

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФГБОУ ВПО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Кафедра высшей математики

Н.Л. Воронцова  
И.Н. Демидова  
А.В. Маргулян

## ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания  
к выполнению индивидуальных домашних заданий  
для студентов всех специальностей  
очной формы обучения

Екатеринбург  
2011

Печатается по рекомендации методической комиссии ФЭУ.  
Протокол № 28-1 от 02 сентября 2010 г.

Рецензент — доцент кафедры высшей математики Н.К. Орехова

Редактор К.В. Корнева  
Оператор компьютерной вёрстки Е.В. Карпова

Подписано в печать 29.09.2011 Формат 60×84 1/16 Поз. № 47  
Плоская печать Печ. л. 2,79 Тираж 500 экз.  
Заказ № Цена 14 р. 36 к.

## Редакционно-издательский отдел УГЛТУ Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

В работе содержатся основные сведения по векторной алгебре в пределах программы Уральского государственного лесотехнического университета, в том числе векторное и смешанное произведения векторов. По каждой теме приводятся примеры с решением и задачи для самостоятельной работы студентов. Также пособие содержит 25 вариантов индивидуальных домашних заданий для студентов. В каждом варианте по 5 задач, охватывающих все темы данного курса. Для всех вариантов индивидуальных домашних заданий приведены ответы. Пособие предназначено для студентов дневной формы обучения Уральского государственного лесотехнического университета.

## 1. ТЕОРИЯ ВЕКТОР. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Векторные величины характеризуются числом и направлением. Например, сила, скорость, ускорение, напряжённость электрического поля.

Геометрически векторные величины изображаются направленными прямолинейными отрезками — векторами. Обозначаются векторы  $\vec{AB}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и т. д.

*Длиной (модулем)* вектора  $\vec{AB}$  называется длина отрезка  $AB$ , она обозначается  $|AB|$ .

Если модуль вектора равен нулю, то это **нуль-вектор**. Например,  $|\vec{AA}| = 0$ .

Если модуль вектора равен единице, то вектор **единичный**,  $|\vec{a}| = 1$ .

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначаются они  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

Если вектор  $\vec{a}_0 \uparrow\uparrow \vec{a}$  и  $|\vec{a}_0| = 1$ , то вектор  $\vec{a}_0$  называется **ортом** вектора  $\vec{a}$ .

Нуль-вектор коллинеарен любому вектору.

Три (и более) вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

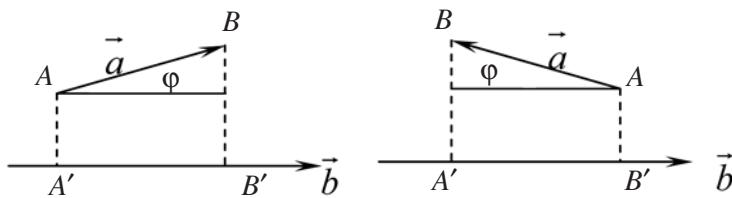
Три некомпланарных вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если из конца вектора  $\vec{c}$  кратчайший поворот от первого вектора  $\vec{a}$  ко второму вектору  $\vec{b}$  виден совершающимся против хода часовой стрелки.

Если модули векторов равны и они сонаправлены, то эти векторы называются **равными**, т. е.  $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$  и  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ .

Если модули векторов равны и они противоположно направлены, то эти векторы **противоположны**:  $\vec{AB} = -\vec{BA}$ .

Если векторы имеют общее начало, то угол между их направлениями — **угол между векторами**.

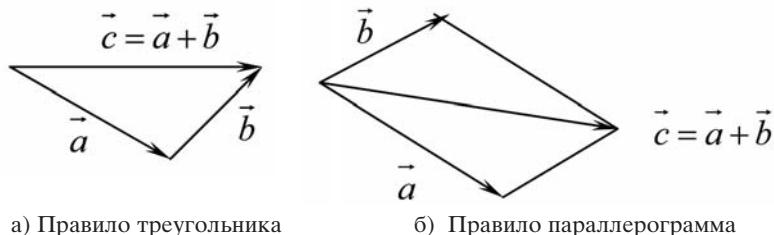
**Проекцией вектора**  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  на вектор  $\vec{b}$  называется длина вектора  $\overrightarrow{A'B'}$ , заключённого между проекциями начала и конца вектора  $\overrightarrow{AB}$  на вектор  $\vec{b}$  (рис. 1), причём эта длина берётся с положительным знаком, когда  $\vec{b} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A'B'}$  и с отрицательным знаком, когда  $\vec{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{A'B'}$  (рис. 2). Обозначается она  $pr_{\vec{b}} \vec{a}$  или  $pr_{\vec{b}} \overrightarrow{AB}$ .

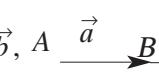
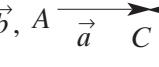


Длина вектора  $\overrightarrow{A'B'}$ , заключенного между проекциями начала и конца вектора  $\overrightarrow{AB}$  на вектор  $\vec{b}$ :  $pr_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

### Линейные операции над векторами

**Суммой двух векторов**  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  (рис. 3).



Если  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ , А  , то  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ .  
 Если  $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ , А 

**Разностью векторов**  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ , такой, что  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ .

Разность векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно рассматривать как сумму векторов  $\vec{a}$  и  $(-\vec{b})$ , т. е.  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ . Если в параллелограмме  $ABCD$  (рис. 4)  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ , то  $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$ .

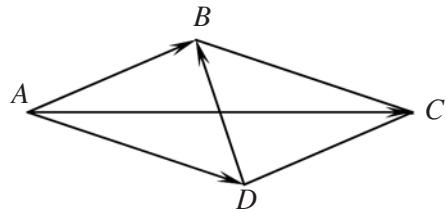


Рис. 4. Параллелограмм  $ABCD$

Если векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  образуют ломаную линию  $ABCDF$  (рис. 5),  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{DF} = \vec{d}$ , то  $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ .

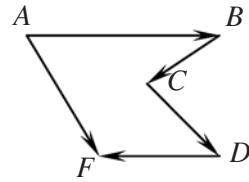


Рис. 5. Ломаная линия  $ABCDF$

### Произведение вектора на число

Произведением вектора  $\vec{a} \neq \vec{0}$  на число  $\lambda \neq 0$  называется вектор  $\lambda\vec{a}$ , который имеет длину, равную  $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ; если  $\lambda > 0$ , то  $\lambda\vec{a}$  сонаправлен  $\vec{a}$ , если  $\lambda < 0$ , то  $\lambda\vec{a}$  противоположно направлен  $\vec{a}$ .

Отметим, что  $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$  и, если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то существует такое  $\lambda$ , что  $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ .

### Линейная зависимость векторов

Векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$  называются **линейно зависимыми**, если существуют числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ , не все равные нулю,

для которых выполняется равенство  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$ .

Векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$  называются **линейно независимыми**, если равенство  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$  выполняется только при условии, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$ .

### Свойства векторов

1. Всякие три вектора на плоскости линейно зависимы. **Базисом на плоскости** называются два любых линейно независимых вектора.
2. Всякие четыре вектора в пространстве линейно зависимы. **Базисом в пространстве** называются три любых линейно независимых вектора.
3. Любой вектор может быть разложен по базису.

*Пример*

В треугольнике  $ABC$   $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AC} = \vec{b}$ ,  $M$  — середина отрезка  $BC$ . Выразить через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  векторы  $\vec{BC}, \vec{AM}$ .

*Решение*

Построим треугольник  $ABC$  (рис. 6).

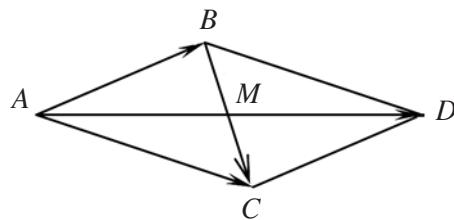


Рис. 6. Параллелограмм  $ABCD$

$$AM \text{ — медиана. } \vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AD} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}), \vec{BC} = \vec{b} - \vec{a}.$$

*Задачи для самостоятельного решения*

- 1.1. В параллелограмме  $ABCD$ ,  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AD} = \vec{b}$ ,  $M$  — точка пересечения диагоналей. Выразить через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  векторы  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MB}$ ,  $\vec{MC}$ ,  $\vec{MD}$ .
- 1.2. В треугольнике  $ABC$   $M$  — точка пересечения медиан. Доказать, что  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ .
- 1.3. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$   $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AC} = \vec{b}$ ,  $\vec{AS} = \vec{c}$ . Выразить через  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  векторы  $\vec{BC}$ ,  $\vec{SB}$ ,  $\vec{SC}$ ,  $\vec{SO}$ .

**ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ДЕКАРТОВ БАЗИС.  
РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ  
ПО ОСЯМ КООРДИНАТ**

Векторы  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  взаимно перпендикулярны  $|\vec{i}|, |\vec{j}|, |\vec{k}| = 1$ , образуют правую тройку и имеют общее начало —  $O$  (0;0;0). Эти векторы образуют базис. На этом базисе построим прямоугольную декартову систему координат  $Oxyz$ . Ось  $Ox \uparrow \uparrow \vec{i}$  — ось абсцисс, ось  $Oy \uparrow \uparrow \vec{j}$  — ось ординат, ось  $Oz \uparrow \uparrow \vec{k}$  — ось аппликат.  $O$  — начало координат.

