Научная статья
УДК 517.3

О ВОЗМОЖНОСТИ УТОЧНЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ТАБЛИЧНО

Андрей Юрьевич Вдовин[1], Светлана Сергеевна Рублева[2], Мария Евгеньевна Медведева[3]
[1, 2, 3] Уральский государственный лесотехнический университет, Екатеринбург, Россия
[1] vdovinau@m.usfeu.ru
[2] rublevass@m.usfeu.ru
[3] marymedwedew4@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается модификация метода Рунге практической оценки погрешности результата численного интегрирования для функции с таблично заданными значениями. Предлагаемая процедура позволяет существенно уточнить этот результат с помощью получения неизвестного порядка его точности относительно величины шага интегрирования.

Ключевые слова*:* приближенное вычисление определенного интеграла, оценка точности, правило Рунге, апостериорная оценка точности

Для цитирования: Вдовин А. Ю., Рублева С. С., Медведева М. Е. О возможности уточнения результата приближенного вычисления определенного интеграла для функций, заданных таблично // Цивилизационные перемены в России = Civilizational changes in Russia : материалы XV Всероссийской научно-практической конференции. Екатеринбург : УГЛТУ, 2025. С. 212–218.

Original article

ON THE POSSIBILITY OF REFINING THE RESULT OF AN APPROXIMATE CALCULATION OF THE DEFINITE INTEGRAL FOR FUNCTIONS GIVEN TABULARLY

Andrey Yu. Vdovin[1], Svetlana S. Rubleva[2], Maria E. Medvedeva[3]
[1, 2, 3] Ural State Forest Engineering University, Ekaterinburg, Russia
[1] vdovinau@m.usfeu.ru
[2] rublevass@m.usfeu.ru
[3] marymedwedew4@yandex.ru

Abstract. The article considers a modification of Runge's method for practical estimation of the error of the result of numerical integration for a function with tabularly specified values. The proposed procedure allows to significantly refine this result by obtaining an unknown order of its accuracy relative to the value of the integration step.

Keywords**:** approximate calculation of a definite integral, accuracy estimation, Runge's rule, a posteriori accuracy estimation

For citation**:** Vdovin A. Yu., Rubleva S. S. Medvedeva M. E. (2025) O vozmozhnosti utochnenia rezul'tata priblizhennogo bichislenia opredelennogo integrala dlya funkcii, zadannih tablichno [On the possibility of refining the result of an approximate calculation of the definite integral for function given tabularly] // Civilizacionnye peremeny v Rossii [Civilizational changes in Russia.] : proceedings of the XV All-Russian Scientific and Practical Conference. Ekaterinburg : USFEU, 2025. P. 212–218 (In Russ).

Широкий спектр научных и практических задач требует нахождение значения определенного интеграла $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Использование для этой цели формулы Ньютона – Лейбница не всегда целесообразно, поскольку нахождение первообразной подынтегральной функции может оказаться довольно сложной задачей. Это также относится и к случаям, когда первообразная не может быть выражена с помощью элементарных функций, или значения подынтегральной функции доступны лишь в узлах разбиения промежутка интегрирования [$a; b$]. В таких случаях прибегают к использованию приближенных численных методов интегрирования.

Пусть для $n \in N$ задано разбиение [$a; b$] узлами

$a = x_0 < \ldots < x_i < x_{i+1} < < \ldots\ x_n = b$, где $i = 1, \ldots, n$. Расстояние между соседними узлами $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n} = h$ называется шагом разбиения. Результат применения численного метода, использующего значения $f(x_i)$ с шагом h станем обозначать I_h. При этом важно иметь информацию о значении $I - I_h$ – точности результата использованного метода. Способы оценки ошибки методов интегрирования подразделяют на априорные и апостериорные. К априорным относятся те методы, оценки которых могут быть получены без нахождения I_h. Априорная оценка конкретного метода обычно имеет вид $\left|I - I_h\right| < Ch^p$. При этом постоянная C зависит от длины [$a; b$], а также от свойств подынтегральной функции и ее производных на этом промежутке. К достоинствам априорных оценок следует отнести их хорошую изученность, к недостаткам – определенную грубость, необходимость наличия априорной информации о свойствах функции, находящейся под знаком интеграла, и ее производных, а также невозможность, в силу сказанного выше, их получения при наличииинформации о ее значениях лишь в узлах разбиения.

