

УДК 630\*524.1

*Ю.П. Демаков*

Поволжский государственный технологический университет, г. Йошкар-Ола

## СТВОЛ ДЕРЕВА КАК ДЕФОРМИРОВАННЫЙ КОНУС



### Введение

Вопрос о форме ствола деревьев и их продольного профиля, поднятый еще на начальном этапе становления лесной таксации (Турский, 1927; Орлов, 1929; Тюрин, 1945; Захаров, 1967; Анучин, 1982) и рассмотренный в трудах многих ученых (Козленко, 1940; Захаров, 1957; Петровский, 1964, 1970, 1989; Дворецкий, Мамаев, 1965; Головачев, 1966; Войнов, 1969; Ипатов, 1970; Нестеров, Короткова, Коротков, 1971; Войчаль, 1972; Кулешис, 1972; Соколов, 1974; Гусев, 1975; Ермаков, Слобода, 1983; Кофман, 1986; Шавнин, 1986; Вагин, 1989), до сих пор окончательно не раскрыт, о чем убедительно свидетельствует непрекращающийся поток публикаций (Мазуркин, 1994; 1997, 2000; Пчелинцев, 1994; Дудина, Макаренко, 1997; Лебков, Каплина, 2001; Лебков, 2002; Малышев, 2002; Гурский, Гурский, 2004; Богачев, 2006; Дудина, 2007; Исаев, 2009; Каплина, 2009; Петровский, Малышев, Мурзинов, 2012). Потребность же в разработке подобной математической модели, обусловленная необходимостью оптимизации раскряжёвки стволов (Петровский, 1970, 1989), повышения точности оценки вертикальной структуры фитомассы деревьев (Усольцев, 2013) и познания закономерностей ее развития, довольно высокая.

Большинство исследователей, как отмечает Н.П. Анучин (1982), показало, что образующая древесного ствола (ОДС) является очень сложной кривой, которая не может быть описана на всем протяжении одной аналитической кривой, а представляется собой совокупность тел вращения, аппроксимируемых функцией

$$Y_i^a = cX_i^b, \quad (1)$$

где  $Y_i$  – радиус или диаметр в  $i$ -ой точке ствола, находящейся на расстоянии  $X_i$  от его вершины,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – некоторые константы, отражающие форму ствола. Частным случаем этой функции является уравнение

$$Y_i^2 = cX_i^b. \quad (2)$$

Некоторые исследователи для аппроксимации ОДС использовали полиномы. В частности, Д.И. Менделеев (1899; по: Орлов, 1929) и И.И. Белоновский (1917; по: Орлов, 1929) описали ее кубической параболой, И.И. Гусев (1975) – полиномом 7-й степени, а В. Джурджу (1965; по Войнов, 1969) – полиномом 15-й степени, хотя большинство коэффициентов регрессии при  $X$  были равны нулю. В.С. Петровский (1964, 1970) модифицировал полиномы, приведя их к следующему виду

$$D_h = D_{1.3} \times [\sqrt{(H-h)/(H-1)} + \sum_{i=0}^4 a_i (h/H)^i], \quad (3)$$

где  $D_{1,3}$  и  $D_h$  – диаметр ствола соответственно на расстоянии 1,3 м от его основания и в точке  $h$ ;  $H$  – общая протяженность ствола;  $h$  – положение точки измерения диаметра относительно основания ствола;  $i$  – показатель степени полинома,  $a_i$  – коэффициенты полинома, получаемые при обработке эмпирического материала.

Эта модель была взята за основу В.В. Малышевым (2002), который ее несколько видоизменил, используя в качестве одной из переменных диаметр ствола на середине ствола, взамен диаметра на высоте 1,3 м

$$D_h = D_{0,5H} \times [a_0 + \sum_{i=1}^4 a_i (h/H)^i]. \quad (4)$$

В настоящее время исследователями (Дудина, Макаренко, 1997; Гурские, 2004; Дудина, 2007) установлено, что полиномы высоких степеней дают вполне удовлетворительные результаты аппроксимации экспериментальных данных, но имеют статистически недостоверные коэффициенты. Лучшие результаты получены при использовании комбинации неполного полинома пятой степени с логарифмической (5) и гиперболической (6) функциями

$$D_h = a_0 + a_1 h^3 + a_2 h^4 + a_3 h^5 + a_4 \ln h; \quad (5)$$

$$D_h = a_0 + a_1 h^3 + a_2 h^4 + a_3 h^5 + a_4 / h. \quad (6)$$

Рядом исследователей показано, что для аппроксимации ОДС можно использовать сплайн-функцию (Ермаков, Слобода, 1983), функции распределения семейства кривых Пирсона (Дудина, Макаренко, 1997) или модифицированную функцию Вейбулла (Лебков, Каплина, 2001; Лебков, 2002; Каплина, 2009). П.М. Мазуркиным (1994, 1997, 2000) предложена сложная функция, включающая шесть эмпирических коэффициентов

$$R_i = R_0 \exp(-a h^b) - c h^d \exp(-k h^m), \quad (7)$$

в которой  $R_i$  – радиус ствола в  $i$ -ой точке от его основания,  $R_0$  – радиус ствола у его основания,  $h$  – расстояние точки измерения от основания ствола,  $a, b, c, d, k, m$  – коэффициенты функции.

