

В. А. УСОЛЦЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ
РЕГРЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ
В ЛЕСОВОДСТВЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

ЕКАТЕРИНБУРГ 1997

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ОБЩЕМУ
И ПРОФЕССИОНАЛЬНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ
УРАЛЬСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
КАФЕДРА ЛЕСНОЙ ТАКСАЦИИ И ЛЕСОУСТРОЙСТВА

В. А. Усолец

Применение системы связанных
регрессионных уравнений
в лесоводственных исследованиях

Екатеринбург 1997

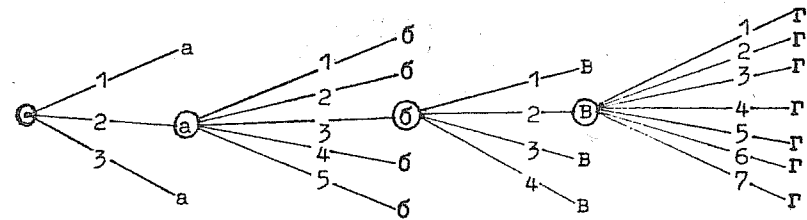
Рассмотрено и рекомендовано методической комиссией лесохозяйственного факультета. Протокол № от 1996 г.

Рецензенты: кафедра лесоводства Красноярской государственной технологической академии; заведующий лабораторией математического моделирования лесных экосистем Института леса им. В.Н.Сукачева СО РАН, к.ф.-м.н. Кофман Г.В. и заведующий кафедрой высшей математики УГЛТА, к.ф.-м.н., доцент Вдовин А.Ю.

Печатается в редакции автора

Подписано в печать 14.01.1997. Формат 50x84 1/16
 Клоская печать Объем 6,28 п.л. Тираж 140 экз.
 Заказ № 17. Цена 10800 руб.

Редакционно-издательский отдел УГЛТА
 Ротапринт УГЛТА



В В Е Д Е Н И Е

Лес представляет собой сложную биологическую динамичную систему, и исследование его структуры и динамики осуществляется на основе системного подхода, в том числе его простейшей математической реализации - регрессионного моделирования. При выборе общей стратегии моделирования до сих пор ведутся дискуссии о том, что лучше: упрощать или усложнять модели? При вполне разумном требовании наиболее экономичного описания природных явлений количественными методами разрабатываются и подходы к описанию динамики лесных экосистем на основе сложных моделей, особенно если последние дополняются некоторыми исходными интерпретируемыми взаимосвязями (Drew, Flewelling, 1977). Прикладная сторона проблемы, по существу, сводится к согласованию уровня требуемой точности и соответствующей сложности модели с возможностями их реализации на практике.

Применительно к лесной экосистеме регрессионная модель представляет собой результат статистического оценивания параметров системы математических выражений, которые характеризуют некоторую биологическую концепцию о взаимосвязи явлений. Многомерная регрессионная модель предполагает вычленение основных определяющих факторов воздействия и количественную оценку их совокупного эффекта в виде результирующих показателей, или характеристик. При исследовании сложных систем изолированные оценки редко дают адекватные результаты. Обычно динамика лесных экосистем может быть более или менее эффективно описана с помощью не одной, а нескольких характеристик, которые являются частично или полностью взаимозависимыми.

Раздельное описание подобных зависимостей регрессионными уравнениями приводит к тому, что полученные оценки характеристик не будут сбалансированными. Математические зависимости, объединенные в единую логически непротиворечивую концепцию, образуют систему связанных уравнений, основным достоинством которой является внутренняя согласованность описываемых закономерностей. История развития систем связанных уравнений восходит к началу текущего столетия, когда в ходе экономического анализа рыночных равновесий и разработки экономической теории рынка предполагалось, что рыночное равновесие в данный период обуславливается равновесием рынка в предшествующий период (Moore, 1917; Ezekiel, 1938; Harlow, 1962; Waugh, 1964; Ehrlich, 1969; Halvorsen, 1975).

В контексте выбора вышеупомянутого компромисса между простотой и сложностью моделей в прикладном аспекте возникает вопрос, насколько оправданно обеспечение согласованности уравнений путем дополнительных модельных построений и компьютерных затрат в сравнении с раздельным и независимым описанием зависимостей и не усугубляется ли этим сложность проблемы вместо реального ее решения? (Warren, 1971). Имея в виду возможность таких возражений, Дж.Клаттер (Clutter, 1963) обращается к истории развития научной мысли, по его мнению свидетельствующей, что научный прогресс обеспечивается развитием только логически обоснованных и основополагающих взаимосвязей или моделей. Он строит предположение, какого успеха мог достичь Исаак Ньютон, если бы стал решать проблему знаменитого агрессивного яблока путем простой подгонки несвязанных регрессионных уравнений с целью предсказать: а) скорость яблока в процессе падения и б) время, необходимое для его падения с заданной высоты. Без сомнения, результирующая прогностическая способность таких уравнений была бы впечатляющей, и Ньютону не пришлось бы испытывать умственное напряжение в связи с использованием аппарата дифференциальных уравнений. Однако система полученных несвязанных уравнений, очевидно, не имела бы такого безграничного успеха, какой приобрел открытый им закон.

I. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

I.1. СТРУКТУРНЫЕ ФОРМЫ СИСТЕМ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ

Как уже упоминалось, теория систем связанных уравнений зародилась и получила основное развитие в экономике и основательно изложена в эконометрической литературе (Moore, 1917; Ezekiel, 1938; Haavelmo, 1943; Anderson, Rubin, 1949; Klein, 1962; Harlow, 1962; Johnston, 1963; Waugh, 1964; Goldberger, 1964; Ehrlich, 1969; Dutta, 1975; Маленко, 1975, 1976; Четыркин, 1977; Förster, Rönz, 1979; Pindyck, Rubinfeld, 1981; Четыркин, Калихман, 1982; Fomby et al., 1984; Айвазян и др., 1985; Rönz, Förster, 1992).

Имеется несколько классификаций систем связанных уравнений. Согласно одной из них (Pindyck, Rubinfeld, 1981), системы связанных уравнений делятся на три категории:

- 1) псевдонесвязанные (seemingly unrelated),
- 2) рекурсивные (recursive),
- 3) одновременные (simultaneous).

Типичная система псевдонесвязанных уравнений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= b_{10} + b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + e_1; & e_1 &\sim N(0, \sigma_1^2) \\ Y_2 &= b_{20} + b_{21}X_3 + b_{22}X_4 + e_2; & e_2 &\sim N(0, \sigma_2^2) \\ Y_3 &= b_{30} + b_{31}X_5 + b_{32}X_6 + e_3; & e_3 &\sim N(0, \sigma_3^2). \end{aligned} \right\} (1)$$

Первый индекс при параметре указывает номер уравнения системы, в которое он входит, а второй индекс соответствует переменной, к которой он относится. Очевидно, что между уравнениями отсутствуют аналитические взаимосвязи. Если $\text{cov}(e_i, e_j) = 0$ для всех пар i и j , тогда никаких взаимосвязей нет. Однако, если одни составляющие ошибки коррелированы с другими [т.е. некоторая $\text{cov}(e_i, e_j) \neq 0$], тогда уравнения связаны (Borders, 1989). При наличии таких межрегрессионных корреляций оценка параметров возможна по трехшаговой процедуре подгонки, разработанной А.Цельнером (Zellner, 1962) (метод псевдонесвязанных регрессий) и проанализированной Д.Ридом (Reed, 1987).

Альтернативной является система линейных одновременных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= b_{10} + b_{12}Y_2 + b_{13}Y_3 + b_{14}X_1 + b_{15}X_2 + e_1 \\ Y_2 &= b_{20} + b_{21}Y_1 + b_{23}Y_3 + b_{24}X_1 + b_{25}X_2 + e_2 \\ Y_3 &= b_{30} + b_{31}Y_1 + b_{32}Y_2 + b_{34}X_1 + b_{35}X_2 + e_3 \end{aligned} \right\} (2)$$

Эти системы называются также одновременно взаимозависимыми (Amateis et al., 1984), или взаимозависимыми (Четыркин, 1977). В системе (2) через Y_i ($i = 1, 2, 3$ и т.д.) обозначены те переменные, которые должны быть объяснены с помощью модели, представленной системой уравнений. Причинно обусловленные соотношения между переменными в уравнениях более не являются односторонними, как это имело место в изолированном регрессионном уравнении. Односторонней причинной связью характеризуются лишь переменные X_j ($j = 1, 2$), которые объясняют переменные Y_i , но сами не объясняются ими. Очевиден одновременный характер модели (2): зависимая переменная одного уравнения выступает как объясняющая (независимая) переменная в других уравнениях или объясняющие переменные в одном или нескольких уравнениях включены в другое уравнение системы как подлежащие объяснению, т.е. как независимые. Отдельные уравнения модели не могут более рассматриваться изолированно друг от друга. К ним должны быть применены и особые приемы оценивания. В силу сказанного, обычно принятое в регрессионном анализе разделение переменных на зависимую и объясняющие теряет смысл (Ферстер, Ренц, 1983).

Применительно к системе связанных уравнений переменные Y_i левой части уравнений называются эндогенными (т.е. внутрисистемными), поскольку они определяются внутри системы уравнений. Переменные правой части уравнений называются предопределенными и могут представлять собой либо эндогенные переменные Y_i , величина которых определена предшествующим уравнением, либо экзогенные (т.е. внесистемные) переменные X_j , величина которых определяется совершенно независимо от системы уравнений (Borders, 1989). Эндогенные переменные Y_i , которые объясняются моделью (2), называются также совместно зависимыми переменными. Они совместно зависят потому, что между ними существуют многосторонние связи, и определяются не одним уравнением, а одновременными уравнениями модели.

Система (2) охватывает те переменные, которые оказывают существенное влияние на совместно зависимые переменные, а возмущающие переменные e_i ($i = 1, 2, 3$ и т.д.) имеют случайный характер. Она содержит столько уравнений, сколько в ней имеется совместно зависимых переменных, так что каждая совместно зависимая переменная может быть объяснена с помощью соответствующего уравнения. Система (2) имеет однозначное решение относительно совместно зависимых переменных.

Для описания функционирования системы уравнений (2) обычно вводят априорные внутри- и межрегрессионные ограничения на параметры. Это прежде всего так называемые нулевые ограничения, вызванные тем, что некоторые переменные не входят в определенные уравнения системы. Кроме того, на параметры модели накладываются общие линейные ограничения. Исключая некоторые переменные, можно добиться необходимой спецификации модели, так как в противном случае нельзя получить оценку модели и достичь ее адекватности изучаемому явлению (Ферстер, Ренц, 1983).

Форма, в которой записаны модели (1), (2) и (3), называется структурной формой модели. Структурная форма модели создается в процессе формирования (спецификации) самой модели при стремлении отразить причинно-следственный механизм, существующий в реальности. Она позволяет проследить влияние изменений в экзогенных переменных модели на значения эндогенных переменных. Параметры уравнений модели в данной форме получили название структурных коэффициентов, общее их число равно или меньше $i(i-1+j)$ (Четыркин, 1977).

Структурная форма - это предполагаемая исследователем модель, основанная на априорных теоретических взаимосвязях, от которых предположительно происходят эмпирические данные. Таким образом, структурная форма является прообразом истинных основополагающих взаимосвязей, а не просто набором эмпирических регрессионных моделей. Априорные взаимосвязи, на которых основывается структурная форма, будут предписывать, что некоторые эндогенные и предопределенные переменные из некоторых уравнений необходимо удалить и что некоторые переменные будут иметь одни и те же значения параметров. Необходимо отметить, что данные, используемые для оценки парамет-

ров, должны быть распределены независимо и идентично. Однако, ошибки для различных уравнений системы могут показывать одно-моментные межрегрессионные корреляции (т.е. уравнения могут быть коррелированы в данный момент времени) (Borders, Bailey, 1986).