Вектор  $\vec{a} = (x; y; z)$ .  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $x, y, z$  — **координаты вектора** — проекции вектора  $\vec{a}$  на оси координат (рис. 7).

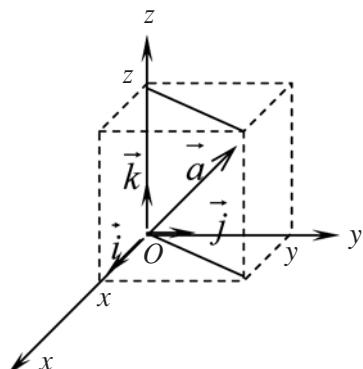


Рис. 7. Система координат  $Oxyz$

### ***Основные правила и формулы***

1. Если  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ , то  $\vec{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ .

2. Если  $\vec{a} = (x; y; z)$  то  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

3. Направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = (x; y; z) \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , где  $\alpha = \vec{a} \wedge \vec{i}$ ,  $\beta = \vec{a} \wedge \vec{j}$ ,  $\gamma = \vec{a} \wedge \vec{k}$ , находятся по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|};$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \vec{a}_0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma).$$

4. Если вектор умножается на число  $\lambda$ , то все его координаты умножаются на это число:  $\lambda \vec{a} = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$ .

5. Если векторы  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$  коллинеарны, т. е.

$$\vec{a} \parallel \vec{b}, \text{ то } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

6. Координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат слагаемых векторов:

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \vec{b} = (x_2; y_2; z_2), \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

7. Если точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $\lambda$ , т. е.  $\frac{AC}{CB} = \lambda$  и  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ , то  $C\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\right)$  (рис. 8).



Рис. 8. Отрезок  $AB$

### Задачи для самостоятельного решения

2.1. Даны две точки  $A(2;-1;3)$  и  $B(3;-3;5)$ . Найти направляющие косинусы вектора  $\vec{AB}$ .

*Решение*

Найдём координаты вектора  $\vec{AB}$  по формуле (1). Получим:

$$\vec{AB} = (3 - 2; -3 - (-1); 5 - 3) = (1; -2; 2). \text{ По формуле (2) найдём:}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

2.2. Найти координаты  $x, y$  вектора  $\vec{a}$ , если вектор суммы векторов  $\vec{a} = (x; y; -5)$  коллинеарен вектору  $\vec{c} = (8; -8; -4)$ , вычислить  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .

*Решение*

Найдём вектор суммы векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :  $\vec{a} + \vec{b} = (x + 2; y - 4; 2)$ .

$$\text{Зная, что } (\vec{a} + \vec{b}) \parallel \vec{c}, \text{ по формуле (5) имеем: } \frac{x+2}{8} = \frac{y-4}{-8} = \frac{2}{-4} =$$

$$= 0,5. \text{ Откуда } x + 2 = (-0,5) \cdot 8; y - 4 = (-0,5) \cdot (-8), x + 2 = -4,$$

$$x = -2, y - 4 = 4, y = 8. \vec{a} + \vec{b} = (-4; 8; 2), |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 2^2} = \\ = \sqrt{84} \approx 9,1.$$

2.3. Даны векторы  $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j}$ ,  $\vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$ . Найти координаты орта  $\vec{a}_0$ , координаты вектора  $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ , проекцию вектора  $\vec{a} + \vec{b}$  на вектор  $\vec{j}$ .

*Решение*

$$\text{Опт } \vec{a}_0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma), |\vec{a}| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6, \cos \alpha = \frac{4}{6} =$$

$$= \frac{2}{3}, \cos \beta = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}. \text{ Значит, } \vec{a}_0 = \left( \frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right).$$

$\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = (4 - 2; 4 + 8 + 1; -2 + 1) = (2; 13; -1)$ .  $\vec{a} + \vec{b} = (5; 0; -1)$ ,  
тогда проекция вектора  $\vec{a} + \vec{b}$  на вектор  $\vec{j}$  равна 0. Вектор  $\vec{a} + \vec{b}$  перпендикулярен к оси ординат.

2.4. Дано:  $B (2; 7; -1)$  и  $C (-3; 0; 5)$ , точки  $M$  и  $N$  делят отрезок  $BC$  на три равные части. Найти координаты точек  $M$  и  $N$ .

*Решение*

$$\frac{BM}{MC} = \frac{1}{2} = \lambda_1, \quad \frac{BN}{NC} = \frac{2}{1} = \lambda_2. \quad \text{Воспользуемся формулой (7):}$$

$$x_M = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot (-3)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \quad y_M = \frac{7}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{14}{3}, \quad z_M = \frac{-1 + \frac{1}{2} \cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = 1. M \left( \frac{1}{3}; \frac{14}{3}; 1 \right).$$

$$x_N = \frac{2 + 2 \cdot (-3)}{1 + 2} = -\frac{4}{3}, \quad y_N = \frac{2}{1 + 2} = \frac{2}{3}, \quad z_N = \frac{-1 + 10}{1 + 2} = 3. N \left( -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; 3 \right).$$

2.5. Вектор  $\vec{FD} + 3\vec{i} + 4\vec{k}$ ,  $A (-3; 5; 2)$ . Найти координаты точки  $B$ .

2.6. Может ли вектор составлять с осями координат углы  $30^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $60^\circ$ ?

2.7. Могут ли векторы  $\vec{a} = (4; 3; -2)$ ,  $\vec{b} = (-1; 2; 1)$ ,  $\vec{c} = (5; 1; 3)$ , быть сторонами треугольника?

2.8. Найти координаты вектора  $\vec{m}_0$ , если  $\vec{m} = \vec{AB} - \vec{AC}$ ,  $A (-3; 1; 2)$ ,  $B (4; -3; 6)$ ,  $C (0; 0; 4)$ .

2.9. Даны векторы  $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{c} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ . Найти длину и направляющие косинусы вектора  $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + 6\vec{c}$ .

2.10. Известны координаты трёх последовательных вершин параллелограмма  $ABCD$ :  $A (2; -3; 4)$ ,  $B (6; 1; 6)$ ,  $C (8; 5; 10)$ . Найти координаты четвёртой вершины  $D$ . Определить вид параллелограмма и вычислить его площадь.

## СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ НЕНУЛЕВЫХ ВЕКТОРОВ

**Скалярным произведением** двух векторов  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  называется число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними.

Обозначается:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ .

### Свойства скалярного произведения

1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (перестановочность).
2.  $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$  (сочетательность по отношению к скалярному множителю).
3.  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  (распределительность).
4.  $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$  (скалярный квадрат).
5.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ , если  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$  и  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$ , если  $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ .
6.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$  (условие перпендикулярности двух векторов).
7.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b}$ .
8.  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ . или  $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$
9. Если  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$  то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ .
10. Пусть материальная точка движется прямолинейно под действием силы  $\vec{F}$  из точки  $A$  в точку  $B$ , тогда работа, совершенная силой равна  $A = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

- 3.1. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол  $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 3$ , вычислить  $(\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$ .

### *Решение*

Согласно свойствам скалярного произведения:

$$(\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 + 5\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 2|\vec{a}|^2 + 5|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) - 3|\vec{b}|^2 =$$

$$= 3 \cdot 25 + 5 \cdot 5 \cdot 3 \cos \frac{2}{3}\pi - 3 \cdot 9 = 75 - 75 \cdot \frac{1}{2} - 27 = 10,5.$$

3.2. Дано:  $|\vec{a}| = 1$  и  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ,  $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ . Найти  $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$ .

*Решение*

Используя свойства скалярного произведения, найдём:

$$\begin{aligned} |3\vec{a} - 2\vec{b}| &= \sqrt{(3\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^2 - 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2} = \\ &= \sqrt{9 \cdot 1 - 12 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + 4 \cdot 2} = \sqrt{9 - 12\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 8} = \\ &= \sqrt{17 - 12} = \sqrt{5} \approx 2,22. \end{aligned}$$

3.3. В  $\Delta ABC$ :  $A(3;-1;4)$ ,  $B(1;-2;6)$ ,  $C(0;-1;0)$ . Найти  $\cos A$ .

*Решение*

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-2;-1;2), \overrightarrow{AC} = (-3;0;-4), \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (-2) \cdot (-3) + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-4) = -2. \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+1+4} = 3, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9+0+16} = 5.$$

$$\text{Тогда } \cos A = \frac{-2}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15}.$$

3.4. Найти проекцию вектора  $\vec{a} + \vec{b}$  на вектор  $\vec{a}$ , если  $\vec{a} = (3;-1;4)$ ,  $\vec{b} = (1;0;-3)$ .

*Решение*

$$\vec{a} + \vec{b} = (3+1; -1+0; 4-3) = (4; -1; 1); |\vec{a}| = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26};$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 4 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 4 = 12 + 1 + 4 = 17;$$

$$np_{\vec{a}} (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{17}{\sqrt{26}}.$$

3.5. Какую работу производит равнодействующая двух сил  $\vec{F}_1 = (-3; 4; 1)$  и  $\vec{F}_2 = (5; -5; -5)$ , когда точка приложения этих сил, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки  $A (1; -2; 3)$  в точку  $B (5; -6; 1)$ ?