Во всех рассмотренных выше функциях, описывающих ОДС, аргументом является лишь местоположение точки замера относительно протяженности всего ствола. Другие же морфометрические показатели дерева в расчетах не используются. Исключением является математическая модель, разработанная А.В. Богачевым (2006), в которой в качестве аргументов функции, кроме местоположения точки замера, выступают еще шесть переменных (диаметр дерева в коре и без коры на высоте 1,3 м, его высота и расстояние до начала кроны, видовое число и возраст), а также различные комбинации переменных, взаимодействующих между собой аддитивно. Уравнение включает 26 параметров и является бессмысленным с познавательной и аналитической точек зрения.

Таким образом, до сих пор не подобрано достаточно простой и универсальной функции, описывающей ОДС, не дано убедительного объяснения закономерностей ее формирования, не оценена роль в этом внутренних и внешних факторов. Подбор математических моделей часто идет «вслепую» без достаточного теоретического обоснования и путем их ненужного усложнения, не способствующего пониманию сути процесса формообразования.

Целью нашего исследования было теоретическое обоснование выбора функции, содержащей минимальный набор коэффициентов, которая не только наилучшим образом описывает ОДС, но и объясняет сам механизм формообразования.

### Материал и методика

Исходным материалом для расчетов, которые были проведены на ПК с использованием прикладных программ и стандартных методов математической статистики, служили таблицы сбега стволов основных лесообразующих древесных пород России

(Лесотаксационный справочник, 1973), а также данные натуральных измерений 200 стволов деревьев сосны на четырех пробных площадях, заложенных на территории Республики Марий Эл (Старожильское лесничество) в древостоях, значительно различающихся между собой по значениям таксационных параметров (табл. 1).

Таблица 1

Краткая таксационная характеристика древостоя на пробных площадях

Номер ПП	ТЛУ	Возраст, лет	Густота, экз./га	Средний размер деревьев		Число модельных деревьев
				Высота, м	Диаметр, см	
1*	A <sub>2</sub>	18	103100	3,1	1,75	12
2	A <sub>2</sub>	60	1770	16,8	14,7	45
3	A <sub>2</sub>	80	1008	20,7	20,9	91
4	A <sub>5</sub>	190	626	11,6	19,4	52

\* Зброшенны лесной питомник.

У каждого модельного дерева были измерены следующие показатели: диаметр на расстоянии 1,3 м от основания ствола в коре и без коры, общая протяженность ствола, протяженность грубой и переходной коры, диаметр без коры на расстоянии 1, 3, 5...n, n+1 метров от основания ствола и на его середине. В перегушенном древостое, возникшем на месте заброшенного лесного питомника (ПП 1), замеры диаметров ствола в коре проведены у его основания и в середине каждой мутовки. Отмечены также координаты начала кроны и ее протяженность.

#### Результаты и их обсуждение.

В качестве исходной гипотезы было выдвинуто положение о том, что ствол дерева представляет собой конус, деформированный в результате неравномерности радиального прироста древесины по градиенту его высоты. Математической моделью ОДС в этом случае является двухпараметрическая функция

$$R_i = [D_0 \cdot (1 - h) \cdot \exp(a \cdot h^b)] / 2 \quad (8)$$

в которой  $R_i$  – радиус в  $i$ -ой точке ствола дерева без коры, выраженный в долях единицы радиуса ствола в коре на расстоянии 1,3 м от его основания (пня);  $D_0$  – диаметр без коры у основания ствола, выраженный в долях диаметра ствола в коре на расстоянии 1,3 м от его основания;  $h$  – относительная протяженность ствола от его основания до  $i$ -ой точки. Первая часть уравнения, т.е.  $(1 - h)$ , является образующей конуса, представляющей собой прямую линию, вторая часть, т.е.  $\exp(a \cdot h^b)$ , выступает в качестве функции деформирующего воздействия, в которой параметр  $a$  – исходный импульс воздействия,  $b$  – ускорение воздействия в градиенте высоты дерева. Данная модель впервые была опробована нами на эмпирическом материале, собранном в старовозрастных сосняках сфагновых (Демаков и др., 2012). Расчеты, проведенные по данным таблиц сбega (Лесотаксационный справочник, 1973), показали, что эта функция с очень высокой точностью описывает характер изменения диаметра ствола также у других пород деревьев в градиенте его длины (табл. 2).

