ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУ ВПО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра менеджмента и внешнеэкономической деятельности предприятия

И.В. Щепеткина

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и
контрольные задания
для студентов очной и заочной форм обучения
специальности 080507 – Менеджмент организации
Часть I

Екатеринбург
2010

Печатается по рекомендации методической комиссии ФЭУ.
Протокол № 1 от 01 сентября 2009 г.

Рецензент канд. техн. наук, доц. кафедры менеджмента и внешнеэкономической деятельности предприятия Е.Н. Щепеткин

Редактор Е.Л. Михайлова
Компьютерная верстка Г.И. Романовой

Подписано в печать 16.11.10		Поз. 36
Плоская печать	Формат 60х84 1/16	Тираж 100 экз.
Заказ №	Печ. л. 2,09	Цена 11 руб. 00 коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

ВВЕДЕНИЕ

В подготовке экономистов, финансистов, коммерсантов, менеджеров и маркетологов большое внимание уделяется изучению теории и практики финансово-экономических расчетов, необходимых в анализе инвестиционных проектов, расчете кредитных и коммерческих операций, эффективности предпринимательской деятельности, в страховом деле. Такая учебная дисциплина, охватывающая определенный круг методов вычислений, получила название финансовой математики**.**

Знания, полученные студентами при изучении данного курса, будут востребованы в дальнейшем при изучении таких дисциплин, как «Финансовый менеджмент», «Финансы и кредит», «Анализ хозяйственной и финансовой деятельности предприятия» и др.

Выполнение практических заданий должно закрепить полученные теоретические знания и показать, насколько правильно студент может применить их при решении конкретных задач.

Контрольная работа выполняется студентами по вариантам, которые выбираются по последней цифре учебного шифра.

Перед решением задачи необходимо рассмотреть теоретические вопросы по теме, изучить основные термины и формулы, по которым будут вестись расчеты. После каждого расчета проанализировать полученные результаты и сделать выводы. Студенты, выполнившие контрольную работу и получившие по ней зачет, допускаются к сдаче зачета по финансовой математике.

ОСНОВНЫЕ КАТЕГОРИИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Проценты в финансовых расчетах представляют собой *абсолютную* величину дохода (приращение денег) от предоставления денег в долг в любой его форме: выдача денежной ссуды; продажа в кредит; сдача в аренду; депозитный счет; учет векселя; покупка облигаций и т.п.

Относительный показатель, характеризующий интенсивность начисления процентов за единицу времени, называется ***процентной ставкой***. Этот показатель выражается либо в долях единицы, либо в процентах. Таким образом, *процентная ставка показывает*, сколько денежных единиц должен заплатить заемщик за пользование в течение определенного периода времени 100 единицами первоначальной суммы долга.

Начисление процентов, как правило, производится дискретно, т.е. за фиксированные одинаковые интервалы времени, которые носят название ***«период начисления»***, – это отрезок времени между двумя следующими друг за другом процедурами взимания процентов.

Период времени от начала финансовой операции до ее окончании называется ***сроком*** финансовой операции.

Для рассмотрения формул, используемых в финансовой математике, необходимо ввести ряд условных обозначений:

$\boldsymbol{i}$ – процентная ставка, характеризующая интенсивность начисления процентов за год, или эффективная ставка, измеряющая реальный относительный доход за год;

$\boldsymbol{j}$ – номинальная годовая ставка процентов, используемая в условиях финансовой операции, с указанием периода начисления процентов;

$\boldsymbol{I}$ – проценты, процентные деньги, т.е. абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой его форме;

$\boldsymbol{PV}$ – первоначальная сумма долга, или современная (текущая) стоимость;

$\boldsymbol{FV}$ – наращенная сумма, или будущая стоимость;

$\boldsymbol{n}$ – срок финансовой операции в годах;

$\boldsymbol{M}$ – срок финансовой операции, выраженный в месяцах;

$\boldsymbol{t}$ – срок финансовой операции, выраженный в днях;

$\boldsymbol{T}$ – временная база, т.е. число дней в году;

$\boldsymbol{m}$ – количество раз начисления процентов в течение года;

$\boldsymbol{R}$ – член ренты, т.е. величина отдельного платежа;

$\boldsymbol{FVA}$ – наращенная величина аннуитета;

$\boldsymbol{PVA}$ – современная величина аннуитета;

$\boldsymbol{J_\tau}$ – индекс инфляции;

$\boldsymbol{\tau}$ – уровень инфляции;

$\boldsymbol{FV_\tau}$ – реальная наращенная сумма, т.е. будущая величина с учетом инфляции;

$\boldsymbol{I_\tau}$ – реальные проценты, т.е. с учетом инфляции;

$\boldsymbol{i_\tau}$ – процентная ставка с поправкой на инфляцию.

Увеличение суммы долга в связи с присоединением к ней процентных денег называется ***наращением***, а *увеличенная сумма* – ***наращенной суммой***. Отсюда можно выделить еще один относительный показатель, который называется ***коэффициентом наращения,*** или ***множителем наращения***, – это отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга. *Коэффициент наращения показывает*, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы долга, т.е., по существу, является базисным темпом роста.

Существуют различные способы начисления процентов и соответствующие им виды процентных ставок.

Простая процентная ставка применяется к одной и той же первоначальной сумме долга на протяжении всего срока ссуды, т.е. исходная база (денежная сумма) всегда одна и та же.

Сложная процентная ставка применяется к наращенной сумме долга, т.е. к сумме, увеличенной на величину начисленных за предыдущий период процентов, – таким образом, исходная база постоянно увеличивается.

Номинальная ставка – годовая ставка процентов, исходя из которой определяется величина ставки процентов в каждом периоде начисления, при начислении сложных процентов несколько раз в год.

Фиксированная процентная ставка – ставка, зафиксированная в виде определенного числа в финансовых контрактах.

Постоянная процентная ставка – неизменная на протяжении всего периода ссуды.

Переменная процентная ставка – дискретно изменяющаяся во времени, но имеющая конкретную числовую характеристику.

Плавающая процентная ставка – привязанная к определенной величине, изменяющейся во времени, включая надбавку к ней (маржу), которая определяется целым рядом условий (сроком операции и т.п.).

Присоединение начисленных процентов к сумме долга, которая служит базой для их начисления, называется ***капитализацией*** процентов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. ОПЕРАЦИИ НАРАЩЕНИЯ

Начисление простых процентов

Ссудозаемные операции, составляющие основу коммерческих вычислений, имеют давнюю историю. Именно в этих операциях и проявляется необходимость учета временной ценности денег. Несмотря на то, что в основе расчетов при анализе эффективности ссудозаемных операций заложены простейшие, на первый взгляд, схемы начисления процентов, эти расчеты многообразны ввиду вариабельности условий финансовых контрактов в отношении частоты и способов начисления, а также вариантов предоставления и погашения ссуд.

Предоставление денег в долг во временное пользование может осуществляться различными способами: в виде денежной ссуды, сберегательного счета, открытия депозита, покупки облигаций и векселей и т.д. На занятые деньги должнику начисляются проценты. На практике начисление процентов всегда производится в дискретные моменты времени.

Рассмотрим процесс наращения, т.е. определения денежной суммы в будущем, исходя из заданной суммы сейчас. Экономический смысл операции наращения состоит в определении величины той суммы, которой будет или желает располагать инвестор по окончании этой операции. Здесь идет движение денежного потока от настоящего к будущему.

Величина ***FV*** показывает будущую стоимость «сегодняшней» величины ***PV*** при заданном уровне интенсивности начисления процентов i (рис. 1).

НАРАЩЕНИЕ [i]

НАСТОЯЩЕЕ [PV] ⟶ **БУДУЩЕЕ [FV]**

(исходная сумма) (возвращаемая сумма)

Рис. 1. Логика финансовой операции наращения

Простые ставки процентов применяются обычно в краткосрочных финансовых операциях, когда интервал начисления совпадает с периодом начисления (срок менее года) или когда после каждого интервала начисления кредитору выплачиваются проценты. При использовании простых ставок проценты (процентные деньги) определяются, исходя из первоначальной суммы долга. Схема простых процентов предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление процентов.

Сущность простых процентов в том, что они начисляются на одну и ту же величину капитала в течение всего срока ссуды.

$$I = FV - PV,$$

$$FV = PV\,(1 + n\,i\,),$$

Данная формула называется **«*формулой простых процентов*».**

В тех случаях, когда срок ссуды менее года, происходит модификация формулы**:**

а) **если *срок ссуды выражен в месяцах* (*M*),** то величина ***n*** выражается в виде дроби:

$$n = M / 12,$$

тогда все формулы можно представить в виде:

$$FV = PV\,(1 + M / 12\ i),$$

б) **если *время выражено в днях* (*t*),** то величина ***n*** выражается в виде следующей дроби:

$$n = t / T.$$

Отсюда модифицированные формулы имеют следующий вид:

$$FV = PV\,(1 + t / T\,i\,),$$

$$I = PV\,t / T\,i,$$

Здесь возможны следующие варианты расчета.

