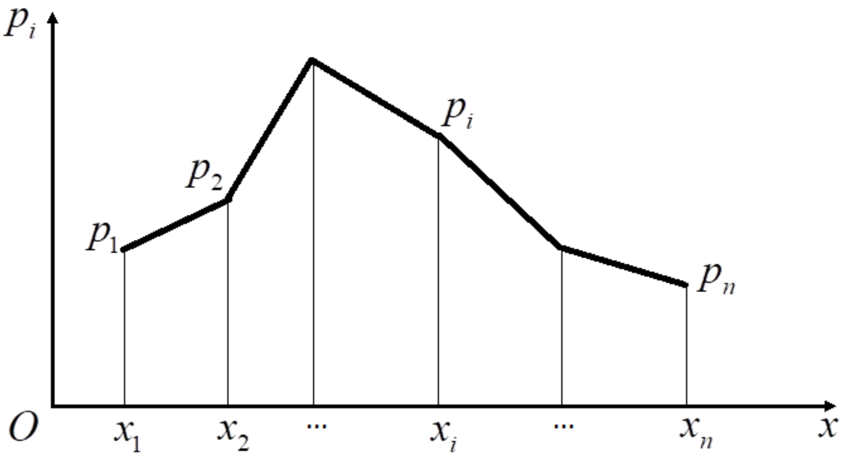
Закон распределения дискретной случайной величины можно представить в форме таблицы или геометрически (многоугольником распределения).

Табличная форма закона распределения (***ряд распределения***) представляет собой таблицу, первая строка которой содержит возможные значения случайной величины, расположенные в порядке возрастания, а вторая – их вероятности.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

События $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ образуют полную группу несовместных событий, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Многоугольник распределения – это ломаная линия, соединяющая последовательно точки с координатами $(x_i;\ p_i)$, $i=\overline{1,n}$.



Функция распределения случайной величины

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$ с областью определения $(-\infty;+\infty)$ и областью значений [0;1] такая, что $F(x) = P(X < x)$.

Свойства функции распределения:

- $0 \le F(x) \le 1$ (как вероятность);
- $F(-\infty)=0,\quad F(+\infty)=1$;
- $P(a \le X < b)=F(b)-F(a)$;
- $F(x)$ – неубывающая функция.

Числовые характеристики дискретной случайной величины

1. Математическое ожидание. ***Математическим ожиданием*** дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Обозначение математического ожидания – $M(X)$.

Пусть ряд распределения случайной величины X имеет вид:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Тогда математическое ожидание X определяется равенством

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\ .$$

Замечание. *Математическое ожидание X приближенно равно среднему арифметическому* $\overline{X}$ *наблюдаемых значений* случайной величины, т. е. $M(X)\approx\overline{X}$. На числовой оси M (X) будет располагаться внутри промежутка (x_1,x_n), поэтому математическое ожидание называют ***центром распределения*** или ***средним значением*** случайной величины.

2. Дисперсия. ***Дисперсией*** D(X) (рассеянием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M[(X-M(X))^2]$$

Вычисления дисперсии по определению часто бывают громоздкими. Формула $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$часто приводит к цели быстрее.

Замечание. *Дисперсия характеризует рассеяние случайной величины около математического ожидания.* Чем меньше дисперсия, тем ближе к математическому ожиданию группируются значения случайной величины.

3. Среднее квадратическое отклонение. ***Средним квадратическим отклонением*** случайной величины X называют величину:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,.$$

Замечание. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, среднее квадратическое отклонение имеет размерность самой случайной величины и характеризует среднее значение отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Вариант задания по теме

3.1. Дан закон распределения случайной величины X:

X	0	1	3	4
P	0,3	0,4	0,2	p_4

Найти: 1) p_4; 2) функцию распределения F(x) и значение $F(3)$;

3) вероятность $P(1\le X<4)$.

3.2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	2	4	5	7
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Методические указания к решению заданного варианта

3.1. Дан закон распределения случайной величины X:

X	0	1	3	4
P	0,3	0,4	0,2	p_4

Найти: 1) p_4; 2) функцию распределения $F(x)$ и значение $F(3)$;

3) вероятность $P(1 \le X < 4)$.

Решение

1. Определим вероятность значения $X = 4$, исходя из формулы:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1. \quad p_4 = 1 - (0,3 + 0,4\ + 0,2) = 0,1.$$

2. Итак,

X	0	1	3	4
P	0,3	0,4	0,2	0,1

Рассмотрим значения аргумента x на интервалах числовой оси и найдем на них значения $F(x)$:

а) $-\infty < x \le 0$,
$F(x) = P(X < x) = P(X < x \le 0) = P(X < 0) = 0$ (см. таблицу);

б) $0 < x \le 1$,
$F(x) = P(X < x) = P(X < x \le 1) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0,3;$

в) $1 < x \le 3$,
$F(x) = P(X < x) = P(X < x \le 3) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) =$
$= 0,3\ +\ 0,4\ =\ 0,7;$

г) $3 < x \le 4$,

$$F(x) = P(X < x) = P(X < x \le 4) = P(X < 4) =$$
$$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) = 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}9;$$

д) $4 < x < +\infty$,

$$F(x) = P(X < x) = P(X < x < +\infty) = P(X < +\infty) =$$
$$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 4) =$$
$$= 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1.$$

Запишем функцию *F* (*x*):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}3, & 0 < x \le 1; \\ 0{,}7, & 1 < x \le 3; \\ 0{,}9, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Значение функции *F*(3) = 0,7 (см. запись *F*(*x*))

3. $P(1 \le X < 4)$ = *P*(*X* =1) + *P*(*X* = 3) = 0,4 + 0,2 = 0,6.

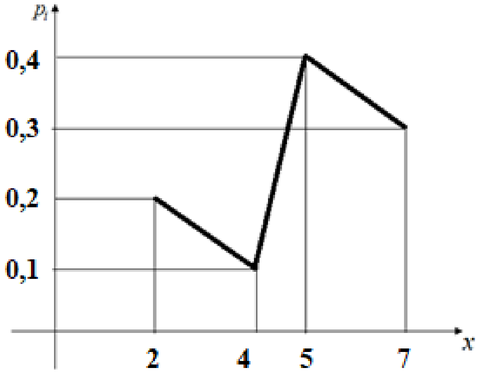
3.2. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения вероятностей

X	2	4	5	7
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение

1. Построим многоугольник распределения



2. Вычислим математическое ожидание, используя формулу

$$M\,(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i\,.$$

В данной задаче $M\,(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$ и

$$M\,(X) = 2\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}1 + 5\cdot 0{,}4 + 7\cdot 0{,}3 = 4{,}9.$$

3. Для нахождения дисперсии $D\,(X)$ используем формулу:

$D\,(X) = M\left(X^2\right) - M^2\left(X\right).$

Запишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	4	16	25	49
P	0,2	0,1	0,4	0,3

и вычислим $M\left(X^2\right) = 4\cdot 0{,}2 + 16\cdot 0{,}1 + 25\cdot 0{,}4 + 49\cdot 0{,}3 = 27{,}1.$

Искомая дисперсия

$$D\,(X) = M\left(X^2\right) - M^2\left(X\right) = 27{,}1 - \left(4{,}9\right)^2 = 3{,}09.$$

4. Среднее квадратическое отклонение $\sigma\left(X\right) = \sqrt{3{,}09} = 1{,}76$.

Контрольные вопросы

1. Дискретные случайные величины. Привести примеры. Закон распределения дискретной случайной величины.

2. Определение математического ожидания дискретной случайной величины. Перечислить свойства математического ожидания и указать его вероятностный смысл.

3. Определение дисперсии дискретной случайной величины. Свойства дисперсии и ее вероятностный смысл.

4. Среднее квадратическое отклонение. Укажите его преимущества по сравнению с дисперсией.

5. Функция распределения дискретной случайной величины. Свойства функции распределения.

6. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.

4. Непрерывные случайные величины

Справочный материал

Непрерывной называют случайную величину, которая принимает все значения из некоторого интервала, конечного или бесконечного. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Примеры непрерывных случайных величин:

а) X – дальность полета снаряда при выстреле из орудия, здесь возможные значения X представляют собой некоторый интервал;

б) Y – расход электроэнергии на предприятии за месяц, здесь также возможные значения Y представляют некоторый интервал.

Закон распределения непрерывной случайной величины, в отличие от дискретной, не может быть задан в табличном виде. Для этого применяется рассмотренная ранее ***функция распределения*** $F(x)$, которая для числа $x \in (-\infty; +\infty)$ и случайной величины X определяет вероятность того, что X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Остаются верными сформулированные ранее свойства функции распределения:

- $0 \le F(x) \le 1$ (как вероятность);
- $F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1;$
- $P(a \le X < b) = F(b) - F(a);$
- F (x) – неубывающая функция.