Приведенные данные показывают, что какой-либо зависимости изменения в параметрах модели от разряда высот древостоев, за исключением березняков, где они неуклонно снижаются, не отмечается, и вариабельность их значений обусловлена некоторыми погрешностями составления таблиц сбega и неоднородностью использованного эмпирического материала. Об этом же свидетельствует сохранение точности обобщающих уравнений (рис. 1), параметры которых вычислены на сводном материале. По величине параметра  $D_0$  все породы деревьев располагаются в порядке убывания следующим образом: осина – ель – дуб – береза – сосна. По величине параметров  $a$  и  $b$ , зна-

чения которых тесно коррелируют между собой ( $r = 0,929$ ), порядок расположения пород иной. Связь параметра  $D_0$  с параметрами  $a$  и  $b$  слабая обратная ( $r_{a-D} = -0,429$ ;  $r_{b-D} = -0,510$ ).

Таблица 2

Параметры математической модели ОДС различных пород деревьев

Порода	Разряд высот	Параметры модели $R_i = [D_0 \cdot (1 - h) \cdot \exp(a \cdot h^b)] / 2$				
		$D_0$	$a$	$b$	$R^2$	$D_{cp.}$
Сосна	Ia	0,935	0,956	1,745	0,996	0,575
Сосна	I	0,931	1,009	1,816	0,997	0,575
Сосна	II	0,923	0,961	1,691	0,997	0,573
Сосна	III	0,937	0,900	1,597	0,996	0,580
<b>Сосна</b>	<b>Ia-III</b>	<b>0,931</b>	<b>0,949</b>	<b>1,705</b>	<b>0,994</b>	<b>0,575</b>
Ель	Ia	0,954	0,750	1,237	0,997	0,596
Ель	I	0,947	0,731	1,201	0,998	0,591
Ель	II	0,948	0,761	1,238	0,999	0,594
Ель	III	0,936	0,735	1,157	0,999	0,590
<b>Ель</b>	<b>Ia-III</b>	<b>0,947</b>	<b>0,741</b>	<b>1,209</b>	<b>0,998</b>	<b>0,593</b>
Береза	Ia	0,940	0,687	1,320	0,994	0,569
Береза	I	0,936	0,662	1,245	0,995	0,568
Береза	II	0,942	0,618	1,194	0,995	0,568
Береза	III	0,942	0,613	1,168	0,996	0,569
<b>Береза</b>	<b>Ia-III</b>	<b>0,937</b>	<b>0,643</b>	<b>1,217</b>	<b>0,995</b>	<b>0,568</b>
Осина	Ia	0,960	0,725	1,245	0,995	0,594
Осина	I	0,968	0,722	1,264	0,997	0,597
Осина	II	0,950	0,672	1,067	0,997	0,595
Осина	III	0,961	0,726	1,209	0,994	0,598
<b>Осина</b>	<b>Ia-III</b>	<b>0,961</b>	<b>0,712</b>	<b>1,204</b>	<b>0,995</b>	<b>0,596</b>
Дуб	Ia	0,941	0,937	1,752	0,994	0,576
Дуб	I	0,934	0,803	1,530	0,994	0,568
Дуб	II	0,932	0,777	1,499	0,992	0,565
Дуб	III	0,951	0,926	1,820	0,998	0,576
<b>Дуб</b>	<b>Ia-III</b>	<b>0,939</b>	<b>0,853</b>	<b>1,643</b>	<b>0,994</b>	<b>0,571</b>

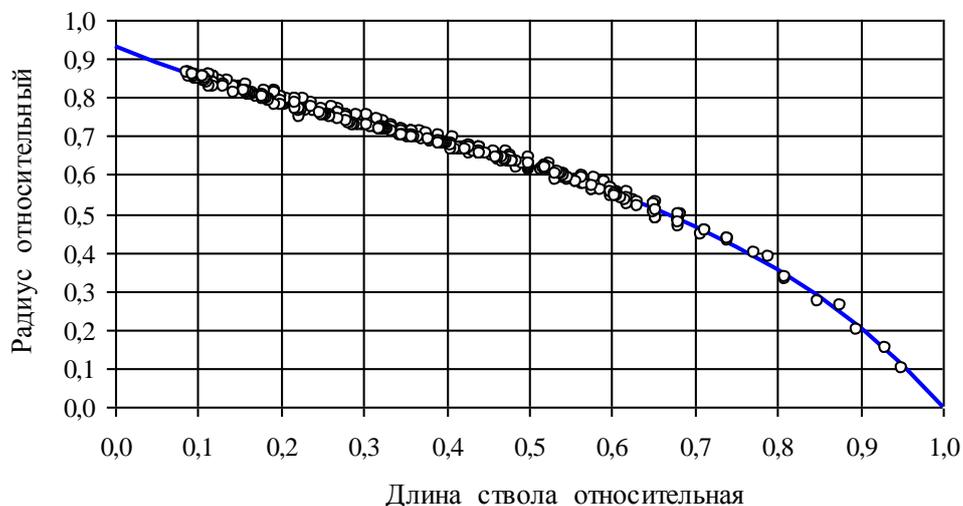


Рис. 1. Обобщенная форма ОДС деревьев сосны (N = 376)

