ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Уральский государственный лесотехнический университет

Кафедра физики

Л.Е. Исакова
О.Н. Макарычева
А.Н. Петров
Н.А. Скорикова

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО МЕХАНИКЕ И МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

Екатеринбург
2007

Утверждено на заседании кафедры физики УГЛТУ 6.09.2006 г.
Одобрено на заседании МК ЛМФ
Протокол № 1 от 28.09. 2006 г.

Рецензент – доктор физ-мат. наук, профессор Кащенко М.П.

Редактор Сайгина Р.В.
Оператор Мустафина Э.Р.

Подписано в печать	29.06.07	Поз. 34
Плоская печать	Формат 60x84 1/16	Тираж 300 экз.
Заказ № 271	Печ. л. 0,93	Цена 2 р. 60 к.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Краткая теория метода и описание установки

Моментом инерции материальной точки относительно оси вращения называется физическая величина, численно равная произведению массы точки на квадрат ее расстояния от оси вращения.

$$J = m\,r^2. \tag{1}$$

Твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, расстояние между которыми неизменно.

В случае вращения тела вокруг любой неподвижной оси ОО тело разбивается на большое число весьма малых элементов с массами Δm_i (рис.1).

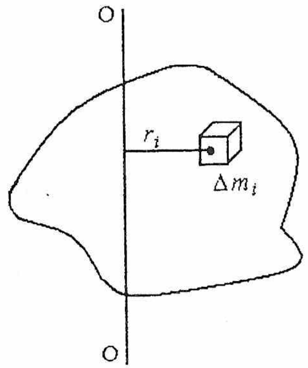

Рис. 1

Величина, численно равная сумме моментов инерции отдельных элементов, называется моментом инерции твердого тела относительно данной оси.

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2, \tag{2}$$

где r_i – расстояние i-того элемента до оси вращения, n – число всех элементов, составляющих данное тело.

Вращательное движение характеризуется угловой скоростью ω и угловым ускорением ε, которые определяются по формулам:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \tag{3}$$

где φ - угловое перемещение тела.

Законы вращательного движения φ (t) и ω (t) аналогичны законам S (t) и υ (t) для поступательного движения. Например, φ = ω t – закон равномерного вращения, $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$, и $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ - законы равноускоренного движения с начальной угловой скоростью.

Связь между линейной и угловой скоростями, линейным и угловым ускорением следующая:

$$\upsilon = \omega\, r, \tag{4}$$

$$a = \varepsilon\, r, \tag{5}$$

где r – расстояние точек до оси вращения.

Основной закон динамики вращательного движения выражается формулой

$$\varepsilon = \frac{M}{J}, \qquad (6)$$

где ε - угловое ускорение, J – момент инерции тела относительно данной оси, M – суммарный момент действующих на тело сил.[1]

Кинетическая энергия вращающегося тела определяется по формуле:

$$E_k^{вр} = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (7)$$

где ω - угловая скорость вращения, J – момент инерции тела.
Сопоставляя формулы для вращательного движения (6) и (7) с соответствующими закономерностями для поступательного движения (второй закон Ньютона, кинетическая энергия поступательного движения) можно сделать вывод, что момент инерции тела J во вращательном движении выполняет ту же роль, что и масса тела в поступательном движении.

Таким образом, если масса служит мерой инертности тела в поступательном движении, то во вращательном движении мерой инертности является момент инерции тела J.

Для тел правильной геометрической формы момент инерции может быть рассчитан теоретически. Для тел произвольной сложной формы момент инерции определяется опытным путем. Одним из возможных способов определения момента инерции является динамический метод.

Схема установки для определения момента инерции динамическим методом изображена на рис.2.

[1] Моментом силы относительно неподвижной оси называется величина, численно равная произведению величины силы на ее плечо, т.е. расстояние от оси вращения до прямой, вдоль которой действует сила.

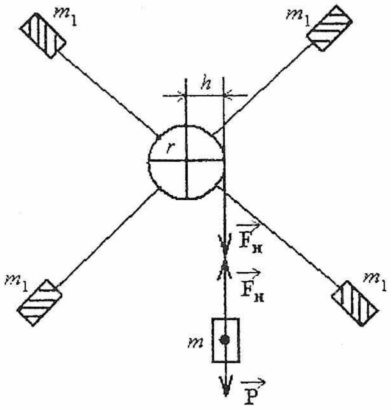

Рис.2

Прибор состоит из шкива h радиусом r, закрепленного на оси О, четырех стержней, расположенных под углом 90^0 друг к другу, и четырех одинаковых грузов m_1, которые можно перемещать вдоль стержней и закреплять на определенном расстоянии от оси. Грузы закрепляются симметрично, т.е. так, чтобы центр тяжести системы совпал с осью вращения. Прибор приводится во вращательное движение при падении груза массой m, прикрепленного к концу шнура, который намотан на шкив h (см. рис.2).