1. ***Временную базу*** (***T***) можно представить по-разному:

- условно состоящую из 360 дней. В этом случае речь идет об ***обыкновенном*** или ***коммерческом проценте*;**

- состоящую из действительного числа дней в году (365 или 366 дней). В этом случае получают ***точный процент***.

\-

2. ***Число дней ссуды*** (***t***) также можно определять по-разному:

- условно, исходя из того, что продолжительность любого целого месяца составляет 30 дней, а оставшиеся дни от месяца считают точно, в результате получают так называемое ***приближенное число дней ссуды*;**

- используя прямой счет или специальные таблицы порядковых номеров дней года, рассчитывают фактическое число дней между датами, в этом случае получают ***точное число дней ссуды***.

Таким образом, если время финансовой операции выражено в днях, то расчет простых процентов может быть произведен одним из трех возможных способов.

1. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды, или, как часто называют, «***германская практика расчета***», когда продолжительность года условно принимается за 360 дней, а целого месяца – за 30 дней. Этот способ обычно используется в Германии, Дании, Швеции.

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды, или «***французская практика расчета***», когда продолжительность года условно принимается за 360 дней, а продолжительность ссуды рассчитывается точно по календарю. Этот способ имеет распространение во Франции, Бельгии, Испании, Швейцарии.

3. Точные проценты с точным числом дней ссуды, или «***английская практика расчета***», когда продолжительность года и продолжительность ссуды берутся точно по календарю. Этот способ применяется в Португалии, Англии, США.

Для упрощения процедуры расчета точного числа дней финансовой операции пользуются специальными таблицами порядковых номеров дней года **(**прил. 1**)**, в которых все дни в году последовательно пронумерованы. Точное количество дней получается путем вычитания номера первого дня финансовой операции из номера последнего дня финансовой операции.

1.2. НАЧИСЛЕНИЕ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

1.2.1. Формула сложных процентов

В финансовой практике значительная часть расчетов ведется с использованием схемы сложных процентов.

Применение схемы сложных процентов целесообразно в тех случаях, когда:

- проценты не выплачиваются по мере их начисления, а присоединяются к первоначальной сумме долга;
- срок ссуды более года.

Если процентные деньги не выплачиваются сразу по мере их начисления, а присоединяются к первоначальной сумме долга, то долг таким образом увеличивается на невыплаченную сумму процентов, и последующее начисление процентов происходит на увеличенную сумму долга:

$$FV = PV + I = PV + PV\,i = PV\,(1 + i),$$

– за один период начисления;

$$FV = (PV + I)\,(1 + i) = PV\,(1 + i)\,(1 + i) = PV\,(1 + i)^2$$

– за два периода начисления.

Отсюда за ***n*** периодов начисления формула примет вид:

$$FV = PV\,(1 + i)^n = PV\,k_н.$$

Эта формула называется ***формулой сложных процентов.***

Как было выше указано, различие начисления простых и сложных процентов − в базе их начисления. Если простые проценты начисляются все время на одну и ту же первоначальную сумму долга, т.е. база начисления является постоянной величиной, то сложные проценты начисляются на увеличивающуюся с каждым периодом начисления базу.

Согласно общей теории статистики для получения базисного темпа роста необходимо перемножить цепные темпы роста.

Поскольку ставка процента за период является цепным темпом прироста, то цепной темп роста равен:

$$(1 + i).$$

Тогда базисный темп роста за весь период, исходя из постоянного темпа прироста, имеет вид:

$$(1 + i)^n.$$

Базисные темпы роста, или коэффициенты (множители) наращения, зависящие от процентной ставки и числа периодов наращения, табулированы и представлены в прил. 2. Экономический смысл множителя наращения состоит в том, что он показывает, чему будет равна одна денежная единица (один рубль, один доллар и т.п.) через ***n*** периодов при заданной процентной ставке ***i***.

Графическая иллюстрация соотношения наращенной суммы по простым и сложным процентам представлена на рис. 2.

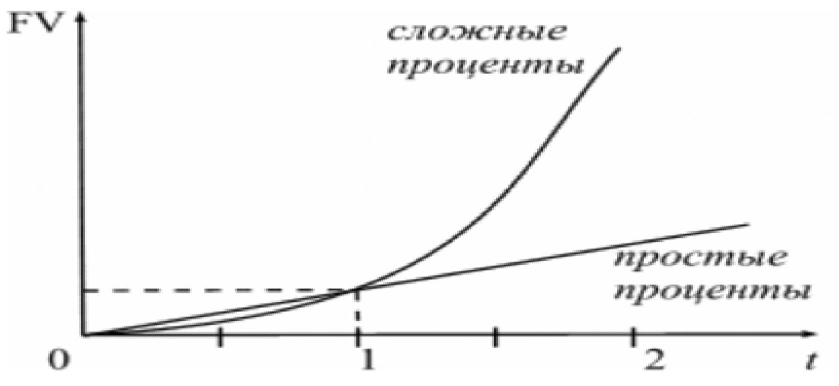

Рис. 2. Наращение по простым и сложным процентам

Как видно из рис. 2, при краткосрочных ссудах начисление по простым процентам предпочтительнее, чем по сложным процентам; при сроке в один год разница отсутствует, но при среднесрочных и долгосрочных ссудах наращенная сумма, рассчитанная по сложным процентам, значительно выше, чем по простым.

При любом $\boldsymbol{i}$,

если $0 < n < 1$, то $(1 + ni) > (1 + i)^n$,

если $n > 1$, то $(1 + ni) < (1 + i)^n$,

если $n = 1$, то $(1 + ni) = (1 + i)^n$.

Таким образом, для лиц, предоставляющих кредит:

- более выгодна схема простых процентов, если срок ссуды менее года (проценты начисляются однократно в конце года);
- более выгодной является схема сложных процентов, если срок ссуды превышает один год;
- обе схемы дают одинаковый результат при продолжительности периода один год и однократном начислении процентов.

Достаточно часто финансовые контракты заключаются на период, отличающийся от целого числа лет.

В случае, когда срок финансовой операции выражен дробным числом лет, начисление процентов возможно с использованием двух методов:

общий метод заключается в прямом расчете по формуле сложных процентов:

$$FV = PV\,(1 + i)^n,$$
$$n = a + b,$$

где n – период сделки;

a – целое число лет;

b – дробная часть года;

смешанный метод расчета предполагает для целого числа лет периода начисления процентов использовать формулу сложных процентов, а для дробной части года – формулу простых процентов:

$$FV = PV\,(1 + i)^a\,(1 + bi).$$

1.2.2. Эффективная ставка процентов

Период начисления по сложным процентам не всегда равен году, однако в условиях финансовой операции указывается не ставка за период, а ***годовая ставка с указанием периода начисления – номинальная ставка (j)***.

Эта ставка:

- во-первых, не отражает реальной эффективности сделки;
- во-вторых, не может быть использована для сопоставлений.

Если начисление процентов будет производиться ***m*** раз в год, а срок долга – ***n*** лет, то общее количество периодов начисления за весь срок финансовой операции составит

$$N = n\ m.$$

Отсюда формулу сложных процентов можно записать в следующем виде:

$$FV = PV\,(1 + j\,/\,m)^{N} = P\,(1 + j\,/m)^{mn},$$

где ***j*** – номинальная годовая ставка процентов.

Наряду с номинальной ставкой существует ***эффективная ставка,*** измеряющая тот *реальный относительный доход*, который получен в целом за год, с учетом внутригодовой капитализации. Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и ***m***-разовое наращение в год по ставке ***j / m***:

$$(1 + i)^{n} = (1 + j\,/\,m)^{m \cdot n},$$

следовательно,

$$i = (1 + j\,/\,m)^{m} - 1.$$

Из формулы следует, что эффективная ставка зависит от количества внутригодовых начислений.

1.2.3. Переменная ставка процентов

Необходимо отметить, что основная формула сложных процентов предполагает ***постоянную*** процентную ставку на протяжении всего срока начисления процентов. Однако, предоставляя долгосрочную ссуду, часто используют изменяющиеся во времени, но заранее зафиксированные для каждого периода ставки сложных процентов. В случае использования ***переменных*** процентных ставок формула наращения имеет следующий вид:

$$FV = PV \cdot (1 + i_1)^{n} \cdot (1 + i_2)^{n} \cdot \ldots \cdot (1 + i_k)^{n}_{k} = PV \prod_{k=1}^{K} (1 + i_k)^{n}_{k},$$

где i_k – последовательные во времени значения процентных ставок;

n – длительность периодов, в течение которых используются соответствующие ставки.