Непрерывная случайная величина обладает собственными свойствами:

- $P(X = x) = 0;$
- $P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) =$
  $= P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$

Плотность распределения вероятностей

Плотностью распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется ***производная ее функции распределения***:

$$f(x) = F'(x).$$

Свойства плотности распределения:

- $f(x) \geq 0$ (как производная неубывающей функции);
- $f(-\infty) = f(+\infty) = 0;$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx;$
- $P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx;$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = P(-\infty < X < +\infty) = P(D) = 1$ (как вероятность достоверного события).

Замечание. Площадь фигуры – криволинейной трапеции под кривой плотности $y = f(x)$ на $(-\infty; +\infty)$ равна 1.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

1. Математическое ожидание. ***Математическим ожиданием*** непрерывной случайной величины X называется величина

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx,$$

обладающая теми же свойствами, что и в случае дискретной случайной величины.

2. Дисперсия. ***Дисперсией*** непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания и находится по формуле

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)\,dx.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины обладает теми же свойствами, что и в случае дискретной случайной величины.

При этом $D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)$, где $M\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$.

3. Среднее квадратическое отклонение. ***Средним квадратическим отклонением*** случайной величины X называют величину:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\ .$$

Нормальное распределение

Случайные величины, имеющие нормальный закон распределения вероятностей, встречаются в природе, в жизни очень часто (например, случайная величина X – рост человека, случайная величина Z – высота дерева).

Случайная величина X имеет ***нормальное распределение с параметрами a*** и σ**,** если ее плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\ .$$

Функция распределения $F(x)$ нормального закона имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – ***функция Лапласа,*** $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Значения функции $\Phi(x)$ для $0 \le x < 5$ содержатся в таблице (см. табл. 2, раздел «Приложения»).

Числовые характеристики ***нормального*** распределения:

математическое ожидание $M(X) = a$;

дисперсия $D(X) = \sigma^2$;

среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sigma$.

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина примет значение из промежутка $(\alpha;\beta)$ может быть определена по формуле $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$.

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от математического ожидания *a* (по абсолютной величине) не превзойдет числа ε, равна

$$P(|X-a|\le\varepsilon)=P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Вариант задания по теме

4.1. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 0,25\cdot(x-1)^2, & 1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти:
1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
2) вероятность того, что в результате одного испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (2,5; 4);
3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

4.2. Случайная величина задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 3x^2, & 0\le x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Найти:
1) функцию распределения $F(x)$;
2) вероятность того, что в результате одного испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (0,5; 2);
3) математическое ожидание $M(X)$.

4.3. Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины с плотностью распределения вероятностей $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-6)^2}{8}}$. Записать функцию распределения $F(x)$, вычислить $P(2<X<8)$ и $P(|X-M(X)|<1)$.

Методические указания к решению заданного варианта

4.1. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 1; \\ 0,25 \cdot (x-1)^2, \quad 1 < x \le 3; \\ 1, \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти:

1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;

2) вероятность того, что в результате одного испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (2,5; 4);

3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Решение

1. ***Плотность распределения вероятностей*** $f(x)$ непрерывной случайной величины X равна производной ее функции распределения**:** $f(x) = F'(x)$.

$$F'(x) = \begin{cases} (0)', \quad x \le 1; \\ \left(0,25 \cdot (x-1)^2\right)', \quad 1 < x \le 3; \\ (1)', \quad x > 3. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 1; \\ 0,5 \cdot (x-1), \quad 1 < x \le 3; \\ 0, \quad x > 3. \end{cases}$$

2. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$, равна

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$$P(2,5 < X < 4) = F(4) - F(2,5) = 1 - 0,25 \cdot (2,5-1)^2 = 0,4375.$$

3. Вычислим $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$, разбивая интервал интегрирования на три части (по числу интервалов задания $f(x)$):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{1} x \cdot 0 \cdot dx + \int_1^3 x \cdot 0,5(x-1)\,dx + \int_3^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + 0,5\int_1^3 \left(x^2 - x\right) dx + 0 = 0,5\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = 0,5\left(9 - \frac{9}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3}.$$

Дисперсию определяем по формуле

$$D(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M^2(X).$$

$$M\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{1}x^2\cdot 0\cdot dx+\int\limits_{1}^{3}x^2 0,5\left(x-1\right)dx+\int\limits_{3}^{+\infty}x^2\cdot 0\cdot dx=$$

$$=0,5\int\limits_{1}^{3}\left(x^3-x^2\right)dx=0,5\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3=0,5\left(\frac{81}{4}-9-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{3}.$$

$$D\left(X\right)=\frac{17}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{2}{9}=0,222...$$

4.2. Случайная величина задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 3x^2, & 0\le x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Найти:
1) функцию распределения $F(x)$;
2) вероятность того, что в результате одного испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (0,5; 2);
3) математическое ожидание $M(X)$.

Решение

1. Находим функцию распределения непрерывной случайной величины, пользуясь формулой $F\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{x}f\left(x\right)dx$.

Плотность вероятности $f(x)$ задана на трех интервалах различными аналитическими выражениями, поэтому функцию $F(x)$ определяем также на этих интервалах:

а) если $x<0$, то $f(x)=0$ и $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{x}0\cdot dx=0$;

б) если $0\le x\le 1$, то $f\left(x\right)=3x^2$ и, следовательно,

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\int\limits_{0}^{x}3x^2\,dx=0+x^3\Big|_0^x=x^3-0^3=x^3.$$

в) если $x>1$, то $f(x)=0$ и

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\int\limits_{0}^{1}3x^2\,dx+\int\limits_{1}^{x}0\cdot dx=0+x^3\Big|_0^1+0=1-0=1.$$

Итак, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^3, & 0 \le x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

2. Вероятность попадания случайной величины X в интервал (0,5; 2) находим по формуле $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

$$P(0{,}5 < X < 2) = \int\limits_{0{,}5}^{2} f(x)dx = \int\limits_{0{,}5}^{1} 3x^2\,dx + \int\limits_{1}^{2} 0 \cdot dx = \int\limits_{0{,}5}^{1} 3x^2\,dx = x^3\Big|_{0{,}5}^{1} =$$
$$= 1 - (0{,}5)^3 = 1 - 0{,}125 = 0{,}875.$$

3. Вычислим $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx$, разбивая интервал интегрирования на три части (по числу интервалов задания $f(x)$):

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{1} x \cdot (3x^2)dx + \int\limits_{1}^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + \int\limits_{0}^{1} 3x^3 dx + 0 = \int\limits_{0}^{1} 3x^3 dx = \frac{3x^4}{4}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

4.3. Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины с плотностью распределения вероятностей $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-6)^2}{8}}$.

Записать функцию распределения $F(x)$, вычислить $P(2 < X < 8)$ и $P(|X - M(X)| < 1)$.

Решение

1. Плотность вероятностей нормального распределения имеет вид: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где параметр $a = M(X)$ (***математическое ожидание***), а параметр $\sigma = \sigma(X)$ (***среднее квадратическое отклонение***).

По условию $f\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-6\right)^2}{8}}$,

тогда $M(X)=6,\ \sigma(X)=2,\ D\left(X\right)=\sigma^2=2^2=4$.

2. Функция распределения $F\ (x)$ нормального закона имеет вид:

$F\ (x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi\left(x\right)$ – ***функция Лапласа***.

В нашей задаче $F\ (x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-6}{2}\right)$.

3. Рассмотрим вероятность попадания в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ случайной величины, распределенной по нормальному закону:

$P\left(\alpha<X<\beta\right)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi\left(x\right)$ – функция Лапласа.

Вычислим вероятность $P\left(2<X<8\right)$, определив значение функции $\Phi\left(x\right)$ по табл. 2 (раздел «Приложения»):

$$P\left(2<X<8\right)=\Phi\left(\frac{8-6}{2}\right)-\Phi\left(\frac{2-6}{2}\right)=\Phi\left(1\right)-\Phi\left(-2\right)=\Phi\left(1\right)+\Phi\left(2\right)=$$
$$=0,3413+0,4772=0,8185.$$

4. Для нахождения вероятности $P\left(\left|X-M\left(X\right)\right|<1\right)$ воспользуемся формулой $P\left(\left|X-a\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.

Следовательно, $P\left(\left|X-6\right|<1\right)=2\Phi\left(\frac{1}{2}\right)=2\Phi\left(0,5\right)=2\cdot 0,1915=0,383$.

Контрольные вопросы

1. Непрерывные случайные величины. Привести примеры. Функция распределения. Свойства функции распределения.

2. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства.

3. Нахождение функции распределения непрерывной случайной величины по известной плотности распределения.

4. Формулы для вычисления числовых характеристик непрерывной случайной величины: математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

5. Нормальное распределение. Параметры нормального распределения и их вероятностный смысл.

6. Вычисление вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.

7. Вычисление вероятности отклонения нормально распределенной случайной величины от математического ожидания.

5. Системы двух случайных величин

Справочный материал

Рассмотрим две дискретные случайные величины X и Y, тогда удобно рассматривать двумерную случайную величину $(X;Y)$.

Геометрически двумерную случайную величину $(X;Y)$ можно интерпретировать как случайную точку на плоскости.

При рассмотрении системы случайных величин необходимо иметь информацию о зависимости или независимости этих величин.

Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая величина.

Зависимость случайных величин может носить функциональный или статистический характер.

Между случайными величинами существует *функциональная зависимость*, если каждому допустимому значению одной из них соответствует одно вполне определенное значение другой.

В случае *статистической зависимости* каждому значению одной величины может соответствовать множество значений другой с определенным законом распределения.

Закон распределения системы $(X;Y)$ двух дискретных случайных величин в случае конечного числа значений можно задать таблицей:

Y X	y_1	y_2	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}
…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	$p_{n\,m}$

Здесь $p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, при этом $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Зная закон распределения системы двух случайных величин, можно найти законы распределения отдельных составляющих системы, т. е. законы распределения случайных величин *X* и *Y*. Для этого нужно найти вероятности, с которыми принимаются значения случайной величины *X* и случайной величины *Y*:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \quad P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Таким образом, если нужно найти вероятности появления значений случайной величины $X = x_i$, то в таблице распределения системы складываются вероятности p_{ij}, расположенные в *i*-ой строке, а если находятся вероятности появления значений случайной величины $Y = y_j$, то в таблице распределения системы складываются вероятности p_{ij}, расположенные в *j*-м столбце.

Например,

$$P(X = x_1) = p_{11} + p_{12} + ... + p_{1m}; \; P(Y = y_1) = p_{11} + p_{21} + ... + p_{n1}.$$

Числовые характеристики системы случайных величин. Ковариация. Коэффициент корреляции

Используя законы распределения случайных величин *X* и *Y*, можно вычислить числовые характеристики: *M*(*X*), *D*(*X*), *M*(*Y*), *D*(*Y*), но они не дают представления о наличии связи между *X* и *Y* или ее отсутствии.

Для этого используются числовые характеристики: *ковариация* (*корреляционный момент*) и *коэффициент корреляции*.

Ковариацией (или *корреляционным моментом*) K_{xy} случайных величин *X* и *Y* называется математическое ожидание произведения отклонений значений этих величин от своих математических ожиданий:

$$K_{xy} = M\big((X - M(X))(Y - M(Y))\big).$$

Свойства ковариации

1. $K_{xy} = K_{yx}$.

2. $K_{xx} = M\big((X - M(X))(X - M(X))\big) = M\Big(\big(X - M(X)\big)^2\Big) = D(X).$

3. Если случайные величины *X* и *Y* независимы, то $K_{xy} = 0$.

4. Ковариация случайных величин X и Y может быть вычислена по формуле

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y), \text{ где } M(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}\,.$$

Если $K_{xy} \neq 0$, то случайные величины X и Y зависимы.

Ковариация K_{xy} имеет размерность, равную произведению размерностей X и Y, поэтому для оценки зависимости случайных величин вводится безразмерная характеристика, называемая *коэффициентом корреляции.*

Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называется отношение их ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)}\,.$$

Случайные величины X и Y называются ***некоррелированными***, если $r_{xy} = 0$.

Свойства коэффициента корреляции:

1. Если случайные величины X и Y независимы, то $r_{xy} = 0$.

2. Модуль коэффициента корреляции не превосходит единицы:

$$|\, r_{xy} \,| \le 1.$$

3. Если модуль коэффициента корреляции $\left| r_{xy} \right| = 1$, то между случайными величинами существует функциональная линейная зависимость, т. е. $Y = aX + b$, причем $r_{xy} = 1$, если $a > 0$, и $r_{xy} = -1$, если $a < 0$.

Коэффициент корреляции может рассматриваться как характеристика тесноты линейной связи между случайными величинами.

Значение модуля коэффициента корреляции	*Теснота линейной связи*
до 0,2	Очень слабая
до 0,5	Слабая
до 0,7	Средняя
до 0,9	Высокая
свыше 0,9	Очень высокая

Парная линейная регрессия

Регрессией называется зависимость среднего значения одной случайной величины от некоторой другой.

Линия регрессии Y на X графически изображает зависимость среднего значения случайной величины Y от случайной величины X.

Уравнение линии регрессии Y на X имеет вид:

$$Y - M(Y) = r_{xy}\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\left(X - M(X)\right).$$

Линия регрессии X на Y графически изображает зависимость среднего значения случайной величины X от случайной величины Y.

Уравнение линии регрессии X на Y имеет вид

$$X - M(X) = r_{xy}\frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}\left(Y - M(Y)\right).$$

Вариант задания по теме

5.1. Система двух дискретных случайных величин $(X;Y)$ задана законом распределения:

Y X	16	26	36	46	56
20	0,04				
25	0,06	0,08			
30		0,1	0,32	0,04	
35			0,03	0,12	0,01
40			0,09	0,06	0,05

1. Найти законы распределения составляющих и их числовые характеристики.

2. Вычислить коэффициент линейной корреляции между X и Y. Найти уравнение регрессии Y на X и регрессии X на Y.

Методические указания к решению заданного варианта

5.1. Система двух дискретных случайных величин $(X;Y)$ задана законом распределения:

Y X	16	26	36	46	56
20	0,04				
25	0,06	0,08			
30		0,1	0,32	0,04	
35			0,03	0,12	0,01
40			0,09	0,06	0,05

1. Найти законы распределения составляющих и их числовые характеристики.
2. Вычислить коэффициент линейной корреляции между X и Y. Найти уравнения регрессии Y на X и регрессии X на Y.

Решение

1. Составим закон распределения случайной величины X и вычислим ее числовые характеристики.

Вычислим вероятности значений $X = x_i$, складывая вероятности p_{ij} по строкам:

$P(X=20) = 0{,}04$; $P(X=25) = 0{,}06 + 0{,}08 = 0{,}14$;

$P(X=30) = 0{,}1 + 0{,}32 + 0{,}04 = 0{,}46$;

$P(X=35) = 0{,}03 + 0{,}12 + 0{,}01 = 0{,}16$;

$P(X=40) = 0{,}09 + 0{,}06 + 0{,}05 = 0{,}2$.

Сумма полученных вероятностей равна единице и закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	20	25	30	35	40
P	0,04	0,14	0,46	0,16	0,2

Определим значения числовых характеристик случайной величины X.

а) математическое ожидание $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$.

$$M(X) = 20\cdot 0{,}04 + 25\cdot 0{,}14 + 30\cdot 0{,}46 + 35\cdot 0{,}16 + 40\cdot 0{,}2 = 31{,}7.$$

б) дисперсия $D(X) = M\left(X^2\right) - M^2\left(X\right)$.

$$M\left(X^2\right) = 20^2\cdot 0,04 + 25^2\cdot 0,14 + 30^2\cdot 0,46 + 35^2\cdot 0,16 + 40^2\cdot 0,2 = 1033,5.$$

$$D(X) = 1033,5 - (31,7)^2 = 28,61.$$

в) среднее квадратическое отклонение $\sigma\left(X\right) = \sqrt{28,61} = 5,35$.

Составим закон распределения случайной величины *Y*, вычислим вероятности значений $Y = y_j$, складывая вероятности p_{ij} по столбцам:

$P\left(Y = 16\right) = 0,04 + 0,06 = 0,1$; $P\left(Y = 26\right) = 0,08 + 0,1 = 0,18$;

$P\left(Y = 36\right) = 0,32 + 0,03 + 0,09 = 0,44$;

$P\left(Y = 46\right) = 0,04 + 0,12 + 0,06 = 0,22$; $P\left(Y = 56\right) = 0,01 + 0,05 = 0,06$.

Y	16	26	36	46	56
P	0,1	0,18	0,44	0,22	0,06

Вычислим числовые характеристики случайной величины *Y*, поступая аналогично вычислению характеристик случайной величины *X*:

$M(Y) = 35,6$, $D(Y) = 103,84$, $\sigma\left(Y\right) = 10,2$.