Одновременный набор регрессионных уравнений, рассчитанных по одному в логически последовательном порядке, называется рекурсивной системой, и многие исследователи рассматривают ее как частный случай одновременной системы (Маленко, 1975, 1976; Ферстер, Ренц, 1983; Amateis et al., 1984). Рекурсивная система, которую называют также рекуррентной (Усольцев, 1985 а,б, 1988) учитывает последовательные взаимосвязи уравнений

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= b_{10} + && + b_{13}X_1 + b_{14}X_2 + e_1 \\ Y_2 &= b_{20} + b_{21}Y_1 && + b_{23}X_1 + b_{24}X_2 + e_2 \\ Y_3 &= b_{30} + b_{31}Y_1 + b_{32}Y_2 + b_{33}X_1 + b_{34}X_2 + e_3 \end{aligned} \right\} (3)$$

В первое структурное уравнение рекурсивной системы включена обычно только одна эндогенная переменная, а в последующих уравнениях каждый раз добавляются другие эндогенные переменные. Так, в (3) в первом уравнении содержится только Y_1 , во втором уравнении к Y_1 добавляется другая эндогенная переменная Y_2 , в третьем уравнении - Y_3 и т.д. Таким расположением переменных добиваются в каждом структурном уравнении только односторонне направленных зависимостей между переменными. Так, в (3) Y_2 зависит от Y_1 , но Y_2 не оказывает влияния на Y_1 , так как переменная Y_2 не включена в первое уравнение. Хотя в модели содержится несколько эндогенных переменных, они не являются взаимозависимыми, а образуют одну причинную цепь (Ферстер, Ренц, 1983).

Общее условие, которому должна отвечать по определению рекурсивная система - матрица преобразования Якоби должна быть треугольной и ее определитель, известный как определитель преобразования Якоби, должен равняться единице. Кроме обозначения элементов, эта матрица идентична матрице коэффициентов эндогенных переменных в системе, когда переменные входят в уравнение в линейном виде. Таким образом, общее ус-

ловие выполняется, когда коэффициенты эндогенных переменных в системе образуют треугольную матрицу (Harlow, 1962).

Чтобы обычный метод наименьших квадратов (ОМНК) давал несмещенные, устойчивые и эффективные оценки параметров, есть следующие стандартные допущения относительно случайных возмущений:

- 1) возмущениями являются нормально распределенные случайные переменные с нулевым средним и постоянной дисперсией;
- 2) возмущения распределены независимо от объясняющих переменных;
- 3) в уравнении отсутствует сериальная корреляция между последовательными возмущениями.

Возмущения в рекурсивной системе могут быть гарантированно распределены независимо от объясняющих переменных, если только возмущения каждого структурного уравнения в системе не коррелируют с возмущениями любого другого уравнения в этой же системе. Это означает, что дисперсионно-ковариационная матрица содержит по диагонали только ненулевые элементы, т.е. все ковариации равны нулю. При допущениях 1) и 3) и при наличии нулевых ковариаций, в ОМНК-подходе к оценке параметров могут быть использованы скорее экспериментальные, чем теоретические значения эндогенных переменных (Harlow, 1962).

Таким образом, для получения оценок параметров рекурсивной регрессионной системы может быть применен ОМНК, если нет межрегрессионной корреляции между компонентами ошибок разных уравнений системы. Если точно следовать определению рекурсивной системы, то она не связана с проблемой корреляции между эндогенными переменными правой части уравнений и компонентами ошибки эндогенных переменных левой части. Однако, это предположение основывается на факте, что ошибки уравнений системы попарно не коррелированы. Когда такие корреляции имеют место, то утверждение, что эндогенные переменные правой части не коррелированы с компонентами ошибки эндогенных переменных левой части, не соответствует действительности. Таким образом, если система рекурсивного типа обнаруживает межрегрессионные корреляции, то эта система не является рекурсивной по определению, и с помощью метода ОМНК, модифицированного А.Цельнером (Zellner, 1962), нельзя получить устойчивых оценок ее параметров.

I.2. ПРОБЛЕМА ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ В ОДНОВРЕМЕННЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим проблемы, связанные с оценкой коэффициентов системы двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= b_{11}X_1 + b_{12}X_2 \\ Y_2 &= b_{21}X_1 + b_{22}X_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Очевидно, что с оценкой коэффициентов первого уравнения системы (4) методом ОМНК проблем нет. Трудности возникают со вторым уравнением, в котором ожидаемое значение Y_1 становится "независимой" переменной. Проще всего было бы принять фактические значения Y_1 и применить ОМНК. Однако, имеется по крайней мере интуитивное возражение против такого приема. Фактические значения будут в общем отличаться от ожидаемых; поэтому независимой переменной свойственна ошибка, которую она внесет в систему.

Первое уравнение системы (4) дает выход из этого затруднения. Имея ОМНК-оценки b_{11} и b_{12} , можно рассчитать ожидаемые значения Y_1 по соответствующим значениям X_j в надежде, что расчетные значения будут близки к ожидаемым. Затем можно подставить расчетные значения вместо ожидаемых значений Y_1 и для оценки коэффициентов второго уравнения применить второй шаг метода наименьших квадратов.

Альтернативным и равнозначным образом можно подставить правую часть первого уравнения вместо Y_1 во втором уравнении и переписать систему в виде

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \\ Y_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$a_{11} = b_{11} \quad (6)$$

$$a_{12} = b_{12} \quad (7)$$

$$a_{21} = b_{21} \cdot a_{11} \quad (8)$$

$$a_{22} = b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \quad (9)$$

Уравнения (5) представляют приведенную форму системы, и коэффициенты a_{ij} можно рассчитать обычным методом наименьших квадратов. Затем по соотношениям (6)-(9) рассчитываются ко-

эффициенты интересующих нас уравнений структурной формы (4) (Furnival, Wilson, 1971). Таким образом, коэффициенты уравнений приведенной формы модели представляют собой конгломерат коэффициентов структурной формы. Модель в приведенной форме построена как бы с учетом предпосылки, что другие объясняющие переменные не изменяются, так как в этой модели каждая совместно зависимая переменная Y_1 объясняется только предопределенными переменными (Ферстер, Ренц, 1983).

Описанные два метода оценки называются соответственно двухшаговый метод наименьших квадратов (2МНК), предложенный Р.Басманом (Basman, 1957) и независимо от него Г.Тейлом (Theil, 1953), и косвенный метод наименьших квадратов. Для частной структурной формы (4) оба метода дают идентичные результаты и являются эффективными не менее, чем любой известный альтернативный метод. Оценки коэффициентов являются смещенными, но устойчивыми.

К сожалению, для других структурных форм расчет коэффициентов может быть более сложным, а в некоторых случаях - невозможным. Если мы заменим второе уравнение системы (4) выражением

$$Y_2 = b_{21}Y_1 + b_{22}X_1 + b_{23}X_2, \quad (10)$$

то применение 2МНК будет невозможно. Расчетные значения Y_1 являются, конечно, линейной функцией X_1 и X_2 , и поэтому матрица сумм квадратов и произведений, образованная на втором шаге, будет особенной (вырожденной). Аналогичная тупиковая ситуация возникает при попытке оценить структурные коэффициенты уравнения (10) по коэффициентам уравнений приведенной формы. Тогда уравнения (8) и (9) заменяются выражениями

$$a_{21} = b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \quad (11)$$

$$a_{22} = b_{21} \cdot a_{12} + b_{23} \quad (12)$$

и получаем систему двух уравнений (11) и (12) с тремя неизвестными b_{21} , b_{22} , b_{23} .

С другой стороны, если заменить второе уравнение системы (4) выражением

$$Y_2 = b_{21}Y_1, \quad (13)$$

то при попытке оценить коэффициенты через приведенную форму появляется еще одна проблема. В этом случае уравнения (8) и

(9) заменяются выражениями

$$a_{21} = b_{21} \cdot a_{11} \quad (14)$$

$$a_{22} = b_{21} \cdot a_{12} \quad (15)$$

и тогда очевидно, что коэффициент b_{21} имеет две оценки - одну по уравнению (14) и другую - по уравнению (15). Причина этого затруднения в том, что принятие выражения (13) в качестве действительного структурного уравнения налагает на коэффициенты системы ограничение

$$a_{21}/a_{22} = a_{11}/a_{12}, \quad (16)$$

которое при оценке косвенным методом наименьших квадратов игнорируется.

Казалось бы, ничто не мешает применить к оценке системы

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= b_{11}X_1 + b_{12}X_2 \\ Y_2 &= b_{21}Y_1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

метод 2МНК: очевидно, что в ее втором уравнении можно получить единственную оценку коэффициента b_{21} . Однако, ограничение (16) применяется только на втором шаге процедуры оценки. Поэтому будет иметь место некоторая потеря эффективности модели.

Как отмечалось выше, эндогенные переменные могут находиться как в левой, так и в правой частях уравнения. Эндогенные переменные определяются системой и поэтому являются стохастическими, так что может быть нарушено основное условие ОМНК. При использовании ОМНК предполагается, что переменные правой части уравнения не коррелированы с ошибками и обычно они считаются известными константами. Когда стохастические переменные появляются в правой части регрессионного уравнения в качестве предопределенных переменных, то их независимость от неизвестной составляющей стохастической ошибки исчезает. Можно показать, что вследствие этого оценки параметров по ОМНК становятся смещенными и неустойчивыми - явление, обычно называемое смещением метода наименьших квадратов.

Если процесс моделируется с использованием единичной регрессии, в которой одна или более независимых переменных являются стохастическими, нарушение выше названного предположения может быть не опасным. Довольно часто величины этих сто-

хастических переменных фиксируются на наблюдаемых уровнях, и они применяются как истинно предопределенные переменные. Однако, при работе с взаимозависимыми системами уравнений, в которых эндогенные переменные определяются системой, а потом используются в качестве предопределенных в других частях системы, нарушение этого предположения становится серьезным и может привести к ложным результатам.

В общем случае применение ОМНК к расчету уравнений системы (2) дает смещенные и неустойчивые оценки параметров вследствие явных корреляций между объясняющими переменными правой части уравнений и элементами ошибки эндогенной переменной левой части (Pindyck, Rubinfeld, 1981). Впервые смещенность оценок при применении ОМНК непосредственно к каждому уравнению одновременной (взаимозависимой) линейной системы обнаружил Т. Хаавелмо (Haavelmo, 1943).

При оценке параметров одновременных систем уравнений альтернативами ОМНК являются 2МНК и трехшаговый метод наименьших квадратов. Эти два альтернативных метода дают устойчивые, хотя необязательно несмещенные оценки параметров. Для применения 2МНК и трехшагового метода наименьших квадратов (3МНК) уравнения преобразуют к приведенной форме. Эти уравнения приведенной формы выражают каждую эндогенную переменную как функцию только экзогенных переменных в системе и выводятся с использованием стандартного метода алгебраической подстановки для решения i неизвестных в i уравнениях, где i неизвестных являются эндогенными переменными. Когда вся система уравнений одновременно взаимозависима (т.е. отсутствует блочная рекурсивность), приведенная форма уравнений будет выражать каждую эндогенную переменную как функцию всех экзогенных переменных в системе.

При 2МНК на первом шаге производится оценивание параметров уравнения приведенной формы с помощью ОМНК. Затем генерируются ряды прогнозируемых значений эндогенных переменных, входящих в правую часть структурных уравнений. На втором шаге эндогенные переменные, находящиеся в правой части структурных уравнений, заменяются их оценками (прогнозируемыми значениями), выступающими в качестве объясняющих переменных, и параметры структурного уравнения оцениваются с помощью

ОМНК. По существу, метод 2МНК заменяет эндогенные переменные правой части предсказанными значениями этих переменных, полученными расчетом каждой эндогенной переменной по всем предопределенным переменным системы уравнений в целом (Pindyck, Rubinfeld, 1981). Эти предсказанные эндогенные переменные правой части не коррелированы с компонентами ошибки эндогенных переменных левой части уравнений, и результирующие оценки параметров являются смещенными, но устойчивыми.