Методы оценки погрешности, использующие значения полученных приближений I_h, называются апостериорными. Одним из таких приемов является предложенный Рунге подход практической оценки погрешности конкретного численного метода. Его традиционное применение предполагает [1, 2, 3] выполнение следующих условий.

Условие 1. Для рассматриваемого метода численного интегрирования существует число $C \neq 0$ и известны положительные p, h_0 такие, что для всех $h < h_0$ имеет место соотношение $I_h - I = Ch^p + \overline{o}_1(h^p)$.

Дополнительное рассмотрение последнего равенства для разбиения с шагом $\dfrac{h}{2}$: $I_{\frac{h}{2}} - I = C\left(\dfrac{h}{2}\right)^p + \overline{o}_2\left(\dfrac{h^p}{2^p}\right)$ задает систему линейных уравнений для неизвестных I, C. Пренебрегая вторыми слагаемыми более высокого порядка относительно h в правых частях обоих уравнений и решая возмущенную систему, получают более точное по сравнению с $I_{\frac{h}{2}}$ значение искомого интеграла $I \approx \overline{I} = I_{\frac{h}{2}} + \dfrac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^p - 1}$.

Рассмотрим часто встречающуюся на практике ситуацию, когда об интегрируемой функции известна лишь информация о ее значениях в узлах разбиения промежутка интегрирования. Отметим, что в этом случае выбрать значение p, используемого правилом Рунге для конкретного численного метода, на основании априорных оценок становится невозможным, поскольку для этого требуется дополнительная информация о степени гладкости подынтегральной функции. В табл. 1 в качестве примера приведены априорные оценки точности вычисления определенного интеграла с помощью метода трапеций для функций с различными свойствами [4].

Таблица 1

Априорные оценки метода трапеций

Свойство функции $f(\cdot)$	Оценка точности
Интегрируемая по Риману	$\overline{o}(1)$
Имеет ограниченные вариации	$\underline{O}(h)$
Абсолютно непрерывная	$\overline{o}(h)$
Имеет производную ограниченной вариации	$\underline{O}(h^2)$

В статье рассматривается возможность использования метода Рунге для получения практической оценки неизвестного значения p, и уточнения результата в случае табличного задания подынтегральной функции.

Пусть известны значения функции $f(x_i)$ в узлах разбиения промежутка $[a;\ b]$ с шагом $\frac{h}{4} = \frac{b-a}{n}$. Рассмотрим $I_h, I_{\frac{h}{2}}, I_{\frac{h}{4}}$ – результаты, применения некоторого численного метода, использующего для поиска I значения $f(x_i)$. Для используемого метода и рассматриваемой функции будем предполагать, что имеет место более слабое по сравнению с условием 1.

Условие 2. Существуют положительные постоянные h_0, p и $C \neq 0$, такие, что при $h < h_0$ для $i = 0, 1, 2$ имеют место равенства $I_{\frac{h}{2^i}} - I = C\left(\frac{h}{2^i}\right)^p + \overline{o}_i\left(\left(\frac{h}{2^i}\right)^p\right)$.

Отсюда следует, что разности $I_h - I_{\frac{h}{2}}$, $I_{\frac{h}{2}} - I_{\frac{h}{4}}$ при малых значениях h имеют одинаковые знаки с C, поэтому $\dfrac{I_h - I_{\frac{h}{2}}}{I_{\frac{h}{2}} - I_{\frac{h}{4}}} > 0$. Отбрасывая слагаемые $\overline{o}_i\left(\left(\frac{h}{2^i}\right)^p\right)$, рассмотрим возмущенную систему трех уравнений:

$$\begin{cases} I_h - \overline{I} = \overline{C}h^{\overline{p}} \\ I_{\frac{h}{2}} - \overline{I} = \overline{C}\left(\dfrac{h}{2}\right)^{\overline{p}} \\ I_{\frac{h}{4}} - \overline{I} = \overline{C}\left(\dfrac{h}{4}\right)^{\overline{p}} \end{cases} \qquad (1)$$

с неизвестными $\overline{C}$, $\overline{p}$, $\overline{I}$.