2. Далее по свойству 4 ковариации вычислим

$K_{xy} = M\left(XY\right) - M\left(X\right)M\left(Y\right)$, где $M\left(XY\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}$.

$$M\left(XY\right) = 20\cdot 16\cdot 0,04 + 25\cdot(16\cdot 0,06 + 26\cdot 0,08) + 30\cdot(26\cdot 0,1 + 36\cdot 0,32 + \\ + 46\cdot 0,04) + 35\cdot(36\cdot 0,03 + 46\cdot 0,12 + 56\cdot 0,01) + 40\cdot(36\cdot 0,09 + 46\cdot 0,06 + \\ + 56\cdot 0,05) = 1170,2.$$

$K_{xy} = 1170,2 - 31,7\cdot 35,6 = 41,68$.

По определению коэффициента корреляции

$r_{xy} = \dfrac{K_{xy}}{\sigma\left(X\right)\sigma\left(Y\right)} = \dfrac{41,68}{5,35\cdot 10,2} = 0,76$, а это означает, что имеет место высокая положительная корреляция.

Используя уравнение линии регрессии *Y* на *X*

$$Y - M\left(Y\right) = r_{xy}\frac{\sigma\left(Y\right)}{\sigma\left(X\right)}\left(X - M\left(X\right)\right)$$

для данного примера, получим следующее:

$$Y-35,6=0,76\cdot\frac{10,2}{5,35}\left(X-31,7\right)\ \text{или}\ \ Y=1,46X-10,58.$$

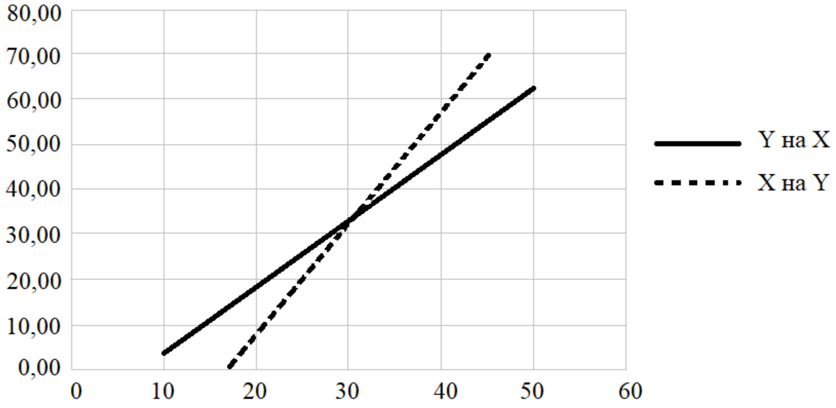
Уравнение линии регрессии X на Y

$$X-M\left(X\right)=r_{xy}\frac{\sigma\left(X\right)}{\sigma\left(Y\right)}\left(Y-M\left(Y\right)\right)$$

для данной задачи примет вид:

$$X-31,7=0,76\cdot\frac{5,35}{10,2}\ (Y-35,6)\ \text{или}\ \ X=0,4Y+17,41.$$

Графики линий регрессии имеют вид



Контрольные вопросы

1. Зависимые и независимые случайные величины. Запись закона распределения системы двух дискретных случайных величин.

2. Законы распределения каждой из составляющих системы и вычисление их числовых характеристик.

3. Определение ковариации двух случайных величин. Свойства ковариации.

4. Коэффициент корреляции и его свойства. Зависимость тесноты линейной связи между случайными величинами от величины коэффициента корреляции.

5. Парная линейная регрессия. Уравнения линий регрессии Y на X и регрессии X на Y.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Случайные величины

1. В коробке 3 карандаша, из них 1 красный, 2 синих. Извлекаются 2 карандаша. Закон распределения случайной величины X – числа *синих* карандашей среди извлеченных имеет вид…

1)

X	0	1	2
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

;

2)

X	0	1	2
p	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

;

3)

X	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

;

4)

X	0	1	2
p	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

.

2. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	1	2	3
p	0,4	0,1	0,5

Тогда математическое ожидание равно…

1) $M(X) = 2,4$; 2) $M(X) = 2,1$; 3) $M(X) = 1,8$; 4) $M(X) = 2,3$.

3. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	1	3	5	7
p	0,3	0,1	0,2	p_4

Тогда $\boldsymbol{p_4}$ и $\boldsymbol{P(X < 7)}$ равны …

1) $p_4 = 0,5$; $P(X < 7) = 0,4$;

2) $p_4 = 0,4$; $P(X < 7) = 0,3$;

3) $p_4 = 0,3$; $P(X < 7) = 0,6$;

4) $p_4 = 0,4$; $P(X < 7) = 0,6$.

4. Дана плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & при\ \ 0 \le x \le 1 \\ 0, & при\ x < 0,\ x > 1. \end{cases};$$

Величина a равна: 1) $a = 3$; 2) $a = 1$; 3) $a = 3$; 4) $a = 1/3$.

5. Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le\frac{3}{2};\\ 2x-3, & при\ \frac{3}{2}<x\le 2;\\ 1, & при\ x>2.\end{cases}$$

Тогда $P\,(1 < X < 3)$ равно:

1) $P\,(1 < X < 3) = 1$; 2) $P\,(1 < X < 3) = 0{,}5$;

3) $P\,(1 < X < 3) = 2$; 4) $P\,(1 < X < 3) = 0{,}7$.

6. Дана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины *X*:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x>0;\\ \frac{x}{8}, & 0\le x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Математическое ожидание $M(X)$ равно…

1) $M(X) = 2$; 2) $M(X) = 1$; 3) $M(X) = 8/3$; 4) $M(X) = 7/3$.

7. Случайная величина *X* подчинена нормальному закону с плотностью вероятности $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{2}}$.

Дисперсия случайной величины *X* равна:

1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 25.

8. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами: $M(X) = 3$, $D(X) = 4$.

Тогда вероятность $P\,(|X - M(X)| < 6)$ равна:

1) 0,9973; 2) 0,49865; 3) 0,8664; 4) 0,0088.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

<table>
<tr><td></td><td>1. Случайные события. Вычисление вероятности событий</td></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Найти вероятность выпадения четного числа очков при одном броске игральной кости.</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Из партии, в которой 21 деталь без дефектов и 5 с дефектами, берут наудачу 3 детали. Чему равна вероятность того, что все 3 детали без дефектов?</td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы, равны по 0,9, на третий 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса.</td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>Имеется 6 одинаковых по внешнему виду урн. В одной 2 белых и 3 черных шара, в двух – 3 белых и 2 черных шара, а в остальных трех – по 1 черному и по 4 белых шара. Наудачу выбирается урна и из нее наудачу извлекается шар. Чему равна вероятность того, что этот шар окажется белым?</td></tr>
<tr><td></td><td>2. Повторные независимые испытания</td></tr>
<tr><td>2.1</td><td>Стрелок совершает 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна 0,85. Найти вероятность того, что стрелок попадет ровно 2 раза.</td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором вероятность их включения составляет 0,8. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?</td></tr>
<tr><td></td><td>3. Дискретные случайные величины</td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Дан закон распределения дискретной случайной величины X:
<table>
<tr><td><i>X</i></td><td>–1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td><i>P</i></td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>p_4</td></tr>
</table>
Найти: 1) p_4; 2) функцию распределения $F(x)$ и значение $F(1)$;
3) вероятность $P(-0{,}5 < X \le 2)$.</td></tr>
</table>

3.2 Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

$\boldsymbol{X}$	-1	3	4	6
$\boldsymbol{P}$	0,1	0,4	0,3	0,2

Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание $M\left(X\right)$, дисперсию $D\left(X\right)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma\left(X\right)$.

4. Непрерывные случайные величины

4.1 Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $F\,(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \quad x\le 1; \\ 0,5\cdot(x-1)\,, \quad 1<x\le 3\,; \\ 1, \quad x>3\,. \end{cases}$$

Найти:

1) плотность распределения вероятностей $f\,(x)$;

2) вероятность $P\left(2,5<X<3,5\right)$;

3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

4.2 Случайная величина задана плотностью вероятности $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 0\,, \quad x\le 0\,; \\ \dfrac{3\cdot x^2}{8}\,, \quad 0<x\le 2\,; \\ 0\,, \quad x>2\,. \end{cases}$$

Найти:

1) функцию распределения $F(x)$;

2) вероятность $P\left(-1<X<0,5\right)$;

3) математическое ожидание $M\,(X)$.

4.3 Найдите математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины с плотностью распределения вероятностей $f\left(x\right)=\dfrac{1}{9\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-15\right)^2}{162}}$.

Записать функцию распределения $F(x)$,

вычислить $P\left(12<X<18\right)$ и $P\left(\left|X-M\left(X\right)\right|<1,5\right)$.