Предложенная математическая модель позволяет не только с высокой точностью описать форму ОДС, но и количественно отобразить изменение в градиенте длины ствола силы деформирующего фактора. Оказалось, что в нижней части ствола она наиболее велика у деревьев ели, осины и ольхи, а в вершинной – у сосны (рис. 2). У березы же ствол в этой части деформирован значительно меньше, чем у других пород деревьев.

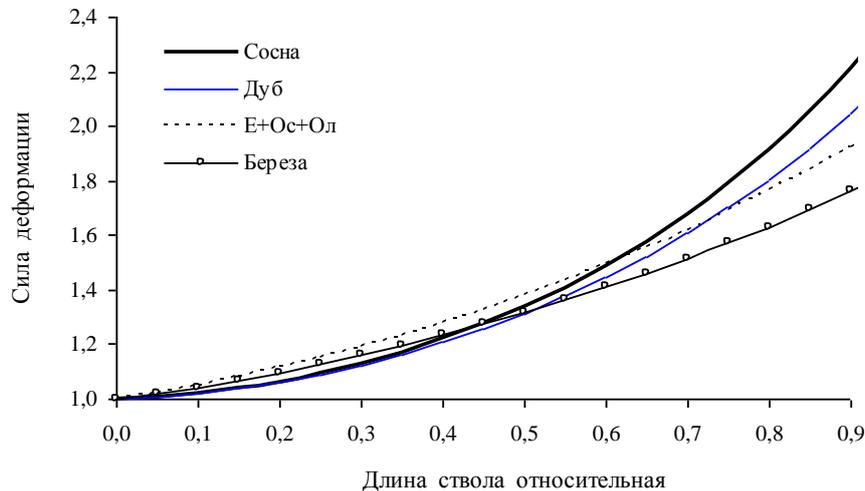


Рис. 2. Изменение силы деформации по градиенту длины ствола деревьев

На основе этой модели можно легко вычислить у растущих деревьев значения объема ствола ( $V$ ,  $\text{м}^3$ ) и площади поверхности камбиального слоя ( $S$ ,  $\text{м}^2$ ), которые необходимы не только для оценки ресурсных функций древостоев, но и для познания закономерностей их развития, используя простые формулы, вытекающие из интегральных уравнений:

$$V = 10^{-4} \cdot \pi / 4 \int_0^H D_i^2 \cdot dh = 10^{-4} \cdot \pi / 4 \cdot D_{cp}^2 \cdot H = K_1 \cdot D_{1,3}^2 \cdot H \quad (9)$$

$$S = 10^{-2} \cdot \pi \int_0^H D_i \cdot dh = 10^{-2} \cdot \pi \cdot D_{cp} \cdot H = K_2 \cdot D_{1,3} \cdot H, \quad (10)$$

в которых  $D_i$  – диаметр ствола в  $i$ -той точке, см;  $D_{cp}$  – средний диаметр ствола без коры, выраженный по отношению к диаметру ствола в коре на высоте 1,3 м ( $D_{1,3}$ ), см;  $K_1$  и  $K_2$  – некоторые константы, значения которых приведены в табл. 3;  $H$  – высота дерева, м.

Уравнения (8) и (9) позволяют проводить сортиментацию ствола и вычислять объем любого его отрезка ( $V_{отр.}$ ,  $\text{м}^3$ ), используя формулы:

$$V_{отр.} = V_{ств.} \cdot (q_k - q_n) \quad (11)$$

$$q_i = h_i \cdot \exp(c - c \cdot h_i^m) \quad (12)$$

в которой  $V_{ств.}$  – объем ствола дерева,  $\text{м}^3$ ;  $q_k$  – объем отрезка ствола от его основания до намечаемого верхнего отрезка, выраженный в долях от объема всего ствола;  $q_n$  – объем отрезка ствола от его основания до намечаемого нижнего отрезка, также выраженный в долях от объема всего ствола;  $q_i$  – объем  $i$ -го отрезка от основания ствола до намечаемого верхнего отрезка, доля всего объема ствола;  $h_i$  – расстояние от основания ствола до намечаемого верхнего отрезка бревна, доля всей длины ствола;  $c$  и  $m$  – коэффициенты регрессии, вычисленные на основе характера распределения объема ствола (кумуляты) по градиенту его длины, значения которых представлены в табл. 4.