1.2.4. Непрерывное начисление процентов

На практике нередко встречаются случаи, когда ***проценты начисляются непрерывно*** за сколь угодно малый промежуток времени. Если бы проценты начислялись ежедневно, то годовой коэффициент (множитель) наращения выглядел бы так:

$$k_н = (1 + j\,/\,m)^{m} = (1 + j\,/\,365)^{365}.$$

Но поскольку проценты начисляются непрерывно, то ***m*** стремится к бесконечности, а коэффициент (множитель) наращения стремится к e^j:

$$e^j = \lim_{m \to \infty} (1 + j/m)^m$$

где $e \approx$ **2,718281**, называется числом Эйлера и является одной из важнейших постоянных математического анализа.

Отсюда можно записать формулу наращенной суммы для ***n*** лет:

$$FV = PV\, e^{j\,n} = P\, e^{\delta\, n}.$$

Ставку непрерывных процентов называют ***силой роста*** и обозначают символом $\boldsymbol{\delta}$ в отличие от ставки дискретных процентов ***j***.

Графически изменение наращенной суммы в зависимости от частоты начисления имеет следующий вид (рис. 3):

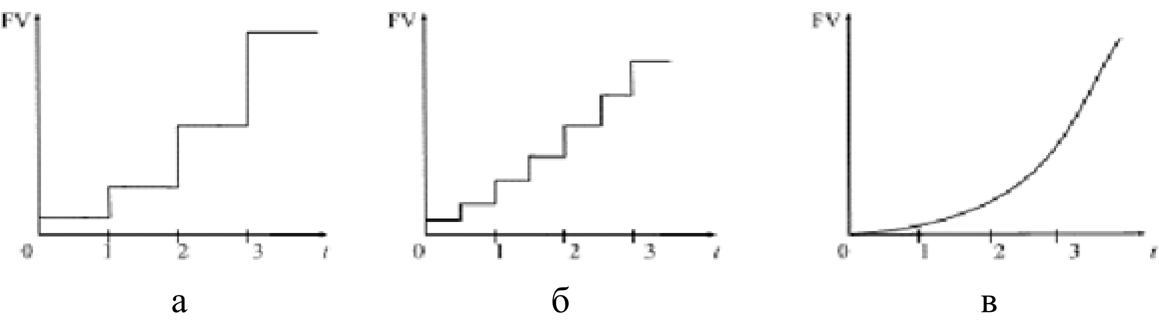

Рис. 3. Различные варианты начисления процентов:
а - ежегодное, б - полугодовое, в - непрерывное

1.2.5. Определение срока ссуды и величины процентной ставки

Так же, как для простых процентов, для сложных процентов необходимо иметь формулы, позволяющие определить недостающие параметры финансовой операции:

срок ссуды:

$$n = [\log (FV / PV)] / [\log (1 + i)] = [\log (FV / PV)] / [\log(1 + j / m)^m],$$

ставка сложных процентов:

$$i = \sqrt[n]{FV / PV} - \left(\sqrt[nm]{FV / PV} - 1\right) \cdot m$$

1.3. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СТАВОК И ЗАМЕНА ПЛАТЕЖЕЙ

Эквивалентность процентных ставок

Достаточно часто в практике возникает ситуация, когда необходимо произвести сравнение выгодности условий различных финансовых операций и коммерческих сделок. Условия финансово-коммерческих операций могут быть весьма разнообразными и напрямую несопоставимыми. Для сопоставления альтернативных вариантов ставки, используемые в условиях контрактов, приводят к единообразному показателю.

Различные финансовые схемы можно считать эквивалентными в том случае, если они приводят к одному и тому же финансовому результату.

Эквивалентная процентная ставка – это ставка, которая для рассматриваемой финансовой операции даст точно такой же денежный результат (наращенную сумму), что и применяемая в этой операции ставка.

Классическим примером эквивалентности являются номинальная и эффективная ставка процентов:

$$i = (1 + j / m)^m - 1,$$

$$j = m[(1 + i)^{1/m} - 1].$$

Эффективная ставка измеряет тот относительный доход, который может быть получен в целом за год, т.е. совершенно безразлично, применять ли ставку $\boldsymbol{j}$ при начислении процентов $\boldsymbol{m}$ раз в год или годовую ставку $\boldsymbol{i}$, – и та, и другая ставки эквивалентны в финансовом отношении.

Если две номинальные ставки определяют одну и ту же эффективную ставку процентов, то они называются эквивалентными.

При выводе равенств, связывающих эквивалентные ставки, приравниваются друг к другу множители наращения, что дает возможность использовать формулы эквивалентности простых и сложных ставок:

простая процентная ставка:

$$i = [(1 + j / m)^{m \cdot n} - 1] / n,$$

сложная процентная ставка:

$$j = m[\sqrt[mn]{(1+ni)} - 1]$$

1.4. РАСЧЕТ ПРОЦЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОЦЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

В банковской практике размещенный на длительное время капитал может в течение этого периода времени изменяться, т.е. увеличиваться или уменьшаться путем дополнительных взносов или отчислений. Таким образом, при обслуживании счетов банки сталкиваются с непрерывной сетью поступлений и расходованием средств и начислением процентов на постоянно меняющуюся сумму. В этой ситуации в банковской практике используется правило: ***общая начисленная за весь срок сумма процентов равна сумме процентов, начисленных на каждую из постоянных на некотором отрезке времени сумм.***

Это касается и дебетовой, и кредитовой части счета. Разница лишь в том, что кредитовые проценты вычитаются.

В таких случаях для расчета процентов используется методика с вычислением процентных чисел: каждый раз, когда сумма на счете изменяется, производится расчет «***процентного числа***» за период, в течение которого сумма на счете была неизменной. Процентное число вычисляется по формуле

Процентное число =
= (Сумма на счете • Длительность периода в днях) / 100 =
= (PV t) ***/ 100.***

Для определения суммы процентов за весь срок их начисления все «процентные числа» складываются и их сумма делится на постоянный делитель, который носит название «***процентный ключ***», или ***дивизор***, определяемый отношением количества дней в году к годовой процентной ставке:

I = *Σ Процентных чисел / Постоянный делитель,*
Постоянный делитель =
Продолжительность года в днях / Годовая ставка процентов = T / i .

Проценты, вычисляемые с использованием дивизора, рассчитанного исходя из 365 дней в году, будут меньше, чем проценты по дивизору, где количество дней в году принято за 360, поэтому при обслуживании конкретного клиента всегда используется один из дивизоров.

1.5. ПЕРЕМЕННЫЕ СТАВКИ

Ставка процентов не является застывшей на вечные времена величиной, поэтому в финансовых операциях в силу тех или иных причин, предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. Например, наличие инфляции вынуждает собственника денег периодически варьировать процентной ставкой. В таких случаях наращенную сумму определяют, используя следующую формулу:

$$FV = PV\,(1 + n_1\, i_1 + n_2\, i_2 + \ldots + n_k\, i_k),$$

где $\boldsymbol{n_k}$ – продолжительность k-го периода;
$\boldsymbol{i_k}$ – ставка процентов в k-м периоде.

1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРОКА ССУДЫ И ВЕЛИЧИНЫ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

В любой простейшей финансовой операции всегда присутствуют четыре величины: современная величина (***PV***), наращенная или будущая величина (***FV***), процентная ставка (***i***) и время (***n***).

Иногда при разработке условий финансовой сделки или ее анализе возникает необходимость решения задач, связанных с определением отсутствующих параметров, таких как срок финансовой операции или уровень процентной ставки.

Обычно ***срок финансовой операции*** определяют в тех случаях, когда известна процентная ставка и величина процентов.

Если срок определяется в годах, то

$$n = (FV - PV) : (PV\, i),$$

а если срок сделки необходимо определить в днях, то появляется временная база в качестве сомножителя:

$$t = [(FV - PV) : (PV\, i)]\, T,$$

Необходимость определения уровня ***процентной ставки*** возникает в тех случаях, когда она в явном виде в условиях финансовой операции не участвует, но степень доходности операции по заданным параметрам можно определить, воспользовавшись следующими формулами:

$$i = (FV - PV) : (PV\, n) = [(FV - PV) : (PV\ t)]\, T,$$

2. ОПЕРАЦИИ ДИСКОНТИРОВАНИЯ

2.1. СУЩНОСТЬ ДИСКОНТИРОВАНИЯ

В финансовой практике часто приходится решать задачи, обратные определению наращенной суммы: по уже известной наращенной сумме (***FV***) следует определить неизвестную первоначальную сумму долга (***PV***).