5. Системы двух случайных величин

5.1 Система двух дискретных случайных величин $(X;Y)$ задана законом распределения:

Y X	–3	–1	1	3
1	0,06	0,02	0,04	0,08
0	0,15	0,05	0,1	0,2
1	0,09	0,03	0,06	0,12

1) Найти законы распределения составляющих и их числовые характеристики.

2) Вычислить коэффициент линейной корреляции между X и Y. Найти уравнение регрессии Y на X.

Вариант 2

1. Случайные события. Вычисление вероятности событий

1.1 Найти вероятность выпадения числа очков, кратного 3 при одном броске игральной кости.

1.2 Из 50 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 40. Найти вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов.

1.3 Вероятность того, что стрелок при одном выстреле по мишени выбьет 10 очков, равна 0,4; 9 очков – 0,2; 8 очков – 0,2; 7 очков – 0,1; 6 очков или менее – 0,1. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет не менее восьми очков.

1.4 Прибор может работать в трех режимах: нормальном, форсированном и недогруженном. Нормальный режим наблюдается в 60 % случаев работы прибора, форсированный – в 30 % и недогруженный – в 10 %. Надежность работы прибора при нормальном режиме равна 0,8, при форсированном – 0,5, при недогруженном – 0,9. Найти вероятность надежной работы прибора.

2. Повторные независимые испытания

2.1 Вероятность того, что расход воды в течение дня окажется выше нормы, равна 0,3. Найти вероятность того, что расход воды будет в пределах нормы в течение 5 дней из ближайших 7 дней.

2.2 Нужно исследовать 400 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе одинакова и равна 0,8. Определить вероятность того, что число проб с промышленным содержанием металла будет заключено между 290 и 350.

3. Дискретные случайные величины

3.1 Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	–1	0	2	5
P	p_1	0,1	0,4	0,2

Найти:

1) p_1;

2) функцию распределения $F(x)$ и значение $F(2)$;

3) вероятность $P(0 \le X < 5)$.

3.2 Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	–1	2	4	5
P	0,1	0,2	0,4	0,3

Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

4. Непрерывные случайные величины

4.1 Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти:

1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;

2) вероятность $P(0{,}5 < X < 2)$;

3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

<table>
<tr><td>4.2</td><td>Случайная величина задана плотностью вероятности $f(x)$:
$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$
Найти:
1) функцию распределения $F(x)$;
2) вероятность $P(1<X<2)$;
3) математическое ожидание $M(X)$.</td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>Найдите математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины с плотностью распределения вероятностей $f(x)=\dfrac{1}{8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-9)^2}{128}}$.
Записать функцию распределения $F(x)$,
вычислить $P(5<X<10)$ и $P(\lvert X-M(X)\rvert<2)$.</td></tr>
<tr><td></td><td>5. Системы двух случайных величин</td></tr>
<tr><td>5.1</td><td>Система двух дискретных случайных величин $(X;Y)$ задана законом распределения:
<table>
<tr><th>Y
X</th><th>–1</th><th>0</th><th>1</th><th>3</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,05</td><td>0,1</td><td>0,15</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,05</td><td>0,15</td><td>0,15</td><td>0,05</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,1</td><td>0,05</td><td>0</td><td>0,05</td></tr>
</table>
1. Найти законы распределения составляющих и их числовые характеристики.
2. Вычислить коэффициент линейной корреляции между X и Y. Найти уравнение регрессии Y на X.</td></tr>
</table>

Вариант 3

<table>
<tr><td></td><td>1. Случайные события. Вычисление вероятности событий</td></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Найти вероятность выпадения числа очков, отличного от 5 при одном броске игральной кости.</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Устройство состоит из пяти элементов, среди которых два изношенных. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.</td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.</td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>Известно, что в партии из 600 электрических лампочек 200 изготовлены заводом №1, 250 заводом №2, 150 заводом №3. Вероятности изготовления стандартной лампочки заводами №1, №2, №3 соответственно равны 0,97; 0,91; 0,93. Найти вероятность того, что взятая наудачу лампочка окажется стандартной.</td></tr>
<tr><td></td><td>2. Повторные независимые испытания</td></tr>
<tr><td>2.1</td><td>30 % изделий данного предприятия – это продукция высшего сорта. Покупатель приобрел 6 изделий, изготовленных на этом предприятии. Чему равна вероятность того, что 4 из них высшего сорта?</td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>Вероятность изделию быть бракованным равна 0,05. Найти вероятность того, что среди 1 000 изделий число бракованных находится в промежутке от 40 до 70 включительно.</td></tr>
<tr><td></td><td>3. Дискретные случайные величины</td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Дан закон распределения дискретной случайной величины X:
<table>
<tr><td>$\boldsymbol{X}$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{P}$</td><td>p_1</td><td>0,15</td><td>0,45</td><td>0,1</td></tr>
</table>
Найти:
1) p_1;
2) функцию распределения $F(x)$ и значение $F(0)$;
3) вероятность $P(0 \le X \le 3)$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>3.2</td>
<td>Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:
<table>
<tr><td>X</td><td>–1</td><td>0</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>P</td><td>0,4</td><td>0,3</td><td>0,2</td><td>0,1</td></tr>
</table>
Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>4. Непрерывные случайные величины</td>
</tr>
<tr>
<td>4.1</td>
<td>Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ (x-1)^2, & 1<x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Найти:
1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
2) вероятность $P(1{,}2<X<2{,}5)$;
3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>4.2</td>
<td>Случайная величина задана плотностью вероятности $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ 2x, & 0<x\le 1; \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Найти:
1) функцию распределения $F(x)$;
2) вероятность $P(0{,}2<X<0{,}5)$;
3) математическое ожидание $M(X)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>4.3</td>
<td>Найдите математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины с плотностью распределения вероятностей $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$.
Записать функцию распределения $F(x)$,
вычислить $P(2<X<7)$ и $P(|X-M(X)|<1)$.</td>
</tr>
</table>

5. Системы двух случайных величин

5.1 Система двух дискретных случайных величин $(X;Y)$ задана законом распределения:

Y X	–2	–1	1	2
–1	0,06	0,15	0,17	0,12
0	0,05	0,1	0,1	0,05
2	0,05	0,08	0,07	0

1. Найти законы распределения составляющих и их числовые характеристики.
2. Вычислить коэффициент линейной корреляции между *X* и *Y*. Найти уравнение регрессии *Y* на *X*.

Вариант 4

1. Случайные события. Вычисление вероятности событий

1.1 Из букв слова «ФУНКЦИЯ» случайным образом выбирается одна. Какова вероятность того, что эта буква окажется гласной?

1.2 В школьную библиотеку поступило 40 учебников, из них четыре с дефектами переплета. Какова вероятность того, что среди двух взятых наудачу учебников оба окажутся с дефектами переплета?

1.3 Имеются 3 ящика, содержащие по 10 деталей. В первом ящике 6 стандартных изделий, во втором – 9, в третьем – 7. Из каждого ящика наудачу выбирают по одной детали. Найти вероятность того, что все 3 детали стандартны.

1.4 На базу поступили одинаковые по объему партии холодильников с двух разных заводов. Вероятность того, что холодильник проработает без поломок в течение гарантийного срока, равна 0,85, если холодильник собран на первом заводе, и 0,95, если на втором. Найти вероятность того, что наугад взятый холодильник не сломается в течение гарантийного срока.

2. Повторные независимые испытания

2.1 Игральную кость бросают 6 раз. Найти вероятность того, что 5 очков выпадут ровно 5 раз.

2.2 Вероятность поражения мишени при 1 выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз.

3. Дискретные случайные величины

3.1 Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	0	1	2	3
P	0,1	p_2	0,3	0,2

Найти:

1) p_2;

2) функцию распределения $F(x)$ и значение $F(3)$;

3) вероятность $P(0 \le X \le 2)$.

3.2 Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	0	4	6	8
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Построить многоугольник распределения.

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

4. Непрерывные случайные величины

4.1 Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^3, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти:

1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;

2) вероятность $P(0{,}4 < X < 3)$;

3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

4.2 Случайная величина задана плотностью вероятности $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ x-\dfrac{1}{2}, & 1<x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Найти:

1) функцию распределения $F(x)$;
2) вероятность $P(1{,}5<X<2)$;
3) математическое ожидание $M(X)$.

4.3 Найдите математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины с плотностью распределения вероятностей $f(x)=\dfrac{1}{7\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{98}}$.

Записать функцию распределения $F(x)$,
вычислить $P(1<X<5)$ и $P(|X-M(X)|<0{,}8)$.