На движущийся поступательно вниз груз m будут действовать две силы: $\vec{P}$ - сила тяжести, $\vec{F}_н$ - сила натяжения шнура (см. рис.2).

Под действием сил груз m будет двигаться вниз равноускоренно (с линейным ускорением a).

На шкив со стержнем и закрепленными на них грузами действует сила натяжения нити $\vec{F}_н$ (рис.2), создающая вращающий момент $\vec{M} = \vec{F}_н \vec{r}$. Под действием этого постоянного момента силы система «шкив с крестовиной», согласно (6), будет вращаться равноускоренно (с постоянным ускорением ε).

Груз m, поднятый над полом на высоту h, обладает запасом потенциальной энергии $E_п = mgh$. Если груз m начинает опускаться, то потенциальная энергия будет переходить в кинетическую энергию вращающейся крестовины с грузами $E_к^{вр} = \frac{J\omega^2}{2}$ и кинетическую энергию поступательно движущегося тела m: $E_к^{пост} = \frac{m^2\upsilon}{2}$.

Пренебрегая силами трения и сопротивления в системе, на основании закона сохранения механической энергии можно записать

$$mgh = \frac{m^2 \upsilon}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (8)$$

Так как шнур намотан на вал, то линейная скорость точек на поверхности вала равна скорости поступательного движения груза m, т.е.

$$\upsilon = \omega r. \qquad (9)$$

Груз m движется вниз равноускоренно без начальной скорости, следовательно, для его движения справедливы следующие законы

$$h = \frac{at^2}{2}; \qquad (10)$$

$$\upsilon = at. \qquad (11)$$

С помощью формул (9), (10), (11) уравнение (8) можно преобразовать относительно момента инерции J к виду:

$$J = \frac{mr^2(gt^2 - 2h)}{2h}. \qquad (12)$$

Принимая во внимание, что $r = D/2$, где D – диаметр вала, на который намотан шнур, формула (12) принимает вид:

$$J = \frac{mD^2(gt^2 - 2h)}{8h}. \qquad (13)$$

ХОД РАБОТЫ

Приборы и принадлежности: лабораторная установка для определения момента инерции динамическим методом, масштабная линейка, секундомер, штангенциркуль.

1. С помощью штангенциркуля измерить диаметр вала, к которому прикреплен шнур с грузом. Измерения следует проводить в различных участках вала.
2. Вращая вал с крестовиной, поднять груз на высоту h и измерить с помощью масштабной линейки высоту поднятия груза над уровнем пола (отсчитывается расстояние от пола до нижнего основания груза).
3. Предоставить грузу возможность падать, по секундомеру определить промежуток времени, в течение которого груз опускается до пола.
4. Результаты измерений и расчетов занести в таблицу:

№ опыта	m	Δm	h	Δh	D	ΔD	t	Δt	J	ΔJ

5. Определить момент инерции по формуле (13), подставляя средние значения всех измеряемых величин в системе СИ.
6. Исходя из расчетной формулы (13), вывести формулу для подсчета относительной ошибки $\frac{\Delta J}{J}$.
7. Подсчитать численные значения относительной и абсолютной погрешностей и записать окончательный результат в виде:

$$J_{ист} = J_{ср} \pm \Delta J_{ср}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая величина называется моментом инерции материальной точки? Твердого тела? От чего зависит момент инерции тела?
2. Какой физический закон лежит в основе вывода расчетной формулы? Определить границы его применимости.
3. Определить вид движения и записать законы движения падающего груза.
4. Определить вид движения и записать законы движения для вращающейся части системы.
5. Какая существует связь между линейными и угловыми характеристиками при вращательном движении?

ЛИТЕРАТУРА

1. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Курс общей физики. т. I – М., 1975.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. т. I – М., 1982.
3. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. т. I – М., 1965.
4. Кортнев А.В., Рублев Ю.В., Куценко А.Н. Практикум по физике (теория погрешностей стр. 15-30).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 15

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИВЕДЕННОЙ ДЛИНЫ И МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Кинематика гармонических колебаний

Колебательным движением называется всякое движение или изменение состояния, характеризуемое той или иной степенью повторяемости во времени значений физической величины, определяющей это движение или состояние.