Такие ситуации возникают при разработке условий финансовой сделки или когда проценты с наращенной суммы удерживаются непосредственно при выдаче ссуды. Процесс начисления и удержания процентов вперед, до наступления срока погашения долга, называют ***учетом***, а сами проценты в виде разности наращенной и первоначальной сумм долга ***дисконтом***:

$$D = FV - PV.$$

Термин ***дисконтирование*** в широком смысле означает определение значения стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит заданную величину (рис. 4).

ДИСКОНТИРОВАНИЕ [i]

НАСТОЯЩЕЕ [PV] $\longleftarrow$ **БУДУЩЕЕ [FV]**

(Приведенная сумма) (Ожидаемая к поступлению сумма)

Рис. 4. Логика финансовой операции дисконтирования

Нередко такой расчет называют ***приведением*** стоимостного показателя к заданному моменту времени, а величину ***PV*** − ***приведенной*** *(современной или текущей)* ***величиной FV.***

Таким образом, ***дисконтирование*** – приведение будущих денег к текущему моменту времени, и при этом не имеет значения, имела ли место в действительности данная финансовая операция или нет, а также независимо от того, можно ли считать дисконтируемую сумму буквально наращенной.

Исходя из методики начисления процентов, применяют два вида дисконтирования:

- ***математическое дисконтирование*** по процентной ставке;
- ***банковский*** учет по учетной ставке.

Различие в **ставке процентов** и **учетной ставке** заключается в различии базы для начислений процентов:

в процентной ставке в качестве базы берется первоначальная сумма долга:

$$i = (FV - PV) / PV,$$

в учетной ставке за базу принимается наращенная сумма долга:

$$d = (FV - PV) / FV.$$

Проценты, начисленные по ставке процентов, называются ***антисипативными,*** а по учетной ставке – ***декурсивными.***

2.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДИСКОНТИРОВАНИЕ

Математическое дисконтирование – определение первоначальной суммы долга, которая при начислении процентов по заданной величине процентной ставки (***i***) позволит к концу срока получить указанную наращенную сумму:

для простых процентов

$$PV = FV : (1 + n\, i\,) = FV \cdot 1 \,/\, (1 + n\, i\,) =$$
$$= FV\,(1 + n\;\; i\,)^{-1} = FV\, k_д,$$

где $\boldsymbol{k_д}$ **–** дисконтный множитель (коэффициент приведения) для простых процентов.

Дисконтный множитель показывает, какую долю составляет первоначальная сумма долга в величине наращенной суммы. Поскольку дисконтный множитель (множитель приведения) зависит от двух аргументов (процентной ставки и срока ссуды), то его значения легко табулируются, что облегчает финансовые расчеты (прил. 3).

Для сложных процентов

$$PV = FV\,(1 + i)^{-n} = FV\,k_{д},$$

где $\boldsymbol{k_{д}}$ – дисконтный множитель для сложных процентов.

Если начисление процентов производится $\boldsymbol{m}$ раз в год, то формула примет вид

$$PV = FV\,(1 + j\,/\,m)^{-m \cdot n}\,.$$

2.3. БАНКОВСКИЙ УЧЕТ

Банковский учет – второй вид дисконтирования, при котором исходя из известной суммы в будущем, определяют сумму в данный момент времени, удерживая дисконт.

Операция учета (учет векселей) заключается в том, что банк или другое финансовое учреждение до наступления платежа по векселю покупает его у предъявителя по цене ниже суммы векселя, т.е. приобретает его с дисконтом. Сумма, которую получает вексeледержатель при досрочном учете векселя, называется ***дисконтированной величиной векселя***. При этом банк удерживает в свою пользу проценты ***(дисконт)*** от суммы векселя за время, оставшееся до срока его погашения. Подобным образом (с дисконтом) государство продает большинство своих ценных бумаг (рис. 5).

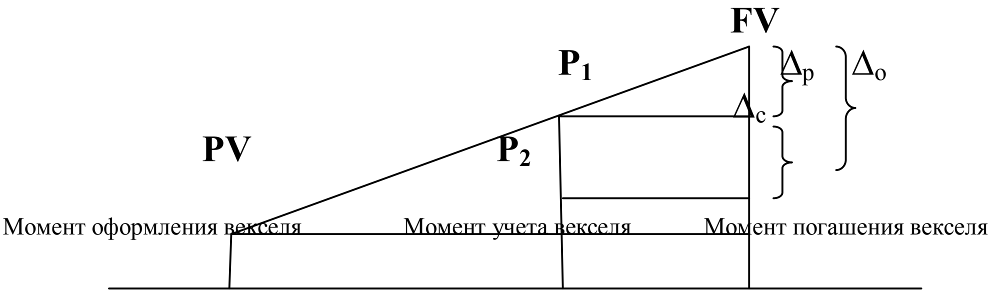

Рис. 5. Логика факторного разложения дохода банка
при учете векселя

Для расчета дисконта используются учетные ставки:

простая учетная ставка:

$$D = FV - PV = FV\,n\,d = FV\,t\,/\,T\,d,$$

где $\boldsymbol{n}$ – продолжительность срока в годах от момента учета до даты выплаты известной суммы в будущем.

Отсюда

$$PV = FV - FV\,n\,d = FV\,(1 - n\,d),$$

где $\mathbf{(1 - \boldsymbol{n\,d})}$ – дисконтный множитель.

Очевидно, что ***чем выше значение учетной ставки, тем больше дисконт***. Дисконтирование по простой учетной ставке чаще всего производится по французской практике начисления процентов, т.е. когда временная база принимается за 360 дней, а число дней в периоде берется точным;

сложная учетная ставка:

$$PV = FV\,(1 - d)^{\,n}.$$

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, так как учетная ставка каждый раз применяется к уменьшаемой на величину дисконта величине.

В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, по которому предусматривается начисление процентов, происходит совмещение начисления процентов по процентной ставке и дисконтирования по учетной ставке:

$$\boldsymbol{PV_2 = PV_1\ (1 + n_1\ i\,)\,(1 - n_2\,d\,),}$$

где $\boldsymbol{PV_1}$ – первоначальная сумма долга;

$\boldsymbol{PV_2}$ – сумма, получаемая при учете обязательства;

$\boldsymbol{n_1}$ – общий срок платежного обязательства;

$\boldsymbol{n_2}$ – срок от момента учета до погашения.

3. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ И ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

3.1. СУЩНОСТЬ ПОТОКА ПЛАТЕЖЕЙ И ОСНОВНЫЕ КАТЕГОРИИ

До сих пор мы рассматривали случаи финансовых операций, состоящих из отдельного разового платежа, например получение и погашение долгосрочной ссуды. Вместе с тем погашение такой ссуды возможно не только единовременным платежом, но множеством распределенных во времени выплат. В финансовой литературе ряд распределенных во времени выплат и поступлений называется ***потоком платежей***.

Потоки платежей являются неотъемлемой частью всевозможных финансовых операций: с ценными бумагами, в управлении финансами предприятий, при осуществлении инвестиционных проектов, в кредитных операциях, при оценке бизнеса, при оценке недвижимости, выборе альтернативных вариантов финансовых операций и т. п.

Члены потока могут быть как положительными величинами ***(поступления),*** так и отрицательными величинами ***(выплаты),*** а временные интервалы между членами такого потока могут быть ***равными и неравными.***

Поток платежей, все члены которого имеют одинаковое направление (знак), а временные интервалы между последовательными платежами постоянны, называется ***финансовой рентой*****,** или ***аннуитетом***.

При рассмотрении финансовой ренты используются основные категории:

- ***член ренты*** (***R***) – величина каждого отдельного платежа;

- ***период ренты (*****t*****)*** – временной интервал между членами ренты;

- ***срок ренты (*****n*****)*** – время от начала финансовой ренты до конца последнего ее периода;

- ***процентная ставка*** (***i***) – ставка, используемая при наращении платежей, из которых состоит рента.

Наращенная сумма – сумма всех платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты. Это может быть обобщенная сумма задолженности, итоговый объем инвестиций и т.п. (рис. 6).

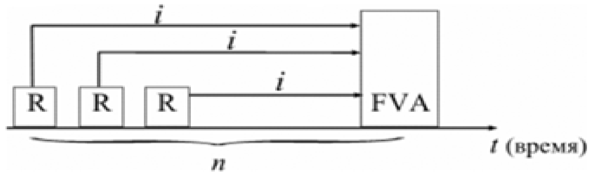

Рис. 6. Логика финансовой операции наращения финансовой ренты

Наращенные отдельные платежи представляют собой члены геометрической прогрессии с первым членом, равным ***R,*** и множителем, равным $(1 + i)$.