5. Системы двух случайных величин

5.1 Система двух дискретных случайных величин $(X;Y)$ задана законом распределения:

Y X	0	2	3	5
1	0,06	0,09	0,12	0,03
4	0,08	0,12	0,16	0,04
5	0,06	0,09	0,12	0,03

1. Найти законы распределения составляющих и их числовые характеристики.
2. Вычислить коэффициент линейной корреляции между X и Y. Найти уравнение регрессии Y на X.

Вариант 5

1. Случайные события. Вычисление вероятности событий

1.1 Из букв слова «МАТЕМАТИКА» случайным образом выбирается одна. Какова вероятность того, что эта буква М?

1.2 В ящике 12 деталей, среди которых 7 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

1.3 В первом ящике 1 белый, 2 красных и 3 синих шара, во втором ящике 2 белых, 6 красных и 4 синих шара. Из каждого ящика наудачу извлекают по шару. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров нет синих?

1.4 Предприятие, производящее компьютеры, получает одинаковые комплектующие детали от трех поставщиков. Первый поставляет 50 % всех комплектующих деталей, второй – 20 %, третий – 30 % деталей. Известно, что в продукции первого поставщика брак составляет 4 %, второго – 5 %, третьего – 2 %. Определить вероятность того, что деталь, выбранная наудачу из всех полученных, будет бракованной.

2. Повторные независимые испытания

2.1 В ботаническом саду посажено 7 саженцев вишни. Каждый саженец приживается с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что не приживутся ровно 2 саженца.

2.2 Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41–го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 100 покупателей обувь 41– го размера потребуется не более 30?

3. Дискретные случайные величины

3.1 Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	0	1	2	3
P	0,2	0,3	p_3	0,2

Найти:

1) p_3;

2) функцию распределения $F(x)$ и значение $F(2)$;

3) вероятность $P(0 \le X < 2)$.

<table>
<tr><td>3.2</td><td>Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:
<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>P</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,3</td></tr></table>
Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.</td></tr>
<tr><td></td><td>4. Непрерывные случайные величины</td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $F(x)$:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ \frac{x}{2} - 1, & 2 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$
Найти:
1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
2) вероятность $P(1 < X < 3)$;
3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Случайная величина задана плотностью вероятности $f(x)$:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{2 \cdot x}{25}, & 0 < x \le 5; \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$
Найти:
1) функцию распределения $F(x)$;
2) вероятность $P(3 < X < 6)$;
3) математическое ожидание $M(X)$.</td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>Найдите математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины с плотностью распределения вероятностей $f(x) = \frac{1}{12\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-13)^2}{288}}$.
Записать функцию распределения $F(x)$,
вычислить $P(10 < X < 14)$ и $P(\left|X - M(X)\right| < 4)$.</td></tr>
</table>

5. Системы двух случайных величин

5.1 Система двух дискретных случайных величин $(X;Y)$ задана законом распределения:

Y X	0	1	2	3
–1	0,02	0,03	0,09	0,01
0	0,04	0,2	0,16	0,1
1	0,05	0,1	0,15	0,05

1) Найти законы распределения составляющих и их числовые характеристики.

2) Вычислить коэффициент линейной корреляции между X и Y. Найти уравнение регрессии Y на X.

Вариант 6

1. Случайные события. Вычисление вероятности событий

1.1 В среднем из 50 карманных фонариков 4 являются неисправными. Найти вероятность покупки работающего фонарика.

1.2 В урне 9 белых и 3 черных шара. Из этой урны наудачу извлечены 2 шара. Какова вероятность того, что эти шары белого цвета?

1.3 Вероятность того, что в течение дня произойдет неполадка станка, равна 0,02. Полагая появление неполадки станка в разные дни событиями независимыми, найти вероятность работы станка в течение двух дней подряд.

1.4 В студенческой группе 3 человека имеют высокий уровень подготовки, 13 человек – средний и 4 – низкий. Вероятности успешной сдачи экзамена для данных студентов соответственно равны: 0,8; 0,7 и 0,4. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент сдаст экзамен.

2. Повторные независимые испытания

2.1 Контрольный тест состоит из 5 вопросов. На каждый вопрос предлагается 4 варианта ответа, среди которых только один правильный. Найти вероятность правильно ответить только на 3 вопроса теста, если ответ выбирается наудачу.

2.2 Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором вероятность их включения составляет 0,8. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

3. Дискретные случайные величины

3.1 Дан закон распределения дискретной случайной величины *X*:

X	-1	0	1	2
P	0,1	0,4	0,3	p_4

Найти:
1) p_4;
2) функцию распределения $F(x)$ и значение $F(-1)$;
3) вероятность $P(0 \le X \le 2)$.

3.2 Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения вероятностей:

X	0	5	6	7
P	0,1	0,4	0,3	0,2

Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

4. Непрерывные случайные величины

4.1 Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \dfrac{x+2}{9}, & -2 < x \le 7; \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

Найти:
1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
2) вероятность $P(-2 < X < 3)$;
3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

4.2 Случайная величина задана плотностью вероятности $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \dfrac{x+1}{2}, & -1<x\le 1; \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Найти:

1) функцию распределения $F(x)$;

2) вероятность $P(-0{,}5<X<0{,}5)$;

3) математическое ожидание $M(X)$.

4.3 Найдите математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины с плотностью распределения вероятностей $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-6)^2}{18}}$.

Записать функцию распределения $F(x)$, вычислить $P(3<X<8)$ и $P(|X-M(X)|<2)$.

5. Системы двух случайных величин

5.1 Система двух дискретных случайных величин $(X;Y)$ задана законом распределения:

Y X	-2	-1	0	2
1	0,02	0,04	0,08	0,06
3	0,05	0,1	0,16	0,12
5	0,06	0,06	0,16	0,09

1. Найти законы распределения составляющих и их числовые характеристики.
2. Вычислить коэффициент линейной корреляции между X и Y. Найти уравнение регрессии Y на X.

Вариант 7

	1. Случайные события. Вычисление вероятности событий
1.1	В среднем из 100 аккумуляторов, поступивших в продажу, 91 полностью заряжен. Найдите вероятность того, что купленный аккумулятор заряжен не полностью.
1.2	Среди 15 участников международной конференции английский язык знают 10. Найти вероятность того, что наудачу отобранные 3 участника конференции знают английский язык.
1.3	В устройстве содержится три независимо работающих блока, от которых зависит работа всего устройства. Вероятность безотказной работы первого блока – 0,8; второго – 0,75; третьего – 0,9. Найти вероятность работы устройства, если для этого достаточно безотказной работы двух блоков.
1.4	В первой коробке находится 20 деталей, из них 18 стандартных, во второй коробке – 10 деталей, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята одна деталь и переложена в первую. Найти вероятность того, что деталь, наудачу извлеченная после этого из первой коробки, будет стандартной.
	2. Повторные независимые испытания
2.1	Для нормальной работы вычислительного центра необходима безотказная работа в течение дня, как минимум, 5 компьютеров. Найти вероятность того, что при наличии 6 компьютеров центр будет работать нормально, если вероятность отказа для каждого компьютера в течение дня равна 0,05?
2.2	Вероятность брака при сборке прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что из 500 приборов небракованными окажутся от 410 до 430 (включительно).
	3. Дискретные случайные величины
3.1	Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	2	3	5	7
P	0,2	0,3	0,4	p_4

Найти:

1) p_4;

2) функцию распределения $F(x)$ и значение $F(5)$;

3) вероятность $P(3 < X \le 7)$.