*Решение*

$$\text{Равнодействующая сил } \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-3+5; 4-5; 1-5) = (2; -1; -4).$$

$$\text{Перемещение } \vec{AB} = (5-1; -6-(-2); 1-3) = (4; -4; -2).$$

$$\text{Работа } A = \vec{F} \cdot \vec{AB} = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2) = 8 + 4 + 8 = 20.$$

3.6. Вычислить скалярное произведение векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$ , зная их разложение по трём взаимно перпендикулярным векторам  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ :  $\vec{p} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ ,  $\vec{q} = \vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{c}$ . При этом  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{c}| = 1$ .

Ответ: -14.

3.7. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ , если  $A (3; 4; 3)$ ,  $B (4; 4; 2)$ ,  $C (6; 6; 3)$ .

$$\text{Ответ: } \cos \varphi = \frac{11}{3\sqrt{21}}.$$

3.8. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  взаимно перпендикулярны. Найти координаты вектора  $\vec{a} + 2\vec{b}$ , если  $\vec{a} = (2; -4; 1)$ ,  $\vec{b} = (5; 2; z)$ .

Ответ:  $(8; 0; -3)$ .

3.9. Найти проекцию  $\vec{AB}$  на  $\vec{MN}$ , если  $A(2;5;-1)$ ,  $B(6;9;6)$ ,  
 $M(2;5;-5)$ ,  $N(5;5;-1)$ .

Ответ: 4,6.

3.10. Какую работу совершил сила  $\vec{F} = (-1;3;-5)$  при перемещении материальной точки из точки  $A(2;-5;7)$  в точку  $B(1;0;6)$ ?

Ответ: 11.

## ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ НЕНУЛЕВЫХ ВЕКТОРОВ

Векторным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , такой, что:

1)  $\vec{c}$  перпендикулярен плоскости векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , т. е.  $\vec{c} \perp \vec{a}$  и  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ;

2)  $\vec{c}$  имеет длину, равную  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$ ;

3) векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  образуют правую тройку.

Векторное произведение обозначается  $\vec{a} \times \vec{b}$  или  $[\vec{a}, \vec{b}]$ .

### Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак,

т. е.  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ .

2.  $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$  (сочетательность по отношению к скалярному множителю);

3.  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}; \vec{a} \times \vec{a} = [\vec{a}]^2 = \vec{0}$ .

4.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ .

5. Длина векторного произведения численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

6. Если векторы  $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$  и  $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ ,

$$\text{то } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

7. Пусть в точке  $A$  приложена сила  $\vec{F} = \vec{AB}$  и  $O$  — некоторая точка пространства, тогда момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  равен  $M = \vec{OA} \times \vec{F}$ .

*Задачи для самостоятельного решения*

4.1. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол  $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 3$ , вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ .

*Решение*

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7,5\sqrt{3}.$$

4.2. Вычислить площадь треугольника  $ABC$ , если  $A(1;-4;3)$ ,  $B(8;0;7)$ ,  $C(3;-2;4)$ .

*Решение*

Воспользуемся свойствами (5) и (6).

$\Delta ABC$  построен на векторах  $\vec{AB} = (7;4;4)$  и  $\vec{AC} = (2;2;1)$ , тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \cdot \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (4-8)\vec{i} - (7-8)\vec{j} + (14-8)\vec{k} = -4\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k},$$

$$\text{тогда } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{53}.$$

4.3. Найти  $(3\vec{a} + 5\vec{b})(2\vec{a} - 5\vec{b})$ .

*Решение*

Используя свойства векторного произведения, получим:

$$\begin{aligned}(3\vec{a} + 5\vec{b})(2\vec{a} - 5\vec{b}) &= 6\vec{a} \times \vec{a} - 15\vec{a} \times \vec{b} + 10\vec{b} \times \vec{a} - 25\vec{b} \times \vec{b} = \\ &= 0 - 15\vec{a} \times \vec{b} - 10\vec{a} \times \vec{b} - 0 = -15\vec{a} \times \vec{b} = 15\vec{b} \times \vec{a}.\end{aligned}$$

4.4. Вычислить координаты момента  $\vec{M}$  силы  $\vec{F} = (5;-2;4)$ , приложенной к точке  $A (-1;3;-2)$  относительно точки  $O (2;1;0)$ .

*Решение*

Воспользуемся свойством (7):  $\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F}$ .  $\vec{OA} = (3;2;2)$ , тогда:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}. \text{ Момент } \vec{M} = (-4;-2;4).$$

4.5. Раскрыть скобки и упростить:  $3\vec{i}(\vec{j} + \vec{k}) + 4(\vec{i} + \vec{k})\vec{i} - 5\vec{k}(\vec{k} + \vec{i})$ .

Ответ:  $-\vec{j}$ .

4.6. Найти модуль вектора  $\vec{c} = (3\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$ , если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0,6$ .

Ответ: 69,2.

4.7. Вычислить площадь треугольника  $ABC$ , если  $A (4;-1;5)$ ,  $B (2;3;-1)$ ,  $C (6;2;3)$ .

Ответ:  $2\sqrt{282}$ .

4.8. К точке  $A (2;-1;1)$  приложены две силы  $\vec{F}_1 = (-2;4;1)$  и  $\vec{F}_2 = (0;-2;-3)$ , найти координаты момента  $\vec{M}$  этих сил относительно точки  $O (3;-1;0)$ .

Ответ:  $\vec{M} = (2;4;2)$ .

## СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

*Смешанным (векторно-скалярным) произведением* векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  называется число, составленное по правилу  $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ . Обозначается:  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ .

### Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при перестановке местами знаков векторного и скалярного произведений:  $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$ .
2.  $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a})\vec{b}$ .
3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов сомножителей:  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$ ,  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ ,  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ .
4. Смешанное произведение ненулевых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны:  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  — компланарны.

5. Модуль смешанного произведения векторов численно равен объёму параллелепипеда  $V_1$ , построенного на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ :  $V_1 = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ .

$\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .

6. Если векторы  $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ ,  $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$  и  $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$ ,

$$\text{тогда } \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

5.1. Найти смешанное произведение векторов  $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$  и  $\vec{c} = \vec{j} - \vec{k}$ .

*Решение*

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(3 - 4) - 1(-2) - 1(2) = \\ = -3 + 3 - 2 = -2.$$

5.2. Показать, что векторы  $\vec{a} = (1; 1; -1)$ ,  $\vec{b} = (1; 2; 2)$ ,  $\vec{c} = (2; 5; 7)$  компланарны.

*Решение*

$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  — компланарны.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1(14 - 10) - 1(7 - 4) - 1(5 - 4) = \\ = 4 - 3 - 1 = 0.$$

Т. к.  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$ , то заданные векторы компланарны.

5.3. Найти объём треугольной пирамиды с вершинами  $S(5;2;-2)$ ,  $A(2;1;-1)$ ,  $B(3;0;2)$ ,  $C(4;-3;1)$ .

*Решение*

Найдём координаты векторов  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AS}$ , совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися в одной точке.

$$\vec{AB} = (1; -1; 3), \vec{AC} = (2; -4; 2), \vec{AS} = (-3; -1; 1).$$

$V = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$  — объём пирамиды, построенной на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \left( 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{6}(2 - 8 + 42) = 6.$$

5.4. Лежат ли точки  $A (-2;1;1)$ ,  $B (0;2;-4)$ ,  $C (3;2;2)$  и  $D (3;-4;0)$  в одной плоскости?

*Решение*

Если векторы  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$  компланарны, то точки  $A, B, C, D$  лежат в одной плоскости.

$\vec{AB} = (2;1;-5)$ ,  $\vec{AC} = (5;1;1)$ ,  $\vec{AD} = (5;-5;-1)$ . Вычислим:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 5 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 10 + 50 = 60 \neq 0, \text{ следовательно,}$$

точки  $A, B, C, D$  не лежат в одной плоскости.

5.5. Показать, что векторы  $\vec{a} = (1;1;4)$ ,  $\vec{b} = (1;-2;0)$ ,  $\vec{c} = (3;-3;4)$  компланарны, и найти линейную зависимость между ними.

*Решение*

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1(-8) - 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-3 + 6) = -8 - 4 + 12 = 0,$$

значит векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны.

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют базис, тогда  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ ;  $m\vec{a} = (m;m;4m)$ ,  $n\vec{b} = (n;-2;0)$ .  $m\vec{a} + n\vec{b} = (m + n; m - 2n; 4m)$ .

$$\vec{c} = (3;-3,4) \Rightarrow \begin{cases} m+n=3 \\ m-2n=-3 \Rightarrow m=1, n=2. \end{cases} \text{ Тогда } \vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}.$$

5.6. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a} = (0;2;5)$ ,  $\vec{b} = (3;4;0)$ ,  $\vec{c} = (0;-3;1)$ .

Ответ:  $V = 51$ .

5.7. Найти высоту пирамиды, опущенную из вершины  $D (2;0;0)$  на плоскость треугольника  $ABC$ , если  $A (0;3;0)$ ,  $B (0;0;6)$ ,  $C (2;3;8)$ .

Ответ:  $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ .

5.8. Показать, что векторы  $\vec{a} = (-1;2;0)$ ,  $\vec{b} = (3;1;-1)$ ,  $\vec{c} = (6;-4;1)$  образуют базис и разложить вектор  $\vec{d} = (1;-1;2)$  в этом базисе.