Рассмотрим определение наращенной суммы на примере наиболее простого случая – годовой постоянной обычной ренты:

$$FVA = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = R \cdot s_{n;i},$$

где FVA – наращенная сумма ренты;

R – размер члена ренты, т.е. размер очередного платежа;

i – годовая процентная ставка, по которой на платежи начисляются сложные проценты;

n – срок ренты в годах,

$s_{n;i}$ – коэффициент наращения ренты.

Однако рассматриваемая формула используется только при начислении процентов один раз в год, но возможны случаи и неоднократного начисления процентов в течение года, тогда используют следующую формулу:

$$FVA = R\frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^m - 1},$$

где $\boldsymbol{j}$ – номинальная ставка процентов.

Можно определить наращенную сумму постоянной ренты, воспользовавшись финансовыми таблицами (прил. 4), содержащими коэффициенты наращения ренты.

Бывают случаи, когда рентные платежи вносятся несколько раз в год равными суммами (срочная рента), а начисление процентов производится только раз в году. Тогда ***наращенная величина ренты*** будет определяться по формуле

$$FVA = R\frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]},$$

Также нередки случаи, когда рентные платежи вносятся несколько раз в году и начисление процентов также происходит несколько раз в год, но число рентных платежей не равно числу периодов начисления процентов, т.е. ***p ≠ m.*** Тогда формула, по которой можно определить наращенную величину финансовой ренты, примет вид

$$FVA = R\frac{(1+i/m)^{mn}-1}{p[(1+i/m)^{m/p}-1]}.$$

На практике большее распространение получил поток ***постнумерандо***, поскольку согласно общим принципам учета принято подводить итоги и оценивать финансовый результат операции или иного действия по окончании очередного отчетного периода. Что же касается поступления денежных средств в счет оплаты, то на практике они чаще всего распределены во времени неравномерно и поэтому для удобства все поступления относят к концу периода, что позволяет использовать формализованные алгоритмы оценки.

Поток пренумерандо имеет значение при анализе различных схем накопления денежных средств для последующего их инвестирования.

Рента пренумерандо отличается от обычной ренты числом периодов начисления процентов. Поэтому ***наращенная сумма ренты пренумерандо будет больше наращенной суммы обычной ренты*** в **(1 + *i*) раз.**

Для годовой ренты ***пренумерандо*** с начислением процентов один раз в год формула примет вид:

$$FVA = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\cdot(1+i),$$

Для годовой ренты ***пренумерандо*** с начислением процентов несколько раз в год:

$$FVA = R\frac{(1+i/m)^{mn}-1}{(1+i/m)^{m}-1}\cdot(1+j/m)^{m},$$

Помимо наращенной суммы, обобщающей характеристикой потока платежей является современная величина. ***Современная (текущая) величина потока платежей*** (капитализированная или приведенная величина) – это сумма платежей, дисконтированных на момент начала ренты по ставке начисляемых сложных процентов. Это важнейшая характеристика финансового анализа, так как является основой для измерения эффективности различных финансово-кредитных операций, сравнения условий контрактов и т.п. Данная характеристика показывает, какую сумму следовало бы иметь первоначально, чтобы, разбив ее на равные взносы, на которые начислялись бы установленные проценты в течение всего срока, можно было бы получить указанную наращенную сумму (рис. 7).

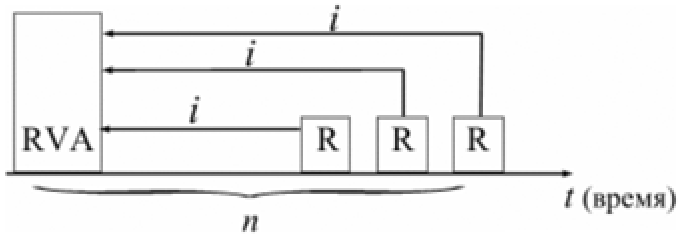

Рис. 7. Логика финансовой операции определения современной величины потока платежей

В этом случае реализуется схема дисконтирования: все элементы с помощью дисконтных множителей приведены к одному моменту времени, что позволяет их суммировать.

В простейшем случае для годовой обычной ренты с выплатами в конце каждого года, когда момент оценки совпадает с началом ренты, современная величина финансовой ренты равна:

$$PVA = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{n;i}\,.$$

Дробь в формуле – ***коэффициент приведения ренты ($a_{n;i}$),*** значения которого табулированы (прил. 5).

Рассмотрим расчет современной величины ренты для различных ее видов:

годовая рента с начислением процентов несколько раз в год:

$$PVA = R\frac{1-(1+i/m)^{-mn}}{(1+i/m)^{m}-1}$$

срочная рента при начислении процентов один раз в год:

$$PVA = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]}$$

срочная рента с неоднократным начислением процентов в течение года, при условии, что число выплат не равно числу начислений, т.е. $p \neq m$:

$$PVA = R\frac{1-(1+i/m)^{-mn}}{p[(1+i/m)^{m/p}-1]}$$

Последовательные платежи в виде постоянной обычной годовой ренты определяются основными параметрами:

R – размер платежа;

n – срок ренты в годах;

i – годовая ставка процентов.

Однако при разработке условий финансовой операции могут возникать ситуации, когда заданной величиной является одна из двух обобщающих характеристик и неполный набор параметров ренты. В таких случаях находят недостающий параметр.

При определении ***члена ренты*** возможны два варианта, зависящие от того, какая величина является исходной:

а) ***наращенная сумма***. Если сумма долга определена на какой-либо момент в будущем **(*FVA*),** то величину последующих взносов в течение ***n*** лет при начислении на них процентов по ставке ***i*** можно определить по формуле

$$R = \frac{FVA \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{FVA}{s_{n;i}},$$

б) *современная величина финансовой ренты, тогда, исходя из ставки процента и срока ренты, разовый платеж находится по формуле*

$$R = \frac{PVA \cdot i}{1-(1+i)^n} = \frac{PVA}{a_{n;i}}.$$

4. ИНФЛЯЦИЯ В ФИНАНСОВО-КОММЕРЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

4.1. СУЩНОСТЬ ИНФЛЯЦИИ И НЕОБХОДИМОСТЬ ЕЕ УЧЕТА В КОЛИЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ

Инфляция – это экономическое явление, которое возникает вследствие целого комплекса как политических, так и социально-экономических событий. Уровень инфляции выступает обобщающим показателем финансово-экономического положения страны.

Инфляция – устойчивый рост среднего уровня цен на товары и услуги в экономике.

Внешним проявлением инфляции является повышение общего уровня цен, т.е. совокупный рост цен на товары и услуги в течение длительного времени. Соответственно ***на денежную единицу приходится меньше товаров, т.е. деньги обесцениваются.***

Если наблюдается общее снижение цен, то происходит ***дефляция.***

Темпы инфляции определяются с помощью индекса – ***относительного показателя***, характеризующего среднее изменения уровня цен некоторого фиксированного набора товаров и услуг за данный период времени.

Индекс инфляции показывает, во сколько раз выросли цены ($\boldsymbol{J_\tau}$), а уровень инфляции показывает, на сколько процентов возросли цены ($\boldsymbol{\tau}$), т.е. по своей сути, это соответственно темп роста и темп прироста:

$$J_\tau = 1 + \tau.$$

Для оценки уровня инфляции используется система индексов цен.

Индекс потребительских цен (***ИПЦ***) – это показатель международной статистики, регулярно использующийся практически во всех странах мира, который характеризует динамику затрат на постоянный набор товаров и услуг за счет ценностного фактора.

Индекс потребительских цен дает достаточно обобщенную характеристику инфляции, так как потребление является завершающим этапом в создании валового продукта, и здесь находят свое отражение все предыдущие стадии производства.

Расчет ИПЦ в России осуществляется за каждый месяц и нарастающим итогом с начала года (к декабрю прошлого года).

Отечественные исследователи часто расценивают уровень инфляции как темп прироста потребительских цен:

$$\tau = ИПЦ - 100\ (\%).$$

В зависимости от уровня инфляции в год выделяют:

- ***нормальную (ползучую)*** – от 3 до 10 %;
- ***галопирующую*** – от 10 до 100 %;
- ***гиперинфляцию*** – свыше 50 % в месяц.

Еще одним важным показателем международной статистики, оценивающим инфляцию, является ***дефлятор валового внутреннего продукта***, который характеризует изменение стоимостного объема ВВП за счет его ценностного фактора. Дефлятор ВВП также дает обобщенную характеристику инфляции, поскольку характеризует движение цен на потребительском рынке, а также на рынке инвестиционных товаров и услуг.