Колебательное движение называется периодическим, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. Простейшим видом периодических колебаний являются гармонические колебания.

Колебания какой-либо величины называются гармоническими, если ее зависимость от времени t имеет вид:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (1)$$

или

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (2)$$

причем A, ω с течением времени не изменяются.

x – смещение колеблющейся величины или материальной точки от положения равновесия;

A – амплитуда колебаний – наибольшее смещение;

$\omega t + \varphi_0$ – фаза колебаний – физическая величина, определяющая смещение колеблющейся точки в данный момент времени;

φ_0 – начальная фаза колебаний, т.е. при $t = 0$ фаза колебаний равна φ_0;

ω - круговая или циклическая частота колеблющейся точки.

Если фаза колебания увеличивается или уменьшается на 2, то x примет прежнее значение, т.е., если

$x_1 = A\sin(\omega t_1 + \varphi_0)$ и $x_2 = A\sin(\omega t_2 + \varphi_0)$, $x_1 = x_2$,

или $A\sin(\omega t_1 + \varphi_0) = A\sin(\omega t_2 + \varphi_0)$,

тогда $\omega t_2 + \varphi_0 - (\omega t_1 + \varphi_0) = 2\pi$

Отсюда $\omega(t_2 - t_1) = 2\pi$; $t_2 - t_1$ – наименьшее время, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание. Это время названо периодом колебаний T. За время T совершается одно полное колебание.

Следовательно, $\omega T = 2\pi$,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad (3)$$

но

$$\frac{1}{T} = \nu, \qquad (4)$$

где ν - частота колебаний – число полных колебаний, совершаемых за единицу времени.

Сравнивая формулы (3) и (4), получим $\omega = 2\pi\nu$.

Таким образом, циклическая частота численно равна числу колебаний, совершаемых за 2π секунд.

При гармонических колебаниях гармонически колеблется не только смещение x, но и скорость, и ускорение. Учитывая, что $\upsilon = \frac{dx}{dt}$, а $a = \frac{d\upsilon}{dt}$, продифференцировав x, получим выражение для υ

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (5)$$

и, продифференцировав υ, получим выражение для a:

$$a = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x, \qquad (6)$$

где $A\omega$ - амплитуда скорости; $A\omega^2$ – амплитуда ускорения.

Динамика гармонических колебаний

По второму закону Ньютона сила, вызывающая гармонические колебания, равна

$$F = ma. \qquad (7)$$

Сравнивая формулы (6) и (7), получим

$$F = -m\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x. \qquad (8)$$

Сила, действующая на колеблющуюся точку, прямо пропорциональна смещению и всегда направлена к положению равновесия, поэтому ее часто называют возвращающей силой.

Примером сил, удовлетворяющих уравнению (8), являются упругие силы. Силы, имеющие иную природу, чем упругие силы, но также удовлетворяющие условию (8), называются квазиупругими:

$$F_1 = -kx, \qquad (9)$$

где $k = m\omega^2$ – коэффициент квазиупругой силы.

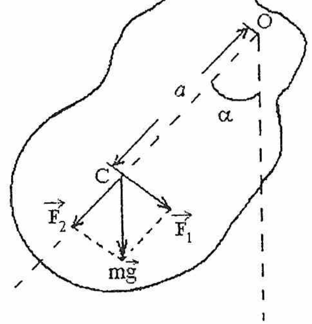

Рис. 1

Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси O, не проходящей через ее центр тяжести. На рис.1 изображено сечение физического маятника плоскостью, перпендикулярной к его оси вращения O и проходящей через его центр масс C. Расстояние OC

равно a. На рис.1 $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ - составляющие силы тяжести $m\bar{g}$. $\bar{F}_1$ - возвращающая сила. При малых α $F_1 = -mg\sin\alpha = -mg\alpha$.
Знак минус указывает, что сила направлена против направления смещения. Величина возвращающей силы в данном примере является частным случаем квазиупругой силы $F_1 = -kx$.

