ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУ ВПО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

Т.Е. Воронцова
И.Н. Демидова
Н.К. Пешкова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Индивидуальные контрольные задания
и методические указания к их выполнению
для студентов очной формы обучения
по дисциплине «Высшая математика»

Екатеринбург
2010

Печатается по рекомендации методической комиссии ФЭУ.
Протокол № 1 от 04 декабря 2009 г.

Рецензент – ст. преподаватель Н.Л. Воронцова

Редактор К.В. Корнева
Компьютерная верстка Г.И. Романовой

Подписано в печать 25.11.10		Поз. 46
Плоская печать	Формат 60х84 1/16	Тираж 200 экз.
Заказ №	Печ. л. 2,32	Цена 11 руб. 84 коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания предназначены для всех категорий студентов УГЛТУ, изучающих математику в соответствии с программой по своей специальности. Теоретический материал сопровождается подробными решениями примеров и задач. По каждой теме приведено достаточное количество задач для самостоятельного решения: ко всем задачам даны ответы. Вторая часть методических указаний содержит также задачи для самостоятельного решения, которые можно использовать как индивидуальные домашние задания.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Прямоугольная система координат Оxy на плоскости задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок. Эти прямые называют осями координат: горизонтальная ось (ось Оx) называется осью абсцисс, вертикальная ось (ось Оy) - осью ординат. Точка пересечения осей координат О называется началом системы координат и имеет координаты (0;0). Положение произвольной точки М в системе координат определяется парой чисел x и y, называемых координатами этой точки. Координаты точки полностью определяют ее положение на плоскости: каждой паре чисел (x;y) соответствует
единственная точка плоскости и наоборот.

Основные формулы

- **Расстояние между двумя точками M_1 $(x_1;y_1)$ и M_2 $(x_2;y_2)$ на плоскости** вычисляется по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,. \qquad (1.1)$$

- **Координаты (x;y) точки М, делящей в заданном отношении λ отрезок АВ**, где $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$; $\lambda=\dfrac{AM}{MB}$ (АМ и МВ - длины этих отрезков), находятся по формулам:

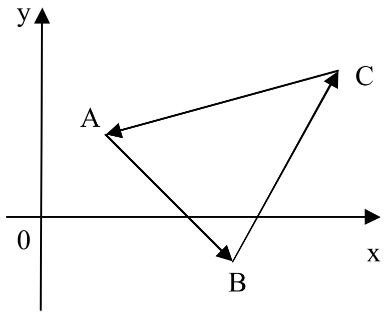
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad (1.2)$$

в частности, если точка М (x;y) делит отрезок АВ пополам, то $\lambda=\dfrac{AM}{MB}=1$, т.к. длины этих отрезков будут одинаковы, и формулы (1.2) принимают вид:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \qquad (1.3)$$

т.е. координаты середины отрезка равны полусуммам соответствующих координат его начала и конца.

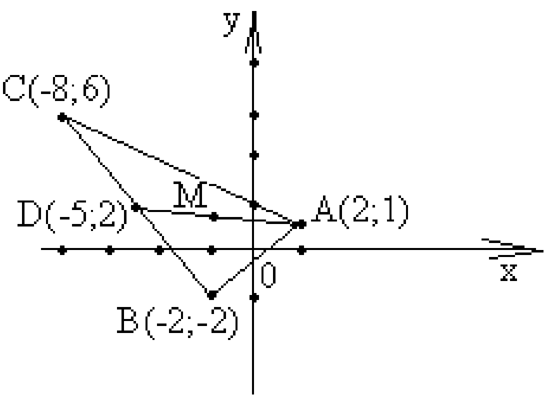
- Площадь треугольника с вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ вычисляется по формуле:



$$s=\left|\frac{1}{2}\left\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right\}\right| \qquad (1.4)$$

Пример 1. Даны вершины треугольника A(2;1), B(-2;-2), C(-8;6). Доказать, что он прямоугольный, найти координаты центра тяжести треугольника и его площадь.

Решение.



Сделаем чертёж. Воспользуемся формулой (1.1) и найдём длины сторон.

$|AB| = \sqrt{(2-(-2))^2+(1-(-2))^2}=\sqrt{16+9}=5$

$|BC| = \sqrt{(-8+2)^2+(6+2)^2}=\sqrt{36+64}=10$

$|AC| = \sqrt{(-8-2)^2+(6-1)^2}=\sqrt{100+25}=\sqrt{125}$

Выполняется равенство:

$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, т.е. для данного треугольника справедлива теорема Пифагора, следовательно, треугольник ABC прямоугольный.

- **Центр тяжести треугольника** находится в точке пересечения его медиан. Воспользуемся формулой (1.3) для нахождения координат точки $D(x_D;y_D)$ - середины стороны BC.

$x_D=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-2-8}{2}=-5$; $y_D=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-2+6}{2}=2$. Получили D(-5;2).

Точка пересечения медиан $M(x_M;y_M)$ делит медиану AD в отношении $\lambda=\frac{AM}{MD}=\frac{2}{1}=2$ (по свойству медиан). Следовательно, используя формулы (1.2), получаем координаты центра тяжести данного треугольника.

$x_M=\frac{x_A+\lambda x_D}{1+\lambda}=\frac{2+2\cdot(-5)}{1+2}=\frac{-8}{3}=-2\frac{2}{3}$; $\qquad y_M=\frac{y_A+\lambda y_D}{1+\lambda}=\frac{1+2\cdot 2}{1+2}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$.

$\Rightarrow M\left(-2\frac{2}{3};1\frac{2}{3}\right)$.

Площадь ΔABC вычислим по формуле (1.4):

$S_{\Delta ABC}=\left|\frac{1}{2}\left\{2(-2-6)-2(6-1)-8(1+2)\right\}\right|=\left|\frac{1}{2}\left(2\cdot(-8)-2\cdot 5-8\cdot 3\right)\right|=\left|\frac{1}{2}(-16-10-24)\right|=25$ (кв. ед.).

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что треугольник с вершинами A(2;-1), B(4;2), C(5;1) равнобедренный.

2. Даны вершины треугольника A(-3;6), B(9;-10), C(-5;4). Найти координаты центра и радиус описанного около него круга.

3. В треугольнике с вершинами O(0;0), A(8;0), B(0;6) определить длину медианы OC и биссектрисы OD.

4. На оси Oy найти точку, равноудалённую от точек A(3;-4) и B(-2;1).

5. На оси абсцисс найти точку M, расстояние от которой до точки A(1;4) равно 5.

6. Даны две вершины треугольника A(3;8) и B(10;2) и точка пересечения медиан M(1;1). Найти координаты третьей вершины треугольника.

7. Отрезок AD разделён на три равные части. Точки деления B(0;-1) и C(2;-3). Найти координаты концов отрезка AD.

Ответы:

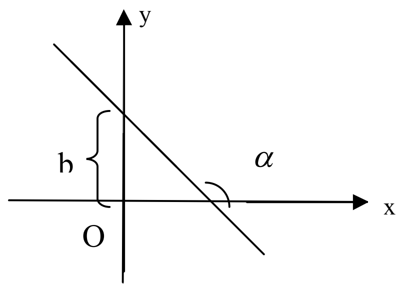
2. (3;-2); 10.
3. 5; $\frac{24\sqrt{2}}{7}$.
4. (0;-2).
5. M_1(4;0), M_2(-2;0).
6. C(-10;-7).
7. (-2;1); (4;-5).

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$y = kx + b, \tag{2.1}$$

где угловой коэффициент прямой k равен тангенсу угла α, образованного прямой с положительным направлением оси Ox ($k = tq\alpha$),
b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.



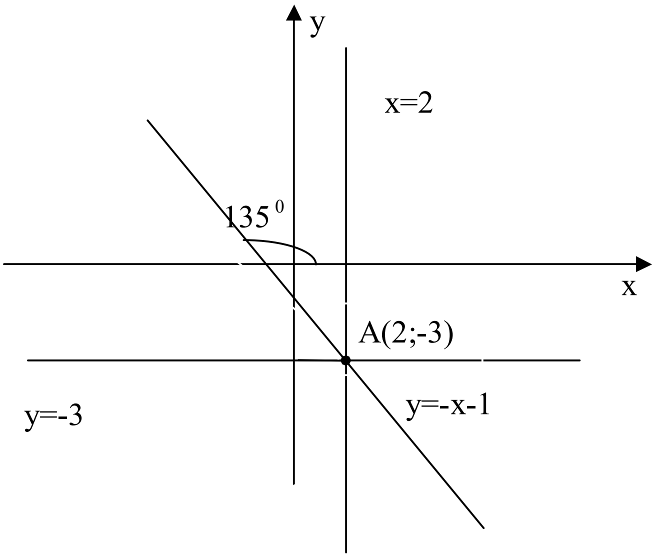
Частные случаи уравнения (2.1):
а) если b = 0, то получаем y = kx – уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей при k = tqα >0 острый угол с осью Oy, а при $k = tq\alpha < 0$ - тупой угол.
б) если α=0, то k = tqα=0, и уравнение прямой, параллельной оси Ox, имеет вид y = b, а самой оси Ox: y = 0;
в) если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то прямая перпендикулярна оси Ox и $k = tq\frac{\pi}{2}$ не существует, т.е. вертикальная прямая не имеет углового коэффициента. Если эта прямая отсекает на оси Ox отрезок, равный a, то, очевидно, что уравнение такой прямой x = a, а уравнение оси Oy: x = 0.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении:

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right), \tag{2.2}$$

где k – угловой коэффициент прямой,
$\left(x_0; y_0\right)$ - координаты данной точки, через которую проходит прямая.

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(2;-3) а) под углом 135^0 к оси Ох; б) параллельно оси Оу; в) параллельно оси Ох.



Решение.

а) угловой коэффициент прямой $k = tq135^0 =$ -1, используя формулу (2.2), получаем: у – (-3) = = -1(х – 2) $\Rightarrow$ у + 3 = - х +2 и окончательно у = - х – 1;

б) уравнение прямой, параллельной оси Оу, имеет вид х = 2;

в) уравнение прямой, параллельной оси Ох, у = - 3.

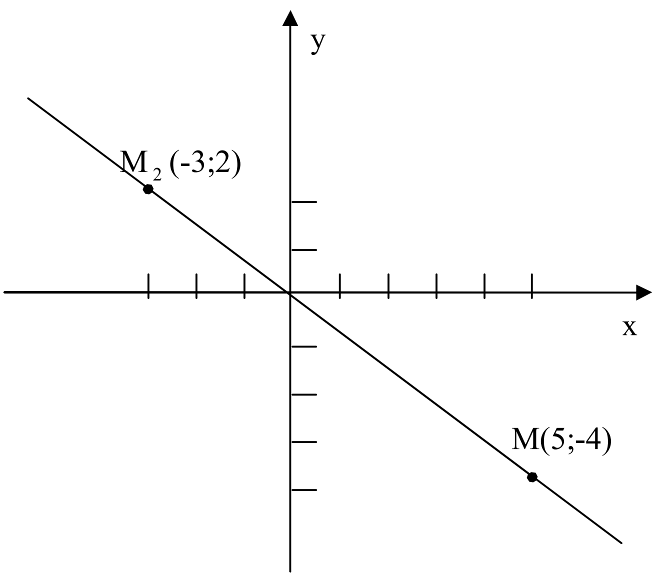
Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, где $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$, имеет вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{2.3}$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки определяется по формуле:

$$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{2.4}$$

Если $x_2 = x_1$, то уравнение (2.3) принимает вид: $x = x_1$. Если $y_2 = y_1$, то уравнение прямой имеет вид: $y = y_1$.



Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точки M_1(5;-4) и M_2(-3;2).

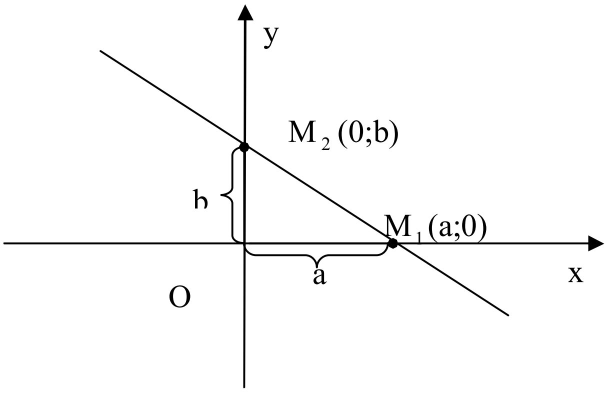
Решение.

Воспользуемся формулой (2.3):

$$\frac{y-(-4)}{2-(-4)} = \frac{x-5}{-3-5} \Rightarrow \frac{y+4}{6} = \frac{x-5}{-3-5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, (2.5)



где a и b – длины отрезков (с учётом знаков), отсекаемых прямой на осях Ох и Оу соответственно.

Общее уравнение прямой: Ах +Ву +С = 0 (2.6)
где А, В и С – постоянные коэффициенты, причём А и В одновременно в нуль не обращаются ($A^2+B^2 \neq 0$).
Частные случаи уравнения (2.6):
 а) Ах +Ву =0 (С=0) - уравнение прямой, проходящей через начало координат;
 б) Ах +С = 0 (В=0) - уравнение прямой, параллельной оси Оу;
 в) Ву +С = 0 (А=0) - уравнение прямой, параллельной оси Ох;
 г) Ах = 0 (В = С = 0) – прямая совпадает с осью Оу;
 д) Ву = 0 (А = С = 0) – прямая совпадает с осью Ох.

Надо уметь переходить от одного вида уравнения прямой к другому.
Пример 4. Найти угловой коэффициент прямой Ах + Ву + С =0.
Решение.

Решаем это уравнение относительно у и приводим его к виду (2.1).

$$\text{By} = -\text{Ax} - \text{C} \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \text{ значит } k = -\frac{A}{B}$$

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами у = k_1x + b_1 и у = k_2x + b_2, то **угол** φ между ними вычисляется по формуле:

$$tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \qquad (2.7)$$

Под углом φ понимается угол, по которому первая прямая вращается вокруг точки пересечения до совпадения со второй против часовой стрелки.
Пример 5. Найти угол между прямыми 3х – 4у - 5 = 0 и 5х – 2у +7 = 0.
Решение.
Оба уравнения решим относительно у. Получим уравнения прямых с угловыми коэффициентами у = $-\frac{3}{4}$x + $\frac{5}{4}$; у = $\frac{5}{2}$x + $\frac{7}{2}$.

Отсюда видно, что $k_1 = -\frac{3}{4}$, и $k_2 = -\frac{5}{2}$, следовательно, $tg\varphi = \frac{\frac{5}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{5}{2}} = -\frac{26}{7}$.

Условие параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$. (2.8)

Условие перпендикулярности двух прямых: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$. (2.9)

Расстоянием d **от точки** $\mathbf{M}_0(x_0; y_0)$ **до прямой Ах + Ву + С =0** называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Расстояние d определяется по формуле

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \tag{2.10}$$

Если точка принадлежит прямой, то координаты этой точки удовлетворяют её уравнению, поэтому задача нахождения координат точки пересечения двух прямых сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными, т.е.

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \text{èëè} \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}.$$

При этом, если

а) $k_1 \neq k_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, то имеется единственная точка пересечения прямых;

б) $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то данные прямые параллельны, т.е. не имеют общей точки;

в) $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые имеют бесконечное множество общих точек, т.е. совпадают.

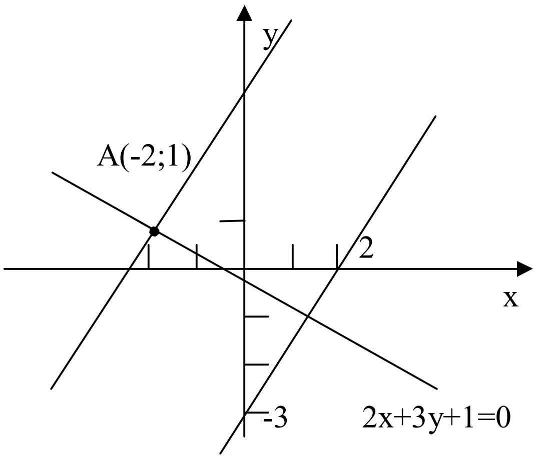
Для построения прямой достаточно найти две точки, через которые она проходит. Рациональнее искать точки пересечения прямой с осями координат. Уравнение оси Ох: у = 0. Подставляя в уравнение данной прямой у = 0, находим абсциссу точки пересечения прямой с этой осью, аналогично, подставляя х = 0, находим ординату точки пересечения
прямой с осью Оу. Соединяя эти две точки, получаем искомую прямую.

Пример 6. Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку А(-2;1), одна из которых параллельна прямой 3х – 2у – 6 =0, а другая перпендикулярна той же прямой.

Решение.

Найдём угловой коэффициент данной прямой, разрешив её уравнение относительно у: 3х – 2у – 6 =0 $\Rightarrow$ 2у = 3х – 6 $\Rightarrow$ у = $\dfrac{3}{2}$х – 3 $\Rightarrow k_1 = \dfrac{3}{2}$.

Воспользуемся формулой (2.2) и условием (2.8), получим уравнение параллельной прямой у – 1 = $\dfrac{3}{2}$(х + 2) или 3х – 2у + 8 =0. По формуле (2.9) имеем: $k_2 = -\dfrac{1}{3/2} = -\dfrac{2}{3}$, тогда уравнение перпендикуляра запишется так:



$y - 1 = -\frac{2}{3}(x + 2)$ или

$2x + 3y + 1 = 0.$

Сделаем чертёж.

Найдём точки пересечения прямой с осями координат:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Пример 7. Найти расстояние между параллельными прямыми
$2x + 3y - 6 = 0$ и $2x + 3y + 24 = 0$.
Решение.
Возьмём на одной из прямых, например на прямой $2x + 3y + 24 = 0$, произвольную точку A(0;-8), тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки A(0;-8) до прямой $2x + 3y - 6 = 0$. Воспользуемся формулой (2.10):

$$d = \left| \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot (-8) - 6}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \right| = \frac{30}{\sqrt{13}} = \frac{30\sqrt{13}}{13}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти величину отрезка b, отсекаемого прямой $5x - 3y - 12 = 0$ на оси Oy, и её угловой коэффициент.

2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2;-1)$ и $M_2(-1;8)$.

3. Найти координаты точки пересечения прямой $2x - y + 2 = 0$ с осями координат.

4. Диагонали ромба, равные 8 и 6 единиц длины, приняты соответственно за оси координат Ox и Oy. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину B перпендикулярно стороне BC.

5. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки: а) A(1;2), B(2;4), C(3;6) и б) D(2;3), E(-2;1), F(3;4).

6. Построить прямые а) $y = \frac{x}{2}$; б) $y = 3x - 2$; в) $y = 5$; г) $2x - 16 = 0$; д) $2x + 3y + 6 = 0$.

7. Дан треугольник с вершинами A(0;5), B(3;1), C(-6;-3). Составить уравнения: медианы CE, биссектрисы AD, найти точку их пересечения и угол между ними.

Ответы:

1. b=-4; $k=\frac{5}{3}$. 3. (-1;2). 5. а) да; б) нет.

2. 3x + y – 5 =0. 4. 4x+3y-9=0.

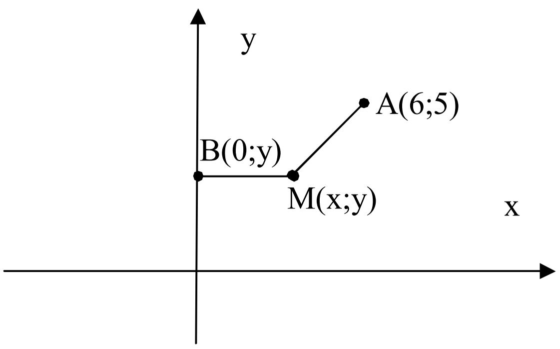
7. СЕ: 4x - 5y+9=0; АД: x=0; (0;$\frac{9}{5}$); $\varphi=\frac{\pi}{2}-arctq\frac{4}{5}$.

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Каждую линию можно рассматривать как некоторое множество точек, причём это множество точек обладает каким-либо общим для них геометрическим свойством. Точки, не принадлежащие этому множеству, указанным свойством не обладают. Это свойство выражается уравнением, связывающим координаты x и y точек данной линии. Переменные x и y называются текущими координатами, они могут принимать значения, равные координатам любой точки данной линии. Например, множество точек, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от сторон угла, является прямой линией и называется биссектрисой этого угла; перпендикуляр, проведённый через середину данного отрезка, есть множество точек, равноудалённых от концов этого отрезка. Одна из задач состоит в составлении уравнения линии как множества точек, обладающих одним свойством.

Пример 8. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от оси Оy и от точки А(6;5).

Решение. Пусть М(x;y) – точка, принадлежащая линии, уравнение которой надо написать, т.е. x, y являются текущими координатами.



По условию дано, что расстояния от точки М до оси Оy и до точки А одинаковы, т.е. ВМ = МА, где ВМ перпендикуляр к оси ОУ, значит координаты точки В будут x = 0, т.к. точка В лежит на оси Оy, а ордината её будет совпадать с ординатой точки М, т.е. координаты точки В(0;y). Запишем данные расстояния в координатной форме, используя формулу (1.1),

$$BM=\sqrt{(0-x)^2+(y-y)^2}=\sqrt{x^2}, \qquad AM=\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}.$$

По условию ВМ = АМ, т.е. $\sqrt{x^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}$.

Возведём обе части этого равенства в квадрат и упростим полученное уравнение.

$x^2=(x-6)^2+(y-5)^2 \Rightarrow x^2=x^2-12x+36+(y-5)^2 \Rightarrow (y-5)^2=12(x-3)$ - это уравнение линии, точки которой обладают свойством равноудалённости от оси Оy и точки А.

Итак, чтобы составить уравнение линии как множества точек, обладающих одинаковым свойством, надо:
а) взять произвольную (текущую) точку M(x;y), принадлежащую линии,
б) записать равенством общее свойство всех точек M линии,
в) выразить отрезки, входящие в равенство через текущие координаты точки M и данные задачи.

Кривой второго порядка на плоскости называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F=0, \qquad (3.1)$$

где какой-либо из коэффициент A, B, и C не равен нулю, т.е. $A^2+B^2+C^2 \neq 0$.

Окружность

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от заданной точки, называемой центром.