Ответ:  $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

## 2. ПРАКТИКА ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ (ИДЗ)

### 1 вариант

1. Найти неизвестные координаты и направляющие косинусы вектора  $\vec{c} = (1, y, z)$ , если он коллинеарен вектору  $\vec{AB}$ , где  $A(-1, 3, 4)$ ,  $B(2, 0, 1)$ .

2. Дан треугольник  $ABC$ :  $B(2, 3, -2)$ ,  $C(4, -5, 1)$ . Найти: а) координаты точки  $A$ , б) угол при вершине  $A$ , в) длину высоты, опущенной из вершины  $A$ .

3. Даны силы  $\vec{F}_1 = (4, -2, 3)$  и  $\vec{F}_2 = (3, 2, -1)$ , приложенные к точке  $A(2, -4, 5)$ . Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки  $O(3, -1, 1)$ .

4. Показать, что векторы  $\vec{m} = (1, 4, 6)$ ,  $\vec{n} = (2, -2, -1)$ ,  $\vec{p} = (2, -5, 3)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (3, 5, 1)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

5. Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1(1, -3, 1)$ ,  $A_2(-3, 2, -3)$ ,  $A_3(-3, -3, 3)$ ,  $A_4(-2, 0, 4)$ .

### 2 вариант

1. Найти направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = \vec{AB} - \vec{CD}$ , если  $A(3, 1, 1)$ ,  $B(-3, 2, -3)$ ,  $C(3, -3, 3)$ ,  $D(-2, 0, -4)$ .

2. Дан параллелограмм  $ABCD$ :  $A(2, -3, 1)$ ,  $B(4, 1, 1)$ ,  $C(5, -3, 2)$ . Найти: а) координаты четвёртой вершины, б) угол при вершине  $A$ , в) площадь параллелограмма, г) проекцию вектора  $\vec{AB}$  на вектор  $\vec{BC}$ .

3. Даны две силы  $\vec{F}_1 = (2, -1, 4)$ ,  $\vec{F}_2 = (3, -1, 2)$ , приложенные к одной точке. Вычислить работу, которую производит равнодействующая этих сил, когда точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения  $A(-1, 1, 0)$  в положение  $B(0, 2, 1)$ .

4. Показать, что векторы  $\vec{m} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{n} = (-2, 1, -6)$ ,  $\vec{p} = (4, -6, 1)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (3, 2, -2)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (1,1,1)$ ,  $A_2 (3,4,0)$ ,  $A_3 (-1,5,6)$ ,  $A_4 (4,0,5)$ .

### 3 вариант

**1.** Найти длину и направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n} + \vec{p}$ , если  $\vec{m} = (2, -3, 5)$ ,  $\vec{n} = (1, 0, 4)$ ,  $\vec{p} = (-3, 4, 2)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $A (4, -3, -5)$ ,  $\vec{AB} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{BC} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$ . Найти: а) координаты вершин  $B$  и  $C$ , б) проекцию вектора  $\vec{AC}$  на вектор  $\vec{BC}$ , в) площадь треугольника  $ABC$ , г) угол при вершине  $A$ .

**3.** Найти момент силы  $\vec{F} = (3, 4, -2)$ , приложенной к точке  $A (2, -1, -2)$  относительно точки  $O (0, 0, 0)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (2, 1, 4)$ ,  $\vec{n} = (3, -6, -3)$ ,  $\vec{p} = (4, -2, 8)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (1, -1, -1)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (7, 1, 2)$ ,  $A_2 (-5, 3, -2)$ ,  $A_3 (3, 3, 5)$ ,  $A_4 (4, 5, -1)$ .

### 4 вариант

**1.** Найти неизвестные координаты и направляющие косинусы вектора  $\vec{c} = (x, y, 6)$ , если он коллинеарен вектору  $\vec{AB}$ , где  $A (2, 1, -1)$ ,  $B (-1, 4, 2)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $B (3, -1, 2)$ ,  $C (2, 2, -5)$ ,  $\vec{AB} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ . Найти: а) координаты точки  $A$ , б) угол при вершине  $A$ , в) длину высоты, опущенной из вершины  $A$ .

**3.** Даны силы  $\vec{F}_1 = (2, -1, 1)$  и  $\vec{F}_2 = (1, 4, 2)$ , приложенные к точке  $A (3, 2, 1)$ . Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки  $O (2, -4, 0)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (3, 2, 4)$ ,  $\vec{n} = (2, -3, 1)$ ,  $\vec{p} = (2, 3, -6)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (8, 8, 21)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (3, 1, 1)$ ,  $A_2 (1, 4, 1)$ ,  $A_3 (1, 1, 7)$ ,  $A_4 (3, 4, -1)$ .

### **5 вариант**

**1.** Найти направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = \vec{BC} + \vec{AD}$ , если  $A(4,5,-2)$ ,  $B(-1,3,0)$ ,  $C(6,1,-4)$ ,  $D(1,-1,6)$ .

**2.** Дан параллелограмм  $ABCD$ :  $A(4,3,-2)$ ,  $B(3,0,-1)$ ,  $C(4,-2,4)$ . Найти: а) координаты четвёртой вершины, б) угол при вершине  $A$ , в) площадь параллелограмма, г) проекцию вектора  $\vec{AB}$  на вектор  $\vec{BC}$ .

**3.** Даны две силы  $\vec{F}_1 = (-3,1,5)$ ,  $\vec{F}_2 = (2,4,5)$ , приложенные к одной точке. Вычислить работу, которую производит равнодействующая этих сил, когда точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения  $A(3,0,1)$  в положение  $B(4,1,2)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (2,1,0)$ ,  $\vec{n} = (-1,1,2)$ ,  $\vec{p} = (1,0,-1)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (3,3,1)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1(5,1,0)$ ,  $A_2(7,0,1)$ ,  $A_3(2,1,4)$ ,  $A_4(5,5,3)$ .

### **6 вариант**

**1.** Найти длину и направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = -3\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$ , если  $\vec{m} = (2,-3,1)$ ,  $\vec{n} = (1,0,4)$ ,  $\vec{p} = (-2,-1,1)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $A(1,0,-3)$ ,  $\vec{AB} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{BC} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ . Найти: а) координаты вершин  $B$  и  $C$ , б) проекцию вектора  $\vec{AC}$  на вектор  $\vec{BC}$ , в) площадь треугольника  $ABC$ , г) угол при вершине  $A$ .

**3.** Найти момент силы  $\vec{F} = (2,2,9)$ , приложенной к точке  $A(4,2,-3)$  относительно точки  $O(2,4,0)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (1,3,6)$ ,  $\vec{n} = (4,2,4)$ ,  $\vec{p} = (-1,2,-2)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (2,1,5)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1(2,3,5)$ ,  $A_2(2,-3,-4)$ ,  $A_3(5,2,1)$ ,  $A_4(4,1,1)$ .

### **7 вариант**

**1.** Найти неизвестные координаты и направляющие косину-

сы вектора  $\vec{c} = (4,y,z)$  если он коллинеарен вектору  $\overrightarrow{AB}$ , где  $A(-1,-2,4)$ ,  $B(1,1,2)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $B(1,-2,5)$ ,  $C(3,-6,8)$ ,  $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ . Найти: а) координаты точки  $A$ , б) угол при вершине  $A$ , в) длину высоты, опущенной из вершины  $A$ .

**3.** Даны силы  $\vec{F}_1 = (1,0,2)$  и  $\vec{F}_2 = (2,-2,1)$ , приложенные к точке  $A(2,-3,5)$ . Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки  $O(1,-2,3)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (1,3,2)$ ,  $\vec{n} = (2,1,3)$ ,  $\vec{p} = (3,2,1)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (2,3,1)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1(2,3,1)$ ,  $A_2(3,4,1)$ ,  $A_3(6,2,-3)$ ,  $A_4(5,0,1)$ .

#### 8 вариант

**1.** Найти направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{DC}$ , если  $A(4,4,5)$ ,  $B(0,0,0)$ ,  $C(-5,2,0)$ ,  $D(-2,5,2)$ .

**2.** Дан параллелограмм  $ABCD$ :  $A(-2,3,4)$ ,  $B(2,-1,2)$ ,  $C(6,-3,2)$ . Найти: а) координаты четвёртой вершины, б) угол при вершине  $A$ , в) площадь параллелограмма, г) проекцию вектора  $\overrightarrow{AB}$  на вектор  $\overrightarrow{BC}$ .

**3.** Даны две силы  $\vec{F}_1 = (4,3,1)$ ,  $\vec{F}_2 = (3,2,-1)$  приложенные к одной точке. Вычислить работу, которую производит равнодействующая этих сил, когда точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения  $A(1,2,3)$  в положение  $B(2,3,4)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (1,6,8)$ ,  $\vec{n} = (1,3,-4)$ ,  $\vec{p} = (1,1,-2)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (1,-9,5)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1(5,2,-2)$ ,  $A_2(2,1,1)$ ,  $A_3(6,-2,0)$ ,  $A_4(1,-1,1)$ .