Для характеристики инфляции могут применяться и другие показатели: ***размер эмиссий, сокращение товарных запасов и т.п.***

Инфляция противодействует повышению стоимости денег, обесценивая их. Графически это представлено на рис. 8.

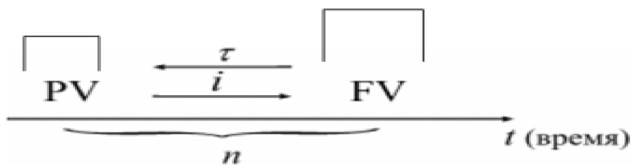

Рис. 8. Факторы изменения стоимости денег

Вследствие начисления процентов происходит увеличение денежных сумм, но их стоимость под влиянием инфляции уменьшается. Поскольку каждая денежная единица обесценивается вследствие инфляции, то в дальнейшем обесцениваются уже обесцененные деньги. Таким образом, формула для исчисления наращенной суммы с учетом влияния инфляции принимает следующий вид:

$$FV = PV(1 + i)^n / (1 + \tau)^n.$$

Наращение осуществляется по простым или сложным процентам, но инфляция всегда оценивается по сложному проценту.

Поскольку ставка доходности (***i***) является фактором роста денег, то находится в числителе формулы, а показатель инфляции (**τ**) является фактором их обесценивания, поэтому находится в знаменателе формулы.

4.2. МЕТОДЫ УЧЕТА ИНФЛЯЦИИ В ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТАХ

Владельцы денег не могут мириться с их обесцениванием в результате инфляции и предпринимают различные попытки компенсации потерь от снижения их покупательной способности.

Наиболее распространенным методом является индексация ставки процентов, по которой производится наращение.

В связи с этим вводится понятие ***номинальная ставка процента***, т.е. ставки с поправкой на инфляцию (i_τ). Общая формула для определения простой ставки процентов, компенсирующей ожидаемую инфляцию, имеет следующий вид:

$$i_\tau = [(1 + n\,i)\,J_\tau - 1] / n,$$

где ***i*** – простая ставка процентов, характеризующая требуемую реальную доходность финансовой операции (нетто-ставка);

i_τ – процентная ставка с поправкой на инфляцию.

Годовая ставка сложных процентов, обеспечивающая реальную доходность кредитной операции, определяется по формуле

$$i_\tau = i + \tau + i\tau.$$

Для расчета номинальной ставки можно использовать следующую модель:

$$i_\tau = [(1+i) / \sqrt[n]{(1+\tau)}] - 1$$

на основе которой можно сравнивать уровни процентной ставки и инфляции, проводить анализ эффективности вложений и устанавливать реальный прирост вложенного капитала.

При начислении процентов несколько раз в год

$$j_\tau = m[(1 + j/m)^m \cdot \sqrt[n]{(1+\tau)} - 1].$$

Эти модели позволяют производить учет инфляции и корректировку процентных ставок.

На практике довольно часто довольствуются сравнением ***i*** и **τ** путем вычисления ***реальной ставки***, т.е. уменьшенной ставки доходности на уровень инфляции:

$$i = (i - \tau) / (1 + \tau).$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

Задача 1. Сумма 100 тыс. руб. положена в банк 15 марта невисокосного года и востребована 16 ноября того же года. Ставка банка составляет 30 % годовых. Определить сумму начисленных процентов при различной практике их начисления.

Задача 2. В банке получен кредит под 13 % годовых в размере 240 тыс. дол. со сроком погашения через 3 года и 6 месяцев. Определить сумму, которую необходимо вернуть по истечении срока займа, двумя способами (общим и смешанным), учитывая, что банк использует германскую практику начисления процентов.

Задача 3. Вексель выдан на 6'000 руб. с уплатой 13 ноября, а владелец учел его в банке 10 августа по учетной ставке 10 %. Определить сумму, полученную предъявителем векселя, и доход банка при реализации дисконта.

Задача 4. На счет в банке в течение четырех лет в конце каждого года будут вноситься суммы в размере 600 руб., на которые будут начисляться проценты по ставке 20 %. Определить сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

Задача 5. Определить реальные результаты вкладной операции для суммы 7'000 руб., размещенной на полгода под 12 % годовых, если ежемесячный уровень инфляции составляет 3 %.

Задача 6. Что выгоднее: увеличение вклада в четыре раза за три года или 28 % годовых?

Вариант 2

Задача 1. При открытии сберегательного счета по ставке 26 % годовых, 20 июня невисокосного была положена сумма в размере 3'000 руб., а 6 августа на счет добавлена сумма в 400 руб., 8 октября снята со счета сумма в 550 руб., а 20 декабря счет был закрыт. Используя процентные числа, определить сумму начисленных процентов при условии, что банк использует «германскую практику».

Задача 2. Фирма получила кредит в банке на сумму 140'000 дол. сроком на 5 лет. Процентная ставка по кредиту определена в 11 % для 1-го года, для 2-го года предусмотрена надбавка к процентной ставке в размере 1,6 %, для последующих лет − 1,2 %. Определить сумму долга, подлежащую погашению в конце срока займа.

Задача 3. Вексель на сумму 20 тыс. руб. со сроком погашения 10.05, а также вексель на сумму 30 тыс. руб. со сроком погашения 21.08 заменяются одним с продлением срока до 01.11. При объединении векселей применяется учетная ставка 23 %. Определить сумму консолидированного векселя.

Задача 4. Для покупки автомобиля через 6 лет потребуется 40 тыс. руб. Определите размер ежегодных взносов, вносимых в конце каждого года в банк, который начисляет проценты по ставке 30 %.

Задача 5. Банк выдал клиенту кредит на два года в размере 40 тыс. руб. по ставке 8 % годовых. Уровень инфляции за год составил 15 %. Определить с учетом инфляции реальную ставку процентов по кредиту, погашаемую сумму и сумму процентов за кредит.

Задача 6. Что выгоднее: увеличение вклада в три раза за три года или 32 % годовых?

Вариант 3

Задача 1. Вклад в сумме 7'000 руб. был положен в банк 23 апреля невисокосного года по ставке 30 % годовых, а с 1 августа банк снизил ставку по вкладам до 25 % годовых, и 15 сентября вклад был востребован. Определить сумму начисленных процентов при английской практике их начисления.

Задача 2. Кредит в размере 90 тыс. дол. получен сроком на 3 года под 12 % годовых. Определить сумму подлежащего возврату в конце срока кредита, если проценты будут начисляться: а) один раз в год; б) ежедневно; в) непрерывно.

Задача 3. Обязательство уплатить через 80 дней сумму долга в размере 40 тыс. руб. с начисляемыми на нее точными процентами по ставке 30 %, было учтено за 20 дней до срока погашения по учетной ставке 20 %. Определить сумму, полученную при учете обязательства.

Задача 4. Сумма 20 тыс. дол. предоставлена в долг на 6 лет под 10 % годовых. Определить ежегодную сумму погашения долга.

Задача 5. Определить номинальную ставку процентов для финансовой операции, если уровень эффективности должен составлять 9 % годовых, а годовой уровень инфляции 19 %.

Задача 6. Что выгоднее: увеличение вклада в три раза за четыре года или 30 % годовых?

Вариант 4

Задача 1. На сколько дней можно дать в долг 1'500 дол., исходя из 12 % годовых, если возвращенная сумма будет составлять 1'650 дол.?

Задача 2. Каковы будут эквивалентные номинальные процентные ставки с полугодовым начислением процентов и ежемесячным начислением процентов, если соответствующая им эффективная ставка должна быть равна 26 %?

Задача 3. Через два года фирме потребуются деньги в размере 60 млн. руб. Какую сумму необходимо сегодня поместить в банк, начисляющий 19 % годовых, чтобы через 2 года получить требуемую сумму?

Задача 4. На счет в банке в течение трех лет в конце каждого года будут вноситься суммы в размере 300 руб., на которые будут начисляться проценты по ставке 25 %. Определить сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

Задача 5. Определить реальную ставку при размещении средств на год под 30 % годовых, если уровень инфляции за год составляет 16 %.

Задача 6. Что выгоднее: увеличение вклада в четыре раза за пять лет или 26 % годовых?

Вариант 5

Задача 1. В контракте предусматривается погашение обязательств через 150 дней в сумме 1'700 дол., при первоначальной сумме долга 1300 дол. Определить доходность операции для кредитора в виде процентной ставки.

Задача 2. Предполагается поместить капитал на 3 года либо под сложную процентную ставку 22 % годовых с полугодовым начислением процентов, либо под простую процентную ставку 28% годовых. Найти оптимальный вариант.