Таблица 3

Значения констант уравнений (9) и (10) для вычисления объема и площади поверхности ствола у разных пород деревьев

Константа	Значения констант уравнений для разных пород деревьев				
	Сосна	Ель	Береза	Осина	Дуб
$K_1$	$10^{-5} \cdot 2,60$	$10^{-5} \cdot 2,76$	$10^{-5} \cdot 2,53$	$10^{-5} \cdot 2,79$	$10^{-5} \cdot 2,56$
$K_2$	$10^{-2} \cdot 1,81$	$10^{-2} \cdot 1,86$	$10^{-2} \cdot 1,78$	$10^{-2} \cdot 1,87$	$10^{-2} \cdot 1,79$

Таблица 4

Значения коэффициентов уравнения (12) для вычисления объема отрезков ствола у разных пород деревьев

Коэффициент	Значения коэффициентов уравнения для разных пород деревьев				
	Сосна	Ель	Береза	Осина	Дуб
$c$	0,702	0,701	0,760	0,717	0,735
$m$	1,378	1,498	1,389	1,469	1,347

Расчеты, проведенные по данным натурных измерений, показали, что уравнение (8) с очень высокой точностью ( $R^2 > 0,999$ ) описывает ОДС модельных деревьев сосны, однако значения его параметров довольно значительно варьируют в пределах каждой пробной площади под действием эндогенных и экзогенных факторов (табл. 5). Наибольшие изменения диаметра деревьев отмечаются в верхней части ствола (табл. 6).

Таблица 5

Параметры математической модели ОДС деревьев сосны на пробных площадях

Номер ПП	Значения параметра $a$			Значения параметра $b$		
	$M_x \pm m$	min	max	$M_x \pm m$	min	max
1	1,024±0,057	0,831	1,590	2,697±0,228	1,771	3,985
2	1,133±0,026	0,720	1,459	1,671±0,040	1,050	2,237
3	1,275±0,029	0,497	1,910	1,828±0,042	0,832	3,095
4	1,062±0,037	0,502	1,949	1,451±0,053	0,805	2,335

Таблица 6

Статистические показатели относительного диаметра в различных точках ствола деревьев сосны на верховых болотах Марийского Полесья

Относительная длина ствола	Значения статистических параметров				
	$M_x$	min	max	$S_x$	V, %
0,1 L	0,942	0,904	0,995	0,025	2,6
0,3 L	0,847	0,738	0,949	0,047	5,6
0,5 L	0,737	0,595	0,925	0,058	7,9
0,7 L	0,565	0,427	0,880	0,072	12,8
0,9 L	0,253	0,158	0,513	0,058	22,7

Приведенные данные показывают, что какой-либо тенденции в изменении с возрастом древостоя среднего значения параметра  $a$  математической модели, отображающего исходный импульс деформирующего воздействия на ствол, не отмечается. Значения же параметра  $b$  неуклонно снижаются с увеличением возраста древостоя. Оказалось, что сила деформации ствола наименее велика в загущенном молодом сосняке на заброшенном лесном питомнике, а наибольшей величины достигает у деревьев на ПП-3 в 80-летнем сосняке (рис. 3). Форма же ОДС в 60-летнем сосняке-брусничнике и 190-летнем сосняке сфагновом оказалась практически одинаковой.

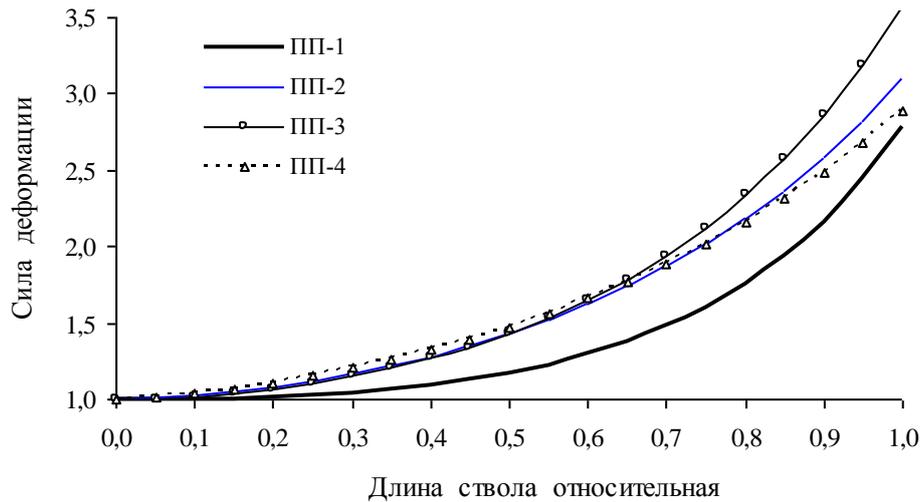


Рис. 3. Изменение силы деформации у деревьев сосны на объектах исследования по градиенту длины их ствола