Трехшаговый метод наименьших квадратов является продвинутым на один шаг вариантом 2МНК с применением генерализованной (обобщенной) процедуры наименьших квадратов А. Целнера (Zellner, 1962) (метод псевдонесвязанных регрессий) с целью учета межрегрессионных корреляций между компонентами ошибок разных уравнений. Дисперсионно-ковариационная взвешенная матрица, применяемая в обобщенной процедуре наименьших квадратов, выводится из остатков, полученных на втором шаге оценки по 2МНК. В случае, когда перекрестные ковариации равны нулю, 2МНК и 3МНК дают идентичные оценки; в остальных случаях 3МНК будет давать более эффективные оценки параметров. Большинство стандартных пакетов статистического анализа включают оценку по 3МНК, которая фактически не связана с дополнительными затратами и усилиями по сравнению с 2МНК-оценкой обсуждаемых здесь малых систем уравнений.

Для любого уравнения системы 2МНК учитывает все предопределенные переменные; однако из эндогенных переменных учитываются лишь те, что включены в данное уравнение. Как показали А.Целнер и Х.Тейл (Zellner, Theil, 1962), 3МНК при оценке параметров учитывает все взаимозависимости системы в целом. Вследствие такого различия между 2МНК и 3МНК, первый известен как метод ограниченной информативности, а второй - как метод полной информативности (т.е. используется вся имеющаяся информация). А.Целнером и Х.Тейлом (Zellner, Theil, 1962) показано также, что результирующие оценки по 3МНК являются устойчивыми, асимптотически нормально распределенными и асимптотически эффективными, т.е. 3МНК дает устойчивые и эффективные оценки для выборок большого объема.

Когда скоро коэффициенты системы уравнений определены, полезно получить приведенную форму уравнений, выведенную

аналитически. Аналитически выведенные уравнения приведенной формы используют рассчитанные коэффициенты системы, чтобы выразить каждую эндогенную переменную как функцию только экзогенных переменных системы. Такая математическая манипуляция позволяет использовать уравнения для прогностических целей.

Более детальное изложение продвинутых методов наименьших квадратов применительно к системам одновременных уравнений будет дано в разделе 3 на конкретных примерах из области лесоводственных исследований. Наибольшее применение у экономистов и лесных биометристов нашли рекурсивные и одновременные (взаимозависимые) системы уравнений. В дальнейшем изложении их применению в лесоводственных исследованиях уделено основное внимание.

1.3. ПРОБЛЕМА ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМЫ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Применение техники оценки одновременных уравнений требует, чтобы система была идентифицируемой. Идентифицируемость структурных уравнений означает, что путем линейной комбинации уравнений модели невозможно получить ни одного уравнения, которое бы противоречило модели и параметры которого отличались бы от параметров структурных уравнений, подлежащих проверке (Ферстер, Ренц, 1983). Проблема идентификации - это проблема получения единственных оценок параметров структурных уравнений, т.е. единственности соответствия между приведенной и структурной формами. Это подобно понятию определимых функций в контексте общих линейных моделей. Идентифицируемость является основным моментом при оценке параметров взаимозависимых систем линейных уравнений, и этому вопросу посвящена обширная эконометрическая литература (Fisher, 1966; Rothenberg, 1971; Johnston, 1972; Dutta, 1975; Kelley, 1975; Brown, 1983). При отсутствии априорных ограничений по параметрам отдельных уравнений системы, т.е. когда каждое уравнение содержит полный набор x_j , приведенная форма имеет ij параметров; при этом структурная форма, в свою очередь, может содержать $i(i-1+j)$ параметров. Ясно, что $i(i-1+j)$ оценок параметров структурной формы невозможно получить единственным образом на основе ij параметров приведенной формы. Положение исправляется тем, что можно при-

нять некоторые ограничения на коэффициенты матриц структурной формы. Обычно многие из них равны 0 (если между переменными нет связи) или 1 (для тождеств). Модельеры априорно знают, что одни и те же регрессоры (объясняющие переменные) не будут входить в каждую модель и последовательно накладывают ограничения на параметры каждого уравнения системы. Это могут быть нулевые ограничения, когда некоторые переменные удаляются из некоторых уравнений путем приравнивания их параметров нулю. Ограничение может состоять в том, что некоторые параметры уравнения имеют заданное соотношение, так что они равны между собой, или могут быть ограничения между уравнениями (межрегрессионные), так что некоторые параметры в разных уравнениях системы имеют специфичные априорные соотношения. Все эти ограничения являются прямым следствием основополагающих теоретических взаимосвязей, так что окончательная форма структурной модели фактически является точным представлением основополагающих процессов, и параметры оцениваются по данным, которые предположительно являются результатом такой структуры (Borders, Bailey, 1986). Таким образом, проблема идентификации - это прежде всего проблема конструирования алгебраической формы модели. Формулировка полного решения проблемы довольно громоздка и приводится в обширной монографии Э.Маленво (1975, 1976).

Если априорных ограничений недостаточно для однозначного определения матриц структурной формы, то система не идентифицируема. Если названные дополнительные ограничения накладываются нет необходимости, то система такой модели называется точно идентифицируемой. Наконец, если таких ограничений больше, чем это нужно для точной идентификации, то система сверхидентифицируема; обычно она применяется в практике (Четыркин, 1977).

Приведенные выше система (4), а также уравнения (10) и (13) представляют примеры соответственно точно идентифицируемого, не идентифицируемого и сверхидентифицируемого структурных уравнений. Таким образом, при идентификации системы возможны три случая:

1. Если система включает в себя лишь точно идентифицируемые уравнения, то параметры структурной модели определяются однозначно, методы 2МНК и косвенный дают одинаковые результаты, и может быть применен любой из них.

2. Если в систему входит не идентифицируемое уравнение, то параметры структурной модели получить невозможно.
3. Если в систему входит сверхидентифицируемое уравнение, то параметры структурной модели оцениваются однозначно с помощью многошаговой регрессионной процедуры (2МНК дает устойчивые оценки, но имеются более эффективные методы, которые будут обсуждаться ниже).

Очевидно, необходимо иметь некоторые критерии идентифицируемости уравнений. Простое правило, хотя и не лишнее недосмотров, может быть сформулировано следующим образом:

1. Если число неизвестных коэффициентов в уравнении больше числа эндогенных переменных в системе, то уравнение не идентифицируемо.
2. Если имеет место обратное соотношение, то уравнение сверхидентифицируемо.
3. Если число неизвестных коэффициентов равно числу экзогенных переменных, уравнение точно идентифицируемо (Furnival, Wilson, 1971).

В системе (4) и ее производных имеются две экзогенные переменные. Таким образом, уравнения системы (4) с двумя оцениваемыми коэффициентами являются точно идентифицируемыми. Уравнение (10) с тремя коэффициентами - не идентифицируемо и уравнение (13) с одним коэффициентом - сверхидентифицируемо.

В общем случае идентификация одновременно взаимозависимой системы уравнений требует удовлетворения некоторым порядковым и ранговым условиям (критериям). Необходимым (но не достаточным) является порядковое условие идентифицируемости, которое обычно используется в практике моделирования (Четыркин, Калихман, 1982):

$$(i+j) - (i_k + j_k) \geq (i-1), \quad (18)$$

где i - полное число уравнений, т.е. число эндогенных переменных; j - число экзогенных переменных всей системы; $(i_k + j_k)$ - число экзогенных и эндогенных переменных, присутствующих в k -м уравнении. Таким образом, число исключенных переменных не должно быть меньше числа уравнений системы без единицы. Достаточным условием идентификации уравнения является ранговое условие, которое гласит, что матрица коэффициентов переменных, исключенных из уравнения (эндогенных и экзо-

генных), но имеющих в других уравнениях системы, должна содержать по крайней мере один не обращающийся в нуль определитель с рангом, равным числу эндогенных переменных, действующих в качестве объясняющих переменных в рассматриваемом структурном уравнении (Amateis et al., 1984). Система является идентифицируемой, если идентифицируются все структурные уравнения системы. Проблема идентификации рекурсивных моделей не возникает, так как они всегда идентифицированы. Более детальное обсуждение порядковых и ранговых условий можно найти в монографии Г.Маддалы (Maddala, 1977).

Для сверхидентифицируемой системы применяется метод оценки по наименьшей обобщенной остаточной дисперсии. После модификации первого уравнения системы (4) и уравнения (13) в терминах фактических значений Y_i уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Y_1 - b_{11}X_1 - b_{12} &= e_1 \\ Y_2 - b_{21}Y_1 &= e_2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где e_i - случайные возмущения. Затем минимизируется определитель дисперсионно-ковариационной матрицы возмущений. К сожалению, эти расчеты довольно сложны и включают решение системы нелинейных уравнений. Альтернативный метод оценки -

2МНК - обладает тем преимуществом, что нелинейные члены в уравнениях минимальной остаточной дисперсии являются выборочными дисперсиями и ковариациями возмущений. Можно просто подставить оценки этих дисперсий и ковариаций, выполненные методом 2МНК, в уравнения минимальной остаточной дисперсии. В итоге получаем легко решаемую линейную систему (Furnival, Wilson, 1971).

2. СОВМЕСТИМЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РОСТА И ПРИРОСТА ДРЕВОСТОЕВ

Еще в недавнем прошлом основное внимание при изучении продуктивности лесов уделялось разработке функций запаса для полного цикла роста. Быстрое развитие лесной технологии в сочетании с длительным циклом лесовыращивания обуславливают потребность в динамической функции запаса, периодически сверяемой с практическими результатами. Это подразумевает системное понятие контроля за лесным хозяйством путем использо-

вания короткого цикла обратной связи для управления долгосрочным процессом лесовыращивания (Moser, Hall, 1969).

Запас древостоя и его прирост часто рассматриваются в зависимости от качества местообитания, возраста и некоторой характеристики плотности древостоя, а также взаимодействий названных переменных. Плотность древостоя, в свою очередь, принимается как функция качества местообитания, возраста и характеристики начальной плотности. Качество местообитания, выраженное классом бонитета, зависит от динамики верхней высоты с возрастом древостоя (Clutter et al., 1983). Очевидно, что при моделировании роста и прироста древостоев имеют дело с взаимозависимой системой процессов, лежащих в основе прироста. Каждое уравнение в такой системе описывает определенную взаимосвязь с различным набором переменных системы, но все эти взаимосвязи предполагаются одновременными. Однако довольно часто еще взаимозависимости, характерные для динамики древостоев, при построении моделей игнорируются, и при моделировании роста и прироста древостоев используется метод ОМНК для оценки параметров каждой модели системы отдельно от остальных.

2.1. КРАТКАЯ ПРЕДЫСТОРИЯ ПОЯВЛЕНИЯ СОВМЕСТИМЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИРОСТА И РОСТА ДРЕВОСТОЕВ

Тенденции в развитии методов моделирования роста древостоев - от традиционных таблиц хода роста (ТХР) до многомерных регрессионных и имитационных моделей - практически одинаковы во всех странах. Можно рассмотреть одну из таких тенденций на примере сосны ладанной в США как предысторию появления совместимых моделей роста и прироста древостоев.

Первые ТХР нормальных древостоев сосны ладанной, получившие широкое применение, были опубликованы Лесной службой США в 1929 году. Позднее, в 1942 году В.Мейером (Meyer, 1942) были опубликованы такие же таблицы, но на основе другого экспериментального материала. Трудности с использованием ТХР нормальных древостоев возникли сразу же после их внедрения в практику. Эти трудности были связаны с попытками использовать ТХР для проекции роста (т.е. прогнозирования изменения запаса в течение заданного возрастного интервала).

Инструкцией по применению ТХР предусматривалось редуцирование нормального запаса, приходящегося на конец возрастного интервала, по проценту, на величину которого полнота наличного древостоя отличалась от нормальной. Подобное статическое представление полноты многими лесоводами считалось несовершенным и были предприняты попытки прояснить ситуацию.