#### 9 вариант

**1.** Найти длину и направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} - \vec{p}$ , если  $\vec{m} = (4,5,-2)$ ,  $\vec{n} = (2,-1,1)$ ,  $\vec{p} = (4,3,-2)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $A (2, -7, 1)$ ,  $\vec{AB} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{BC} = 7\vec{i} - 4\vec{k}$ . Найти: а) координаты вершин  $B$  и  $C$ , б) проекцию вектора  $\vec{AC}$  на вектор  $\vec{BC}$ , в) площадь треугольника  $ABC$ , г) угол при вершине  $A$ .

**3.** Найти момент силы  $\vec{F} = (2, 1, -3)$ , приложенной к точке  $A (1, 2, 0)$  относительно точки  $O (3, 0, -3)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{n} = (1, -2, 0)$ ,  $\vec{p} = (0, 1, -2)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (1, 1, 2)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (-4, 5, -3)$ ,  $A_2 (3, 4, 0)$ ,  $A_3 (7, 1, -1)$ ,  $A_4 (2, 2, 0)$ .

### 10 вариант

**1.** Найти неизвестные координаты и направляющие косинусы вектора  $\vec{c} = (x, y, -2)$ , если он коллинеарен вектору  $\vec{AB}$ , где  $A (2, -1, 2)$ ,  $B (4, 1, 4)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $B (4, 1, 1)$ ,  $C (3, -2, 5)$ ,  $\vec{AB} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ . Найти: а) координаты точки  $A$ , б) угол при вершине  $A$ , в) длину высоты, опущенной из вершины  $A$ .

**3.** Даны силы  $\vec{F}_1 = (2, -3, 3)$  и  $\vec{F}_2 = (-1, 2, -1)$ , приложенные к точке  $A (3, -2, 1)$ . Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки  $O (2, -1, 0)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (3, 2, 1)$ ,  $\vec{n} = (4, -4, 5)$ ,  $\vec{p} = (2, -3, 1)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (8, -1, 0)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (1, -1, 6)$ ,  $A_2 (4, 5, -2)$ ,  $A_3 (-1, 3, 0)$ ,  $A_4 (6, 1, 5)$ .

### 11 вариант

**1.** Найти направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = 2\vec{BD} + 3\vec{AC}$ , если  $A (1, 2, 4)$ ,  $B (7, 1, -4)$ ,  $C (5, -3, -2)$ ,  $D (3, 8, 5)$ .

**2.** Дан параллелограмм  $ABCD$ :  $A (0, -2, 3)$ ,  $B (4, 1, 2)$ ,  $C (2, 7, -1)$ . Найти: а) координаты четвёртой вершины, б) угол при вершине  $A$ , в) площадь параллелограмма, г) проекцию вектора  $\vec{AB}$  на вектор  $\vec{BC}$ .

**3.** Даны две силы  $\vec{F}_1 = (-1, 1, 0)$ ,  $\vec{F}_2 = (3, -2, 1)$ , приложенные к одной точке. Вычислить работу, которую производит равнодействующая этих сил, когда точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения  $A (3, -2, 1)$  в положение  $B (4, -1, 2)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (5, 2, 1)$ ,  $\vec{n} = (8, -3, 2)$ ,  $\vec{p} = (-1, 2, 3)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (7, 9, 1)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (0, 0, 0)$ ,  $A_2 (5, 2, 0)$ ,  $A_3 (2, 5, 0)$ ,  $A_4 (1, 2, 4)$ .

### 12 вариант

**1.** Найти длину и направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n} + \vec{p}$ , если  $\vec{m} = (3, -2, 4)$ ,  $\vec{n} = (-3, 0, 2)$ ,  $\vec{p} = (0, 8, 1)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $A (-3, 1, 2)$ ,  $\overrightarrow{AB} = 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\overrightarrow{BC} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ . Найти: а) координаты вершин  $B$  и  $C$ , б) проекцию вектора  $\overrightarrow{AC}$  на вектор  $\overrightarrow{BC}$ , в) площадь треугольника  $ABC$ , г) угол при вершине  $A$ .

**3.** Найти момент силы  $\vec{F} = (3, 2, -1)$ , приложенной к точке  $A (5, 2, 6)$  относительно точки  $O (2, 0, -4)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (2, 5, 3)$ ,  $\vec{n} = (-1, 2, -1)$ ,  $\vec{p} = (5, 13, 5)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (4, 2, 0)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (-2, 3, -2)$ ,  $A_2 (2, -3, 2)$ ,  $A_3 (2, 2, 0)$ ,  $A_4 (1, 5, 5)$ .

### 13 вариант

**1.** Найти неизвестные координаты и направляющие косинусы вектора  $\vec{c} = (x, 1, z)$ , если он коллинеарен вектору  $\overrightarrow{AB}$ , где  $A (1, 2, 4)$ ,  $B (1, -1, 1)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $B (2, 1, 0)$ ,  $C (3, -2, 5)$ ,  $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + \vec{k}$ . Найти: а) координаты точки  $A$ , б) угол при вершине  $A$ , в) длину высоты, опущенной из вершины  $A$ .

**3.** Даны силы  $\vec{F}_1 = (3, -1, -1)$  и  $\vec{F}_2 = (-2, 1, 0)$  приложенные к точке  $A (-3, 1, 0)$ . Определить величину и направляющие косинусы

момента равнодействующей этих сил относительно точки  $O (-1,-2,1)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (1,4,2)$ ,  $\vec{n} = (1,-3,1)$ ,  $\vec{p} = (-1,1,-1)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (-2,1,1)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (4,-3,-2)$ ,  $A_2 (2,2,3)$ ,  $A_3 (2,-2,-3)$ ,  $A_4 (-1,-2,3)$ .

#### 14 вариант

**1.** Найти направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = 2\vec{BC} + \vec{AD}$ , если  $A (4,-6,-1)$ ,  $B (-2,3,-2)$ ,  $C (2,-3,2)$ ,  $D (2,6,0)$ .

**2.** Дан параллелограмм  $ABCD$ :  $A (3,4,-5)$ ,  $B (1,-3,2)$ ,  $C (2,4,0)$ . Найти: а) координаты четвёртой вершины, б) угол при вершине  $A$ , в) площадь параллелограмма, г) проекцию вектора  $\vec{AB}$  на вектор  $\vec{BC}$ .

**3.** Даны две силы  $\vec{F}_1 = (3,0,1)$ ,  $\vec{F}_2 = (3,1,5)$  приложенные к одной точке. Вычислить работу, которую производит равнодействующая этих сил, когда точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения  $A (4,2,-5)$  в положение  $B (5,3,-4)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (1,3,2)$ ,  $\vec{n} = (2,-5,7)$ ,  $\vec{p} = (1,3,-1)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (4,1,8)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (4,2,-1)$ ,  $A_2 (3,0,4)$ ,  $A_3 (0,0,4)$ ,  $A_4 (5,-1,-3)$ .

#### 15 вариант

**1.** Найти длину и направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = 3\vec{m} - 3\vec{n} + 5\vec{p}$ , если  $\vec{m} = (-4,2,0)$ ,  $\vec{n} = (3,0,2)$ ,  $\vec{p} = (4,-1,1)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $A (4,-2,1)$ ,  $\vec{AB} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{BC} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ . Найти: а) координаты вершин  $B$  и  $C$ , б) проекцию вектора  $\vec{AC}$  на вектор  $\vec{BC}$ , в) площадь треугольника  $ABC$ , г) угол при вершине  $A$ .

**3.** Найти момент силы  $\vec{F} = (-4,1,3)$ , приложенной к точке  $A (1,0,4)$  относительно точки  $O (3,4,0)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (2,1,2)$ ,  $\vec{n} = (1,2,2)$ ,  $\vec{p} = (2,2,1)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (1,2,1)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1(1,2,-1)$ ,  $A_2(0,1,1)$ ,  $A_3(-2,-1,-4)$ ,  $A_4(-7,0,2)$ .

### 16 вариант

**1.** Найти неизвестные координаты и направляющие косинусы вектора  $\vec{c} = (-2,y,z)$ , если он коллинеарен вектору  $\overrightarrow{AB}$ , где  $A(2,2,4)$ ,  $B(3,2,1)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $B(3,-1,2)$ ,  $C(2,0,-4)$ ,  $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ . Найти: а) координаты точки  $A$ , б) угол при вершине  $A$ , в) длину высоты, опущенной из вершины  $A$ .

**3.** Даны силы  $\vec{F}_1 = (4,-2,-1)$  и  $\vec{F}_2 = (-2,2,1)$  приложенные к точке  $A(-4,2,1)$ . Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки  $O(-3,-1,2)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (1,2,1)$ ,  $\vec{n} = (2,1,1)$ ,  $\vec{p} = (1,1,2)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (2,1,2)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1(4,3,2)$ ,  $A_2(7,0,0)$ ,  $A_3(3,-1,4)$ ,  $A_4(6,3,4)$ .

### 17 вариант

**1.** Найти направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{BC}$ , если  $A(7,-5,5)$ ,  $B(3,1,1)$ ,  $C(1,4,1)$ ,  $D(1,3,7)$ .

**2.** Дан параллелограмм  $ABCD$ :  $A(3,0,-5)$ ,  $B(2,-5,1)$ ,  $C(3,2,5)$ . Найти: а) координаты четвёртой вершины, б) угол при вершине  $A$ , в) площадь параллелограмма, г) проекцию вектора  $\overrightarrow{AB}$  на вектор  $\overrightarrow{BC}$ .