Важно не только подобрать наиболее верную математическую модель формы древесного ствола, но и найти связь ее параметров с другими показателями архитектуры дерева. Расчеты показали, что параметр  $a$  функции ОДС на заброшенном лесном питомнике наиболее тесно связан с видовым числом ( $r = 0,634$ ), параметр  $b$  – с отношением годового прироста в высоту за первые три года к среднему приросту за весь период ( $r = 0,719$ ), а параметры  $c$  и  $m$  функции распределения объема ствола (кумуляты) по градиенту его длины – между собой ( $r = -0,961$ ) и с параметром  $b$  ( $r_{c,b} = 0,840$ ;  $r_{m,b} = -0,897$ ). Связь их с другими показателями архитектуры дерева слабая. В 60-80-летних сосняках-брусничниках параметры функции ОДС  $a$  и  $b$  довольно тесно связаны между собой ( $r = 0,738$ ), связь же их со всеми показателями архитектуры дерева довольно слабая или полностью отсутствует. Параметры  $c$  и  $m$  функции распределения объема ствола тесно связаны между собой ( $r = -0,835$ ), с коэффициентом формы ствола  $q_2$  ( $r_{c,q} = -0,906$ ;  $r_{m,q} = -0,873$ ) и с видовым числом ( $r_{c,F} = -0,880$ ;  $r_{m,F} = 0,797$ ). В старовозрастных низкополнотных сосняках сфагновых эти параметры функции также тесно связаны с коэффициентом формы ствола и видовым числом (рис. 4 и 5), что указывает на правильность ее выбора.

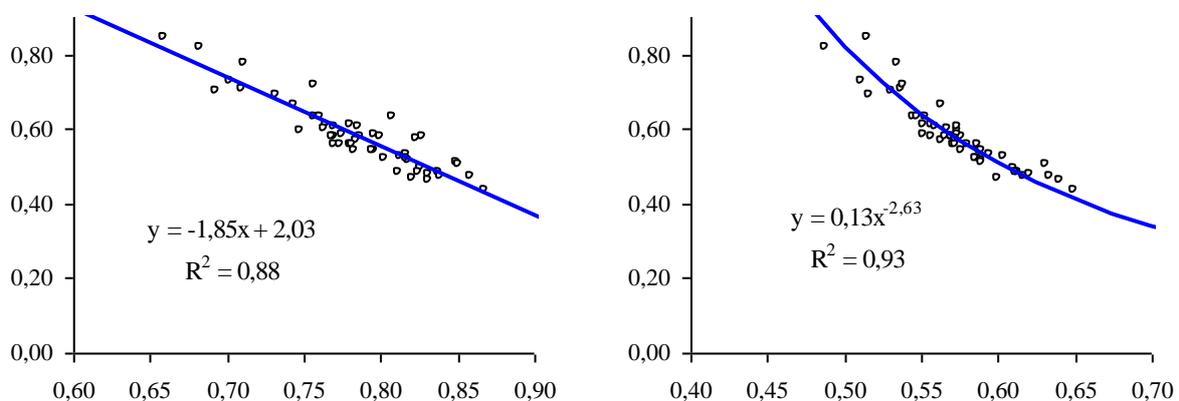


Рис. 4. Характер связи параметра  $c$  кумуляты объема ствола деревьев (ось ординат) с коэффициентом формы (ось абсцисс, слева) и видовым числом (ось абсцисс, справа) в сосняках сфагновых Марийского Полесья