В прямоугольной системе координат уравнение окружности имеет вид

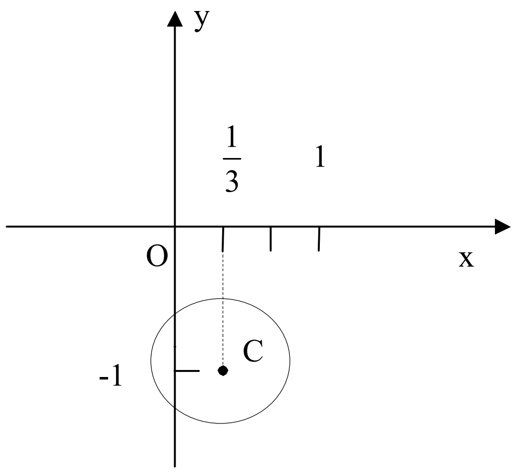
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \qquad (3.2)$$

где $(a;b)$ - координаты центра, R - радиус.

Уравнение (3.2) называется каноническим уравнением окружности. Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. a=b=0, то уравнение (3.2) принимает вид:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (3.3)$$

Пример 9. Написать уравнение окружности с центром в точке $C\left(\frac{1}{3};-1\right)$ и радиусом $\frac{1}{2}$.



Решение.

По условию дано a $=\frac{1}{3}$; b= -1; R=$\frac{1}{2}$, следовательно, по формуле (3.2) получим искомое уравнение окружности $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}$ или $36x^2+36y^2 - 24x +72y +31=0$.

Надо знать, что если в уравнении (3.1) A=C$\neq$0 и B=0, то уравнение

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (3.4)$$

определяет окружность, и уметь переходить от уравнения (3.4) к уравнению (3.2).

Пример 10. Найти координаты центра и радиус окружности $3x^2 + 3y^2 + 6x - - 4y - 4=0$.

Решение.

Преобразуем данное уравнение к виду (3.2), разделив обе части уравнения на 3 и выделив полные квадраты в левой части: $x^2+y^2+2x-\frac{4}{3}y-\frac{4}{3}=0$ $\Rightarrow (x^2+2x+1)-1+(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9})-\frac{4}{9}-\frac{4}{3}=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$. Из полученного уравнения следует, что центр окружности находится в точке $C(-1;\frac{2}{3})$ и $R=\frac{5}{3}$.

Пример 11. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке C(-2;3) и касающейся прямой $x - 3y + 2 = 0$.

Решение.

Радиус окружности равен расстоянию от центра до точки касания, но радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. Следовательно, радиус можно рассматривать как расстояние от точки до прямой и найти по формуле (2.10)

$R=d=\left|\frac{-2-3\cdot 3+2}{\sqrt{1+9}}\right|=\frac{9}{\sqrt{10}}$, где числитель дроби есть уравнение касательной, в которое вместо текущих координат подставили координаты точки C(-2;3), расстояние до которой находим. Запишем уравнение окружности $(x+2)^2+(y-3)^2=8{,}1$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать уравнение окружности, если центр её находится в точке C(1;3) и окружность проходит через точку M(-4;5).
2. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+5y - 2=0$.
3. Найти уравнение окружности, если концы одного из её диаметров имеют координаты (2;-4) и (-6;2). Лежат ли на этой окружности точки A(2;-1), B(-3;4), C(-2;4)?
4. Определить расстояние между центрами окружностей
$x^2+y^2 - 6x -8y -3=0$ и $x^2+y^2+2x=0$.
5. Найти точки пересечения окружности $(x-2)^2+(y+3)^2=20$ с осями координат.
6. Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2=5$ с прямой $3x - y +1=0$.
7. Составить уравнение окружности, касающейся оси Ox в точке (6;0) и проходящей через точку (9;9).
8. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами A(0;2), B(1;1), C(2;-2).

Ответы

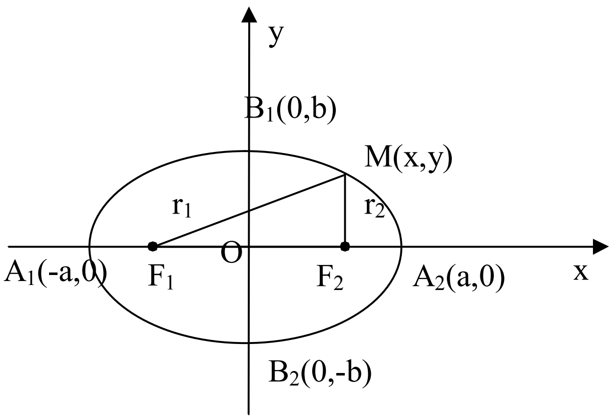
1. $(x-1)^2+(y-3)^2=29$. 2. (0;-2,5), $R=\frac{\sqrt{33}}{2}$. 3. $(x+2)^2+(y+1)^2=25$. Точка А лежит внутри круга, точка В - вне круга, точка С - на окружности. 4. $\sqrt{32}$. 5. Ось абсцисс пересекает окружность в точках ($2+\sqrt{11}$;0) и ($2-\sqrt{11}$;0), ось ординат пересекает окружность в точках (0;1) и (0;-7). 6. Прямая пересекает окружность в точках (0,4;2,2) и (-1;-2). 7. $(x-6)^2+(y-5)^2=25$. 8. (-3;-2), R=5.

Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная 2a. Фокусы эллипса находятся на оси Ox на равных расстояниях от начала координат в точках F_1(-c;0) и F_2 (c;0). Простейшее (каноническое) уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (3.5)$$

где a – длина большой полуоси эллипса, b –длина малой полуоси, координаты фокусов находятся из соотношения $c^2=a^2-b^2$. (3.6)



Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется эксцентриситетом:

$$\varepsilon=\frac{c}{a};\ 0\le\varepsilon\le1. \qquad (3.7)$$

Расстояния от некоторой точки эллипса M(x;y) до его фокусов называются фокальными радиусами этой точки, обозначаются r_1 и r_2, и определяются формулами:

$$r_1=a+\varepsilon x, r_2=a-\varepsilon x \qquad (3.8)$$

(из определения эллипса следует, что для любой его точки справедливо равенство $r_1+r_2=2a$). Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ называются вершинами, точка O(0;0) – центром эллипса.

Пример 12. Дано уравнение эллипса $16x^2+25y^2=400$. Найти:

а) длины его полуосей, б) координаты фокусов, в) эксцентриситет,

г) точки эллипса, расстояния от которых до левого фокуса равно 6.

Решение.

а. Запишем уравнение эллипса в виде (3.5), разделив обе его части на 400: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Отсюда $a^2=25$, $b^2=16$, значит большая полуось a=5, малая полуось b=4.

б. Используя соотношение (3.6), находим c^2=25 - 16=9, с=3. Следовательно, F_1(-3;0), F_2(3;0).

в. По формуле (3.7) находим эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

г. По формулам (3.8) находим абсциссы точек, расстояние от которых до точки F_1 равно 6: 6=5+$\frac{3}{5}$x, т.е. x=$\frac{5}{3}$. Подставляя значение x=$\frac{5}{3}$ в уравнение эллипса, найдём ординаты этих точек: $16 \cdot \frac{25}{9} + 25 \cdot y^2$=400 $\Rightarrow \frac{16}{9} + y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = \frac{16 \cdot 8}{9} \Rightarrow y_{1,2} = \pm\frac{4\sqrt{8}}{3} = \pm\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Условию задачи удовлетворяют точки $M_1\left(\frac{5}{3};-\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$ и $M_2\left(\frac{5}{3};\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$.

Пример 13. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ох, симметрично относительно начала координат, если:

а. задана точка $M_1\left(2;\sqrt{3}\right)$ эллипса и его малая полуось равна 2;

б. расстояние между фокусами равно 24 и большая ось равна 26;

в. эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{3}{5}$ и заданы фокусы F_1(-6;0) и F_2(6;0).

Решение.

а. Уравнение эллипса будем искать в виде (3.5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$=1. По условию эллипс проходит через точку M_1, значит её координаты удовлетворяют уравнению эллипса, т.е. $\frac{4}{a^2} + \frac{3}{2^2}$=1, где малая полуось b=2. Находим $a^2 = \frac{4}{1-\frac{3}{4}}$=16 и получаем искомое уравнение эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4}$=1.

б. Расстояние между фокусами равно 2с=24, т.е. с=12, большая ось 2а=26, значит а=13.

Из соотношения (3.6) находим $b^2=a^2-c^2=13^2-12^2$=(13-12)(13+12)=25. Следовательно, искомое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25}$=1.

в. Из соотношения (3.7) следует, что $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$. По условию задачи, с=6,

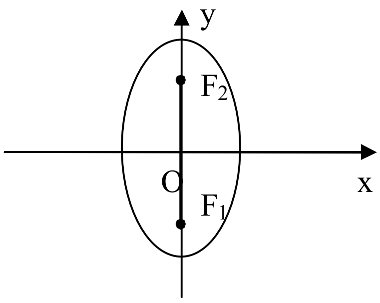
получаем уравнение $\frac{6}{a} = \frac{3}{5}$, откуда а=10, тогда из формулы (3.6) следует $b^2=a^2-c^2$=100 - 36=64.

Искомое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64}$=1.

Замечания:

1) если a = b, то уравнение (3.5) определяет окружность $x^2+y^2=a^2$;

2) если фокусы эллипса лежат на оси Oy, то эллипс имеет приведенный ниже вид.



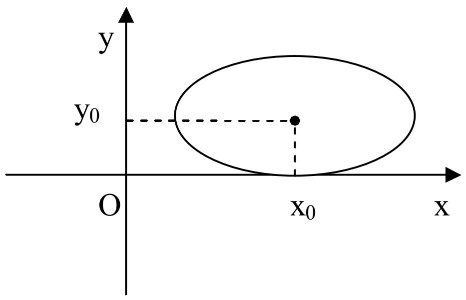
В этом случае b>a, $c^2=b^2-a^2$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$. (3.9)

Пример 14. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Oy, симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно 24, эксцентриситет равен $\varepsilon=\frac{12}{13}$.

Решение.

Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, b>a. По условию задачи 2c=24, значит c=12 и $\varepsilon=\frac{12}{13}=\frac{c}{b}$ по формуле (3.9), из полученного равенства находим b=13. Так как $c^2=b^2-a^2$, то получаем $12^2=13^2-a^2$, отсюда $a^2=169-144=25$. Таким образом, уравнение эллипса получается: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$;

3) уравнение эллипса с осями, параллельными координатным, имеет вид:



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \quad (3.10)$$

где $(x_0;y_0)$ - координаты центра эллипса.

Пример 15. Показать, что уравнение $7x^2+16y^2-28x+32y-68=0$ определяет эллипс; построить его; найти его оси; координаты центра и эксцентриситет.

Решение.