**3.** Даны две силы  $\vec{F}_1 = (-1,3,2)$ ,  $\vec{F}_2 = (5,4,2)$  приложенные к одной точке. Вычислить работу, которую производит равнодействующая этих сил, когда точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения  $A(5,-3,1)$  в положение  $B(6,-2,2)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (1,3,2)$ ,  $\vec{n} = (2,1,3)$ ,  $\vec{p} = (3,2,1)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (5,6,1)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1(3,5,3)$ ,  $A_2(3,-1,-6)$ ,  $A_3(6,4,-1)$ ,  $A_4(5,3,-1)$ .

### 18 вариант

**1.** Найти длину и направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$ , если  $\vec{m} = (7,-1,5)$ ,  $\vec{n} = (-10,5,-7)$ ,  $\vec{p} = (10,2,5)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $A(3,-2,5)$ ,  $\vec{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $\vec{BC} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ . Найти: а) координаты вершин  $B$  и  $C$ , б) проекцию вектора  $\vec{AC}$  на вектор  $\vec{BC}$ , в) площадь треугольника  $ABC$ , г) угол при вершине  $A$ .

**3.** Найти момент силы  $\vec{F} = (2,0,2)$ , приложенной к точке  $A(3,-2,0)$  относительно точки  $O(1,2,-1)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (2,4,3)$ ,  $\vec{n} = (1,2,4)$ ,  $\vec{p} = (3,5,7)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (3,5,2)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1(4,4,1)$ ,  $A_2(5,5,1)$ ,  $A_3(8,3,-3)$ ,  $A_4(7,1,1)$ .

### 19 вариант

**1.** Найти неизвестные координаты и направляющие косинусы вектора  $\vec{c} = (2,y,z)$ , если он коллинеарен вектору  $\vec{AB}$ , где  $A(2,3,1)$ ,  $B(3,2,2)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $B(4,3,1)$ ,  $C(0,2,1)$ ,  $\vec{AB} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ . Найти: а) координаты точки  $A$ , б) угол при вершине  $A$ , в) длину высоты, опущенной из вершины  $A$ .

**3.** Даны силы  $\vec{F}_1 = (3,-3,-2)$  и  $\vec{F}_2 = (0,2,-1)$ , приложенные к точке  $A(3,-1,1)$ . Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки  $O(1,0,2)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (3,1,2)$ ,  $\vec{n} = (4,5,3)$ ,  $\vec{p} = (2,2,4)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (8,5,3)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (4,-4,4)$ ,  $A_2 (7,1,2)$ ,  $A_3 (3,0,6)$ ,  $A_4 (6,4,6)$ .

### 20 вариант

**1.** Найти направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD}$ , если  $A (3,4,-1)$ ,  $B (4,-3,2)$ ,  $C (2,2,3)$ ,  $D (2,-2,3)$ .

**2.** Дан параллелограмм  $ABCD$ :  $A (6,-2,1)$ ,  $B (3,-4,1)$ ,  $C (4,0,2)$ . Найти: а) координаты четвёртой вершины, б) угол при вершине  $A$ , в) площадь параллелограмма, г) проекцию вектора  $\overrightarrow{AB}$  на вектор  $\overrightarrow{BC}$ .

**3.** Даны две силы  $\vec{F}_1 = (6,4,3)$ ,  $\vec{F}_2 = (-3,1,1)$ , приложенные к одной точке. Вычислить работу, которую производит равнодействующая этих сил, когда точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения  $A (0,2,1)$  в положение  $B (1,3,2)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (1,2,4)$ ,  $\vec{n} = (3,6,8)$ ,  $\vec{p} = (2,1,-1)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (4,2,2)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (-2,0,4)$ ,  $A_2 (-3,-3,3)$ ,  $A_3 (-3,2,-3)$ ,  $A_4 (1,-3,1)$ .

### 21 вариант

**1.** Найти длину и направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n} + 2\vec{p}$ , если  $\vec{m} = (2,1,3)$ ,  $\vec{n} = (0,1,1)$ ,  $\vec{p} = (-3,0,-2)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $A (4,-3,1)$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{i} - \vec{k}$ . Найти: а) координаты вершин  $B$  и  $C$ , б) проекцию вектора  $\overrightarrow{AC}$  на вектор  $\overrightarrow{BC}$ , в) площадь треугольника  $ABC$ , г) угол при вершине  $A$ .

**3.** Найти момент силы  $\vec{F} = (2,1,-2)$ , приложенной к точке  $A (-5,2,-6)$  относительно точки  $O (1,-1,3)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (1,2,5)$ ,  $\vec{n} = (1,-3,-7)$ ,  $\vec{p} = (1,4,8)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (4,-4,-7)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (4,0,5)$ ,  $A_2 (1,1,1)$ ,  $A_3 (3,4,0)$ ,  $A_4 (-1,5,6)$ .

## **22 вариант**

**1.** Найти неизвестные координаты и направляющие косинусы вектора  $\vec{c} = (x, y, -1)$ , если он коллинеарен вектору  $\vec{AB}$ , где  $A(2, 1, 3)$ ,  $B(1, 1, 1)$ .

**2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $B(5, -3, 1)$ ,  $C(-3, 2, 0)$ ,  $\vec{AB} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ . Найти: а) координаты точки  $A$ , б) угол при вершине  $A$ , в) длину высоты, опущенной из вершины  $A$ .

**3.** Даны силы  $\vec{F}_1 = (4, 2, -3)$  и  $\vec{F}_2 = (-4, -1, 2)$ , приложенные к точке  $A(4, 2, -3)$ . Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки  $O(2, 2, -1)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (2, 3, 1)$ ,  $\vec{n} = (-1, 2, -2)$ ,  $\vec{p} = (1, 2, 1)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (2, -2, 1)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1(-5, 3, -2)$ ,  $A_2(7, 1, 2)$ ,  $A_3(4, 5, -1)$ ,  $A_4(3, 3, 5)$ .

## **23 вариант**

**1.** Найти направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = 4\vec{AB} - 2\vec{CD}$ , если  $A(5, 1, 0)$ ,  $B(7, 0, 1)$ ,  $C(2, -1, 4)$ ,  $D(5, -5, 3)$ .

**2.** Дан параллелограмм  $ABCD$ :  $A(0, 3, 1)$ ,  $B(-2, 0, 4)$ ,  $C(6, -3, 1)$ . Найти: а) координаты четвёртой вершины, б) угол при вершине  $A$ , в) площадь параллелограмма, г) проекцию вектора  $\vec{AB}$  на вектор  $\vec{BC}$ .

**3.** Даны две силы  $\vec{F}_1 = (4, 2, -3)$ ,  $\vec{F}_2 = (1, 3, 2)$  приложенные к одной точке. Вычислить работу, которую производит равнодействующая этих сил, когда точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения  $A(3, 0, -4)$  в положение  $B(4, 1, -3)$ .

**4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (1, 2, 1)$ ,  $\vec{n} = (2, -1, 3)$ ,  $\vec{p} = (3, -1, 4)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (5, 1, 6)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .

**5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1(1, 4, 1)$ ,  $A_2(3, 1, 1)$ ,  $A_3(3, 4, -1)$ ,  $A_4(1, 1, 7)$ .

#### **24 вариант**

- 1.** Найти длину и направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = 6\vec{m} - \vec{n} + \vec{p}$ , если  $\vec{m} = (0,1,1)$ ,  $\vec{n} = (1,-2,-8)$ ,  $\vec{p} = (3,-2,0)$ .
- 2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $A (4,-2,-1)$ ,  $\vec{AB} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{BC} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$ . Найти: а) координаты вершин  $B$  и  $C$ , б) проекцию вектора  $\vec{AC}$  на вектор  $\vec{BC}$ , в) площадь треугольника  $ABC$ , г) угол при вершине  $A$ .
- 3.** Найти момент силы  $\vec{F} = (1,-3,2)$ , приложенной к точке  $A (-1,6,6)$  относительно точки  $O (3,0,-2)$ .
- 4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (1,2,3)$ ,  $\vec{n} = (-2,3,-2)$ ,  $\vec{p} = (3,-4,-5)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (6,20,6)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .
- 5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (5,1,0)$ ,  $A_2 (7,1,1)$ ,  $A_3 (5,5,3)$ ,  $A_4 (2,1,4)$ .

#### **25 вариант**

- 1.** Найти неизвестные координаты и направляющие косинусы вектора  $\vec{c} = (8,y,z)$ , если он коллинеарен вектору  $\vec{AB}$ , где  $A (1,2,4)$ ,  $B (5,1,2)$ .
- 2.** Дан треугольник  $ABC$ :  $B (5,6,-3)$ ,  $C (3,1,1)$ ,  $\vec{AB} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ . Найти: а) координаты точки  $A$ , б) угол при вершине  $A$ , в) длину высоты, опущенной из вершины  $A$ .
- 3.** Даны силы  $\vec{F}_1 = (2,1,-3)$  и  $\vec{F}_2 = (1,-2,1)$  приложенные к точке  $A (3,1,1)$ . Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки  $O (1,2,3)$ .
- 4.** Показать, что векторы  $\vec{m} = (8,1,-4)$ ,  $\vec{n} = (3,1,-1)$ ,  $\vec{p} = (-6,-1,3)$  некомпланарны, и разложить вектор  $\vec{a} = (2,1,-2)$  по векторам  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$ .
- 5.** Вычислить объём пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , если  $A_1 (6,1,5)$ ,  $A_2 (1,-1,6)$ ,  $A_3 (4,5,-2)$ ,  $A_4 (-1,3,0)$ .