При малых углах отклонения колебания физического маятника являются гармоническими. Возвращающий момент, создаваемый силой $\bar{F}_1$, равен:

$$M = -mga\alpha.$$

Основное уравнение динамики для маятника запишется следующим образом:

$$M = J\varepsilon,\ M = J\frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

где J – момент инерции маятника; ε - угловое ускорение.

$$-mga\alpha = J\frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

или

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mga\alpha = 0.$$

Решениями этого дифференциального уравнения являются

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0),\ \omega = \sqrt{\frac{mga}{J}},\ \text{но}\quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

отсюда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}.$$

Период малых колебаний физического маятника можно определить по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}.$$

Математический маятник

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити. На рис.2 видим, что возвращающая сила $\bar{F}_1$ является одной из составляющих силы тяжести и равна $F_1 = -mg\sin\alpha = -mg\sin\frac{x}{l}$, при малых α $F_1 = -mg\frac{x}{l}$, т.е. вновь видим, что $\bar{F}_1$ - квазиупругая сила, т.е. при малых углах отклонения колебания математического маятника являются гармоническими.

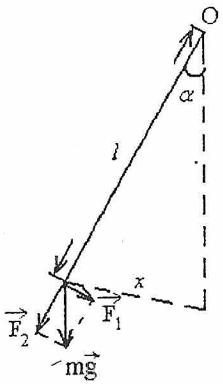

Рис. 2

По второму закону Ньютона $F_1 = ma$, но $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, тогда

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + mg\frac{x}{l} = 0.$$

Решениями этого дифференциального уравнения являются $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, период колебаний математического маятника будет равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (11)$$

Формулу (11) можно получить из формулы (10), если рассматривать математический маятник как частный случай физического, у которого вся масса сосредоточена в центре масс С на расстоянии a от подвеса, равном длине l нити математического маятника. Тогда $J = m\,l^2$, из формулы (10) следует формула (11).

Приведенной длиной физического маятника называется длина такого математического маятника, который колеблется синхронно с физическим, т.е. имеет равный с ним период колебаний.

Сравнивая формулы (10) и (11), получим

$$l = \frac{J}{ma} = L,$$

где a - приведенная длина физического маятника.

Тогда для физического маятника можно записать

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Если физический маятник совершит N колебаний за τ секунд, а математический маятник – n колебаний за t секунд, тогда получим

$$\frac{\tau}{N} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (12)$$

$$\frac{t}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (13)$$

Решая совместно уравнения (12) и (13), получим

$$L = \frac{n^2 r^2}{N^2 t^2} l \qquad (14)$$

Если $n = N$, $\tau = t$, то и $L = l$.

ХОД РАБОТЫ

1. Измерить длину математического маятника l.
2. Измерить время 20 полных колебаний t математического маятника – (3 раза).
3. Измерить время 20 полных колебаний τ физического маятника – (3 раза).
4. Подсчитать приведенную длину физического маятника по формуле (14)

$$L = \frac{n^2 \tau_{cp}^2}{N^2 t_{cp}^2} l .$$

5. Вычислить погрешности ΔL и $\sum L = \frac{\Delta L}{L}$.
6. Определить положение центра тяжести физического маятника. Для этого подвесить маятник поочередно в двух точках подвеса. Провести через точки подвеса вертикальные линии. Точка пересечения этих линий и есть центр тяжести тела. Измерить расстояние от точки подвеса физического маятника до центра тяжести.
7. Вычислить момент инерции физического маятника по формуле

$$J = m a_{cp} L_{cp}$$

8. Вычислить погрешности ΔJ и $\sum J = \frac{\Delta J}{J}$.
9. Написать ответы: $L_{cp} \pm \Delta L_{cp}$, $J_{cp} \pm \Delta J_{cp}$.

Таблица 1

l	Δl	n	t	Δt	N	τ	$\Delta\tau$	L

Таблица 2

m	Δm	a	Δa	J

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется гармоническим колебанием?
2. Какой маятник называется физическим? Математическим?
3. Что называется приведенной длиной физического маятника?
4. Как определяется период колебаний физического и математического маятников?
5. Что такое циклическая частота колебаний? Как она связана с периодом и частотой?
6. Как рассчитать скорость и ускорение гармонически колеблющейся точки?
7. Как рассчитать кинетическую, потенциальную энергию гармонически колеблющейся точки?

ЛИТЕРАТУРА

1. Яворский Б.М. Курс общей физики [Текст] / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М., 1975. т. I.
2. Савельев И.В. Курс общей физики [Текст] / И.В. Савельев. – М., 1982. т. I.
3. Зисман Г.А. Курс общей физики [Текст] / Г.А. Зисман, О.М. Тодес. – М., 1965. т. I.