УРАЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

И.О. Заплатина
Ю.Л. Чепелев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ПРИ ПОМОЩИ МАЯТНИКА

Екатеринбург
2013

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВПО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра физики

И.О. Заплатина
Ю.Л. Чепелев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ПРИ ПОМОЩИ МАЯТНИКА

Методические указания
к лабораторным работам
по физике для студентов всех специальностей
очной и заочной форм обучения

Екатеринбург
2013

Рекомендовано методической комиссией ИАТТС.
Протокол № 5 от 25 апреля 2012 г.

Рецензент: доктор технических наук Крюк В.И.

Редактор Черных Л.Д.
Оператор компьютерной верстки Карпова Е.В.

Подписано в печать 27.12.13		Поз. 54
Плоская печать	Формат 60×84 $^1/_{16}$	Тираж 10 экз.
Заказ №	Печ. л. 0,46	Цена руб. коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

Кинематика гармонических колебаний

Колебательным называется любое движение или изменение состояния системы материальных точек, которое характеризуется определенной степенью повторяемости во времени значений какой-либо физической величины, определяющей данное движение или состояние.

Движение называется периодическим, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через одинаковые промежутки времени. Простейшим видом периодических колебаний являются гармонические колебания.

Гармоническими называются колебания, при которых какая-либо величина изменяется во времени по закону синуса или косинуса:

$$\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \\ x = A\cos(\varpi t + \varphi_0) \end{cases}, \quad (1)$$

причем A и ω не изменяются с течением времени.

В уравнении: x – смещение колеблющейся величины или материальной точки от положения равновесия;

A – амплитуда колебаний: наибольшее отклонение от положения равновесия;

$\omega t + \varphi_0$ – фаза колебаний: скалярная физическая величина, определяющая смещение колеблющейся точки в данный момент времени;

φ_0 – начальная фаза колебаний в момент времени $t = 0$;

ω – круговая (циклическая) частота колеблющейся точки.

Если фаза колебания увеличивается или уменьшается на 2π, то x принимает прежнее значение, т.е. если:

$$x_1 = A \sin(\omega t_1 + \varphi_0) \text{ и } x_2 = A \sin(\omega t_2 + \varphi_0),\ x_1 = x_2,$$

или $$A \sin(\omega t_1 + \varphi_0) = A \sin(\omega t_2 + \varphi_0),$$

то $$(\omega t_1 + \varphi_0) - (\omega t_2 + \varphi_0) = 2\pi.$$

Отсюда $\omega(t_2 - t_1) = 2\pi$; $t_2 - t_1$ – наименьшее время, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризу-ющих колебание. Это время называется периодом колебаний T. За время периода совершается одно колебание.

Следовательно, $\omega T = 2\pi$,

$$\varpi = \frac{2\pi}{T}, \quad (2)$$

но

$$\frac{1}{T} = \nu \ , \qquad (3)$$

где ν – частота колебаний: число полных колебаний, совершаемых за единицу времени.

Сравнивая формулы (2) и (3), получим ω = 2πν, т.е. циклическая частота численно равна числу колебаний, совершаемых за 2π секунд.

При гармонических колебаниях гармонически колеблется не только смещение x, но и скорость и ускорение. Учитывая, что

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}, \text{ а } a = \frac{d\upsilon}{dt},$$

дифференцируем x, получаем выражение для υ:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (4)$$

а когда мы возьмем производную по υ, получим выражение для a:

$$a = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x, \qquad (5)$$

где Aω – амплитуда скорости; $A\omega^2$ – амплитуда ускорения.

Динамика гармонических колебаний

В соответствии со вторым законом Ньютона сила, вызывающая гармонические колебания, равна:

$$F = ma. \qquad (6)$$

Сравнив формулы (5) и (6), получим:

$$F = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x. \qquad (7)$$

Сила, действующая на колеблющуюся точку, прямо пропорциональна смещению и всегда направлена к положению равновесия, поэтому ее часто называют возвращающей силой.

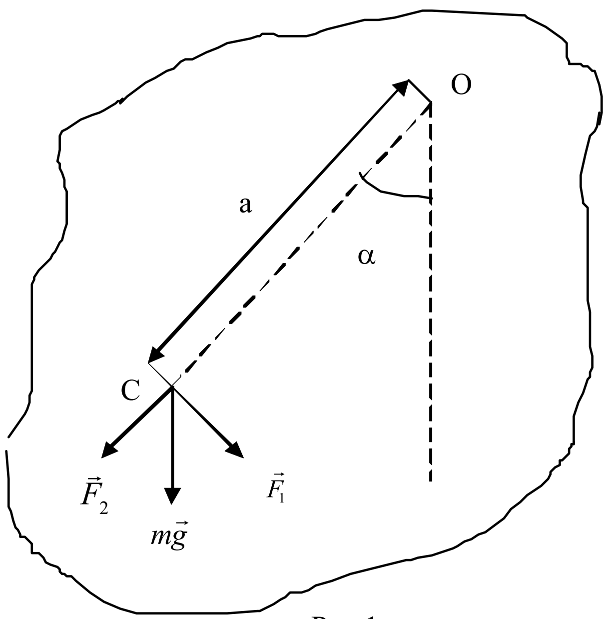

Рис.1

Примером сил, удовлетворяющих уравнению (7), являются упругие силы. Силы, имеющие иную природу, чем упругие силы, но также удовлетворяющие условию (7), называются квазиупругими:

$$F_1 = -kx, \qquad (8)$$

где $m\omega^2$ – коэффициент квазиупругой силы; $k = m\omega^2$.