**ОТВЕТЫ К ИНДИВИДУАЛЬНЫМ ДОМАШНИМ ЗАДАНИЯМ**

| Номер варианта | Номер задания | Ответ  | Номер варианта | Номер задания | Ответ   |
|----------------|---------------|--|----------------|---------------|---|
| 1              | 1             | $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$<br>$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}},$<br>$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$                                   | 2              | 1             | $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{14}},$<br>$\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{14}},$<br>$\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$ |
|                | 2             | $A(0,6,-7), \cos A \approx 0,9,$<br>$h = \sqrt{\frac{1077}{77}}$   |                | 2             | $D(3,-7,2),$<br>$\cos A \approx -0,74,$<br>$S = 2\sqrt{41},$<br>$np_{\vec{BC}}\vec{AB} = -\frac{14}{3\sqrt{2}}$   |
|                | 3             | $ \vec{M}  = 9\sqrt{17},$<br>$\cos\alpha = -\frac{2}{3\sqrt{17}},$<br>$\cos\beta = \frac{10}{3\sqrt{17}}$<br>$\cos\gamma = \frac{7}{3\sqrt{17}}$ |                | 3             | $A = 9$   |
|                | 4             | $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n} + \vec{p}$   |                | 4             | $\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n} + \vec{p}$   |
|                | 5             | $V = 17$   |                | 5             | $V = \frac{77}{6}$  |
| 3              | 1             | $ \vec{a}  = 2\sqrt{2},$   | 4              | 1             | $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}},$   |

Продолжение табл.

| Номер варианта | Номер задания | Ответ   | Номер варианта | Номер задания | Ответ   |
|----------------|---------------|---|----------------|---------------|---|
| 3              | 1             | $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}},$<br>$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}},$<br>$\cos\gamma = 0$   | 4              | 1             | $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}},$<br>$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$  |
|                | 2             | $B (6, -7, -6)$<br>$C (9, -11, -7)$<br>$np_{B\vec{C}} \vec{AC} = \frac{49}{\sqrt{26}},$<br>$S = \frac{\sqrt{17}}{2},$<br>$\cos A \approx 0,995$ |                | 2             | $A (0,0,1),$<br>$\cos A = -\frac{1}{11},$<br>$h = \frac{4\sqrt{30}}{\sqrt{59}}$   |
|                | 3             | $\vec{M} = (10, -2, 11)$  |                | 3             | $ \vec{M}  = 15\sqrt{2},$<br>$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$<br>$\cos\beta = 0,$<br>$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
|                | 4             | $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{3}\vec{n} - \frac{1}{4}\vec{p}$  |                | 4             | $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n} - \vec{p}$  |
|                | 5             | $V = \frac{107}{3}$   |                | 5             | $V = 8$   |

Продолжение табл.

| Номер варианта | Номер задания | Ответ  | Номер варианта | Номер задания | Ответ  |
|----------------|---------------|--|----------------|---------------|--|
| 5              | 1             | $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}},$<br>$\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{6}}$<br>$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$ | 6              | 1             | $ \vec{a}  = 2\sqrt{11},$<br>$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}},$<br>$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{11}},$<br>$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{11}}$ |
|                | 2             | $D(5,1,3),$<br>$\cos A \approx 0,55,$<br>$S = \sqrt{230},$<br>$np_{\vec{BC}} \vec{AC} = \frac{\sqrt{30}}{3}$ |                | 2             | $B(7, -2, 0),$<br>$C(13, -4, 5),$<br>$np_{\vec{BC}} \vec{AC} = \frac{120}{\sqrt{65}},$<br>$S = 2\sqrt{10},$<br>$\cos A \approx 0,9$          |
|                | 3             | $A = 14$   |                | 3             | $\vec{M} = (-12, -24, 8)$  |
|                | 4             | $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} + 3\vec{p}$  |                | 4             | $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{4}\vec{n} - \frac{1}{2}\vec{p}$   |
|                | 5             | $V = \frac{53}{6}$   |                | 5             | $V = 2$  |
| 7              | 1             | $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{17}},$<br>$\cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{17}},$                                   | 8              | 1             | $\cos\alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}},$<br>$\cos\beta = \frac{1}{3\sqrt{2}},$  |
|                |               |  |                |               |  |

Продолжение табл.

| Номер варианта | Номер задания | Ответ  | Номер варианта | Номер задания | Ответ   |
|----------------|---------------|--|----------------|---------------|---|
| 7              | 1             | $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{17}}$   | 8              | 1             | $\cos\gamma = -\frac{4}{3\sqrt{2}}$   |
|                | 2             | $A(-2,0,4)$ ,<br>$\cos A \approx 0,95$ ,<br>$h = 3\sqrt{\frac{13}{29}}$  |                | 2             | $D(2,1,4)$ ,<br>$\cos A \approx 0,9$ , $S = 12$ ,<br>$np_{BC}\vec{AC} = \frac{12}{\sqrt{5}}$                      |
|                | 3             | $ \vec{M}  = \sqrt{11}$ ,<br>$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}}$ ,<br>$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{11}}$ ,<br>$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{11}}$ |                | 3             | $A = 12$  |
|                | 4             | $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{m} - \frac{1}{3}\vec{n} + \frac{2}{3}\vec{p}$   |                | 4             | $\vec{a} = -\frac{1}{5}\vec{m} - \frac{9}{2}\vec{n} + \frac{57}{10}\vec{p}$                                       |
|                | 5             | $V = 4$  |                | 5             | $V = \frac{32}{3}$  |
| 9              | 1             | $ \vec{a}  = 2\sqrt{5}$ ,<br>$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,<br>$\cos\beta = 0$ ,<br>$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$                     | 10             | 1             | $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,<br>$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,<br>$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

Продолжение табл.

| Номер варианта | Номер задания | Ответ  | Номер варианта | Номер задания | Ответ   |
|----------------|---------------|--|----------------|---------------|---|
| <b>9</b>       | 2             | $B(7, -4, 0),$<br>$C(14, -4, -4),$<br>$np_{B\vec{C}} \overrightarrow{AC} = \frac{104}{\sqrt{65}},$<br>$S = \frac{\sqrt{754}}{2},$<br>$\cos A \approx 0,95$ | <b>10</b>      | 2             | $A(2, -3, 2), \cos A \approx 0,2,$<br>$h = \sqrt{\frac{111}{13}}$   |
|                | 3             | $\vec{M} = (-9, 0, -6)$  |                | 3             | $ \vec{M}  = \sqrt{2},$<br>$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}},$<br>$\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}},$<br>$\cos \gamma = 0$ |
|                | 4             | $\vec{a} = \frac{8}{7}\vec{m} - \frac{1}{7}\vec{n} - \frac{3}{7}\vec{p}$   |                | 4             | $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n} + 3\vec{p}$   |
|                | 5             | $V = 8$  |                | 5             | $V = 4$   |
| <b>11</b>      | 1             | $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}},$<br>$\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{17}},$<br>$\cos \gamma = 0$  | <b>12</b>      | 1             | $ \vec{a}  = 15\sqrt{2},$<br>$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$<br>$\cos \beta = 0,$<br>$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ |

Продолжение табл.

| Номер варианта | Номер задания | Ответ  | Номер варианта | Номер задания | Ответ   |
|----------------|---------------|--|----------------|---------------|---|
| 11             | 2             | $D (-2,4,0),$<br>$\cos A \approx 0,4$<br>$S = \sqrt{1105},$<br>$np_{\vec{BC}} \vec{AB} = \frac{13}{7}$ | 12             | 2             | $B (-3,3,3),$<br>$C (0,0,2),$<br>$np_{\vec{BC}} \vec{AB} = \frac{12}{\sqrt{19}},$<br>$S = \frac{\sqrt{46}}{2},$<br>$\cos A \approx -0,28$ |
|                | 3             | $A = 2$  |                | 3             | $\vec{M} = (-22,33,0)$  |
|                | 4             | $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$   |                | 4             | $\vec{a} = -4\vec{m} - 2\vec{n} + 2\vec{p}$   |
|                | 5             | $V = 14$   |                | 5             | $V = 22$  |
| 13             | 1             | $\cos \alpha = 0,$<br>$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}},$<br>$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$         | 14             | 1             | $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}},$<br>$\cos \beta = 0,$<br>$\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{13}}$  |
|                | 2             | $A (-2,1,-1),$<br>$\cos A \approx 0,75,$<br>$h = \sqrt{\frac{514}{35}}$                                |                | 2             | $D (4,11,-7),$<br>$\cos A \approx -0,88,$<br>$S = \sqrt{1283},$<br>$np_{\vec{BC}} \vec{AB} = -\frac{65}{\sqrt{54}}$                       |
|                | 3             | $ \vec{M}  = 3\sqrt{3},$   |                | 3             | $A = 13$  |

Продолжение табл.