С.Геворкянц (Gevorkiantz, 1934) при исследовании перехода низкополнотных древостоев в нормальное состояние предложил использовать формулу Герхардта для оценки тенденции изменения полноты. Определенное наличие возрастного тренда полноты к нормальной было показано Е.Симмонсом и Г.Шнуром (Simmons, Schnur, 1937) при анализе данных повторных перечетов древостоев сосны ладанной в Мэриленде. Анализ показал наличие тесных корреляций процента прироста площади сечений с возрастом и полнотой древостоев. С течением времени концепция нормальной полноты заменяется пониманием того, что полнота является динамичным показателем (Nelson, Bennett, 1965).

В 1939 году А.Мак-Кинни и Л.Чейкен (MacKinney, Chaiken, 1939) обобщили методы составления ТХР нормальных древостоев и составили эмпирические ТХР для сосны ладанной. Таблицы были составлены по данным пробных площадей в широком диапазоне полнот с использованием многофакторного регрессионного анализа вместо ранее применяемого графического метода. В качестве третьей переменной дополнительно к возрасту и классу бонитета была включена полнота древостоя. Позднее Ф.Шумахером и Т.Койлом (Schumacher, Coile, 1960) были составлены ТХР сосны ладанной, основанные на уравнениях взаимосвязи различных показателей древостоя, таких как площадь сечений, число стволов и высота, с возрастом, классом бонитета и относительной полнотой. Однако почти все ТХР составлялись по данным временных пробных площадей.

Нарастающая тенденция использования компьютеров и статистических методов приводит к тому, что математическое выражение закономерностей роста древостоев становится более предпочтительным, чем табличное представление результатов в виде ТХР. К.Венгер с соавт. (Wenger et al., 1958) по данным повторных перечетов сосны ладанной с 5-летним интервалом вывели прогностические уравнения объемного прироста ликвидной древесины для прореженных древостоев

$$PAG = 272,08 - 2,47S - 5,72(RD) + 0,074(RD)S \quad (20)$$

и для непрореженных древостоев

$$PAG = -91,36 + 4908,0/A - 0,075 \cdot S - 51,79(RD)/A + 0,0289(RD)S, \quad (21)$$

где PAG - периодический (за 5 лет) годичный прирост деревьев с диаметром 4,6 дюйма и более, куб. футов/акр; A - исходный возраст древостоя, лет; S - класс бонитета, в футах; RD - относительная полнота как функция площади сечений и среднего диаметра (Stahelin, 1949). Ни (20), ни (21) не объясняли более 40 % общей изменчивости прироста.

Более точную оценку прироста давало уравнение, рассчитанное по более обширным данным перечетов прореженных древостоев сосны ладанной с 10-летним интервалом (Nelson, 1960):

$$PAG = 205,0 + 2600,5/A - 8,1199 \cdot S - 0,03087(RD)^2 + 0,05824(RD)S + 0,05328 \cdot S^2, \quad (22)$$

которое объясняло 78 % общей изменчивости прироста. Е.Брендер (Brender, 1960) по данным повторных перечетов в 202 древостоях сосны ладанной в штате Джорджия рассчитал уравнение, объясняющее 65 % общей изменчивости прироста, в котором вместо относительной была введена абсолютная полнота древостоя:

$$PAG = -20,748 + 6,64535 \cdot B - 0,02529 \cdot B^2 + 50260,6/(AS) - 235,034 \cdot B/S, \quad (23)$$

где PAG - периодический годичный прирост деревьев диаметром более 5,6 дюйма, куб. футов/акр; B - площадь сечений деревьев диаметром более 5,6 дюйма, кв. футов/акр.

Однако ни в одной из упомянутых работ (Wenger, 1958; Nelson, 1960; Brender, 1960) при анализе данных роста сосны ладанной на постоянных пробных площадях не было сделано попытки связать модели, используемые для анализа роста, с ранее рассчитанными моделями запаса для этой породы. Дж. Клаттер (Clutter, 1963) полагал, что если для одних и тех же древостоев модели запаса и изменения запаса не совместимы, то по крайней мере одна из них должна быть неадекватна или неточна, и для обеспечения эффективности прогнозов одну или обе необходимо пересчитать. Иными словами, несовместимые модели запаса и изменения запасов нельзя считать совершенными.

Исходя из изложенного, Р.Бакман (Buckman, 1962) и Дж. Клаттер (Clutter, 1963) выдвинули и реализовали идею совместности моделей роста и прироста, когда запас древостоя и его прирост (изменение запаса) находятся в дифференциально-интегральном соотношении. Совместимость моделей запаса и изменения запасов они понимали как возможность получения запасов путем суммирования предсказанных моделью изменений запаса за ряд последовательных возрастных периодов, или когда алгебраическая форма модели запаса может быть выведена путем интегрирования модели изменения запасов.

2.2. СОВМЕСТИМЫЕ МОДЕЛИ НАЛИЧНОГО ЗАПАСА И ЕГО ПРИРОСТА В ОДНОВОЗРАСТНЫХ ДРЕВОСТОЯХ

Дж. Клаттер (Clutter, 1963) использовал для вывода совместных моделей запаса и изменения запасов данные повторных переучетов с 5- и 10-летними интервалами 102 прореженных чистых, одновозрастных древостоев сосны ладанной. Возраст древостоев - от 21 до 69 лет, класс бонитета - от 53 до 110 футов, площадь сечений к началу второго переучета - от 30 до 154 кв. футов/акр. При каждом переучете обмерялись все деревья с диаметром более 1 дюйма и у 10 деревьев - высота и возраст. Рассчитывались показатели:

- 1) возраст, средний за период роста;
- 2) класс бонитета - по среднему возрасту и средней общей высоте с использованием бонитетной шкалы Т.Койла (Coile, 1952);
- 3) средняя за период роста площадь сечений;
- 4) средний за период роста запас без коры;
- 5) годичный прирост площади сечений на акре, полученный как разность между начальной и конечной площадями сечений, деленная на 5 (число лет периода роста);
- 6) годичный прирост запаса, куб. футов/акр, полученный как разность между начальным и конечным запасами, деленная на 5.

Использовались средние за период роста показатели возраста, площади сечений и запаса вместо обычно измеряемых показателей на начало периода роста с целью получить модели измене-

ния запасов путем дифференцирования моделей запаса. Полученные таким способом модели изменения запасов пригодны для характеристики скорости роста в данном возрасте (мгновенная скорость роста), но неприемлемы, без некоторых манипуляций, для оценки средней за весь период скорости роста. Предполагалось, однако, что при небольшом периоде роста (5 лет) ошибки несущественны.

В 1939 году Ф.Шумахер (Schumacher, 1939) предложил для нормальных древостоев сосны широкохвойной уравнение запаса V , куб. футов/акр, как функцию возраста A и класса бонитета S , измеряемого высотой древостоя, футов, в 50-летнем возрасте

$$\log V = 0,6381 - 32,9137/A + 0,004284 S - 0,2406(S/A) \quad (24)$$

и дал его структуре биологическую оценку. Дж.Клаттер (Clutter, 1963), используя структуру уравнения (24), дополнил его третьей переменной - площадью сечений B , кв. футов/акр, и рассчитал для древостоев сосны ладанной уравнение

$$\ln V = 2,8076 + 0,015108 S + 0,95931 \ln B - 21,863/A \quad (25)$$

с коэффициентом детерминации 0,993 и стандартной ошибкой в логарифмических единицах 0,00442.

Путем дифференцирования уравнения (25) по возрасту A получено выражение скорости изменения запаса древостоя

$$(dV/dA) = b_2 V/B (dB/dA) - b_3 V/A^2, \quad (26)$$

не пригодное, однако, для практического применения, поскольку включает в правую часть неизвестное значение скорости изменения площади сечений (dB/dA).

Чтобы получить выражение (dB/dA) вначале подобрана форма уравнения зависимости площади сечений B от возраста, класса бонитета и площади сечений в возрасте 20 лет. После дифференцирования его по возрасту получена алгебраическая форма уравнения для (dB/dA) как функции возраста, класса бонитета и площади сечений, константы которого затем рассчитаны по фактическим данным обмеров деревьев на пробных площадях методом множественного регрессионного анализа (ОМНК). Полученная модель

$$dB/dA = (B/A)(4,6012 + 0,013597 S - \ln B) \quad (27)$$

объясняет 65,3 % изменчивости годичного прироста площади сечений со стандартной ошибкой 0,77 кв. футов/акр/год.

После подстановки алгебраической формы правой части уравнения (27) вместо (dV/dA) в уравнение (26) получена алгебраическая форма уравнения для скорости изменения запаса, константы которого затем рассчитаны по фактическим данным обмеров пробных площадей (за исключением запаса V). Получена модель $dV/dA = 5,7907(V^*/A^2) - 0,78166(V^* \ln V/A) + 3,6562 V^*/A + 0,01741(V^*/A)$, (28)

где V^* - расчетные значения запаса, получаемые по уравнению (25). Уравнение (28) объясняет 69,7 % изменчивости годовичного прироста запаса со стандартной ошибкой 40,96 куб. футов/акр/год.

Уравнения (27) и (28) дают возможность получить модели для проекции площади сечений и запаса на конец данного возрастного периода. Для этого они интерпретированы как дифференциальные уравнения и интегрированы по возрасту. Получены модели

$$\ln B = 4,6012 + 0,013597 \cdot S - (A_0/A)(4,6012 + 0,013597S - \ln V_0), \quad (29)$$

$$\ln V = \ln V_0 - 5,7907(1/A - 1/A_0) + (0,059625 - 0,005781 \cdot S)(\ln A - \ln A_0) - A_0(3,5966 + 0,010628 \cdot S - 0,78166 \cdot \ln V_0)(1/A - 1/A_0), \quad (30)$$

где A_0 и A - соответственно исходный возраст и возраст проекции; V_0 и V - соответственно исходная площадь сечений и ее проекция на конец возрастного периода; V_0 и V - соответственно исходный запас и его проекция на конец возрастного периода.

Используя уравнения (29) и (30), Дж. Клаттер показал возможности оценки общего запаса древостоя для любого сочетания начальной полноты, класса бонитета, длительности периода прогноза и режима рубок ухода.

Совместимые модели обладают рядом достоинств. Возможно, наиболее очевидное из них - логическая согласованность при анализе запаса древостоя и его изменения во времени. Второе их преимущество реализуется, когда имеющиеся модели запаса древостоев используются при построении моделей изменения запасов.

Дж. Клаттер (Clutter, 1963) полагал, что по мере накопления опыта работы с совместимыми моделями можно развить значительно более эффективные методы оценки запаса и его изме-

нения, чем имеющиеся до того времени. Возможности таких методов особенно очевидны, когда запас и изменение запасов древостоев не рассматриваются как независимые явления, а анализируются в их математической взаимосвязи.

2.3. СОВМЕСТИМЫЕ МОДЕЛИ ЗАПАСА И ЕГО ПРИРОСТА В РАЗНОВОЗРАСТНЫХ ДРЕВОСТОЯХ

В ТХР и моделях динамики запаса древостоев и его прироста основным определяющим показателем обычно является возраст. Поэтому моделирование хода роста и прироста, а также оценка качества местообитания по показателю бонитета, зависящего от возраста, в разновозрастных древостоях всегда были проблематичными. Одна из попыток решить эту проблему принадлежит Дж. Мозеру и О. Холлу (Moser, Hall, 1969). Исходные данные получены на 49 акрах в разновозрастном древостое, состоящем из смеси хвойных, дуба и гикори в Висконсине.

Идеальными для вывода ростовых функций являются данные полных хронологических перечетов нескольких древостоев от закладки до рубки, называемые "реальным ростовым рядом" (Turnbull, 1963). Поскольку такой ряд требует на его получение длительного периода времени, обычно используются данные временных пробных площадей, охватывающие широкие диапазоны классов бонитета и возраста, называемые "абстрактным ростовым рядом". Промежуточным вариантом являются данные постоянных пробных площадей по результатам перечетов через определенные промежутки времени, называемые "приближенно реальным ростовым рядом" (Moser, Hall, 1969). Поскольку в разновозрастных древостоях полный ростовой цикл четко не различим, Дж. Мозер и О. Холл провели повторные перечеты на постоянных пробных площадях и использовали полученные показатели площади сечений в качестве основы для построения моделей роста и прироста.