<table>
<tr><td>3.2</td><td>Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:
<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>4</td><td>9</td><td>11</td></tr><tr><td>P</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr></table>
Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание $M\left(X\right)$, дисперсию $D\left(X\right)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma\left(X\right)$.</td></tr>
<tr><td></td><td>4. Непрерывные случайные величины</td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Непрерывная случайная величина задана функцией распределения F (x):
$$F(x) = F(x)=\begin{cases} 0\,,\ x\le 1; \\ \dfrac{x^2-x}{2},\ \ 1<x\le 2\,; \\ 1,\ x>2\,. \end{cases}$$
Найти:
1) плотность распределения вероятностей $f\,(x)$;
2) вероятность $P\left(0{,}5<X<1{,}5\right)$;
3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Случайная величина задана плотностью вероятности $f(x)$:
$$f\,(x)=\begin{cases} 0\,,\ x\le\ 2\,; \\ 2x-4,\ \ 2<x\le 3\,; \\ 0\,,\ \ x>3. \end{cases}$$
Найти:
1) функцию распределения $F(x)$;
2) вероятность $P\left(2{,}5<X<3\right)$;
3) математическое ожидание $M\,(X)$.</td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>Найдите математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины с плотностью распределения вероятностей $f\left(x\right)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-7)^2}{32}}$
Записать функцию распределения $F(x)$, вычислить $P\left(4<X<9\right)$ и $P\left(\left|X-M\left(X\right)\right|<3\right)$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>5. Системы двух случайных величин</td></tr>
<tr><td>5.1</td><td>Система двух дискретных случайных величин $(X;Y)$ задана законом распределения:
<table>
<tr><td>Y
X</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0,05</td><td>0,1</td><td>0,05</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,05</td><td>0,1</td><td>0,15</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,05</td><td>0,15</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr>
</table>
1. Найти законы распределения составляющих и их числовые характеристики.
2. Вычислить коэффициент линейной корреляции между X и Y. Найти уравнение регрессии Y на X.</td></tr>
</table>

Вариант 8

	1. Случайные события. Вычисление вероятности событий
1.1	В коробке с новогодними украшениями лежат 12 красных, 7 синих и 11 желтых шаров. Какова вероятность того, что взятый наугад шар окажется красным?
1.2	В классе 12 девочек и 18 мальчиков. Нужно выбрать двух дежурных. Какова вероятность (если считать выбор случайным), что выбраны 2 мальчика?
1.3	Вероятность того, что книга имеется в фондах первой библиотеки, равна 0,3, второй – 0,8 и третьей – 0,6. Определить вероятность наличия книги в фондах хотя бы одной библиотеки.
1.4	Объемы выполняемых тремя работниками заказов относятся как 5:4:1. Доля успешно выполненных заказов для каждого из них составляет соответственно 98 %, 95 % и 90 %. Найти вероятность успешного выполнения заказа.
	2. Повторные независимые испытания
2.1	В приборе 5 ламп. Вероятность выхода из строя каждой лампы в течение года равна 1/6. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить только одну лампу?
2.2	При штамповке металлических клемм получается в среднем 90 % годных. Найти вероятность того, что среди 900 клемм окажется от 790 до 820 (включительно) годных.

<table>
<tr><td></td><td>3. Дискретные случайные величины</td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Дан закон распределения дискретной случайной величины X:
<table>
<tr><td><i>X</i></td><td>–1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td><i>P</i></td><td>0,15</td><td>0,3</td><td>p_3</td><td>0,05</td></tr>
</table>
Найти:
1) p_3;
2) функцию распределения $F(x)$ и значение $F(1)$;
3) вероятность $P(0 \le X \le 4)$.</td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:
<table>
<tr><td><i>X</i></td><td>1</td><td>4</td><td>8</td><td>10</td></tr>
<tr><td><i>P</i></td><td>0,2</td><td>0,5</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr>
</table>
Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.</td></tr>
<tr><td></td><td>4. Непрерывные случайные величины</td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $F(x)$:
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 2; \\ (x-2)^2, & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$
Найти:
1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
2) вероятность $P(2{,}5 < X < 3{,}5)$;
3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Случайная величина задана плотностью вероятности $f(x)$:
$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{2x}{9}, & 0 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$
Найти:
1) функцию распределения $F(x)$;
2) вероятность $P(1 < X < 4)$;
3) математическое ожидание $M(X)$.</td></tr>
</table>

4.3 Найдите математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины с плотностью распределения вероятностей $f\left(x\right)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-8\right)^2}{72}}$.

Записать функцию распределения $F(x)$,

вычислить $P\left(5<X<10\right)$ и $P\left(\left|X-M\left(X\right)\right|<1{,}5\right)$.

5. Системы двух случайных величин

5.1 Система двух дискретных случайных величин $(X\,;Y)$ задана законом распределения:

Y X	5	10	15	20
4	0,07	0,05	0,1	0,03
5	0,12	0,14	0,15	0,06
6	0,06	0,12	0,05	0,05

1. Найти законы распределения составляющих и их числовые характеристики.
2. Вычислить коэффициент линейной корреляции между X и Y. Найти уравнение регрессии Y на X.

Вариант 9

1. Случайные события. Вычисление вероятности событий

1.1 В коробке лежит 25 красных, 28 зеленых и 27 желтых бусин.

Их поочередно нанизывают на нить в случайном порядке. Какова вероятность того, что первая бусина окажется зеленой?

1.2 Среди 35 электрических лампочек 4 нестандартные. Найти вероятность того, что 2 взятые одновременно электрические лампочки окажутся стандартными.

1.3 Специалист обрабатывает информацию с помощью двух вычислительных устройств, работающих независимо друг от друга. Каждое устройство имеет вероятность отказа, равную 0,2. Определить вероятность того, что при обработке информации откажет только одно устройство, а другое будет исправно.

1.4 В группе спортсменов 10 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму равна для лыжника 0,9, для велосипедиста – 0,7, для бегуна – 0,8. Найти вероятность того, что вызванный наудачу спортсмен выполнит норму.

2. Повторные независимые испытания

2.1 Вероятность выигрыша игрока на бирже в течение одного дня 0,25. Найти вероятность того, что в течение 8 дней он выиграет ровно 6 раз.

2.2 В здании имеется 2500 ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что вечером будет включено не менее 1250 и не более 1275 ламп.

3. Дискретные случайные величины

3.1 Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	2	3	5	7
P	p_1	0,45	0,3	0,15

Найти:

1) p_1;

2) функцию распределения $F(x)$ и значение $F(3)$;

3) вероятность $P(2 \le X < 5)$.

3.2 Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	3	4	6	8
P	0,3	0,4	0,1	0,2

Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

4. Непрерывные случайные величины

4.1 Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ (x-1)^3, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти:

1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;

2) вероятность $P(1{,}5 < X < 2)$;

3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

4.2 Случайная величина задана плотностью вероятности $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \frac{1}{8}x, & 0<x\le 4; \\ 0, & x>4. \end{cases}$$

Найти:
1) функцию распределения $F(x)$;
2) вероятность $P\left(2{,}5<X<3{,}5\right)$;
3) математическое ожидание $M(X)$.

4.3 Найдите математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины с плотностью распределения вероятностей $f\left(x\right)=\frac{1}{8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-11\right)^2}{128}}$.

Записать функцию распределения $F(x)$,
вычислить $P\left(9<X<15\right)$ и $P\left(\left|X-M\left(X\right)\right|<3\right)$.

5. Системы двух случайных величин

5.1 Система двух дискретных случайных величин $(X;Y)$ задана законом распределения:

Y X	21	26	31	36
3	0,05	0,04	0,11	0,05
7	0,06	0,2	0,07	0,12
10	0,03	0,1	0,12	0,05

1. Найти законы распределения составляющих и их числовые характеристики.
2. Вычислить коэффициент линейной корреляции между X и Y. Найти уравнение регрессии Y на X.

Вариант 10

<table>
<tr><th></th><th>1. Случайные события. Вычисление вероятности событий</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>На тарелке 20 пирожков одинаковой формы: 5 с мясом, 9 с капустой и 6 с вишней. Наугад берется один пирожок. Найти вероятность того, что он окажется с вишней.</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>На участке работают 16 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам отобраны наудачу 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.</td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Две фирмы независимо друг от друга взяли кредиты в банке.
Вероятность вернуть кредит в срок для первой фирмы равна 0,75, а для второй – 0,8. Найти вероятность того, что, хотя бы одна фирма вернет кредит в срок.</td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>Имеются три партии ламп, насчитывающих соответственно 40, 130 и 30 шт. Вероятности того, что лампа проработает заданное время для каждой партии соответственно равны 0,7; 0,8 и 0,4. Какова вероятность того, что наудачу выбранная лампа проработает заданное время?</td></tr>
<tr><td></td><td>2. Повторные независимые испытания</td></tr>
<tr><td>2.1</td><td>Вероятность покупки бракованного комплекта посуды равна 0,1. Найти вероятность того, что из 7 купленных комплектов только 5 будет без брака.</td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>В результате проверки качества приготовленного к посеву зерна было установлено, что 90 % зерен всхожи. Требуется определить вероятность того, что из 1000 высаженных зерен взойдут от 880 до 920 шт.</td></tr>
<tr><td></td><td>3. Дискретные случайные величины</td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Дан закон распределения дискретной случайной величины X:
<table>
<tr><td><i>X</i></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td><i>P</i></td><td>0,1</td><td>p_2</td><td>0,4</td><td>0,2</td></tr>
</table>
Найти:
1) p_2;
2) функцию распределения $F(x)$ и значение $F(0)$;
3) вероятность $P(0 \le X \le 2)$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>3.2</td><td>Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:
<table>
<tr><td>X</td><td>0</td><td>3</td><td>9</td><td>11</td></tr>
<tr><td>P</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,3</td></tr>
</table>
Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.</td></tr>
<tr><td></td><td>4. Непрерывные случайные величины</td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $F(x)$:
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \dfrac{(x+1)^2}{4}, & -1<x\le 1; \\ 1, & x>1. \end{cases}$$
Найти:
1) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
2) вероятность $P(0<X<2)$;
3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Случайная величина задана плотностью вероятности $f(x)$:
$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{6}, & 1<x\le 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$$
Найти:
1) функцию распределения $F(x)$;
2) вероятность $P(2<X<3)$;
3) математическое ожидание $M(X)$.</td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>Найдите математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины с плотностью распределения вероятностей $f(x)=\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{50}}$.
Записать функцию распределения $F(x)$,
вычислить $P(1<X<6)$ и $P(|X-M(X)|<2,5)$.</td></tr>
</table>