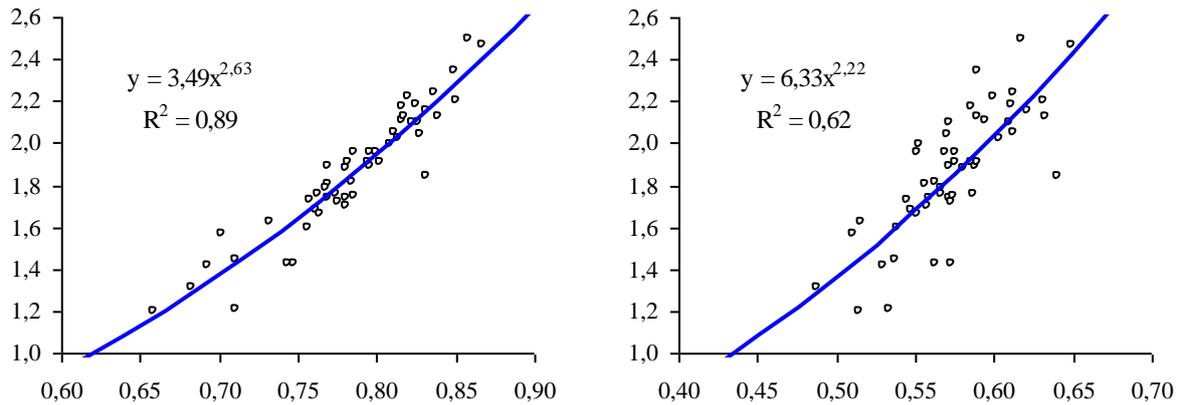


Рис. 5. Характер связи параметра  $t$  кумуляты объема ствола деревьев (ось ординат) с коэффициентом формы (ось абсцисс, слева) и видовым числом (ось абсцисс, справа) в сосняках сфагновых Марийского Полесья

### Выводы

1. Ствол дерева представляет собой конус, деформированный в результате неравномерности радиального прироста древесины по градиенту его высоты.
2. Форма ОДС, выраженная в относительных показателях, остается довольно постоянной в широком диапазоне изменения диаметра, высоты и возраста деревьев.
3. Математической моделью изменения его диаметра по градиенту высоты является функция  $D_i = D_0 \cdot (1 - h) \cdot \exp(a \cdot h^b)$ , в которой  $D_i$  – диаметр в  $i$ -ой точке ствола дерева без коры, выраженный в долях единицы диаметра ствола в коре на расстоянии 1,3 м от его основания (пня);  $D_0$  – диаметр без коры у основания ствола, выраженный в долях диаметра ствола в коре на расстоянии 1,3 м от его основания;  $h$  – относительная протяженность ствола от его основания до  $i$ -ой точки.
4. Характер распределения (кумуляты) объема ствола по градиенту его высоты отображает функция  $V_i = V_{ств.} \cdot [h_i \cdot \exp(c - c \cdot h_i^m)]$ , параметры которой тесно связаны с коэффициентом формы  $q_2$  и с видовым числом, что свидетельствует об правильности выбора математической модели.
5. Предложенные математические модели, опробованные на обширном эмпирическом материале, позволяют не только с высокой точностью описать форму древесного ствола, но и количественно отобразить изменение силы деформирующего фактора.
6. На основе этих моделей можно легко вычислить у деревьев значения объема ствола и площади поверхности камбиального слоя, а также обоснованно проводить сортиментацию.

### Список использованной литературы

- Анучин Н.П. Лесная таксация. М.: Лесн. пром-сть, 1982. 552 с.
- Богачев А.В. Уравнение образующей ствола // Лесоведение. 2006. № 5. С. 50-57.
- Вагин В.А. Модель формы стволов ели в насаждениях Московской области // Рациональное использование, охрана и воспроизводство лесных ресурсов / Науч. тр. МЛТИ. Вып. 209. М.: МЛТИ, 1989. С. 43-45.
- Войнов Н.Т. Изучение образующей древесного ствола с помощью ЭЦВМ // Новое в лесоводстве. Вып. 19. Минск: Урожай, 1969. С. 117-123.
- Войчалъ П.И. Математическая модель стволика маломерной сосны // ИВУЗ. Лесной журнал. 1972. № 6. С. 81-83.
- Головачев А.С. Средняя форма стволов сосны и определение нормальных видовых чисел // ИВУЗ. Лесной журнал. 1966. № 2. С. 18-21.

*Гурский А.Ан., Гурский А.Ак.* Изучение формы и определение объемов древесных стволов на основе их математических моделей // Изв. Оренбургского государственного аграрного ун-та. 2004. Т. 4. № 4-1. С. 68-69.

*Гусев И.И.* Форма древесных стволов ели Европейского Севера и ее математическая модель // Лесная таксация и лесоустройство / Межвуз. сб. науч. тр. Красноярск: СибГИ, 1975. С. 3–10.

*Дворецкий М.Л., Мамаев И.В.* О средней форме древесных стволов // Сб. науч. тр. Поволжского лесотехнического ин-та. Т. 58. Вып. 3. Йошкар-Ола: Маркнигоиздат, 1965. С. 93-100.

*Демаков Ю.П., Сафин М.Г., Швецов С.М.* Сосняки сфагновые Марийского Полесья: структура, рост и продуктивность. Йошкар-Ола: МарГТУ, 2012. 276 с.

*Дудина В.Н.* Применение моделей образующей древесного ствола сосны для основных пород Казахстана // Известия Оренбургского государственного аграрного университета. 2007. Т. 3. № 15-1. С. 45-48.

*Дудина В.Н., Макаренко А.А.* Модель образующей ствола деревьев // Лесная наука на рубеже XXI века / Сб. науч. работ. Вып. 46. Гомель, 1997. С. 266–268.