Задача 3. Определить величину суммы, выдаваемую заемщику, если он обязуется вернуть ее через три года в размере 150 тыс. руб. Банк определяет свой доход с использованием годовой учетной ставки 23 %.

Задача 4. Для покупки автомобиля через 5 лет потребуется 80 тыс. руб. Определите размер ежегодных взносов, вносимых в конце каждого года в банк, который начисляет проценты по ставке 30 %.

Задача 5. Определить реальные результаты вкладной операции для суммы 9'000 руб., размещенной на полгода под 17 % годовых, если ежемесячный уровень инфляции составляет 2,5 %.

Задача 6. Что выгоднее: увеличение вклада в три раза за три года или 38 % годовых?

Вариант 6

Задача 1. Сумма 160 тыс. руб. положена в банк 11 марта невисокосного года и востребована 16 августа того же года. Ставка банка составляет 28 % годовых. Определить сумму начисленных процентов при различной практике их начисления.

Задача 2. Решено консолидировать два платежа со сроками 18.04 и 11.05 и суммами платежа 22 тыс. руб. и 28 тыс. руб. Срок консолидации платежей 26.06. Определить сумму консолидированного платежа при условии, что ставка равна 13 % годовых.

Задача 3. Вексель на сумму 60 тыс. руб. со сроком погашения 15.03, а также вексель на сумму 20 тыс. руб. со сроком погашения 14.06 заменяются одним с продлением срока до 17.08. При объединении векселей применяется учетная ставка 25 %. Определить сумму консолидированного векселя.

Задача 4. Сумма 60 тыс. дол. предоставлена в долг на 5 лет под 12 % годовых. Определить ежегодную сумму погашения долга.

Задача 5. Банк выдал клиенту кредит на один год в размере 40 тыс. руб. по ставке 9 % годовых. Уровень инфляции за год составил 13 %. Определить с учетом инфляции реальную ставку процентов по кредиту, погашаемую сумму и сумму процентов за кредит.

Задача 6. Что выгоднее: увеличение вклада в два раза за два года или 22 % годовых?

Вариант 7

Задача 1. При открытии сберегательного счета по ставке 22 % годовых 16 июня невисокосного года была положена сумма в размере 1'500 руб., а 10 августа на счет добавлена сумма в 450 руб., 18 сентября снята со счета сумма в 250 руб., а 21 декабря счет был закрыт. Используя процентные числа, определить сумму начисленных процентов при условии, что банк использует «германскую практику».

Задача 2. В банке получен кредит под 14 % годовых в размере 175 тыс. дол. со сроком погашения через 4 года и 2 месяца. Определить сумму, которую необходимо вернуть по истечении срока займа, двумя способами (общим и смешанным), учитывая, что банк использует германскую практику начисления процентов.

Задача 3. Обязательство уплатить через 130 дней сумму долга в размере 80 тыс. руб. с начисляемыми на нее точными процентами по ставке 20 % было учтено за 15 дней до срока погашения по учетной ставке 14 %. Определить сумму, полученную при учете обязательства.

Задача 4. На счет в банке в течение пяти лет в конце каждого года будут вноситься суммы в размере 700 руб., на которые будут начисляться проценты по ставке 22 %. Определить сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

Задача 5. Определить номинальную ставку процентов для финансовой операции, если уровень эффективности должен составлять 10 % годовых, а годовой уровень инфляции 16 %.

Задача 6. Что выгоднее: увеличение вклада в три раза за три года или 40 % годовых?

Вариант 8

Задача 1. Вклад в сумме 5'500 руб. был положен в банк 23 февраля невисокосного года по ставке 26 % годовых, а с 1 июля банк снизил ставку по вкладам до 23 % годовых, и 4 августа вклад был востребован. Определить сумму начисленных процентов при английской практике их начисления.

Задача 2. Фирма получила кредит в банке на сумму 136'000 дол. сроком на 7 лет. Процентная ставка по кредиту определена в 12 % для 1-го года, для 2-го года предусмотрена надбавка к процентной ставке в размере 1,3 %, для последующих лет − 1,1 %. Определить сумму долга, подлежащую погашению в конце срока займа.

Задача 3. Через четыре года фирме потребуются деньги в размере 70 млн руб. Какую сумму необходимо сегодня поместить в банк, начисляющий 29 % годовых, чтобы через 4 года получить требуемую сумму?

Задача 4. Сумма 30 тыс. дол. предоставлена в долг на 3 года под 12 % годовых. Определить ежегодную сумму погашения долга.

Задача 5. Определить реальную ставку при размещении средств на год под 28 % годовых, если уровень инфляции за год составляет 15 %.

Задача 6. Что выгоднее: увеличение вклада в два раза за три года или 33 % годовых?

Вариант 9

Задача 1. На сколько дней можно дать в долг 2400 дол., исходя из 15 % годовых, если возвращенная сумма будет составлять 3200 дол.?

Задача 2. Кредит в размере 110 тыс. дол. получен сроком на 5 лет под 10 % годовых. Определить сумму подлежащего возврату в конце срока кредита, если проценты будут начисляться: а) один раз в год; б) ежедневно; в) непрерывно.

Задача 3. Вексель выдан на 7'000 руб. с уплатой 20 декабря, а владелец учел его в банке 20 августа по учетной ставке 11 %. Определить сумму, полученную предъявителем векселя, и доход банка при реализации дисконта.

Задача 4. На счет в банке в течение семи лет в конце каждого года будут вноситься суммы в размере 400 руб., на которые будут начисляться проценты по ставке 29 %. Определить сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

Задача 5. Банк выдал клиенту кредит на два года в размере 50 тыс. руб. по ставке 10 % годовых. Уровень инфляции за год составил 15 %. Определить с учетом инфляции реальную ставку процентов по кредиту, погашаемую сумму и сумму процентов за кредит.

Задача 6. Что выгоднее: увеличение вклада в три раза за четыре года или 34 % годовых?

Вариант 10

Задача 1. В контракте предусматривается погашение обязательств через 110 дней в сумме 1'450 дол., при первоначальной сумме долга 1200 дол. Определить доходность операции для кредитора в виде процентной ставки.

Задача 2. Решено консолидировать два платежа со сроками 19.05 и 19.06 и суммами платежа 27 тыс. руб. и 34 тыс. руб. Срок консолидации платежей 14.07. Определить сумму консолидированного платежа при условии, что ставка равна 13 % годовых.

Задача 3. Обязательство уплатить через 70 дней сумму долга в размере 30 тыс. руб. с начисляемыми на нее точными процентами по ставке 22 % было учтено за 10 дней до срока погашения по учетной ставке 17 %. Определить сумму, полученную при учете обязательства.

Задача 4. Для покупки автомобиля через 5 лет потребуется 90 тыс. руб. Определите размер ежегодных взносов, вносимых в конце каждого года в банк, который начисляет проценты по ставке 35 %.

Задача 5. Определить номинальную ставку процентов для финансовой операции, если уровень эффективности должен составлять 10 % годовых, а годовой уровень инфляции 16 %.

Задача 6. Что выгоднее: увеличение вклада в три раза за три года или 25 % годовых?

Приложение 1

Порядковые номера дней в невисокосном году

День	Месяц											
	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	217	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	213	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	–	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	–	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	–	90	–	151	–	212	243	–	304	–	365

Приложение 2

Множители наращения по сложным процентам

Число периодов	Ставка процентов за период						
	5,00%	10,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%	40,00%
1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,4
2	1,1025	1,21	1,3225	1,44	1,5625	1,69	1,96
3	1,157625	1,331	1,520875	1,728	1,953125	2,197	2,744
4	1,215506	1,4641	1,749006	2,0736	2,441406	2,8561	3,8416
5	1,276282	1,61051	2,011357	2,48832	3,051758	3,71293	5,37824
6	1,340096	1,771561	2,313061	2,985984	3,814697	4,826809	7,529536
7	1,4071	1,948717	2,66002	3,583181	4,768372	6,274852	10,54135
8	1,477455	2,143589	3,059023	4,299817	5,960464	8,157307	14,75789
9	1,551328	2,357948	3,517876	5,15978	7,450581	10,6045	20,66105
10	1,628895	2,593742	4,045558	6,191736	9,313226	13,78585	28,92547
11	1,710339	2,853117	4,652391	7,430084	11,64153	17,9216	40,49565
12	1,795856	3,138428	5,35025	8,9161	14,55192	23,29809	56,69391
13	1,885649	3,452271	6,152788	10,69932	18,18989	30,28751	79,37148
14	1,979932	3,797498	7,075706	12,83918	22,73737	39,37376	111,1201
15	2,078928	4,177248	8,137062	15,40702	28,42171	51,18589	155,5681
16	2,182875	4,594973	9,357621	18,48843	35,52714	66,54166	217,7953
17	2,292018	5,05447	10,76126	22,18611	44,40892	86,50416	304,9135
18	2,406619	5,559917	12,37545	26,62333	55,51115	112,4554	426,8789
19	2,52695	6,115909	14,23177	31,948	69,38894	146,192	597,6304
20	2,653298	6,7275	16,36654	38,3376	86,73617	190,0496	836,6826
21	2,785963	7,40025	18,82152	46,00512	108,4202	247,0645	1171,356
22	2,925261	8,140275	21,64475	55,20614	135,5253	321,1839	1639,898
23	3,071524	8,954302	24,89146	66,24737	169,4066	417,5391	2295,857
24	3,2251	9,849733	28,62518	79,49685	211,7582	542,8008	3214,2
25	3,386355	10,83471	32,91895	95,39622	264,6978	705,641	4499,88