| Номер варианта | Номер задания | Ответ  | Номер варианта | Номер задания | Ответ  |
|----------------|---------------|--|----------------|---------------|--|
| <b>13</b>      | 3             | $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}},$<br>$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}},$<br>$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$                              | <b>14</b>      | 3             |  |
|                | 4             | $\vec{a} = 3\vec{m} + 8\vec{n} + 13\vec{p}$  |                | 4             | $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$  |
|                | 5             | $V = 13$   |                | 5             | $V = \frac{57}{6}$   |
| <b>15</b>      | 1             | $ \vec{a}  = \sqrt{3},$<br>$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}},$<br>$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}},$<br>$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$    | <b>16</b>      | 1             | $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}},$<br>$\cos\beta = 0,$<br>$\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{10}}$ |
|                | 2             | $B(6, -6, 2),$<br>$C(9, -8, 2),$<br>$np_{\vec{BC}} \vec{AC} = \frac{27}{\sqrt{806}},$<br>$S = \frac{\sqrt{77}}{2},$<br>$\cos A \approx 0,97$ |                | 2             | $A(0, 1, -3), \cos A \approx 0,2,$<br>$h = \sqrt{\frac{219}{38}}$                              |

Продолжение табл.

| Номер варианта | Номер задания | Ответ  | Номер варианта | Номер задания | Ответ  |
|----------------|---------------|--|----------------|---------------|--|
| <b>15</b>      | 3             | $\vec{M} = (-16, -10, -18)$  | <b>16</b>      | 3             | $ \vec{M}  = 2\sqrt{10},$<br>$\cos\alpha = 0,$<br>$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{10}},$<br>$\cos\gamma = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ |
|                | 4             | $\vec{a} = -\frac{2}{5}\vec{m} + \frac{3}{5}\vec{n} + \frac{3}{5}\vec{p}$  |                | 4             | $\vec{a} = -\frac{1}{4}\vec{m} + \frac{3}{4}\vec{n} + \frac{3}{4}\vec{p}$  |
|                | 5             | $V = 9$  |                | 5             | $V = \frac{29}{3}$   |
| <b>17</b>      | 1             | $\cos\alpha = 0,$<br>$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}},$<br>$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$                     | <b>18</b>      | 1             | $ \vec{a}  = \sqrt{10},$<br>$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}},$<br>$\cos\beta = 0,$<br>$\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{10}}$    |
|                | 2             | $D(4,7,-1),$<br>$\cos A \approx -0,19,$<br>$S = 2\sqrt{987},$<br>$np_{B\vec{C}}\vec{AC} = -\frac{12}{\sqrt{66}}$ |                | 2             | $B(6,0,3),$<br>$C(7,2,-1),$<br>$np_{B\vec{C}}\vec{AC} = \frac{36}{\sqrt{21}},$<br>$S = \sqrt{33},$                           |

Продолжение табл.

| Номер варианта | Номер задания | Ответ   | Номер варианта | Номер задания | Ответ   |
|----------------|---------------|---|----------------|---------------|---|
| 17             | 3             | $A = 15$  | 18             | 3             | $\cos A = \frac{16}{17}$<br>$\vec{M} = (-8, -2, 8)$   |
|                | 4             | $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n} + 2\vec{p}$  |                | 4             | $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n} + \vec{p}$  |
|                | 5             | $V = 2$   |                | 5             | $V = 4$   |
| 19             | 1             | $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$<br>$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}},$<br>$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$                               | 20             | 1             | $\cos\alpha = \frac{4}{3\sqrt{10}},$<br>$\cos\beta = -\frac{7}{3\sqrt{10}},$<br>$\cos\gamma = \frac{5}{3\sqrt{10}}$ |
|                | 2             | $A(2, 8, 0), \cos A \approx 0,77,$<br>$h = \sqrt{\frac{501}{17}}$   |                | 2             | $D(7, 2, 2),$<br>$\cos A \approx -0,72,$<br>$S = \sqrt{113},$<br>$np_{B\vec{C}}\vec{AC} = -\frac{11}{3\sqrt{2}}$    |
|                | 3             | $ \vec{M}  = \sqrt{14},$<br>$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}},$<br>$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}},$<br>$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$ |                | 3             | $A = 12$  |

Продолжение табл.

| Номер варианта | Номер задания | Ответ  | Номер варианта | Номер задания | Ответ  |
|----------------|---------------|--|----------------|---------------|--|
| <b>19</b>      | 4             | $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$   | <b>20</b>      | 4             | $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n} + 2\vec{p}$  |
|                | 5             | $V = \frac{19}{3}$   |                | 5             | $V = 11$   |
| <b>21</b>      | 1             | $ \vec{a}  = \sqrt{2}, \cos\alpha = 0,$<br>$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}},$<br>$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | <b>22</b>      | 1             | $\cos\alpha = -\frac{1}{5},$<br>$\cos\beta = 0,$<br>$\cos\gamma = -\frac{2}{\sqrt{5}}$   |
|                | 2             | $B(4, -2, 3),$<br>$C(5, -2, 2),$<br>$np_{BC}\vec{AC} = 0, S = \frac{\sqrt{6}}{2},$<br>$\cos A \approx 0,77$        |                | 2             | $A(2, 1, -3),$<br>$\cos A \approx -0,2,$<br>$h = \sqrt{\frac{77}{5}}$  |
|                | 3             | $\vec{M} = (3, -30, -12)$  |                | 3             | $ \vec{M}  = 2\sqrt{3},$<br>$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$<br>$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}},$<br>$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ |
|                | 4             | $\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n} - \vec{p}$  |                | 4             | $\vec{a} = 2\vec{m} - 2\vec{n} - 3\vec{p}$   |
|                | 5             | $V = \frac{121}{6}$  |                | 5             | $V = \frac{107}{3}$  |

Продолжение табл.

| Номер варианта | Номер задания | Ответ   | Номер варианта | Номер задания | Ответ  |
|----------------|---------------|---|----------------|---------------|--|
| 23             | 1             | $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$  | 24             | 1             | $ \vec{a}  = 2\sqrt{6}$  |
|                |               | $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}},$<br>$\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$  |                |               | $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}},$<br>$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{6}},$<br>$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{6}}$                              |
|                | 2             | $D(8,0,-2),$<br>$\cos A \approx -0,38,$<br>$S = 6\sqrt{43},$<br>$np_{\vec{BC}} \vec{AC} = -\frac{16}{\sqrt{82}}$  |                | 2             | $B(8,-7,0),$<br>$C(11,-12,4),$<br>$np_{\vec{BC}} \vec{AC} = \frac{19}{5\sqrt{2}},$<br>$S = \frac{\sqrt{419}}{2},$<br>$\cos A \approx 0,97$ |
|                | 3             | $A = 9$   |                | 3             | $\vec{M} = (36,16,6)$  |
|                | 4             | $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n} + 2\vec{p}$  |                | 4             | $\vec{a} = 8\vec{m} + 4\vec{n} + 2\vec{p}$   |
|                | 5             | $V = 4$   |                | 5             | $V = \frac{22}{3}$   |
| 25             | 1             | $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{21}},$<br>$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{21}},$<br>$\cos\gamma = -\frac{2}{\sqrt{21}}$ |                |               |  |

Окончание табл.

| Номер варианта | Номер задания | Ответ  |
|----------------|---------------|--|
| 25             | 2             | $A (2,3,-1),$<br>$\cos A \approx 0,5,$<br>$h = \sqrt{\frac{149}{45}}$  |
|                | 3             | $ \vec{M}  = \sqrt{5}, \cos\alpha = 0,$<br>$\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}},$<br>$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$ |
|                | 4             | $\vec{a} = -5\vec{m} - 2\vec{n} - 8\vec{p}$  |
|                | 5             | $V = \frac{58}{3}$   |

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ефимов, Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. — М.: Наука, 1975. — 253.
2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. — М.: Наука, 1975. — 244 с.
3. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. — М.: Наука, 1971. — 360 с.
4. Привалов, И.И. Аналитическая геометрия / И.И. Привалов. — М.: Наука, 1966. — 272 с.
5. Шнейдер, В.Е. Краткий курс высшей математики. 1 часть / В.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов — М.: Высшая школа, 1972. — 384 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |    |
|---|----|
| Предисловие .....   | 3  |
| Теория .....  | 4  |
| Вектор. Линейные операции над векторами. Разложение векторов .....                              | 4  |
| Линейные операции над векторами .....   | 5  |
| Произведение вектора на число .....   | 6  |
| Линейная зависимость векторов .....   | 6  |
| Свойства векторов .....   | 7  |
| Задачи для самостоятельного решения .....   | 8  |
| <br>Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора на составляющие<br>по осям координат ..... | 8  |
| Основные правила и формулы .....  | 9  |
| Задачи для самостоятельного решения .....   | 10 |
| <br>Скалярное произведение двух ненулевых векторов .....  | 12 |
| Свойства скалярного произведения .....  | 12 |
| Задачи для самостоятельного решения .....   | 12 |
| <br>Векторное произведение двух ненулевых векторов .....  | 15 |
| Свойства векторного произведения .....  | 15 |
| Задачи для самостоятельного решения .....   | 16 |
| <br>Смешанное произведение векторов .....   | 18 |
| Свойства смешанного произведения .....  | 18 |
| Задачи для самостоятельного решения .....   | 18 |
| <br>Практика .....  | 22 |
| Индивидуальные домашние задания (ИДЗ) .....   | 22 |
| Ответы к индивидуальным домашним заданиям .....   | 34 |
| Список литературы .....   | 46 |