5. Системы двух случайных величин

5.1 Система двух дискретных случайных величин $(X\,;Y)$ задана законом распределения:

Y X	6	10	14	18
3	0,1	0,05	0,12	0,04
5	0,14	0,08	0,13	0,05
7	0,08	0,05	0,12	0,04

1. Найти законы распределения составляющих и их числовые характеристики.
2. Вычислить коэффициент линейной корреляции между X и Y. Найти уравнение регрессии Y на X.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$

x	**Сотые доли *x***									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	Значения функции $\varphi(x)$									
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	6765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0476	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	00363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290

Окончание таблицы

x	**Сотые доли x**									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	Значения функции $\varphi(x)$									
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0040
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
5,0	0,0000015									

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**
0,00	0,0000	0,37	0,1443	0,74	0,2703	1,11	0,3665	1,48	0,4306
0,01	0,0040	0,38	0,1480	0,75	0,2734	1,12	0,3686	1,49	0,4319
0,02	0,0080	0,39	0,1517	0,76	0,2764	1,13	0,3708	1,50	0,4332
0,03	0,0120	0,40	0,1554	0,77	0,2794	1,14	0,3729	1,51	0,4345
0,04	0,0160	0,41	0,1591	0,78	0,2823	1,15	0,3749	1,52	0,4357
0,05	0,0199	0,42	0,1628	0,79	0,2852	1,16	0,3770	1,53	0,4370
0,06	0,0239	0,43	0,1664	0,80	0,2881	1,17	0,3790	1,54	0,4382
0,07	0,0279	0,44	0,1700	0,81	0,2910	1,18	0,3810	1,55	0,4394
0,08	0,0319	0,45	0,1736	0,82	0,2939	1,19	0,3830	1,56	0,4406
0,09	0,0359	0,46	0,1772	0,83	0,2967	1,20	0,3849	1,57	0,4418
0,10	0,0398	0,47	0,1808	0,84	0,2995	1,21	0,3869	1,58	0,4429
0,11	0,0438	0,48	0,1844	0,85	0,3023	1,22	0,3883	1,59	0,4441
0,12	0,0478	0,49	0,1879	0,86	0,3051	1,23	0,3907	1,60	0,4452
0,13	0,0517	0,50	0,1915	0,87	0,3078	1,24	0,3925	1,61	0,4463
0,14	0,0557	0,51	0,1950	0,88	0,3106	1,25	0,3944	1,62	0,4474
0,15	0,0596	0,52	0,1985	0,89	0,3133	1,26	0,3962	1,63	0,4484
0,16	0,0636	0,53	0,2019	0,90	0,3159	1,27	0,3980	1,64	0,4495
0,17	0,0675	0,54	0,2054	0,91	0,3186	1,28	0,3997	1,65	0,4505
0,18	0,0714	0,55	0,2088	0,92	0,3212	1,29	0,4015	1,66	0,4515
0,19	0,0753	0,56	0,2123	0,93	0,3238	1,30	0,4032	1,67	0,4525
0,20	0,0793	0,57	0,2157	0,94	0,3264	1,31	0,4049	1,68	0,4535
0,21	0,0832	0,58	0,2190	0,95	0,3289	1,32	0,4066	1,69	0,4545
0,22	0,0871	0,59	0,2224	0,96	0,3315	1,33	0,4082	1,70	0,4554
0,23	0,0910	0,60	0,2257	0,97	0,3340	1,34	0,4099	1,71	0,4564
0,24	0,0948	0,61	0,2291	0,98	0,3365	1,35	0,4115	1,72	0,4573
0,25	0,0987	0,62	0,2324	0,99	0,3389	1,36	0,4131	1,73	0,4582
0,26	0,1026	0,63	0,2357	1,00	0,3413	1,37	0,4147	1,74	0,4591
0,27	0,1064	0,64	0,2389	1,01	0,3438	1,38	0,4162	1,75	0,4599
0,28	0,1103	0,65	0,2422	1,02	0,3461	1,39	0,4177	1,76	0,4608
0,29	0,1141	0,66	0,2454	1,03	0,3485	1,40	0,4192	1,77	0,4616
0,30	0,1179	0,67	0,2486	1,04	0,3508	1,41	0,4207	1,78	0,4625
0,31	0,1217	0,68	0,2517	1,05	0,3531	1,42	0,4222	1,79	0,4633
0,32	0,1255	0,69	0,2549	1,06	0,3554	1,43	0,4236	1,80	0,4641
0,33	0,1293	0,70	0,2580	1,07	0,3577	1,44	0,4251	1,81	0,4649
0,34	0,1331	0,71	0,2611	1,08	0,3599	1,45	0,4265	1,82	0,4656
0,35	0,1368	0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,46	0,4279	1,83	0,4664
0,36	0,1406	0,73	0,2673	1,10	0,3643	1,47	0,4292	1,84	0,4671

Окончание таблицы

X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)
1,85	0,4678	2,00	0,4772	2,30	0,4893	2,60	0,4953	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,02	0,4783	2,32	0,4898	2,62	0,4956	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,04	0,4793	2,34	0,4904	2,64	0,4959	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,06	0,4803	2,36	0,4909	2,66	0,4961	2,96	0,4985
1,89	0,4708	2,08	0,4812	2,38	0,4913	2,68	0,4963	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,10	0,4821	2,4	0,4918	2,70	0,4965	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,12	0,4830	2,42	0,4922	2,72	0,4967	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,14	04838	2,44	0,4927	2,74	0,4969	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,16	0,4846	2,46	0,4931	2,76	0,4971	3,60	0,49984
1,94	0,4738	2,18	0,4854	2,48	0,4934	2,78	0,4973	3,80	0,49992
1,95	0,4744	2,20	0,4861	2,50	0,4938	2,80	0,4974	4,00	0,49996
1,96	0,4750	2,22	0,4868	2,52	0,4941	2,82	0,4976	4,50	0,49999
1,97	0,4756	2,24	0,4875	2,54	0,4945	2,84	0,4977	5,00	0,49999
1,98	0,4761	2,26	0,4881	2,56	0,4948	2,86	0,4979		
1,99	0,4767	2,28	0,4887	2,58	0,4951	2,88	0,4980		

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Математика. Теория вероятностей : учебное пособие / А. Ю. Вдовин, И. Н. Демидова, Л. А. Золкина [и др.]. – Екатеринбург : УГЛТУ, 2023. –105 с. – ISBN 978-5-94984-872-2.
2. Высшая математика. Стандартные задачи с основами теории: учебное пособие для вузов / А. Ю. Вдовин, Л. В. Михалева, В. М. Мухина [и др.]. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 188 с. – ISBN 978-5-8114-9437-8.
3. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей : учебное пособие для студ. втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., испр. – Москва : Издательский центр «Академия», 2003. – 448 с. – ISBN 5-7695-1054-4.
4. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2023. – 406 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-08389-7.

Учебное издание

***Вдовин** Андрей Юрьевич, **Рублева** Светлана Сергеевна,*
***Демидова** Ирина Николаевна, **Золкина** Людмила Александровна,*
***Мухина** Валерия Михайловна, **Удинцева** Светлана Николаевна,*
***Федоровских** Елена Сергеевна*

ВЫПОЛНЕНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ISBN 978-5-94984-915-6

9 785949 849156

Редактор Р. В. Сайгина
Оператор компьютерной верстки О. А. Казанцева

Подписано в печать 18.06.2024. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать.
Уч.-изд. л. 2,64. Усл. печ. л. 4,42.
Тираж 300 экз. (1-й завод 26 экз.).
Заказ № 7885

ФГБОУ ВО «Уральский государственный лесотехнический университет».
620100, Екатеринбург, Сибирский тракт, 37.
Редакционно-издательский отдел. Тел.: 8 (343) 221-21-44.

Типография ООО «ИЗДАТЕЛЬСТВО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР УПИ».
620062, РФ, Свердловская область, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2.
Тел.: 8 (343) 362-91-16.