Известно, что скорость роста запаса разновозрастного древостоя связана с площадью сечений (Buell, 1945; Spurr, 1952; Bickman, 1962). Если скорость роста запаса удовлетворительно описывается площадью сечений и, кроме того, рассматривается как производная от кумулятивного роста запаса (т.е. суммы текущих приростов), то общий запас древостоя V можно выразить функцией

$$V = f(V), \quad (31)$$

где $V = f(V_0, t), \quad (32)$

т.е. площадь сечений является функцией начальной площади сечений V_0 и времени. Путем подгонки по данным перечетов с использованием нелинейного метода наименьших квадратов получено алгебраическое уравнение

$$V = 15,651 \cdot V^{1,1424}, \quad (33)$$

где V - в куб. футах и V - в кв. футах; $R^2 = 0,82$; стандартная ошибка $SE = 67,4$.

Уравнение (33) описывает статическое состояние, поскольку связывает средний периодический запас и площадь сечений в данный момент времени. Поэтому было найдено выражение мгновенной скорости изменения запаса древостоя

$$dV/dt = (\partial f(V)/\partial V) dV/dt, \quad (34)$$

которая с учетом уравнения (33) может быть представлена как

$$dV/dt = (b_1 V/V) (dV/dt), \quad (35)$$

где согласно выше сказанному

$$dV/dt = f(V). \quad (36)$$

Экспериментальным путем Дж. Мозер и О. Холл установили, что зависимость (36) может быть описана известной функцией скорости роста Бергаланфи (Richards, 1959)

$$dV/dt = nV^m - kV, \quad (37)$$

после подгонки которого по экспериментальным данным получено

$$dV/dt = -0,46569 \cdot V^{1,0125} + 0,49818 \cdot V; R^2 = 0,89; SE = 0,1. \quad (38)$$

После подстановки уравнения (37) вместо dV/dt в уравнение (35) получено выражение

$$dV/dt = b_1 V [nV^{(m-1)} - k] \quad (39)$$

и после подгонки:

$$dV/dt = 1,3175V^{0,0125} (-0,46569V^{1,0125} + 0,49818); R^2 = 0,60; SE = 1,4; \quad (40)$$

где коэффициенты для dV/dt взяты из уравнения (38).

Функции запаса и площади сечений получены путем решения соответствующих уравнений их скорости роста. Общее решение для уравнения (40) имеет вид

$$V = b_0 [f(V_0, t)]^{b_1}, \quad (41)$$

где $f(V_0, t)$ соответствует выражению

$$V = [n/k - Ce^{-(1-m)kt}]^{1/(1-m)}, \quad (42)$$

которое является общим решением уравнения (37). Константа интегрирования C в уравнении (42) равна

$$n/k - V_0^{1-m}$$

Параметр b_0 в уравнении (41) означает, что если $t = 0$, то запас и площадь сечений равны их текущим значениям V_0 и V_0 соответственно. Поэтому

$$b_0 = V_0 / (V_0^{b_1})$$

и запас древостоя, как функция времени и начальных запаса и площади сечений, описан уравнением

$$V = V_0 / (V_0^{b_1}) [n/k - (n/k - V_0^{1-m}) (e^{-(1-m)kt})]^{b_1 / (1-m)}. \quad (43)$$

После подстановки в (43) значений параметров из уравнений скорости роста запаса и площади сечений получено прогностическое уравнение запаса

$$V = V_0 / V_0^{1,3175} [0,9348 - (0,9348 - V_0^{-0,0125}) e^{-0,0062t}]^{-105,4}. \quad (44)$$

Путем подстановки значений параметров из уравнения (38) в (42) получено прогностическое уравнение для площади сечений

$$V = [0,9348 - (0,9348 - V_0^{-0,0125}) (e^{-0,0062t})]^{-80}. \quad (45)$$

На рис. I а, б представлена динамика брутто площади сечений и запаса древостоев в течение 20 лет текущего времени от данного исходного состояния. Чтобы получить нетто периодический запас, необходимо сделать поправки на отпад и выросший подрост (ingrowth). Предполагая, что имеется метод оценки таких величин, нетто-прогноз может быть рассчитан как результат нескольких периодических прогнозов, где для каждого периода пересчитываются исходные показатели с целью учесть вклады отпада и выросшего подроста.

На рис. Iа видно, что в пределах диапазонов начальных площадей сечений и текущего времени можно ожидать повышения итоговой площади сечений с увеличением исходной ее величины. Аналогично, на рис. Iб запас увеличивается по ходу текущего времени от начального состояния. Для полного диапазона про-

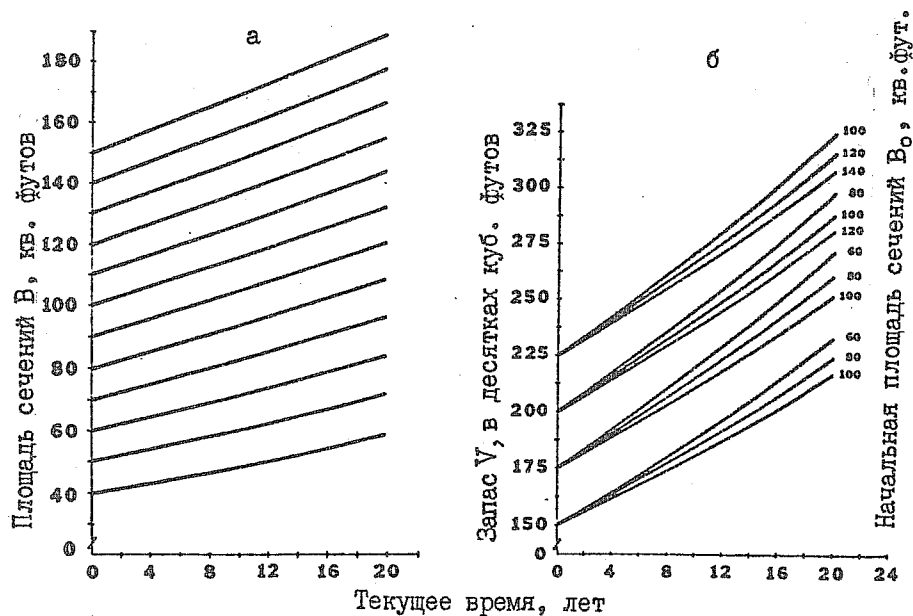


Рис. 1. Динамика площади сечений (а) и запаса (б) разновозрастного смешанного древостоя в зависимости от текущего времени (Moser, Hall, 1969).

гностических функций это неверно, поскольку площадь сечений ограничена значением

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B = (n/k) \cdot 1/(1-m)$$

и запас ограничен значением

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V = b_0 (n/k) \cdot b_1/(1-m)$$

Подстановка соответствующих числовых значений коэффициентов в этих выражениях дает "предельные значения", которые оказываются вне диапазона экспериментальных данных и полнот древостоев.

Прогностическая модель была проверена путем сравнения со стандартом, в качестве которого было отобрано 40 непроореженных площадей. С использованием показателя площади сечений на начало второго периода в качестве исходного состояния прогнозировалась итоговая площадь сечений для второго и третьего периодов. Разности между фактическими и расчетными

значениями приведены в табл. I.

Таблица I
Результаты сравнения предсказанных и фактических средних значений площади сечений для двух 6-летних периодов

	! Второй период ! (кв. футы)	! Третий период ! (кв. футы)
Диапазон	от -1,10 до 0,51	от -1,55 до 0,74
Среднее значение разности	-0,15	-0,21
Стандартная ошибка	0,06	0,09

Точность прогнозов оценена расчетом значения "хи-квадрат" как отношения между расчетной и фактической дисперсиями (Greene, 1960). Требуемая точность определяется величиной расчетной дисперсии. С учетом того, что прогнозируемые значения находятся в диапазоне 10 % от фактических, расчетные величины "хи-квадрат" составили для второго периода 11,0 и для третьего периода 20,2. Это означает, что для 12-летнего периода уравнение (45) обеспечивает необходимую точность прогноза средней площади сечений.

Однако, основной вклад исследования Дж. Мозера и О. Холла (Moser, Hall, 1969) определяется не столько результирующими уравнениями, сколько методологией вывода зависимых от времени функций запаса путем интегрирования уравнений скорости роста, не включающих возраст древостоя в качестве независимой переменной.

2.4. СОВМЕСТИМЫЕ МОДЕЛИ ОБЩЕЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ И ЕЕ ПРИРОСТА В ОДНОВОЗРАСТНЫХ ДРЕВОСТОЯХ

Первые исследования продуктивности лесов касались главным образом оценки наличного запаса не тронутых рубками древостоев. Составленные в результате таких исследований ТХР нормальных древостоев давали оценки наличного (без учета отпада) запаса сомкнутых древостоев для различных сочетаний возраста и бонитета. Они не давали информации о фактическом приросте древесины и применялись, в основном, в экстенсивном хозяйстве, без рубок промежуточного пользования.

По мере интенсификации лесохозяйственного производства

появлялась потребность оценить продуктивность хозяйственных лесов и сравнить ее потенциалы для различных пород и местообитаний. В этом контексте приобретал большое значение брутто запас, или общая производительность древостоя (общий запас всей выросшей древесины, включая отпад). При наличии сбыта древесины, идущей в отпад, общая продуктивность древостоев существенно повышалась.

Тем не менее, когда стали обсуждаться фундаментальные биологически обусловленные взаимосвязи между ростом и приростом древостоев в виде дифференциально-интегральных соотношений, первые их реализации касались динамики наличного запаса древостоев, а не их общей производительности (Buckman, 1962; Clutter, 1963). Первые совместимые модели динамики общей производительности древостоев и ее прироста были предложены В. Дамсом (Dahms, 1964), который исследовал общую производительность сосны скрученной без использования данных постоянных пробных площадей. Для определения объемного прироста он брал данные анализа стволов за последние 10 лет у деревьев, оставшихся на момент перечета, и предполагал, что деревья, отмершие за этот период, имели незначительный прирост, которым можно пренебречь. Затем средний общий объемный прирост за период связывался с возрастом, бонитетом и полнотой древостоев, а результирующее уравнение интегрировалось для получения общей производительности древостоев.

Р. Куртис (Curtis, 1967) при исследовании динамики общей производительности и прироста древостоев пихты дугласовой рассматривал запас совокупности деревьев i -й ступени толщины в момент времени t , используя известное выражение

$$V_i = N_i F D_i^2 H_i, \quad (46)$$

где V_i - объем растущих деревьев в ступени толщины в момент времени t ; N_i - число растущих деревьев в момент времени t ; F - видовое число, принимаемое постоянным; D_i - средний диаметр на высоте груди в ступени толщины; H_i - средняя высота растущих деревьев в ступени толщины.

После дифференцирования выражения (46) по t была получена скорость изменения наличного запаса

$$dV_i/dt = N_i F D_i^2 (dN_i/dt) + 2N_i F D_i H_i (dD_i/dt) + F D_i^2 H_i (dN_i/dt). \quad (47)$$

В уравнении (47) $FD_i^2 H_i$ - объем среднего дерева ступени, $dN_i/dt \leq 0$ - скорость отпада, или изменение количества деревьев в единицу времени, а их произведение - запас отпавших деревьев ступени в единицу времени (отрицательная величина). При исключении этой величины из уравнения (47) получается выражение для скорости роста общей производительности, включая отпад

$$d(GV_i)/dt = N_i F D_i^2 (dN_i/dt) + 2N_i F D_i H_i (dD_i/dt). \quad (48)$$

Но это выражение можно получить дифференцированием исходной формулы запаса (46) при условии, что N_i - постоянная величина.