Вычитая в системе (1) второе уравнение из первого и третье из второго, исключим неизвестное $\overline{I}$:

$$\begin{cases} I_h - I_{\frac{h}{2}} = \overline{C}\left(1 - \dfrac{1}{2^{\overline{p}}}\right)h^{\overline{p}} \\ I_{\frac{h}{2}} - I_{\frac{h}{4}} = \overline{C}\left(1 - \dfrac{1}{2^{\overline{p}}}\right)\left(\dfrac{h}{2}\right)^{\overline{p}} \end{cases}. \qquad (2)$$

Разделив первое уравнение системы (2) на второе, исключим неизвестное $\overline{C}$:

$$\frac{I_h - I_{\frac{h}{2}}}{I_{\frac{h}{2}} - I_{\frac{h}{4}}} = 2^{\overline{p}}.$$

Логарифмируя полученное равенство (при сделанных предположениях это возможно), найдем $\overline{p}$:

$$\overline{p} = \ln\left(\frac{I_h - I_{\frac{h}{2}}}{I_{\frac{h}{2}} - I_{\frac{h}{4}}}\right) : \ln 2 = \log_2\left(\frac{I_h - I_{\frac{h}{2}}}{I_{\frac{h}{2}} - I_{\frac{h}{4}}}\right).$$

Теперь из любого, например из первого, уравнения системы (2), выразим

$$\overline{C}h^{\overline{p}} = \frac{I_h - I_{\frac{h}{2}}}{\left(1 - \frac{1}{2^{\overline{p}}}\right)}.$$

Далее из системы (1) можно определить уточненное приближение $\overline{I}$ для значения I. Например, выбирая первое уравнение, получим: $\overline{I} = I_h - \overline{C}h^{\overline{p}}$.

В табл. 2 приведены результаты реализации вычислительного эксперимента для предложенной процедуры на примере приближенного вычисления интеграла методом трапеций для функций $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ с различными свойствами (рис. 1, 2).

Таблица 2

Результаты численного эксперимента

$f(x)$	$f_1(x) = \begin{cases} x^2, \text{ при } x \in [-1;0); \\ e^x, \text{ при } x \in [0;1] \end{cases}.$	$f_2(x) = \begin{cases} (x+1)^2, \text{ при } x \in [-1;0); \\ e^x, \text{ при } x \in [0;1]. \end{cases}$
I	**2,0516151618**	**2,0516151618**
$I_{0,1}$	2,1044284914	2,05471349
$I_{0,05}$	2.0773511952	2,05238979
$I_{0,025}$	2,0643038068	2,05180882
$\overline{p}$	1,0533226138	1,99988825
$\overline{C}$	0,590834	0,30975495
$\overline{I}$	**2,052170**	**2,05161514**
$I - I_{0,025}$	**–0,012688645**	**–0,0001936582**
$I - \overline{I}$	**–0,0005548382**	**0,0000000218**