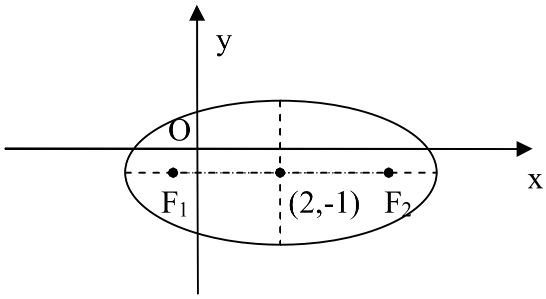
Преобразуем данное уравнение кривой. Сгруппируем слагаемые, содержащие *x* и содержащие *y*.

$$(7x^2-28x)+(16y^2+32y)-68=0$$

Выносим за скобки общие числовые множители, а выражение в скобках преобразуем до полного квадрата.

$$7(x^2-4x+4-4) + 16(y^2+2y+1-1)-68=0$$

Полученное уравнение можно переписать в виде: $7(x-2)^2+16(y+1)^2=112$, т.е. $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{7}=1$. Получили уравнение вида (3.10); центр симметрии имеет координаты (2;–1). Из уравнения находим $a^2=16$, $a=4$ и $b^2=7$, $b=\sqrt{7}$, тогда $c^2=a^2-b^2=16-7=9$, $c=3$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$.



Задачи для самостоятельного решения

1. Дано уравнение эллипса $51x^2+100y^2=5100$.

Найти: а) длины его полуосей; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса равно 17.

2. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox, симметрично относительно начала координат, если а) $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$ u $\varepsilon=0{,}8$; б) большая ось равна 14 и $\varepsilon=\frac{2}{3}$; в) эллипс проходит через точки A(6;4) и B(8;3).

3. Показать, что уравнение $4x^2+ 3y^2- 8x + 12y - 32=0$ определяет эллипс, найти его полуоси, координаты центра, эксцентриситет. Сделать чертёж.

Ответы

1. $a=10$, $b=\sqrt{51}$; $F_1(-7;0)$, $F(7:0)$, $\varepsilon=0{,}7$, (10;0).

2. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1; \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{245/9}=1; \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1.$

3. $\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$; $a=2\sqrt{3}$, $b=4$, (1;-2), $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная 2a.

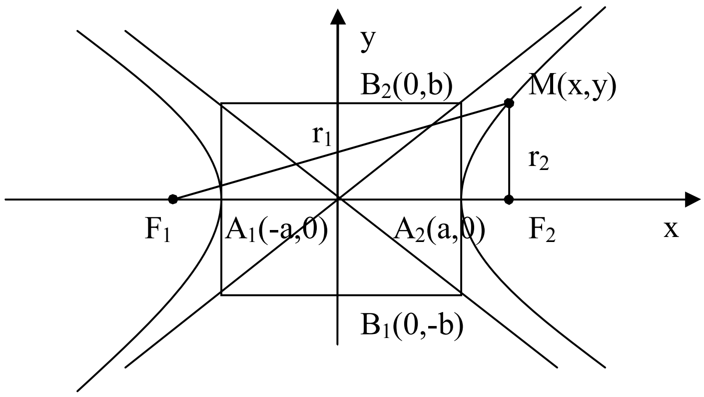
Уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ox, имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3.10}$$

где a - длина действительной полуоси,

b - длина мнимой полуоси. Числа 2a и 2b называются соответственно действительной и мнимой осями гиперболы. Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$,

c - половина расстояния между фокусами.



Числа a, b и c связаны соотношением:

$$c^2=a^2+b^2. \tag{3.11}$$

Точки A_1 и A_2 называются вершинами гиперболы, точка O - центром, расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки M гиперболы до её фокусов называются фокальными радиусами этой точки. Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ ($\varepsilon>1$, т.к. c>a) (3.12)

называется эксцентриситетом гиперболы. Фокальные радиусы определяются формулами:

а) для точек правой ветви гиперболы: $r_1=a+\varepsilon x, r_2=-a+\varepsilon x$; (3.13)

б) для точек левой ветви: $r_1=-a-\varepsilon x, r_2=a-\varepsilon x$. (3.14)

Прямоугольник, центр которого совпадает с точкой O, а стороны равны и параллельны осям гиперболы, называется основным или направляющим прямоугольником гиперболы. Диагонали основного прямоугольника гиперболы лежат на двух прямых, называемых асимптотами гиперболы; они определяются уравнением:

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \tag{3.15}$$

Если действительная и мнимая оси гиперболы равны (т.е. a=b), то гипербола называется равносторонней. Её уравнение записывается в виде:

$$x^2-y^2=a^2, \tag{3.16}$$

а уравнения асимптот:

$$y=\pm x. \tag{3.17}$$

Во всех задачах на гиперболу предполагается, что оси симметрии гиперболы совпадают с осями координат.

Пример 16. Дано уравнение гиперболы: $9x^2-16y^2=144$.

Найти:

а) длины полуосей; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет гиперболы; г) уравнения асимптот; д) фокальные радиусы точки M(5;2,5).

Решение.

Разделив обе части уравнения на 144, приведём уравнение гиперболы к каноническому виду (3.10): $\frac{x^2}{16^2}-\frac{y^2}{9^2}=1$.

Отсюда: а) a^2=16, b^2=9, т.е. a=4, b=3; б) по формуле (3.11) находим c^2=16+9, т.е. c=5. Следовательно, координаты фокусов F_1(-5;0), F_2(5;0); в) эксцентриситет находим по формуле (3.12) $\varepsilon=\frac{5}{4}$;

г) уравнения асимптот найдём по формуле (3.15) y=$\pm\frac{3}{4}$x;

д) точка M лежит на правой ветви гиперболы (x=5>0), воспользуемся формулами (3.13):

$r_1=4+\frac{5}{4}\cdot 5=10,25;\ r_2=-4+\frac{5}{4}\cdot 5=2,25;\ \left(r_1-r_2=2a\Leftrightarrow 10,25-2,25=8\right)$.

Пример 17. Составить уравнение гиперболы, если известны уравнения асимптот:

y=$\pm\sqrt{2}$ x и координаты фокусов ($\pm$3;0).

Решение.

По условию задачи $\frac{b}{a}=\pm\sqrt{2}$. Из соотношения (3.11) получаем a^2+b^2=9.

Решаем систему уравнений $\begin{cases} b=\pm\sqrt{2}a \\ a^2+b^2=9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=\pm\sqrt{2}a \\ a^2=3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=\sqrt{6} \\ a=\sqrt{3} \end{cases}$, подставив значения a^2 и b^2 в уравнение (3.10), получим искомое уравнение $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дано уравнение гиперболы 25x^2 - 4y^2=100. Найти расстояние между её фокусами, эксцентриситет, уравнения асимптот, координаты вершин.

2. Найти каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

а) расстояние между вершинами равно 4 и гипербола проходит через точку (3;$\frac{\sqrt{5}}{2}$); б) действительная полуось равна 3, расстояние между фокусами равно 10; в) мнимая полуось равна 3 и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{4}$; г) уравнения асимптот y=$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$x и гипербола проходит через точку (-4;-2).

Ответы

1. $2\sqrt{29}$; $y=\pm\frac{5}{2}x$; ($\pm$2;0).

2. а) $\frac{x^2}{4}-y^2$=1; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}$=1; в) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$=1; г) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}$=1.

Парабола

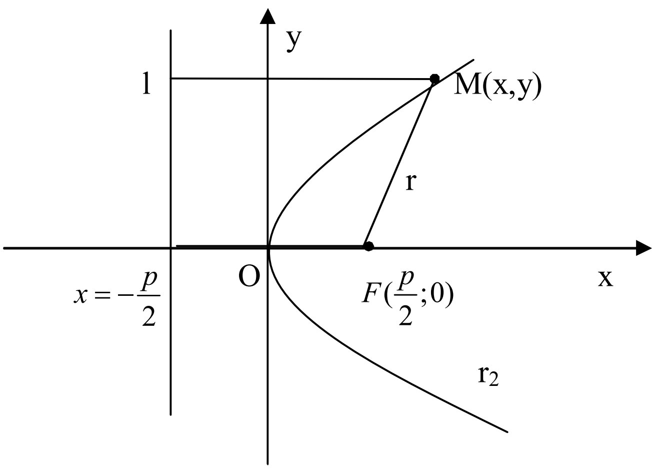
Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки, называемой фокусом, и заданной прямой, называемой директрисой.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Ох и ветви направлены вправо, имеет вид:

$$y^2=2px, \qquad (3.18)$$

где число $p>0$, равное расстоянию от фокуса F до директрисы l, называется параметром параболы. Фокусом параболы является точка

$$F\left(\frac{p}{2};0\right). \qquad (3.19)$$



Уравнение директрисы

$$x=-\frac{p}{2}. \qquad (3.20)$$

Длина r отрезка FM, фокальный радиус точки M, вычисляется по формуле:

$$r = x + \frac{p}{2}. \qquad (3.21)$$

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ох, ветви которой направлены влево, имеет вид:

$$y^2 = -2px \ (p>0). \qquad (3.22)$$

Уравнение директрисы: $x = \frac{p}{2}$. (3.23)

Координаты фокуса: $F(-\frac{p}{2};0)$. (3.24)

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Оу и ветви направлены вверх, имеет вид:

$$x^2 = 2py \ (y>0). \qquad (3.25)$$

Фокусом её является точка $F(0;\frac{p}{2})$. (3.26)

Уравнение директрисы этой параболы $y = -\frac{p}{2}$. (3.27)

Фокальный радиус точки M параболы $r = y +\frac{p}{2}$. (3.28)

Если ветви параболы направлены вниз, то её уравнение имеет вид:

$x^2=-2py \ (p>0)$, (3.29) тогда фокус находится в точке $F(0;-\frac{p}{2})$. (3.30)

Уравнение директрисы такой параболы: $y=\frac{p}{2}$. (3.31)

Пример 18. Определить координаты фокуса F и уравнение директрисы параболы, если её уравнение имеет вид:

а) $y^2=10x$; б) $y^2=-6x$; в) $x^2=8y$; г) $x^2= -\frac{y}{12}$.

Решение.

а. Парабола задана каноническим уравнением (3.18). Следовательно, $2p=10 \Rightarrow p=5$. Используя формулы (3.19), (3.20), (3.21) находим, что фокус имеет координаты F (2,5;0); уравнение директрисы: x= -2,5.

б. Парабола задана каноническим уравнением (3.22). Следовательно, 2p =6; p=3. Используя формулы (3.23), (3.24), находим координаты фокуса F (-1,5;0), уравнение директрисы: x= 1,5.

в. Парабола задана каноническим уравнением (3.25). Следовательно, $2p=8 \Rightarrow p=4$. По формулам (3.26), (3.27), находим координаты фокуса F (0;2), уравнение директрисы: y=-2.

г. Решаем аналогично: из уравнения параболы (3;29) следует:

$2p=\frac{1}{12} \Rightarrow p=\frac{1}{24}$. По формулам (3.30), (3.31) и (3.28) находим $F(0;-\frac{1}{48})$; уравнение директрисы: $y=\frac{1}{48}$.

Пример 19. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если её директрисой служит прямая x=-4.

Решение.

Расстояние директрисы от начала координат равно $\frac{p}{2}$, следовательно, $\frac{p}{2}=4$, т.е. p=8. Уравнение этой параболы имеет вид (3.18), так как абсцисса директрисы отрицательна. Подставив в уравнение (3.18) значение параметра p, получим $y^2=16$.

Пример 20. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку M(4;2).

Решение.

Искомая парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точку M(4;2), следовательно, её уравнение имеет вид (3.25). Подставив в это уравнение координаты точки M, найдём p=4. После подстановки в уравнение (3.25) значения p, получим $x^2=8y$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если её фокус находится в точке: а) F(5;0), б) F(-4;0), в) F(0;2), г) F(0;-3).

2. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если её директрисой служит прямая: а) x=-2; б) x=3; в) y=-4; г) y=1.

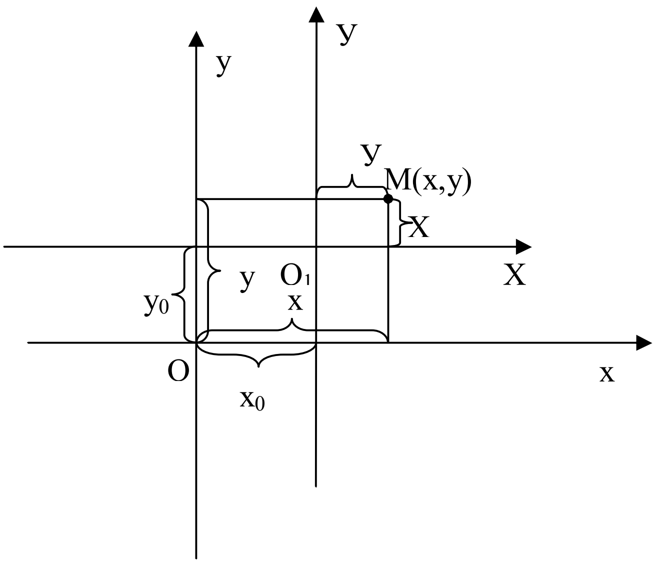
3. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно а) оси Ох и проходящей через точку М(-4;2); б) оси Оу и проходящей через точку М(-3;1).

Ответы

1. а) $y^2=20x$; б) $y^2=-16x$; в) $x^2=-8y$; г) $x^2=-12y$.
2. а) $y^2=8x$; б) $y^2=-12x$; в) $x^2=16y$; г) $x^2=-4y$.
3. а) $y^2=-x$; б) $x^2=9y$.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Если перенести начало координат в точку $O_1(x_0;y_0)$ и не менять направление осей, то связь между старыми координатами x, y и новыми X, У одной и той же точки выражаются формулами:



$x = X+x_0$; $y = У+y_0$ (3.32)

или $X=x - x_0$; $У=y - y_0$. (3.33)

Формулы (3.32) и (3.33) называются формулами преобразования координат (параллельного переноса осей), позволяют находить старые координаты по известным новым и наоборот.

При помощи формул параллельного переноса можно показать, что уравнение вида $y=ax^2+bx+c$ определяет параболу, вершина которой находится в точке $O_1(x_0;y_0)$, а ось симметрии её параллельна оси Оу.

Пример 21. Вычислить координаты вершины и фокус параболы $4x^2+4x+$ $+3y-2=0$.

Решение.

Преобразуем данное уравнение к одному из видов (3.34) или (3.35), дополнив двучлен до полного квадрата:

$$4(x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})+3y-2=0 \Rightarrow 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 1+3y-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=- 3y+3 \Rightarrow 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = - 3(y-1) \text{ или окончательно}$$

$$(x+\frac{1}{2})^2=-\frac{3}{4}(y-1).$$

Следуя формулам (3.33), обозначим $X=x+\frac{1}{2}$; $У=y-1$, тогда уравнение параболы в новых координатах примет вид (3.29): $X^2=-\frac{3}{4}У$. Вершина этой параболы совпадает с началом координат новой системы, а в старой системе вершина имеет координаты ($-\frac{1}{2}$;1). Найдём координаты фокуса данной параболы в новой системе координат. По формуле (3.30) фокус имеет координаты $\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, из уравнения параболы следует, что 2p $=\frac{3}{4}$, значит p $=\frac{3}{8}$, а $F\left(0;-\frac{3}{16}\right)$. Следовательно, Х =0, У $=-\frac{3}{16}$, но Х = х $+\frac{1}{2}$; У = у -1, отсюда х = $-\frac{1}{2}$; у = $1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$, т.е. координаты фокуса в старой системе координат будут $F\left(-\frac{1}{2};\frac{13}{16}\right)$.

Уравнение параболы с вершиной в точке (a;b), с осью симметрии, параллельной оси Оу, и ветвями, направленными вверх, имеет вид:

$$(x-a)^2 = 2p(y-b). \qquad (3.34)$$

Уравнение параболы с вершиной в точке (a;b), с осью симметрии, параллельной оси Оу, и ветвями, направленными вниз, имеет вид:

$$(x-a)^2 = -p(y-b). \qquad (3.35)$$

Уравнение параболы с вершиной в точке (a;b), с осью симметрии, параллельной оси Ох и ветвями, направленными вправо, имеет вид:

$$(y-b)^2 = 2p(x-a). \qquad (3.36)$$

Уравнение параболы с вершиной в точке (a;b), с осью симметрии, параллельной оси Ох и ветвями, направленными влево, имеет вид:

$$(y-b)^2 = 2p(x-a). \qquad (3.37)$$

В каждом из уравнений параметр параболы p>0 – расстояние от фокуса параболы до её директрисы.

Пример 22. Составьте уравнение параболы, имеющей вершину А(1;2) и проходящей через точку М(4;8), если ось симметрии параболы параллельна оси Ох.

Решение.

Согласно условию, уравнение искомой параболы имеет вид (3.36), так как точка М(4;8) расположена правее вершины параболы, значит ветви параболы направлены вправо. Для вычисления параметра р подставим в уравнение (3.36) координаты вершины А и точки

М: $(8-2)^2=2p(4-1)$, откуда р=6. Подставив в уравнение (3;36) найденное значение р=6 и координаты вершины А, получим искомое уравнение

$$(y-2)^2=12(x-1).$$

Пример 23. Составьте уравнение параболы с вершиной А(-1;1) и фокусом F(-1; -4).

Решение.

Согласно условию, уравнение искомой параболы имеет вид (3.35), поскольку вершина параболы и её фокус расположены на прямой х = -1, т.е. ось симметрии параллельна оси Оу, ветви параболы направлены вниз, т.к.

фокус расположен ниже вершины. По формулам (3.33) получаем координаты фокуса в новой системе координат Х = -1 – (-1) =0; У = -4 -1= -5, но координаты фокуса определяются по формуле (3.30), значит $-\frac{p}{2}$ = -5, откуда p=10. Подставив в уравнение (3.35) координаты вершины А и найденное значение p, получим уравнение параболы
$(x+1)^2 = -20(y-1)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Составьте уравнение параболы с осью симметрии, параллельной оси Ох, если: а) парабола проходит через точку М(1;3) и имеет вершину А(-4;-2); б) известны координаты её вершины А(-4;0) и уравнение директрисы x= 2.

2. Составьте уравнение параболы с осью симметрии, параллельной оси Оу, если:

а) парабола проходит через точку М(-6;-8) и имеет вершину А(2;4);

б) известны координаты её вершины А(0;-2) и уравнение директрисы: y= -5.

3. Составьте уравнение параболы с вершиной А и фокусом F: а) А(4;6), F(-2;6), б) А(3;-2), F(3;0).

4. Составьте уравнение параболы, если известны координаты фокуса F и уравнение директрисы: а) F(-6;1), x =2; б) F(0;0), x =-4; в) F(2;2), y =-4; г) F(0;0), y =4.

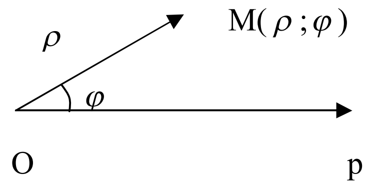
5. Найдите уравнение директрисы, координаты вершины и фокуса параболы: а) $y^2 - 8y - 8x - 8=0$; б) $y^2 - 12x - 36 =0$; в) $x^2 +10x +8y +41 =0$; г) $x^2 - 6y - 9 =0$.

Ответы

1. а) $(y+2)^2 =5(x+4)$; б) $y^2 = -24(x+4)$. 2. а) $(x-2)^2 =16(y-4)$; б) $x^2 =12(y+2)$.
3. а) $(y-6)^2 = -24(x-4)$; б) $(x-3)^2 =8(y+2)$. 4. а) $(y+1)^2 = -16(x+2)$;
б) $y^2 = 8(x+2)$; в) $(x-2)^2 =12(y+1)$; г) $x^2 = -8(y-2)$. 5. а) x = -5; А(-3;4); F(-1;4); б) x = -6, А(-3;0), F(0;0); в) y =0, А(-5;-2), F(-5;-4); г) y =-3, А(0;1,5), F(0;0).

ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

Элементами полярной системы координат являются: 1) точка О – полуось; 2) луч, выходящий из точки О – полярная ось Ор; 3) единица измерения длины l.



Положение точки М на плоскости задаётся расстоянием этой точки от полюса т.е. длиной радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, выраженной в принятых единицах измерения, и углом между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и полярной осью, причём угол измеряется в радианах и считается положительным при отсчёте от полярной оси против часовой стрелки.

Числа ρ и φ называются полярными координатами точки M; ρ - полярным радиусом, а φ - полярным углом. Полярные координаты точки записываются так: $M(\rho;\varphi)$.

Если полюс полярной системы координат находится в начале прямоугольной системы координат, а положительная полуось Ox совпадает с полярной осью, то при условии, что для измерения ρ, x и y использованы равные единицы масштаба, прямоугольные и полярные координат связаны следующими формулами:

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi \tag{4.1}$$

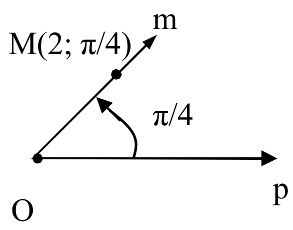
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \tag{4.2}$$

$$tq\ \varphi = \frac{y}{x}. \tag{4.3}$$

Пример 24. Построить точку $M(2;\frac{\pi}{4})$ в полярной системе координат.

Решение.

Проведём через полюс O луч Om под углом $\frac{\pi}{4}$ к полярной оси Op.



На луче Om отложим отрезок OM, равный двум единицам масштаба. Точка M является искомой.

Пример 25. Найти прямоугольные координаты точки $A(4;\frac{\pi}{3})$.

Решение.

По формулам (4.1) получим $x = 4\cos\frac{\pi}{3} = 2$; $y = \sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$.

Пример 26. Найти полярные координаты точки, прямоугольные координаты которой $(-3;3\sqrt{3})$.

Решение.

По формулам (4.2) получим: $\rho = \sqrt{(-3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{36} = 6$,

$\sin\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\varphi = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$.

Учитывая знаки синуса и косинуса, находим полярный угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Пример 27. Вычислить расстояние между двумя точками, $A(\rho_1;\varphi_1)$ и $B(\rho_2;\varphi_2)$, заданными в полярных координатах.

Решение.

По теореме косинусов получаем:

$$AB = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \qquad (4.4)$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти полярные координаты точек, симметричные точкам $M_1\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(4;\frac{2\pi}{3}\right)$ и $M_3\left(1;-\frac{\pi}{6}\right)$: а) относительно полюса; б) относительно полярной оси. Построить эти точки.

2. Найти прямоугольные координаты точек: $M_1(0;\frac{\pi}{8})$, $M_2\left(4;-\frac{3\pi}{4}\right)$, $M_3\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)$ и $M_4\left(\frac{1}{2};-\frac{2\pi}{3}\right)$.

3. Найти полярные координаты точек: $M_1\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_3\left(-2\sqrt{3};-2\right)$.