Таким образом, Р. Куртисом (Curtis, 1967) было показано, что различие между дифференциальными уравнениями для скорости роста общей производительности и скорости роста наличного запаса состоит лишь в том, что в первом случае N - постоянная величина, а во втором - переменная, входящая в уравнение как скорость отпада dN/dt . Следовательно, для оценки общей производительности данные об отпаде не нужны.

Уравнение (48) было использовано Р. Куртисом (Curtis, 1967) для расчетного определения фактических значений прироста общей производительности не тронутых рубками, разновозрастных древостоев пихты дугласовой по 189 перечетам, выполненным на 80 постоянных пробных площадях, и по перечетам 19 временных пробных площадей в штатах Вашингтон и Орегон. В качестве исходных приняты уравнения для объема отдельного ствола v , куб. футов

$$v = 0,004009 d^{1,8354} h^{0,9574}, \quad (49)$$

где d - диаметр ствола в коре, дюймов; h - высота дерева, футов, и, исходя из (49) - для запаса всех стволов в ступени толщины

$$V_i = 0,004009 N_i d_i^{1,8354} H_i^{0,9574}. \quad (50)$$

Путем дифференцирования уравнения (50), принимая N постоянной величиной, получено уравнение текущего прироста общей производительности для ступени толщины древостоя

$$d(GV_i)/dt = N_i \left\{ \left[0,007358 d_i^{0,8354} H_i^{0,9574} (dD_i/dt) \right] + \left[0,003838 d_i^{1,8354} H_i^{-0,0426} (dN_i/dt) \right] \right\}. \quad (51)$$

Значения N для каждой пробной площади известны, как и значе-

ния D_i и H_i для каждой ступени толщины. Фактические значения текущего прироста диаметра (включая кору) dD_i/dt и текущего прироста высоты dH_i/dt получены по данным анализа модельных деревьев, как проекции текущих годовичных приростов предшествующего возрастного периода на основе подеревного расчета регрессий. После суммирования $d(GV_i)/dt$ по ступеням толщины получены для каждой пробной площади значения текущего прироста общей производительности древостоев и выведена его зависимость от возраста на высоте груди A_{bh} , класса бонитета S , в футах, и относительной полноты RD

$$\log \left[d(GV)/dA \right] = -0,2878 - 0,00511 A_{bh} + 0,2240 \log A_{bh} + 1,3743 \log S - 0,2566(1/RD); R = 0,83; SE = 0,0911. \quad (52)$$

Общая производительность древостоя к возрасту A может быть получена интегрированием (52) в интервале от 0 до A . Однако, при расчете уравнения (52) отсутствовали данные для древостоев моложе 20 лет. Поэтому формула общей производительности Y_{gv} была записана в виде

$$Y_{gv} = NV_{20} + \int_{20}^A (\text{функция прироста}) dA, \quad (53)$$

где NV_{20} - расчетный запас в возрасте 20 лет, рассчитанный по уравнению зависимости запаса от возраста, класса бонитета и относительной полноты.

Поскольку функция прироста, представленная уравнением (52) после антилогарифмирования, непосредственно не интегрируется, интеграл этой функции был представлен Р. Куртисом в виде

$$\int_{20}^A (\text{функция прироста}) dA \approx \sum_{i=21}^{A-1} d(GV_i) + \frac{d(GV_{20}) + d(GV_A)}{2}. \quad (54)$$

В возрастном диапазоне от 20 до 100 лет при полноте 1,0 отношение расчетного наличного запаса к расчетной общей производительности составило в среднем 0,7.

Изложенная процедура не требует обязательного использования данных перечетов на постоянных пробных площадях. Оценки $d(GV)/dt$ могут быть получены без постоянных пробных площадей и без данных об отпаде деревьев. В отличие от Р. Бакмана (Buckman, 1962) и Дж. Клаттера (Clutter, 1963), дав-

ших совместимые уравнения роста и прироста наличного запаса древостоя, Р. Куртис (Curtis, 1967) разработал совместимые уравнения для роста и прироста общей производительности. Основное нововведение Р. Куртиса - расчет текущего прироста общей производительности древостоя путем подстановки в уравнение, представленное производной от уравнения объема ствола, оценок текущего прироста диаметра и высоты дерева, полученных по модельным деревьям на временных пробных площадях.

Похожий прием использовал И.Я. Лиёпа (1969, 1980), рассматривая текущий прирост по запасу как полный дифференциал запаса. Приняв в качестве исходных уравнение видовой высоты

$$HF = a + kH,$$

где H - средняя высота древостоя, м, и уравнение запаса наличного древостоя V , $m^3/га$

$$V = BHF,$$

где B - площадь сечений, $m^2/га$, он получил выражение

$$V = kB(H+a/k).$$

Поскольку величина a/k для шести лесобразующих пород Прибалтики оказалась постоянной и равной 4, формула запаса имела конечный вид

$$V = kB(H+4). \quad (55)$$

Полный дифференциал формулы запаса (55), или текущий прирост по запасу наличного древостоя dV , записан как

$$dV = k \left[(H+4)dH + H \cdot dH \right], \quad (56)$$

где dH - дифференциал (или текущий прирост) средней высоты; dV - дифференциал (или текущий прирост) площади сечений; k - коэффициент полндревесности стволов, зависящий от древесной породы (Лиёпа, 1980), или, с учетом прироста последнего года,

$$dV = k \left\{ (dV) \left[H - 2(dH) + 4 \right] + (dH)H \right\} \quad (57)$$

Поскольку величина dV в древостое обычно не измеряется, она была выражена как дифференциал площади сечений

$$dV = (N \mathcal{N} D^2 / 4)' dD = \mathcal{N} ND(dD) / 4, \quad (58)$$

где dD - дифференциал (или текущий прирост) среднего диаметра, мм. После подстановки в (58) выражения для N

$$N = 4B / \pi D^2 \quad (59)$$

и с учетом прироста диаметра и площади сечений текущего года после преобразования (57). И.Я. Лиена (1980) предложил окончательную формулу текущего прироста по запасу наличного древостоя

$$dv = kV \left\{ \frac{2(dD) [N-2(dN)+4]}{10D + dD} + dN \right\} \quad (60)$$

Адекватность формулы (60) была проверена в древостоях шести лесообразующих пород Прибалтики (57-84 пробных площадей каждой породы), и среднеквадратическая ошибка составила 4,1-5,2 %. Необходимо отметить, что величина ошибки была рассчитана без учета ошибок измерения величин k , B , D , N , dD и dN в реальных древостоях, и точность определения фактического текущего прироста древостоев, по-видимому, ниже. Формула (60) была проверена в сосновых и березовых древостоях Северного Казахстана и показала удовлетворительные результаты (Лиена, Усольцев, 1985, 1986).

Поскольку измерение dN и dD предполагается проводить на текущий момент, без их осреднения за промежуток времени между перекурами, и поскольку, согласно (59), число стволов N было принято постоянной величиной, то в соответствии с выводом Р. Куртиса (Curtis, 1967), формула (60), видимо, дает значения не прироста наличного запаса, как определяет И.Я. Лиена, а прироста общей производительности древостоя.

Переход от модели объемного текущего прироста dv , см³/дерево/год, как функции возраста A , лет, и ранга дерева K , к возрастной динамике объема ствола был выполнен также на уровне отдельного дерева (Усольцев, 1979). Были рассчитаны уравнения для порослевых

$$\lg(dv) = -1,0320 + 0,02621 K - 0,009128 K \lg A + 3,2840 \lg A - 0,6280(\lg A)^2; \quad R = 0,892; \quad (61)$$

и для семенных березняков Северного Казахстана

$$\lg(dv) = -6,5959 + 0,08316 K - 0,050546 K \lg A + 7,5111 \lg A - 0,7058(\lg A)^2; \quad R = 0,860; \quad (62)$$

и затем путем интегрирования (61) и (62) по возрасту деревьев с использованием преобразования Г. Томазиуса (Thomasius,

1965) составлены для порослевых и семенных березняков отдельные таблицы объемов стволов разного ранга в возрастной динамике.

3. РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ОДНОВРЕМЕННЫХ СОВМЕСТИМЫХ МОДЕЛЕЙ В ЛЕСОВОДСТВЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Как можно заключить из раздела 2, не все совместимые системы уравнений роста и прироста древостоев являются одновременно. "Одновременность", а точнее, ее частный случай - рекурсивность, имела место лишь в тех системах, где площадь сечений рассматривалась, с одной стороны, как зависимая переменная, а с другой - входила в уравнение запаса и его прироста в качестве независимой переменной, т.е. в моделях Дж. Клаттера (Clutter, 1963) и Дж. Мозера и О. Холла (Moser, Hall, 1969). Однако рассчитывались уравнения системы, как изолированные, методом ОМНК, который, как было показано в разделе I, дает неустойчивые оценки. Рассмотрим несколько примеров более корректного расчета параметров системы уравнений роста и прироста древостоев.

3.1. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СОВМЕСТИМЫХ УРАВНЕНИЙ РОСТА И ПРИРОСТА ДРЕВОСТОЕВ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Совместимую систему уравнений Дж. Клаттера (Clutter, 1963) (25) и (29) из раздела 2.2 можно переписать в общем виде как

$$\ln V_1 = b_0 + b_1 S + b_2 / A_1 + b_3 \ln B_1 \quad (63)$$

$$\ln V_2 = b_0 + b_1 S + b_2 / A_2 + b_3 \ln B_2 \quad (64)$$

$$\ln B_2 = (A_1 / A_2) \ln B_1 + a_1 (1 - A_1 / A_2) + a_2 (1 - A_1 / A_2) S, \quad (65)$$

где V_i - запас, куб. футов/акр, в возрасте A_i ; B_i - площадь сечений, кв. футов/акр, в возрасте A_i ; A_i - возраст древостоя, лет, в момент времени i ; S - класс бонитета, футов; b_0 , b_1 , b_2 , b_3 , a_1 , a_2 - неизвестные параметры.

Чтобы рассчитать эти модели "одновременно", А. Салливан и Дж. Клаттер (Sullivan, Clutter, 1972) подставили выражение (65) для $\ln B_2$ в уравнение (64) для $\ln V_2$ и получили

$$\ln V_2 = b_0 + b_1 S + b_2 / A_2 + b_3 (A_1 / A_2) \ln V_1 + b_4 (1 - A_1 / A_2) + b_5 (1 - A_1 / A_2) S, \quad (66)$$

где $b_4 = b_3 a_1$; $b_5 = b_3 a_2$, а для (65) соответственно

$$a_1 = b_4 / b_3; \quad a_2 = b_5 / b_3.$$

Уравнение (66) представляет собой модель для проекции запаса древостоя как функции класса бонитета, начального возраста, возраста проекции и начальной площади сечений. Если $A_2 = A_1$ (т.е. длительность периода проекции равна 0), уравнение (66) приводится к модели запаса (63) и одновременно является моделью запаса для первого перечета и моделью проекции и прироста запаса для последующих наблюдений. Хотя подобные оценки для a_1 и a_2 в (65) нельзя назвать самыми эффективными, такой подход обеспечивает логическую непротиворечивость системы прогностических уравнений.

Система уравнений (63)-(66) обладает двумя примечательными особенностями. Во-первых, уравнения проекции дают расчетные значения, которые являются инвариантными для различных сочетаний длительности проекций. Так, если запас проецируется с A_1 до A_2 , а затем с A_2 до A_3 , то результат должен быть таким же, как при прямой проекции с A_1 до A_3 . Например, проекция V_3 с A_2 до A_3 равна

$$\ln V_3 = (A_2 / A_3) \ln V_2 + a_1 (1 - A_2 / A_3) + a_2 (1 - A_2 / A_3) S. \quad (67)$$

Если проекцию V_2 в (67) заменить уравнением для V_2 с A_1 до A_2 , то результатом будет уравнение

$$\ln V_3 = [(A_1 / A_2) \ln V_1 + a_1 (1 - A_1 / A_2) + a_2 (1 - A_1 / A_2) S] (A_2 / A_3) + a_1 (1 - A_2 / A_3) + a_2 (1 - A_2 / A_3) S, \quad (68)$$

которое приводится к виду

$$\ln V_3 = (A_1 / A_3) \ln V_1 + a_1 (1 - A_1 / A_3) + a_2 (1 - A_1 / A_3) S. \quad (69)$$

Но это уравнение можно было получить как прямую проекцию V_3 с A_1 до A_3 . Аналогичное свойство инвариантности обнаруживается и для проекции запаса, что легко выводится в выше приведенной последовательности.