Приложение 3

Множители дисконтирования по сложным процентам

Число периодов	Ставка процентов за период						
	5,00%	10,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%	40,00%
1	0,952381	0,909091	0,869565	0,833333	0,8	0,769231	0,714286
2	0,907029	0,826446	0,756144	0,694444	0,64	0,591716	0,510204
3	0,863838	0,751315	0,657516	0,578704	0,512	0,455166	0,364431
4	0,822702	0,683013	0,571753	0,482253	0,4096	0,350128	0,260308
5	0,783526	0,620921	0,497177	0,401878	0,32768	0,269329	0,185934
6	0,746215	0,564474	0,432328	0,334898	0,262144	0,207176	0,13281
7	0,710681	0,513158	0,375937	0,279082	0,209715	0,159366	0,094865
8	0,676839	0,466507	0,326902	0,232568	0,167772	0,122589	0,06776
9	0,644609	0,424098	0,284262	0,193807	0,134218	0,0943	0,0484
10	0,613913	0,385543	0,247185	0,161506	0,107374	0,072538	0,034572
11	0,584679	0,350494	0,214943	0,134588	0,085899	0,055799	0,024694
12	0,556837	0,318631	0,186907	0,112157	0,068719	0,042922	0,017639
13	0,530321	0,289664	0,162528	0,093464	0,054976	0,033017	0,012599
14	0,505068	0,263331	0,141329	0,077887	0,04398	0,025398	0,008999
15	0,481017	0,239392	0,122894	0,064905	0,035184	0,019537	0,006428
16	0,458112	0,217629	0,106865	0,054088	0,028147	0,015028	0,004591
17	0,436297	0,197845	0,092926	0,045073	0,022518	0,01156	0,00328
18	0,415521	0,179859	0,080805	0,037561	0,018014	0,008892	0,002343
19	0,395734	0,163508	0,070265	0,031301	0,014412	0,00684	0,001673
20	0,376889	0,148644	0,0611	0,026084	0,011529	0,005262	0,001195
21	0,358942	0,135131	0,053131	0,021737	0,009223	0,004048	0,000854
22	0,34185	0,122846	0,046201	0,018114	0,007379	0,003113	0,00061
23	0,325571	0,111678	0,040174	0,015095	0,005903	0,002395	0,000436
24	0,310068	0,101526	0,034934	0,012579	0,004722	0,001842	0,000311
25	0,295303	0,092296	0,030378	0,010483	0,003778	0,001417	0,000222

Приложение 4

Множители наращения аннуитета

Число периодов	Ставка процентов за период						
	5,00%	10,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%	40,00%
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2,05	2,1	2,15	2,2	2,25	2,3	2,4
3	3,1525	3,31	3,4725	3,64	3,8125	3,99	4,36
4	4,310125	4,641	4,993375	5,368	5,765625	6,187	7,104
5	5,525631	6,1051	6,742381	7,4416	8,207031	9,0431	10,9456
6	6,801913	7,71561	8,753738	9,92992	11,25879	12,75603	16,32384
7	8,142008	9,487171	11,0668	12,9159	15,07349	17,58284	23,85338
8	9,549109	11,43589	13,72682	16,49908	19,84186	23,85769	34,39473
9	11,02656	13,57948	16,78584	20,7989	25,80232	32,015	49,15262
10	12,57789	15,93742	20,30372	25,95868	33,2529	42,6195	69,81366
11	14,20679	18,53117	24,34928	32,15042	42,56613	56,40535	98,73913
12	15,91713	21,38428	29,00167	39,5805	54,20766	74,32695	139,2348
13	17,71298	24,52271	34,35192	48,4966	68,75958	97,62504	195,9287
14	19,59863	27,97498	40,50471	59,19592	86,94947	127,9125	275,3002
15	21,57856	31,77248	47,58041	72,03511	109,6868	167,2863	386,4202
16	23,65749	35,94973	55,71747	87,44213	138,1085	218,4722	541,9883
17	25,84037	40,5447	65,07509	105,9306	173,6357	285,0139	759,7837
18	28,13238	45,59917	75,83636	128,1167	218,0446	371,518	1064,697
19	30,539	51,15909	88,21181	154,74	273,5558	483,9734	1491,576
20	33,06595	57,275	102,4436	186,688	342,9447	630,1655	2089,206
21	35,71925	64,0025	118,8101	225,0256	429,6809	820,2151	2925,889
22	38,50521	71,40275	137,6316	271,0307	538,1011	1067,28	4097,245
23	41,43048	79,54302	159,2764	326,2369	673,6264	1388,464	5737,142
24	44,502	88,49733	184,1678	392,4842	843,0329	1806,003	8032,999
25	47,7271	98,34706	212,793	471,9811	1054,791	2348,803	11247,2

Приложение 5

Дисконтные множители аннуитета

Число периодов	Ставка процентов за период						
	5,00%	10,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%	40,00%
1	0,952381	0,909091	0,869565	0,833333	0,8	0,769231	0,714286
2	1,85941	1,735537	1,625709	1,527778	1,44	1,360947	1,22449
3	2,723248	2,486852	2,283225	2,106481	1,952	1,816113	1,588921
4	3,545951	3,169865	2,854978	2,588735	2,3616	2,166241	1,849229
5	4,329477	3,790787	3,352155	2,990612	2,68928	2,43557	2,035164
6	5,075692	4,355261	3,784483	3,32551	2,951424	2,642746	2,167974
7	5,786373	4,868419	4,16042	3,604592	3,161139	2,802112	2,262839
8	6,463213	5,334926	4,487322	3,83716	3,328911	2,924702	2,330599
9	7,107822	5,759024	4,771584	4,030967	3,463129	3,019001	2,378999
10	7,721735	6,144567	5,018769	4,192472	3,570503	3,091539	2,413571
11	8,306414	6,495061	5,233712	4,32706	3,656403	3,147338	2,438265
12	8,863252	6,813692	5,420619	4,439217	3,725122	3,19026	2,455904
13	9,393573	7,103356	5,583147	4,532681	3,780098	3,223277	2,468503
14	9,898641	7,366687	5,724476	4,610567	3,824078	3,248675	2,477502
15	10,37966	7,60608	5,84737	4,675473	3,859263	3,268211	2,48393
16	10,83777	7,823709	5,954235	4,729561	3,88741	3,283239	2,488521
17	11,27407	8,021553	6,047161	4,774634	3,909928	3,2948	2,491801
18	11,68959	8,201412	6,127966	4,812195	3,927942	3,303692	2,494144
19	12,08532	8,36492	6,198231	4,843496	3,942354	3,310532	2,495817
20	12,46221	8,513564	6,259331	4,86958	3,953883	3,315794	2,497012
21	12,82115	8,648694	6,312462	4,891316	3,963107	3,319842	2,497866
22	13,163	8,77154	6,358663	4,90943	3,970485	3,322955	2,498476
23	13,48857	8,883218	6,398837	4,924525	3,976388	3,32535	2,498911
24	13,79864	8,984744	6,433771	4,937104	3,981111	3,327192	2,499222
25	14,09394	9,07704	6,464149	4,947587	3,984888	3,328609	2,499444

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Четыркин, Е.М Финансово-экономические расчеты [Текст]: справ. пособие / Е.М. Четыркин, Н.Е. Васильева. − М.: Финансы и статистика, 2003. – 336 с.

2. Четыркин, Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов [Текст] / Е.М. Четыркин. − М.: Дело ЛТД, 2006. – 312 с.

3. Капелян, С.Н. Основы коммерческих и финансовых расчетов [Текст] / С.Н. Капелян, О.А. Левкович. − Минск: НТЦ «АПИ», 2001. – 298 с.

УРАЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

И.В. Щепеткина

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Екатеринбург
2010