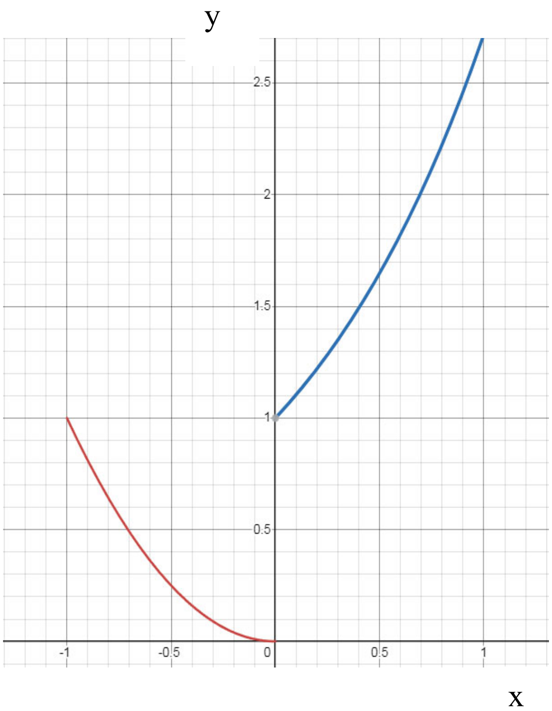

Рис. 1. График функции $f1$ (x)

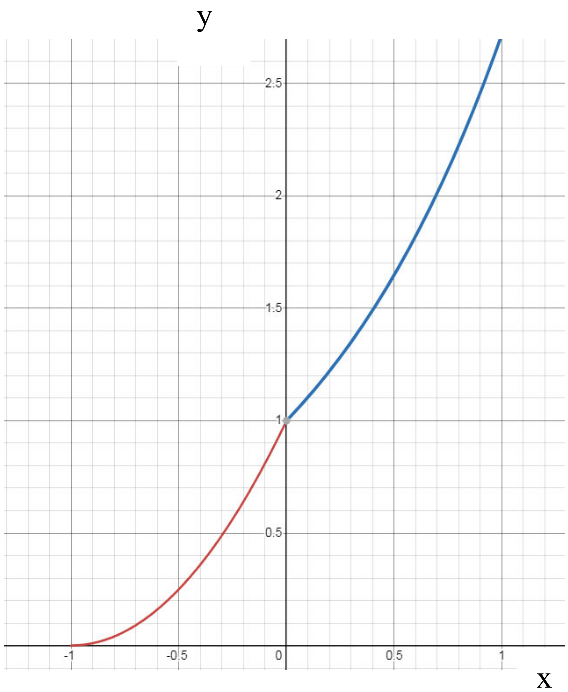

Рис. 2. График функции $f2$ (x)

Замечание 1. Для рассматриваемых метода и функций сделанные выше предположения выполнены.

Замечание 2. Полученные в результате эксперимента значения $\overline{p}$ хорошо согласуются с известными априорными оценками для численного интегрирования методом трапеций (см. табл. 1).

Замечание 3. Анализ результатов строк 5, 8 и 9 табл. 2 свидетельствует о возможности предложенной процедуры апостериорного оценивания для исследования свойств интегрируемой функции, а также об ее эффективности при уточнении значения результата численного интегрирования.

Замечание 4. При использовании метода трапеций для достижения такой же точности потребовалось бы информация о значениях подынтегральной функции в узловых точках, количество которых примерно в 250 раз больше.

Список источников

1. Пименов В. Г. Численные методы. В 2 ч. Ч. 1. Екатеринбург : УГЛТУ, 2013. 112 с.

2. Пантина И. В., Синчуков А. В. Вычислительная математика. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Московский финансовопромышленный университет «Синергия», 2012. 176 с.

3. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М. : Наука, 1989. 432 с.

4. Сендов Б., Попов В.А. Усредненные модули гладкости : пер. с болг. – М. : Мир, 1988. 328 с.

References

1. Pimenov V. G. Numerical Methods : in 2 parts. Ч. 1. Ekaterinburg : Ural. University Publishing House, 2013. 112 p. (In Russ).

2. Pantina I. V., Sinchukov A. V. Computational mathematics- 2nd ed., revision and supplement. M. : Moscow Financial and Industrial University ‘Synergy’(University series), 2012. 176 p. (In Russ).

3. Samarskiy A. A., Gulin A. V. Numerical methods. M. : Science. Ed. in chief. Phys.-math. literature, 1989. 432 p. (In Russ).

4. Sendov B., Popov V. A. Averaged smoothness moduli : translated from Bulgarian. M. : Mir, 1988. 328 p. (In Russ).