Вторая примечательная особенность системы - использование проекции площади сечений в уравнении запаса эквивалентно использованию исходной площади сечений в уравнении для проекции запаса. Это свойство вытекает из вывода одновременной модели роста и прироста.

С использованием экспериментальных данных Дж. Клаттера (Clutter, 1963) были рассчитаны константы уравнения (66) по двум методам: ОМНК

$$\ln V_2 = 2,7600 + 0,014275 S - 21,214 / A_2 + 0,98109 (A_1 / A_2) \ln V_1 + 3,4863 (1 - A_1 / A_2) + 0,024368 (1 - A_1 / A_2) S \quad (70)$$

и методу максимального правдоподобия (Summers, 1965)

$$\ln V_2 = 2,8837 + 0,014441 S - 21,326 / A_2 + 0,95064 (A_1 / A_2) \ln V_1 + 3,2649 (1 - A_1 / A_2) + 0,025428 (1 - A_1 / A_2) S. \quad (71)$$

Уравнения запаса (70) и (71) с использованием полученных оценок коэффициентов объясняют 99,2 % варьирования запасов при первом перечете на 102 пробных площадях. Уравнения проекции запаса (70) и (71) объясняют соответственно 98,0 и 97,9% варьирования запасов при втором перечете. В табл. 2 дано сравнение результатов табулирования моделей (70) и (71).

Таблица 2

Табулированные значения запасов древостоев по (70) за вычетом запасов по (71) для класса бонитета 90 футов.

Площадь сечений	Возраст, лет							
	25	30	35	40	45	50	55	
50	-17	-21	-24	-26	-28	-30	-32	
70	-7	-10	-12	-14	-16	-17	-18	
90	6	5	4	3	3	2	1	
110	22	23	25	24	24	26	25	
130	41	44	47	49	50	52	53	

А. Салливан и Дж. Клаттер (Sullivan, Clutter, 1972) не дают ответа на вопрос, которое из уравнений (70) и (71) действительно лучше в практическом смысле и имеют ли расхождения между ними какой-то практический смысл. Оценки, полученные методом максимального правдоподобия, теоретически более обоснованы. Расхождения в данном случае (табл. 2), по-видимому, в большинстве случаев не имеют практического значения. Однако, нет гарантии, что при другом массиве экспериментальных данных эти расхождения не будут больше, и оценки по методу максимального правдоподобия можно считать более "осторожным" вариантом в сравнении с оценками по ОМНК.

С использованием соотношений

$$a_1 = b_4/b_3 = 3,4344 ; a_2 = b_5/b_3 = 0,026748$$

получено уравнение проекции площади сечений

$$\ln B_2 = (A_1/A_2) \ln B_1 + 3,4344(1 - A_1/A_2) + 0,026748(1 - A_1/A_2)S ; R^2 = 0,966, \quad (72)$$

оценки параметров которого отличаются от их значений в уравнении (29). Решение уравнений (71) и (72), показывающее возрастную динамику запасов и площадей сечений в древостоях с различной начальной площадью сечений для классов бонитета 70 и 90 футов, графически представлено на рис. 2 а, б.

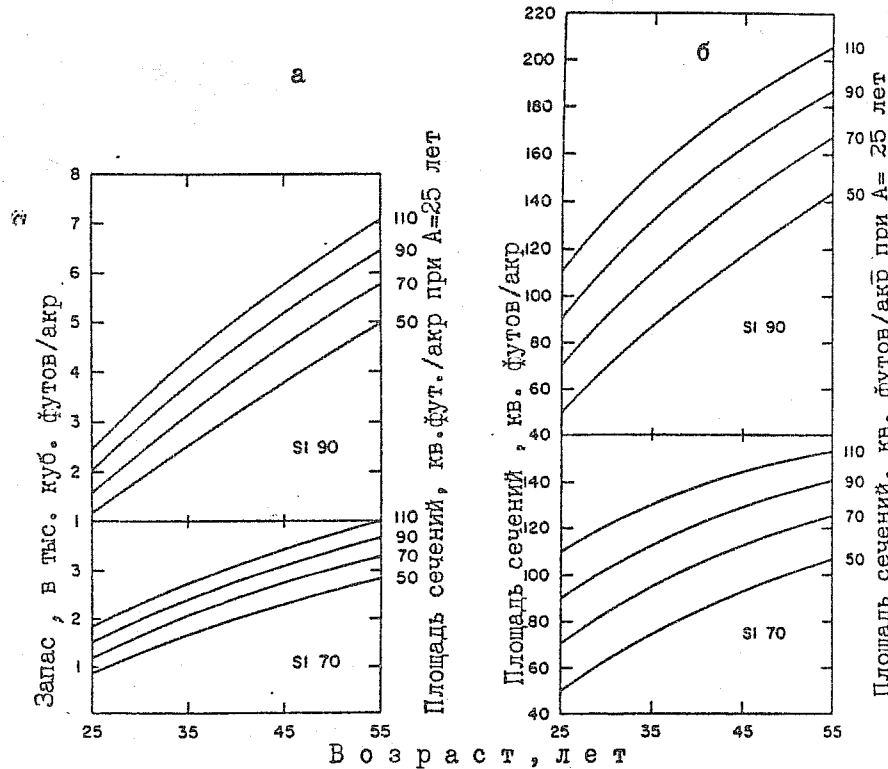


Рис. 2. Проекция запаса (а) и площади сечений (б) в различном возрасте и при разной полноте древостоев сосны ладанной для классов бонитета 70 и 90 футов (Sullivan, Clutter, 1972).

Несмотря на то, что оценки a_1 и a_2 в (71) и (72) нельзя рассматривать как эффективные и устойчивые, они, в отличие от оценок ОМНК в (29) и (30), обеспечивают совместимость не только уравнений (по определению), но и их параметров.

3.2. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ НЕСОВМЕСТИМЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ РОСТА И ПРИРОСТА МЕТОДАМИ ОМНК, ЗМНК и ЭМНК

Г. Фурнивал и Р. Уилсон (Furnival, Wilson, 1971) исходили из того, что ОМНК не является приемлемым для оценки параметров одновременных уравнений, в которых одна и та же переменная может быть и независимой, и зависимой, коэффициенты одного уравнения могут быть связаны с коэффициентами другого и остатки уравнений могут быть взаимно коррелированы. Они предложили при моделировании роста и прироста древостоев использовать методiku, обычно применяемую для расчета взаимозависимых систем уравнений в эконометрии, и последовательно рассчитали отдельные, не совместимые системы уравнений для роста и прироста сосны Веймутовой.

Экспериментальные данные были получены при исследовании роста древостоев сосны Веймутовой, проведенном совместно Лесной службой США и сельскохозяйственными опытными станциями штатов Мэн, Нью Гемпшир и Массачусетс.

Одна из гипотез, проверяемых при исследовании, касалась относительного влияния на рост древостоя его возраста и площади сечений, и были предприняты серьезные усилия, чтобы получить сбалансированное распределение пробных площадей по возрасту и площади сечений древостоев (рис. 3).

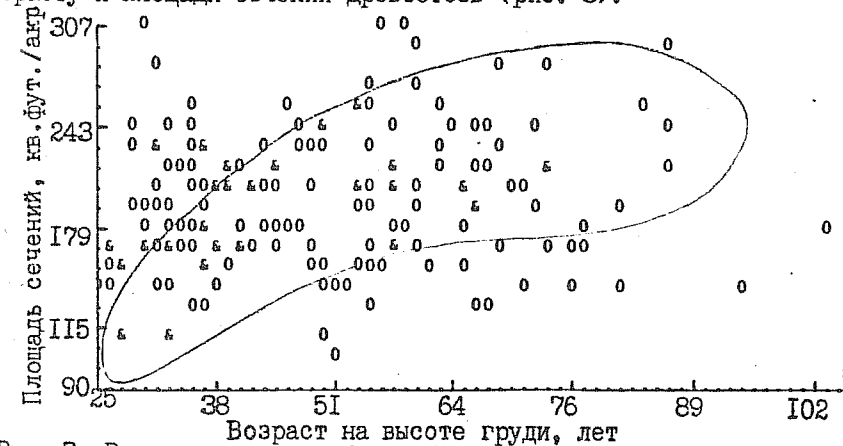


Рис. 3. Распределение пробных площадей древостоев сосны Веймутовой по площади сечений и возрасту (Furnival, Wilson, 1971).

Использованы данные перечетов на 175 пробных площадях на начало и конец трехлетнего периода. Для получения модели запаса древостоев применена следующая система уравнений:

$$\log H = b_{11} + b_{12} \log A + e_1 \quad (73)$$

$$\log N = b_{21} + b_{22} \log D + e_2 \quad (74)$$

$$\log V = b_{31} + b_{32} \log H + e_3 \quad (75)$$

$$\log F = b_{41} + b_{42} \log D + e_4 \quad (76)$$

$$\log V = \log k + \log N + 2 \log D \quad (77)$$

$$\log V = \log F + \log H + \log V, \quad (78)$$

где V - запас, куб. футов; H - средняя высота древостоя, футов; A - средний возраст на высоте груди, лет; V - площадь сечений, кв. футов/акр; D - диаметр дерева, среднего по площади сечения, дюймов; N - число деревьев на 1 акре; F - видовое число древостоя; $k = \pi/576$.

Форма уравнения (73) была принята после неудачных подгонок нескольких обычно применяемых сигмоидных кривых роста, вероятно, вследствие того, что был принят не полный возраст, а возраст на высоте груди. Зависимость (74) - это уравнение плотности древостоев Л. Рейнеке (Reineke, 1933), а (75) - уравнение полноты древостоев, примененное Т. Койлом и Ф. Шумахером (Schumacher, Coile, 1960). Уравнение (76) выражает видовое число как функцию среднего диаметра древостоя и в сочетании с уравнением (78) дает выражение запаса древостоя в терминах плотности, среднего диаметра и высоты древостоя. Простое логарифмическое уравнение для запаса древостоев С. Спурра (Spurr, 1952)

$$\log V = b_{41} + b_{42} \log N + b_{43} \log V + b_{44} \log H + e_4 \quad (79)$$

не было принято вследствие проблем с его идентификацией: система имеет четыре неизвестных коэффициента и лишь две экзогенных переменных - возраст и "фиктивную" переменную, или свободный член.

Уравнения для плотности (74) и площади сечений (75) образуют в пределах модели запаса древостоев блок истинно одновременных уравнений. Это становится очевидным, если подставить (77) в левую часть уравнения (75) и переписать (74) и (75) как

$$\log N - b_{22} \log D = b_{21} + e_2 \quad (80)$$

$$\log N + 2 \log D = b_{31} + b_{32} \log H - \log k + e_3 \quad (81)$$

Совместное и одновременное определение среднего диаметра и числа деревьев на акре имеет биологический смысл, и тем не менее, подобный подход в других моделях запаса древостоев ранее не применялся. По данным повторных обмеров пробных площадей были определены коэффициенты модели по двум методам - ОМНК и ЗМНК. Результаты приведены в табл. 3.