__Физическим маятником__ называется абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси О, не проходящей через центр тяжести тела. На рис. 1 изображено сечение физического маятника плоскостью, перпендикулярной к его оси вращения О и проходящей через его центр масс С. Расстояние ОС равно а. На рис. 1 $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$ – составляющие силы тяжести m**g**, $\mathbf{F_1}$ – возвращающая сила. При малых значениях угла α $F_1 = - mg\sin\alpha = - mg\alpha$. Знак минус указывает, что сила действует в направлении, противоположном смещению. Величина возвращающей силы в данном примере является частным случаем квазиупругой силы $F_1 = -kx$.

При малых углах отклонения колебания физического маятника являются гармоническими. Возвращающий момент, создаваемый силой $\mathbf{F_1}$, равен:

$$M = -mga\alpha .$$

Основное уравнение динамики для маятника запишется следующим образом:

$$M = J\varepsilon , \quad M = J\frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

где J – момент инерции маятника; ε – угловое ускорение.

$$-mga\alpha = J\frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

или

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mga\alpha = 0 .$$

Решения этого дифференциального уравнения:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \ \omega = \sqrt{\frac{mga}{J}}, \text{ но } \omega = \frac{2\pi}{T},$$

отсюда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}.$$

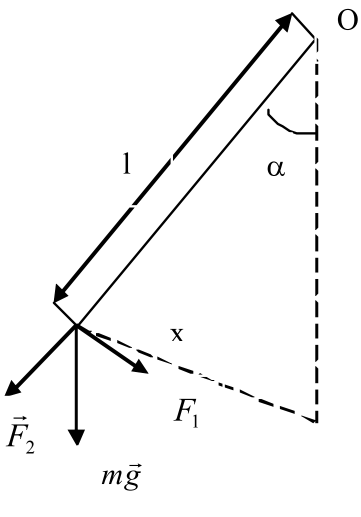

Рис.2

Период малых колебаний физического маятника можно определить по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}.$$

<u>Математическим маятником</u> называется материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити. На рис. 2 видим, что возвращающая сила $\mathbf{F_1}$ является одной из составляющих силы тяжести и равна $F = -mg\sin\alpha = -mg\sin\frac{x}{l}$, при малых углах α $F = -mg\frac{x}{l}$, т.е. вновь видим, что $\mathbf{F_1}$ – квазиупругая сила, т.е. при малых углах отклонения колебания математического маятника являются гармоническими.

По второму закону Ньютона $F_1 = ma$, но

$a = \frac{d^2x}{dt^2}$, тогда $m\frac{d^2x}{dt^2} + mg\frac{x}{l} = 0$.

Решения этого дифференциального уравнения:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, период колебаний математическо маятника будет равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{9}$$

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \tag{10}$$

Для определения g воспользуемся моделью математического маятника в виде небольшого металлического шарика на нерастяжимой нити длиной l.

Ход работы

1. Измерить длину маятника l не мене трех раз.
2. Измерить время t N = 10 полных колебаний маятника пять раз.
3. Определить периоды колебаний маятника для каждого измерения:
$$T = \frac{t}{N} = \frac{t}{10}.$$
4. Рассчитать средние значения $\Delta l_{ср}$, $l_{ср}$, $T_{ср}$, $\Delta T_{ср}$.
5. По формуле (10) вычислить $g_{ср}$.
6. Рассчитать относительную ошибку ε по формуле (16).
7. Вычислить $\Delta g = g_{ср}\varepsilon$.
8. Записать окончательный результат в виде:

$$g = (g_{ср} \pm \Delta g) \text{ м/с}^2.$$

По закону всемирного тяготения сила взаимодействия **F** между двумя материальными точками массами m_1 и m_2 определяется по формуле:

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{11}$$

где $\gamma = 6{,}62\ 10^{-11}$ Н м²/кг² – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих материальных точек; r – расстояние между точками.

Если тело находится на поверхности Земли (M – масса Земли; R – радиус Земли), то:

$$F = \gamma \frac{Mm}{R^2}. \qquad (12)$$

С другой стороны, на тело, находящееся в гравитационном поле Земли действует сила тяжести:

$$F_T = mg. \qquad (13)$$

Поскольку роль силы тяжести играет гравитационная сила, то:

$$F = F_т, \qquad \gamma \frac{Mm}{R^2} = mg,$$

окончательно

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}. \qquad (14)$$

Выражение (14) позволяет оценить массу Земли:

$$M = \frac{gR^2}{\gamma}. \qquad (15)$$

Относительную ошибку ε вычисляем по формуле (10):

$$\ln g = \ln 4 + 2\ln\pi + \ln l - 2\ln T,$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}. \qquad (16)$$

Результаты занесем в таблицу.

№	l	Δl	T	ΔT	g
1					
2					
3					
4					
5					
Средние	$l_{ср}$	$\Delta l_{ср}$	$T_{ср}$	$\Delta T_{ср}$	$g_{ср}$

Контрольные вопросы

1. Что называется гармоническим колебанием?
2. Какой маятник называется физическим? математическим?
3. Как определяется период колебаний физического и математического маятников?