4. Могут ли быть прямоугольные и полярные координаты точки представлены одной и той же парой чисел?

5. Вычислить расстояние между двумя точками: $A(6;\frac{\pi}{3})$ и $B(5;\frac{2\pi}{3})$.

Ответы

1. а) $(2;-\frac{3\pi}{4}),(4;-\frac{\pi}{3})$, $(1;\frac{5\pi}{6})$; б) $(2;-\frac{\pi}{4})$, $(4;-\frac{2\pi}{3})$, $(1;\frac{\pi}{6})$. 2. $M_1(0;0)$, $M_2\left(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$, $M_3\left(-\sqrt{3};1\right)$, $M_4\left(\frac{1}{4};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 3. $M_1(2;-\frac{\pi}{4})$, $M_2\left(3;\frac{2\pi}{3}\right)$, $M_3\left(4;-\frac{5\pi}{6}\right)$. 4. Да, если точка лежит на положительной полуоси Ox. 5. $\sqrt{31}$.

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Прямая

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M(x_1;y_1)$ и $N(x_2;y_2)$. Сделать чертеж.

1. M(-2;3), N(3;-1).
2. M(1;-3), N(-3; 5).
3. M(4;-6), N(-1; 5).
4. M(-4; 2), N(-2; 9).
5. M(-6;-3), N(5; 1).
6. M(-5; 7), N(3;-3).
7. M(9;-4), N(-3; 1).
8. M(-4; 5), N(8;-5).
9. M(6;-7), N(-3;-7).
10. M(-2; 6), N(-2; 8).
11. M(-6;-2), N(5; 9).
12. M(4;-7), N(-2; 5).
13. M(4;-6), N(-1; 2).
14. M(5;-3), N(-5; 3).
15. M(-9;-1), N(1; 9).
16. M(1;-4), N(-5; 4).
17. M(-6;-8), N(-4;-2).
18. M(-4;-5), N(-4; 6).
19. M(6;-3), N(-2;-1).
20. M(8;-2), N(4;-6).
21. M(7;-2), N(5;-6).
22. M(6;-5), N(2;-7).
23. M(-6;-1), N(-3; 5).
24. M(-3;-5), N(-1;-7).
25. M(3;-6), N(5; -3).

2. Составить уравнение прямой линии, проходящей через т. A (x;y) параллельно прямой S: Ax+By+C=0. Сделать чертеж.

1. A(2; 3); S: 2x – y + 3 = 0.
2. A(-1; 6); S: 3x + 2y – 6 = 0.
3. A(9;-1); S: x - 4y + 8 = 0.
4. A(4;-5); S: 5x - 4y + 10 = 0.
5. A(-6;-2); S: 2x - 4y – 8 = 0.
6. A(2;-1); S: x - 3y + 6 = 0.
7. A(4;-1); S: x - 4y + 4 = 0.
8. A(-3; 1); S: 2x - 2y + 4 = 0.
9. A(4;-7); S: 3x - 2y + 6 = 0.
10. A(-1;-1); S: -x + y – 5 = 0.
11. A(6;-7); S: 4x + 2y – 6 = 0.
12. A(-3;-5); S: x – y + 3 = 0.
13. A(-9;-1); S: x + y - 1=0.
14. A(4;-6); S: 2x – y + 1 = 0.
15. A(-2;-5); S: 6x + 3y + 12 = 0.
16. A(3;-2); S: -2x + 6y – 6 = 0.
17. A(0;-4); S: -3x + 4y – 12 = 0.
18. A(4; 0); S: 4x - 5y + 16 = 0.
19. A(0; 0); S: x - 10y + 10 = 0.
20. A(-3;-3); S: 2x – y + 4 = 0.
21. A(-1; 7); S: -x + 3y – 9 = 0.
22. A(5;-3); S: 2x – y – 12 = 0.
23. A(-7;-1); S: 2x + 3y + 12 = 0.
24. A(4;-8); S: -x - 2y + 4 = 0.
25. A(7;-4); S: 2x + y – 10 = 0.

3. Составить уравнение прямой линии, проходящей через точку B(x;y) перпендикулярно прямой S: Ax+By+C=0. Сделать чертеж.

1. B(-1;-2); S: 3x - 4y + 7 = 0.
2. B(4;-6); S: x + y + 6 = 0.
3. B(-5;-1); S: 2x – 4y – 8 = 0.
4. B(-4;-3); S: 3x - 2y + 6 = 0.
5. B(3;-8); S: 4x - 2y – 8 = 0.
6. B(5;-5); S: 8x + 4y – 8 = 0.
7. B(9;-3); S: 3x - 9y – 9 = 0.
8. B(-4; 2); S: -x - 4y – 12 = 0.
9. B(-5; 3); S: 2x – y – 12 = 0.
10. B(4;-9); S: 4x - 2y – 16 = 0.
11. B(0;-6); S: x - 9y – 18 = 0.
12. B(-4;-1); S: 3x + 5y – 15 = 0.
13. B(7; 0); S: -5x + 3y + 15 = 0.
14. B(-9;-6); S: x - 5y – 10 = 0.
15. B(3;-5); S: -x - 8y + 8 = 0.
16. B(0; 0); S: 6x - 3y – 12 = 0.
17. B(6;-4); S: -x + 6y + 12 = 0.
18. B(-5;-3); S: 4x + y + 12 = 0.
19. B(1; 1); S: 6x - 12y – 12 = 0.
20. B(-1; 2); S: 3x + 4y – 12 = 0.
21. B(2;-2); S: -2x + 6y – 6 = 0.
22. B(2;-4); S: 5x + 5y – 10 = 0.
23. B(0;-5); S: -5x + y + 15 = 0.
24. B(-8;-3); S: -3x – y – 15 = 0.
25. B(6;-5); S: 4x - 2y – 4 = 0.

4. Найти координаты т. С, которая делит отрезок MN в отношении λ, считая от т. М. Сделать чертеж.

1. M(1; 9); N(-3;-1); $\lambda = 2/3$.
2. M(-3; 9); N(3;-1); $\lambda = 3/2$.
3. M(-2; 4); N(-3;-3); $\lambda = 1/2$.
4. M(-1; 5); N(-2; 4); $\lambda = 2/1$.
5. M(1; 7); N(-7;-1); $\lambda = 4/3$.
6. M(2; 9); N(3;-4); $\lambda = 1/3$.
7. M(-7; 9); N(-3; 1); $\lambda = 2/5$.
8. M(1;-2); N(-7;-5); $\lambda = 1/3$.
9. M(-8;-5); N(3; 1); $\lambda = 1/4$.
10. M(6; 2); N(-2;-4); $\lambda = 3/4$.
11. M(-12; 1); N(2;-1); $\lambda = 2/3$.
12. M(-1; 2); N(-3;-8); $\lambda = 1/3$.
13. M(5; 6); N(-3;-2); $\lambda = 3/2$.
14. M(4;-3); N(-6;-1); $\lambda = 3/2$.
15. M(-5; 10); N(-3;-6); $\lambda = 5/4$.
16. M(8; 9); N(-2;-1); $\lambda = 2/3$.
17. M(-4; 7); N(3;-2); $\lambda = 3/1$.
18. M(-10; 2); N(-6;-8); $\lambda = 2/1$.
19. M(1; 6); N(-3;-4); $\lambda = 2/5$.
20. M(-6; 9); N(-3; 5); $\lambda = 5/3$.
21. M(-7; 5); N(3;-1); $\lambda = 6/5$.
22. M(-9; 9); N(3;-3); $\lambda = 2/3$.
23. M(-10; 4); N(6;-2); $\lambda = 2/1$.
24. M(-7; 0); N(-3;-1); $\lambda = 1/3$.
25. M(-11; 8); N(4;-2); $\lambda = 3/2$.

5. В треугольние АВС найти:

- угол А;
- длину высоты ВД;
- уравнение высоты ВД;
- уравнение медианы АК;
- точку пересечения медиан;
- площадь треугольника;
- сделать чертеж.

1. A(-5;1); B(-1;6); C(8;-2).
2. A(-10;4); B(-6;-1); C(0;3).
3. A(-1;-3); B(1;2); C(6;-6).
4. A(0;-5); B(3;0); C(5;8).
5. A(-3;4); B(0;0); C(1;6).
6. A (-2;-2); B (1; 5); C(5; 0).
7. A(-7;-3); B(-2; 6); C(3;0).
8. A(0;0); B(3;7); C(6;-2).

В треугольнике ABC найти:

- угол B;
- длину высоты АД;
- уравнение высоты АД;
- уравнение медианы АК;
- точку пересечения медиан;
- площадь треугольника;
- сделать чертеж.

9. A(-5;-6); B(3;-3); C(-1;4).
10. A(-1;-7); B(2;-4); C(-3;1).
11. A(1;-1); B(5;6); C(-4;3).
12. A(-5;4); B(-1;0); C(-7;-3).
13. A(-3;1); B(1;8); C(6;-2).
14. A(0;9); B(4;0); C(-5;-2).
15. A(-7;2); B(-4;7); C(3;-2).
16. A(6;-3); B(4;-6); C(1;1).

В треугольнике ABC найти:

- угол С;
- длину высоты СД;
- уравнение высоты СД;
- уравнение медианы СК;
- площадь треугольника;
- точку пересечения медиан;
- сделать чертеж.

17. A(-10;-3); B(-6;3); C(-1;-8).
18. A(1;-5); B(6;3); C(8;-7).
19. A(0;-6); B(1;2); C(4;-3).
20. A(-4;5); B(-1;3); C(4;-3).
21. A(3;4); B(6;-2); C(4;-5).
22. A(-7;-3); B(-4;3); C(0;0).
23. A(-3;3); B(1;5); C(3;-1).
24. A(-6;6); B(-4;3); C(1;-1).
25. A(0;-4); B(4;3); C(8;-2).

6. Составить уравнение окружности с центром в т. К и радиусом, равным R. Сделать чертеж.

1. K(-1;2); R=7.
2. K(7;-3); R=6.
3. K(6;-4); R=5.
4. K(-5;1); R=4.
5. K(8;-3); R=3.
6. K(-6;6); R=2.
7. K(0;-3); R=1.
8. K(1;-5); R=2.
9. K(-8;-1); R=1.
10. K(5;-4); R=3.
11. K(3;0); R=4.
12. K(-4;0); R=3.
13. K(-5;0); R=2.
14. K(6;-7); R=4.
15. K(10;4); R=4.
16. K(-9;2); R=2.
17. K(-6;3); R=5.
18. K(0;0); R=6.
19. K(-2;-2); R=1.
20. K(3;-5); R=4.
21. K(-6;1); R=5.
22. K(0;-4); R=4.
23. K(5;3); R=5.
24. K(-6;2); R=6.
25. K(-2;4); R=3.

7. Найти координаты центра и радиус окружности.

1. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 6y + 2x = 0$
3. $x^2 + y^2 - 8y - 2x = 0$
4. $x^2 + y^2 - 10y + 4x + 3 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 4y + 6x - 4 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 6y + 12x + 14 = 0$
7. $x^2 + y^2 + 8y + 6x - 1 = 0$
8. $x^2 + y^2 + 2y + 2x + 1 = 0$
9. $x^2 + y^2 - 6y - 4x + 3 = 0$
10. $x^2 + y^2 + 14y + 10x + 15 = 0$
11. $x^2 + y^2 + 10y - 2x + 6 = 0$
12. $x^2 + y^2 - 4y + 14x + 7 = 0$
13. $x^2 + y^2 + 8y - 4x + 5 = 0$
14. $x^2 + y^2 - 2y + 6x + 3 = 0$
15. $x^2 + y^2 + 6y - 8x + 9 = 0$
16. $x^2 + y^2 - 12y + 2x + 7 = 0$
17. $x^2 + y^2 + 4y - 6x + 16 = 0$
18. $x^2 + y^2 - 6y + 16x + 64 = 0$
19. $x^2 + y^2 + 8y - 4x + 16 = 0$
20. $x^2 + y^2 - 2y + 6x + 1 = 0$
21. $x^2 + y^2 + 4y - 2x + 4 = 0$
22. $x^2 + y^2 - 18y + 2x + 81 = 0$
23. $x^2 + y^2 + 10y + 4x + 4 = 0$
24. $x^2 + y^2 - 6y + 12x + 18 = 0$
25. $x^2 + y^2 + 4y + 20x + 100 = 0$

8. Выполнить задания.

1. Составить уравнение эллипса, если его большая ось равна 10, а эксцентриситет равен 0,4.

2. Составить уравнение эллипса, если его малая полуось равна 3, а левый фокус имеет координаты (-4;0).

3. Составить уравнение эллипса, если его правый фокус имеет координаты (4;0), а эксцентриситет равен 2/5.

4. Составить уравнение эллипса, если его верхняя вершина т. B(0;4), а эксцентриситет равен 0,6.

5. Составить уравнение эллипса, если его малая ось равна 8, а левая вершина имеет координаты (-5;0).

6. Составить уравнение эллипса, если его большая ось равна 26, а эксцентриситет равен $\frac{24}{26}$.

7. Составить уравнение эллипса, если его малая полуось равна 2,5, а левый фокус имеет координаты (-12;0).

8. Составить уравнение эллипса, если его правый фокус имеет координаты (12;0), а эксцентриситет равен 6/7.

9. Составить уравнение эллипса, если его верхняя вершина т. B(0;2,5), а эксцентриситет равен 48/52.

10. Составить уравнение эллипса, если его малая ось равна 10, а левая вершина имеет координаты (-13;0).

11. Составить уравнение эллипса, если его большая ось равна 20, а эксцентриситет равен 0,6.

12. Составить уравнение эллипса, если его малая полуось равна 4, а левый фокус имеет координаты (-6;0).

13. Составить уравнение эллипса, если его правый фокус имеет координаты (6;0), а эксцентриситет равен 3/5.

14. Составить уравнение эллипса, если его верхняя вершина т. B(0;6), а эксцентриситет равен 0,6.

15. Составить уравнение эллипса, если его малая ось равна 2, а левая вершина имеет координаты (-3;0).

16. Составить уравнение эллипса, если его большая ось равна 16, а эксцентриситет равен 0,5.

17. Составить уравнение эллипса, если его малая полуось равна 2,5, а левый фокус имеет координаты (-3;0).

18. Составить уравнение эллипса, если его правый фокус имеет координаты (5;0), а эксцентриситет равен 0,5.

19. Составить уравнение эллипса, если его нижняя вершина имеет координаты (0;-2), а эксцентриситет равен 0,2.

20. Составить уравнение эллипса, если его малая ось равна 14, а правая вершина имеет координаты (9;0).

21. Составить уравнение эллипса, если его большая ось равна 14, а эксцентриситет равен 3/7.

22. Составить уравнение эллипса, если его малая полуось равна 7, а левый фокус имеет координаты (-3;0).

23. Составить уравнение эллипса, если его правый фокус имеет координаты (6;0), а эксцентриситет равен 3/8.

24. Составить уравнение эллипса, если его нижняя вершина имеет координаты (0;-6), а эксцентриситет равен 0,8.

25. Составить уравнение эллипса, если его малая ось равна 12, а правая вершина имеет координаты (7;0).

9. Дано уравнение эллипса. Построить эллипс. Найти:

- координаты фокусов;
- координаты вершин;
- эксцентриситет;
- длины большой и малой осей эллипса;
- сумму расстояний от т. М до фокусов эллипса.

1. $16x^2 + 25y^2 = 400$;	M(3;3,2).	14. $25x^2 + 64y^2 = 1600$;	M(0;5).
2. $25x^2 + 169y^2 = 4225$;	M(0;-5).	15. $4x^2 + 9y^2 = 144$;	M(0;4).
3. $144x^2 + 169y^2 = 24336$;	M(0;12).	16. $x^2 + 25y^2 = 25$;	M(0;1).
4. $9x^2 + 25y^2 = 225$;	M(0;-3).	17. $4x^2 + 36y^2 = 144$;	M(0;-2).
5. $16x^2 + 49y^2 = 784$;	M(0;4).	18. $x^2 + 9y^2 = 9$;	M(0;-1).
6. $4x^2 + 16y^2 = 64$;	M(0;-2).	19. $4x^2 + 49y^2 = 196$;	M(0;2).
7. $16x^2 + 25y^2 = 1600$;	M(0;8).	20. $9x^2 + 36y^2 = 324$;	M(0;3).
8. $36x^2 + 100y^2 = 3600$;	M(0;-6).	21. $16x^2 + 64y^2 = 1024$;	M(0;-4).
9. $16x^2 + 25y^2 = 6400$;	M(0;16).	22. $x^2 + 16y^2 = 16$;	M(0;1).
10. $9x^2 + 25y^2 = 3600$;	M(0;-12).	23. $x^2 + 9y^2 = 36$;	M(0;-2).
11. $9x^2 + 25y^2 = 900$;	M(0;-6).	24. $x^2 + 4y^2 = 64$;	M(0;4).
12. $16x^2 + 36y^2 = 576$;	M(0;-4).	25. $x^2 + 9y^2 = 81$;	M(0;-3).
13. $9x^2 + 49y^2 = 441$;	M(0;3).		

10. Дано уравнение гиперболы и т. М, лежащая на гиперболе. Найти:

- длины вещественной и мнимой осей гиперболы;
- координаты фокусов;
- координаты вершин;
- эксцентриситет;
- уравнение асимптот;
- разность расстояний от т. М до фокусов гиперболы.

1. $32x^2 - 50y^2 = 3200$; М(10;0).
2. $50x^2 - 32y^2 = 3200$; М(-8;0).
3. $49x^2 - 64y^2 = 3136$; М(8;0).
4. $25x^2 - 36y^2 = 900$; М(-6;0).
5. $36x^2 - 25y^2 = 900$; М(-5;0).
6. $16x^2 - 25y^2 = 1600$; М(-10;0.)
7. $25x^2 - 16y^2 = 400$; М(4;0).
8. $16x^2 - 25y^2 = 400$; М(-5;0).
9. $9x^2 - 16y^2 = 144$; М(4;0).
10. $x^2 - y^2 = 25$; М(5;0).
11. $4x^2 - 4y^2 = 16$; М(-2;0).
12. $16x^2 - 9y^2 = 144$; М(3;0).
13. $64x^2 - 49y^2 = 3136$; М(-7;0).
14. $36x^2 - 64y^2 = 2304$; М(8;0).
15. $9x^2 - 16y^2 = 576$; М(-8;0).
16. $16x^2 - 9y^2 = 576$; М(6;0).
17. $x^2 - y^2 = 16$; М(-4;0).
18. $4x^2 - 9y^2 = 36$; М(3;0).
19. $16x^2 - 4y^2 = 64$; М(-4;0).
20. $x^2 - 4y^2 = 16$; М(4;0).
21. $25x^2 - 4y^2 = 100$; М(-2;0).
22. $36x^2 - 4y^2 = 144$; М(2;0).
23. $x^2 - 9y^2 = 36$; М(-6;0).
24. $49x^2 - 4y^2 = 196$; М(2;0).
25. $9x^2 - 49y^2 = 441$; М(-7;0).

11. Составить уравнение гиперболы.

1. Составить уравнение гиперболы, если вещественная ось равна 12, а мнимая полуось равна 4.

2. Составить уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна 6, а эксцентриситет равен 1,25.

3. Составить уравнение гиперболы, если межфокусное расстояние равно 8, а эксцентриситет равен 4/3.

4. Составить уравнение гиперболы, если асимптоты заданы уравнениями $y = \pm 2/3x$, а правый фокус находится в точке F($3\sqrt{3}$;0).

5. Составить уравнение гиперболы, если левый фокус находится в точке F(-12;0), а вещественная полуось равна 8.

6. Составить уравнение гиперболы, если асимптоты заданы уравнениями $y = \pm 3x$, а межфокусное расстояние равно $6\sqrt{10}$.

7. Составить уравнение гиперболы, если асимптоты заданы уравнениями $y = \pm 0{,}5x$, а точка М(6;$\sqrt{5}$) лежит на гиперболе.

8. Составить уравнение гиперболы, если эксцентриситет равен 2,6, а правая вершина находится в точке В(5;0).

9. Составить уравнение гиперболы, если вещественная ось равна 18, а мнимая - 6.

10. Составить уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна 4, а эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

11. Составить уравнение гиперболы, если эксцентриситет равен 2, а межфокусное расстояние равно 12.

12. Составить уравнение гиперболы, если асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\, 1{,}8x$, а правый фокус находится в точке F($\sqrt{106}$;0).

13. Составить уравнение гиперболы, если левый фокус находится в точке F(-8;0), а вещественная ось равна 14.

14. Составить уравнение гиперболы, если асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\, 0{,}75x$, а межфокусное расстояние равно 20.

15. Составить уравнение гиперболы, если асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\, 2x$, а точка M(-2$\sqrt{3}$;2$\sqrt{3}$) лежит на гиперболе.

16. Составить уравнение гиперболы, если эксцентриситет равен $1\frac{1}{3}$, а левая вершина находится в точке P(-6;0).

17. Составить уравнение гиперболы, если вещественная полуось равна 5, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

18. Составить уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна 3, а эксцентриситет равен 5/4.

19. Составить уравнение гиперболы, если эксцентриситет равен $\sqrt{13}$/2, а межфокусное расстояние равно 2$\sqrt{13}$.

20. Составить уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна 4 и гипербола содержит точку (-$\sqrt{5}$;-2).

21. Составить уравнение гиперболы, если левый фокус находится в точке F(-5;0), а вещественная полуось равна 3.

22. Составить уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна 6, а межфокусное расстояние равно 4$\sqrt{13}$.

23. Составить уравнение гиперболы, если расстояние между вершинами равно 4, а точка M(3;$\sqrt{5}$/2) лежит на гиперболе.

24. Составить уравнение гиперболы, если эксцентриситет равен 5/4, а точка M(-16;-6$\sqrt{3}$) лежит на гиперболе.

25. Составить уравнение гиперболы, если действительная полуось равна 2, а межфокусное расстояние равно 4$\sqrt{3}$.

Парабола

12. Даны уравнения парабол. Сделать чертеж. Найти для каждой параболы:

- координаты вершины;
- координаты фокуса;
- уравнение директрисы.