*Ермаков В.Е., Слобода В.Т.* Возможности моделирования образующей древесного ствола методом сплайн-функций // Моделирование и контроль производительности древостоев. Каунас: ЛитСХА, 1983. С. 112-114.

*Захаров В.К.* Форма древесных стволов и методы ее исследования // Сб. науч. тр. Белорус. лесотехн. ин-та. Вып. 10. Минск, 1957. С. 77-91.

*Захаров В.К.* Лесная таксация. М.: Лесн. пром-сть, 1967. 407 с.

*Ипатов Л.Ф.* О форме стволов сосны в молодняках // ИВУЗ. Лесной журнал. 1970. № 4. С. 132-135.

*Исаев С.П.* Биотический подход в построении математической модели образующей ствола дерева // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. Вып. 188. 2009. С. 128-137.

*Каплина Н.Ф.* Новый подход к исследованию формы продольных профилей древесного ствола и его прироста // Структура и функции лесов Европейской России. М.: Товарищество научных изданий КМК, 2009. С. 369-389.

*Козленко Г.М.* Форма древесных стволов в сосновых насаждениях // Труды Брянского лесотехнического института. Т. 2-3. Брянск, 1940. С. 191-232.

*Кофман Г.Б.* Рост и форма деревьев. Новосибирск: Наука, 1986. 211 с.

*Кулешис А.А.* Влияние разных факторов на форму ствола сосны обыкновенной // ИВУЗ. Лесной журнал. 1972. № 4. С. 10-14.

*Лебков В.Ф.* Аппроксимация образующей ствола и идентификация его формы функцией распределения // ИВУЗ. Лесной журнал. 2002. № 5. С.15–23.

*Лебков В.Ф., Каплина Н.Ф.* Закономерности формы древесного ствола хвойных и лиственных пород // Лесной вестник. 2001. № 5. С. 49-55.

Лесотаксационный справочник / Б.И. Грошев, С.Г. Синицын, П.И. Мороз, И.П. Сеперович. 2-е изд. М.: Лесн. пром-сть, 1980. 288 с.

*Мазуркин П.М.* Биотехническое проектирование (справочно-методическое пособие). Йошкар-Ола, 1994. 348 с.

*Мазуркин П.М.* Перспективы комплексного исследования древесины // Деревообрабатывающая промышленность. 1997. № 4. С. 27-29.

*Мазуркин П.М.* Энергетика формообразования ствола лесного дерева // Лесной вестник. 2000. № 1. С. 39-43.

*Мальшев В.В.* Исследование и разработка математических моделей стволов сосны обыкновенной // Интеграция науки и высшего лесотехнического образования, инновационная деятельность на предприятиях лесного комплекса / Материалы научно-практич. конф. Т. 1. Воронеж, 2002. С. 200–204.

*Нестеров В.Г., Короткова С.А., Коротков А.Н.* Изменение образующей древесного ствола с возрастом // Доклады ТСХА. 1971. Вып. 162. С. 346-350.

*Орлов М.М.* Лесная таксация. 3-е изд. Л.: Изд. журн. «Лесное хоз-во и лесн. пром-сть», 1929. 532 с.

*Петровский В.С.* Исследование образующей древесных стволов // Лесное хоз-во. 1964. № 9. С. 38-39.

*Петровский В.С.* Математическая оптимизация раскроя древесных стволов. М.: Лесная пром-сть, 1970. 183 с.

*Петровский В.С.* Оптимальная раскряжевка лесоматериалов. М.: Лесн. пром-ть, 1989. 288 с.

*Петровский В.С., Малышев В.В., Мурзинов Ю.В.* Моделирование параметров древесных стволов в насаждении // Лесотехнический журнал. 2012. № 4 (8). С. 18-22.

*Пчелинцев В.И.* Влияние полноты древостоя на формообразование древесных стволов // Лесная таксация и лесоустройство / Межвуз. сб. науч. трудов. Красноярск: КГТА, 1994. С. 132–137.

*Соколов Н.Н.* Форма стволов в сосновых молодняках // Возобновление и рост древесных пород на вырубках // Труды Архангельского лесотехнического ин-та. Т. 34. 1974. С. 73-77.

*Турский Г.М.* Лесная таксация. М.: Новая деревня, 1927. 211 с.

*Тюрин А.В.* Таксация леса. 2-е изд. М.: Гослестехиздат, 1945. 376 с.

*Усольцев В.А.* Вертикально-фракционная структура фитомассы деревьев. Исследование закономерностей. Екатеринбург: УГЛТУ, 2013. 603 с.

*Шавнин А.Г.* Определение формы древесного ствола по высоте точки касания // Лесное хоз-во. 1986. № 4. С. 53-54.

**Рецензент статьи:** профессор кафедры лесной таксации и лесоустройства Поволжского государственного технологического университета, доктор с.-х. наук В.Л. Черных.