1. a) $y^2 = 8x$; b) $x^2 + 4y - 16x - 2 = 0$.
2. a) $x^2 = -6y$; b) $y^2 - 6y + 3x + 6 = 0$.
3. a) $y^2 = 12x$; b) $x^2 - 4y - 10x + 1 = 0$.
4. a) $x^2 = 16y$; b) $y^2 - 8y + 3x + 7 = 0$.
5. a) $y^2 = -4x$; b) $x^2 + 2y - 6x - 1 = 0$.
6. a) $x^2 = -10y$; b) $y^2 - 6y + 3x + 6 = 0$.
7. a) $y^2 = 14x$; b) $x^2 - 6y - 12x = 0$.
8. a) $x^2 = 7y$; b) $y^2 - 4y + 5x - 6 = 0$.
9. a) $y^2 = -24x$; b) $x^2 - 2y - 6x + 1 = 0$.
10. a) $x^2 = 12y$; b) $y^2 + 6y + 3x - 6 = 0$.
11. a) $y^2 = 22x$; b) $x^2 + 4y - 14x + 5 = 0$.
12. a) $x^2 = -32y$; b) $y^2 - 10y + 3x + 4 = 0$.
13. a) $y^2 = -28x$; b) $x^2 + 5y - 6x - 6 = 0$.
14. a) $x^2 = 26y$; b) $y^2 + 8y + 5x + 1 = 0$.
15. a) $y^2 = x$; b) $x^2 - 7y - 4x - 3 = 0$.
16. a) $x^2 = -3y$; b) $y^2 + 12y - 11x + 3 = 0$.
17. a) $y^2 = -40x$; b) $x^2 + 10y - 10x + 5 = 0$.
18. a) $x^2 = 17y$; b) $y^2 - 2y + 3x + 7 = 0$.
19. a) $y^2 = 5x$; b) $x^2 - 11y - 12x + 3 = 0$.
20. a) $x^2 = -9y$; b) $y^2 - 6y + 7x + 2 = 0$.
21. a) $y^2 = -11x$; b) $x^2 + 20y + 14x + 9 = 0$.
22. a) $x^2 = 18y$; b) $y^2 + 8y + 12x + 4 = 0$.
23. a) $y^2 = 13x$; b) $x^2 - 13y - 8x + 3 = 0$.
24. a) $x^2 = -20y$; b) $y^2 - 18y + 3x + 60 = 0$.
25. a) $y^2 = -17x$; b) $x^2 + 12y + 4x - 8 = 0$.

13. Составить каноническое уравнение параболы и построить её, учитывая нижеперечисленные условия.

1. Её ветви симметричны относительно оси абсцисс, а расстояние от фокуса до директрисы равно 12, с вершиной в начале координат.
2. Директриса совпадает с осью Ox, а вершина находится в точке (0; 6).
3. Вершина находится в точке (-1;2), а директриса совпадает с осью Oy.
4. Директриса совпадает с осью Ox, а вершина находится в точке (6;-6).
5. Вершина находится в точке T(-3;5), а фокус − в точке F(0;5).
6. Уравнение директрисы: $x + 4 = 0$, а p = 6 и вершина лежит на оси Ox (x>0).
7. Вершина находится в начале координат, фокус имеет координаты (-5;0).
8. Вершина находится в точке (3;2), а фокус − в точке (3;0).
9. Фокус находится в точке (0;4), а директриса имеет уравнение x – 5 = 0.
10. Уравнение директрисы имеет вид: $x + 1 = 0$, а фокус имеет координаты (2;0).
11. Ветви симметричны относительно оси ординат p = 8 и директриса имеет уравнение: $y - 6 = 0$.

12. Вершина в начале координат, директриса имеет уравнение: $y + 7 = 0$.

13. Все точки её одинаково удалены от точки O(0;0) и от прямой $x + 4 = 0$.

14. Вершина находится в точке (-4;5), а уравнение директрисы: $2y + 7 = 0$.

15. Фокус находится в точке O(-6;-1), а вершина – в точке C(1;-1).

16. Все точки её одинаково удалены от точки (-8;3) и от прямой $3x + 6 = 0$.

17. Вершина в начале координат, хорда, перпендикулярная оси Ox, отстоит от вершины на расстоянии, равном 6, и равна 16.

18. Вершина находится в фокусе параболы $y^2 = \frac{32}{3}x$, а директриса имеет уравнение: x-2=0.

19. Парабола проходит через точку (6;8), а директриса имеет уравнение $3x+8=0$.

20. Вершина в начале координат и хорда, перпендикулярная к оси симметрии и делящая пополам расстояние между фокусом и вершиной, равна 1.

21. Все точки её одинаково удалены от точки M(-5;0) и от прямой $y = 4$.

22. Фокус находится в точке P(3;6), а директриса имеет уравнение x=0.

23. Директриса имеет уравнение y = 0, а фокус находится в точке H(-2;-8).

24. Фокус находится в точке B(-4;6), директриса параллельна оси Ox и p = 12 (направление ветвей совпадает с направлением оси).

25. Проходит через точку M(0;3), вершина находится в точке A(-2;4), а директриса параллельна оси Oy.

14. Смешанные задачи.

1. Через фокус параболы $y^2 = -x$ проведена прямая под углом 135° к оси Ox. Найти длину образовавшейся хорды.

2. Найти уравнение гиперболы, зная, что её эксцентриситет $\varepsilon = 2$, фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса: $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{1} = 1$.

3. Найти площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $5x^2 + 9y^2 - 180 = 0$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

4. Окружность проходит через точки M(1;5) и P(5;3), а центр её лежит на прямой $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$. Найти уравнение окружности.

5. Дан эллипс $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы в вершинах данного эллипса.

6. Найти каноническое уравнение эллипса, если расстояние между концами большой и малой оси равно 5, а сумма длин полуосей равна 7.

7. Найти каноническое уравнение эллипса, если расстояния от его фокуса до концов большой оси равны 2 и 14.

8. Дана парабола $x^2 = 8y$. Найти длину её хорды, проходящей через точку A(1;1) перпендикулярно прямой $2x - y + 3 = 0$.

9. Найти длину хорды, соединяющей точки пересечения двух парабол, имеющих общую вершину в начале координат, а фокусы в точках (2;0) и (0;2).

10. Чему равен эксцентриситет эллипса, у которого малая ось равна расстоянию между фокусами.

11. Чему равен периметр четырехугольника, у которого вершины совпадают с вершинами эллипса $\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{11}=1$.

12. Чему равен эксцентриситет земного меридиана, имеющего форму эллипса, отношение осей которого равно $\frac{299}{300}$.

13. Найти координаты точки эллипса $9x^2+25y^2=450$, расстояние которой до правого фокуса в 4 раза больше расстояния до левого фокуса.

14. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2-8x+12=0$ и $x^2+y^2+6x-12y+5=0$.

15. Найти уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2+y^2-6x-8y+16=0$ и $x^2+y^2+10x+4y+13=0$.

16. Найти точки пересечения окружности $(x-2)^2+(y+3)^2=20$ и прямой $y=x-3$.

17. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами A(0;2), B(1;1), C(2;-2).

18. Найти угол между радиусами окружности $(x-4)^2+(y+3)^2-25=0$, проведенными в точках её пересечения с осью Ox.

19. Дано множество концентрических окружностей $x^2+y^2+12y+C=0$. Найти уравнение той окружности, радиус которой равен 10.

20. Найти каноническое уравнение гиперболы, если её фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, а эксцентриситет взаимно обратен эксцентриситету этого эллипса.

21. Из фокуса гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, опущены перпендикуляры на её асимптоты. Найти расстояние между основаниями перпендикуляров.

22. Написать уравнение параболы и её директрисы, если парабола проходит через точку пересечения прямой $x+3y=0$ и окружности $x^2+y^2+10y=0$.

23. Написать уравнение параболы и её директрисы, если парабола проходит через точку пересечения прямой $2x+3y=0$ и окружности $x^2+y^2-16y+19=0$.

24. Через фокус параболы $x^2=-6y$ проведена прямая под углом 120^0 к оси Ox. Написать уравнение прямой и найти длину образовавшейся хорды.

25. Найти длину и уравнение перпендикуляра, опущенного из фокуса параболы $8y = -x^2$ на прямую, отсекающую на осях координат отрезки: а = в = 2.

15. Смешанные задачи.

1. Найти длину общей хорды парабол $4y = 12 - x^2$ и $4x = 12 - y^2$.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через фокусы парабол $y^2 = 6x - 12$ и $x^2 = -12y$.

3. Написать уравнение окружности, центр которой находится в фокусе параболы $x^2 + 4x - 12y = 20$, а радиус равен p.

4. Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$. Составить простейшее уравнение гиперболы, проходящей через точку М($\sqrt{3};\sqrt{2}$).

5. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку М(9;8), если асимптоты гиперболы имеют уравнения $y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$.

6. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих фокусах и вершинах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

7. Через точку М(0;-1) и правую вершину гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$ проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.

8. Дана гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Написать уравнение эллипса, фокусы которого совпадают с фокусами гиперболы и проходящего через точку М(4;6).

9. На прямой $x + 5 = 0$ найти точку, одинаково удаленную от левого фокуса и верхней вершины эллипса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

11. Составить уравнение окружности, проходящей через точки А(1;2), В(0;-1), С(-3;0).

12. Составить уравнение окружности, проходящей через точки А(7;7) и В(-2;4), зная, что её центр лежит на прямой 2х – у – 2 = 0.

13. Найти расстояния от центра окружности $x^2 + y^2 + 2y - 4x - 1 = 0$ до асимптот гиперболы $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$.

14. Найти расстояние между фокусом параболы $x - y^2 + 4y + 5 = 0$ и левым фокусом эллипса $64x^2 + 100y^2 = 6400$.

15. Найти периметр треугольника АВС, если т. А - левая вершина эллипса $8x^2 + 16y^2 = 128$, т. В - фокус параболы $x^2 = -24y$, а т. С - правый фокус гиперболы $25x^2 - 11y^2 = 275$.

16. Найти угол между асимптотами гиперболы $9x^2 - 25y^2 = 225$.

17. Найти угол между прямыми, проходящими через верхнюю вершину эллипса $4x^2 + 20y^2 = 80$ и его фокусы.

18. Прямая проходит через точку М(-3;7) и фокус параболы $y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$. Найти расстояние от начала координат до этой прямой.

19. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки О(0;0), В(-1;-3) и С(-2;-4). Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок оси Ох, отсеченный параболой.

20. А - вершина параболы $x^2 + 2y - 8x + 10 = 0$, В - точка пересечения параболы с осью Оу. Написать уравнение перпендикуляра, восстановленного из середины отрезка АВ.

21. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок, отсекаемый на оси Оу параболой $y^2 + x - 6y = 0$.

22. А-вершина параболы $x = y^2 - 4y + 6$, В-точка пересечения параболы с осью ОХ. Найти расстояние от середины отрезка АВ от начала координат.

23. Найти расстояние между вершиной параболы $3y = x^2 + 6x + 18$ и центром окружности $x^2 + y^2 - 8x + 10 = 0$.

24. Найти длину перпендикуляра, опущенного из правого фокуса гиперболы $16x^2 - 20y^2 = 320$ на одну из его асимптот.

25. Угол между асимптотами гиперболы равен 60^0. Вычислить эксцентриситет гиперболы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

УРАЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

Т.Е. Воронцова
И.Н. Демидова
Н.К. Пешкова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Екатеринбург
2010