Г. Фурнивал и Р. Уилсон (Furnival, Wilson, 1972) вывели модель изменения запасов из модели запаса путем дифференцирования уравнений (73)-(75). Предполагалось, что возмущение в уравнении (73) является, главным образом, функцией местообитания и поэтому со временем остается, по существу, неизменным. Поэтому было записано:

$$\log N_1 - \log N_0 = b_{12}(\log A_1 - \log A_0) + r_1, \quad (82)$$

где r_1 - возмущение. Ф. Шумахер и Т. Койл (Schumacher, Coile, 1960) предложили соотношение "будущей" полноты S_1 и "прошлой" S_0 выразить как

$$\log S_1 = (A_0/A_1) \log S_0 + r \quad (83)$$

По существу, это же соотношение действительно и для плотности, и было записано

$$\log N_1 - b_{21} - b_{22} \log D_1 = A_0/A_1 (\log N_0 - b_{21} - b_{22} \log D_0) + r_2 \quad (84)$$

$$\log V_1 - b_{31} - b_{32} \log H_1 = A_0/A_1 (\log V_0 - b_{31} - b_{32} \log H_0) + r_3 \quad (85)$$

$$\text{или} \quad (\log N_1 - \log N_0 A_0/A_1) = b_{21}(1 - A_0/A_1) + b_{22}(\log D_1 - \log D_0 A_0/A_1) + r_2 \quad (86)$$

$$(\log V_1 - \log V_0 A_0/A_1) = b_{31}(1 - A_0/A_1) + b_{32}(\log H_1 - \log H_0 A_0/A_1) + r_3 \quad (87)$$

Часто при изучении динамики запаса последний определяется лишь по одному перецепу, поэтому в модели изменения запасов уравнение для видового числа

$$\log F = b_{41} + b_{42} \log D_1 + r_4 \quad (88)$$

было перенесено из модели запаса в модель изменения запасов. и кроме того, использованы равенства (77) и (78).

Поскольку "сдвинутые" значения эндогенных переменных могут рассматриваться в качестве экзогенных, очевидно, что модель изменения запасов является сверхидентифицируемой. Поэтому коэффициенты были рассчитаны тремя методами: ОМНК, ЗМНК и

Таблица 3

Оценки коэффициентов и их стандартные ошибки, полученные несколькими методами для моделей запаса и изменения запасов

Оценка	Нулевой член			Регрессионный коэффициент		
	коэффициент	стандарт. ошибка	коэф. вариаций x 100!	коэф. !ошибка	стандарт. !ошибка	коэф. вариаций x 100
	b_{11}			b_{12}		
Модель запаса						
ОМНК	0,5590	0,05499	9,84	0,7266	0,03227	4,44
2МНК	0,5590	0,05467	9,78	0,7266	0,03208	4,42
Модель изменения запасов						
ОМНК				1,015	0,03137	3,09
2МНК				1,015	0,03128	3,08
3МНК				1,009	0,03114	3,09
	b_{21}			b_{22}		
Модель запаса						
ОМНК	4,529	0,05912	1,31	-1,985	0,05726	2,88
2МНК	4,349	0,08208	1,89	-1,809	0,07979	4,41
Модель изменения запасов						
ОМНК	4,128	0,2061	4,99	-1,463	0,1472	10,06
2МНК	4,271	0,3205	9,14	-1,566	0,2803	17,90
3МНК	4,297	0,1699	3,95	-1,585	0,1208	7,63
	b_{31}			b_{32}		
Модель запаса						
ОМНК	1,821	0,1183	6,50	0,2564	0,06586	25,68
2МНК	1,932	0,1366	7,07	0,1945	0,07603	39,09
Модель изменения запасов						
ОМНК	2,086	0,2465	11,82	0,2300	0,1074	46,69
2МНК	1,429	0,7432	51,99	0,5174	0,3252	62,85
3МНК	1,506	0,3176	21,10	0,4849	0,1386	28,59
	b_{41}			b_{42}		
Модель запаса						
ОМНК	-0,1194	0,01562	13,07	-0,2484	0,01513	6,09
2МНК	-0,1958	0,02255	11,52	-0,1738	0,02192	12,61
Модель изменения запасов						
ОМНК	-0,1194	0,01562	13,07	-0,2484	0,01513	6,09
2МНК	-0,1194	0,01555	13,03	-0,2484	0,01507	6,06
3МНК	-0,1192	0,01482	12,43	-0,2486	0,01430	5,75

3МНК. Результаты включены в табл. 3.

Из табл. 3 следует, что коэффициенты, полученные по модели запаса, совершенно отличаются от коэффициентов, полученных по модели изменения запасов, и поэтому названные две модели не являются совместимыми. Видимо, эти расхождения обусловлены смещениями при оценке коэффициентов модели запаса, вызванными корреляцией между остатками и экзогенной переменной - возрастом древостоя. Как уже отмечалось, остатки в уравнении (73) модели запаса связаны с качеством местообитания, а последнее, вероятно, отрицательно коррелировано с возрастом древостоя. Такая корреляция могла быть вызвана тенденцией рубки древостоев сразу по достижении коммерческого среднего диаметра: древостои на лучших местообитаниях достигали требуемого коммерческого диаметра и вырубались в более раннем возрасте, и спелые древостои приходились на худшие местообитания.

Корреляции между возрастом, с одной стороны, и густотой и абсолютной полнотой, с другой стороны, видимо, обусловлены спецификой подбора пробных площадей в искомым нормальных древостоях: имелась тенденция отбраковывать низкогустотные и низкополнотные древостои в относительно более часто и широко представленных молодняках и в то же время брать почти все в старших классах возраста, в которых древостои малочисленны и их подбор в природе затруднен. При подборе пробных площадей стремились получить сбалансированное распределение классов абсолютной полноты в пределах каждого класса возраста, и поэтому полнота оказалась слишком высокой для молодняков и слишком низкой - для спелых древостоев (рис. 3).

В модели изменения запасов упомянутые корреляции были менее выражены и представляли меньшую проблему, чем в модели запаса. Остатки в этой модели включали возрастные изменения показателей качества местообитания, абсолютной полноты и густоты, а также другие возмущения, например, ошибки измерений.

Оценки большей части коэффициентов, выполненные различными методами, существенно различались. Особый интерес представляет расхождение оценок b_{22} в модели запаса, выполненных методами ОМНК и 2МНК. Исходя из величины оценки $b_{22} = -1,985$, можно заключить, что одновременная система уравнений (80) и (81) является, по существу, коллинеарной, и ее эффективное решение для среднего диаметра и числа стволов

Таблица 4

Расчетная дисперсионно-ковариационная матрица коэффициентов для модели изменения запасов, полученная методом ЭМНК

	b_{12}	b_{21}	b_{22}	b_{31}	b_{32}	b_{41}	b_{42}
b_{12}	0.000970	-0.000118	0.000264	-0.000010	-0.000133	0.000030	-0.000048
b_{21}	-0.000118	0.014605	-0.020313	0.015056	-0.034364	0.000003	-0.000002
b_{22}	0.000264	-0.020313	0.028883	-0.020929	0.048381	-0.000004	0.000002
b_{31}	-0.000010	0.015056	-0.020929	0.019213	-0.043876	0.000054	-0.000054
b_{32}	-0.000133	-0.034364	0.048381	-0.043876	0.100880	-0.000131	0.000138
b_{41}	0.000030	0.000003	-0.000004	0.000054	-0.000131	0.000205	-0.000210
b_{42}	-0.000048	-0.000002	-0.000002	-0.000054	0.000138	-0.000210	0.000220

Таблица 5

Расчетные стандартные ошибки прогнозируемых изменений продуктивности древостоев класса бонитета 65 и возраста 90 лет на конец прогнозируемого периода

Возрастной интервал	Показатели запаса и его составляющих							
	H	N	D	B	V			
10- 90	7,65	0,17	6,14	8,83	11,29			
20 - 90	5,95	0,59	5,54	10,24	9,53			
30 - 90	5,03	1,32	5,92	11,94	8,90			
40 - 90	4,41	2,37	6,53	13,74	8,68			
50 - 90	3,94	3,76	7,16	15,57	8,63			
60 - 90	3,54	5,46	7,77	17,40	8,61			
70 - 90	3,15	7,45	8,34	19,21	8,49			
80 - 90	2,62	9,73	8,86	21,00	7,84			

невозможно. С другой стороны, оценка b_{22} методом ЭМНК составляет -1,809, и решение может быть получено. Стандартные ошибки оценок коэффициентов в модели изменения запасов, полученные по ЭМНК, оказались неожиданно малы. В остальных случаях ошибки несколько выше ошибок для тех же коэффициентов модели запаса.

В табл. 4 приведена расчетная дисперсионно-ковариационная матрица коэффициентов для модели изменения запасов, полученная методом ЭМНК. Эти статистики важны при разработке метода

оценки систем уравнений, поскольку они могут быть использованы для расчета стандартных ошибок прогнозируемых запасов и их изменений (проекции). В табл. 5 даны ошибки прогноза показателей запаса древостоя и его составляющих для класса бонитета 65 футов. Наименьшей точностью обладают оценки площади сечений: ошибка достигает 20 %. Однако изменения высоты, густоты, среднего диаметра и запаса почти всегда предсказываются с ошибкой менее 10 %.

3.3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СОВМЕСТИМЫХ МОДЕЛЕЙ РОСТА И ПРИРОСТА ДРЕВОСТОЕВ МЕТОДОМ ЭМНК

Дальнейший вклад в развитие методики оценки параметров одновременных совместимых уравнений роста и прироста древостоев был сделан П. Мэрфи и Г. Стернице (Murphy, Sternitzke, 1979), а также П. Мэрфи и Р. Белтцом (Murphy, Beltz, 1981), которые использовали прием, известный как ограниченный трехшаговый метод наименьших квадратов (ОЭМНК) для расчета одновременных моделей роста и прироста для сосен ладанной и ежовой. В обеих названных моделях ОЭМНК был применен корректно, но расчеты были выполнены для структурной, а не приведенной формы уравнений системы.

Как было показано выше, инструментарий, развитый при моделировании и имитации экономических процессов с использованием систем взаимозависимых математических моделей, может быть успешно применен к процессам биологического роста. Кроме того, этот инструментарий дает как точечные, так и интервальные прогнозы. Б. Бордерс и Р. Бейли (Borders, Bailey, 1986) предложили использовать этот инструментарий для построения системы одновременных совместимых уравнений роста и прироста древостоев, подобных уравнениям Дж. Клаттера (Clutter, 1963), и сравнить результаты с оценками по ОМНК.

В ходе постановки густотных опытов в плантациях сосны Эллиота в университете штата Джорджия был составлен обширный банк данных. Эти данные были получены на 898 постоянных пробных площадях, где проведено до шести повторных переучетов. Возрастной диапазон - с 2 до 25 лет, густота посадки - от 100 до 1800 деревьев на акре. Экспериментом охвачен географический регион от юга Виргинии и севера Флориды до запада Алабамы.

На первом этапе Б. Бордерс и Р. Бейли (Borders, Bailey, 1986) рассчитали несколько прогностических моделей для запаса и площади сечений древостоев по ОМНК. По доле объясненной изменчивости (R^2) и анализу остатков были отобраны лучшие модели

$$\ln V = b_0 + b_1 \ln H + b_2 \ln B + e_V, \quad (89)$$

$$\ln B = a_0 + a_1 \ln H + a_2 \ln N_0 + e_B, \quad (90)$$

где H - верхняя высота древостоя, футов; N_0 - начальная густота, деревьев/акр; e_V и e_B - неизвестные стохастические составляющие ошибки для запаса и площади сечений.

Рассматривая зависимости (89) и (90), как уравнения запаса древостоев, Б. Бордерс и Р. Бейли для вывода совместимых уравнений прироста использовали дифференциально-интегральное соотношение и взяли производные от (89) и (90) по возрасту A :

$$(dV/dA)/V = (b_1/H)(dH/dA) + (b_2/B)(dB/dA), \quad (91)$$

$$(dB/dA)/B = (a_1/H)(dH/dA), \quad (92)$$

из которых следует, что относительная скорость изменения личного запаса зависит от относительной скорости изменения верхней высоты и площади сечений, тогда как относительная скорость изменения площади сечений зависит только от относительной скорости изменения верхней высоты. Поэтому данная система уравнений должна включать также компонент прогноза и проекции верхней высоты. По экспериментальным данным было рассчитано несколько моделей зависимости верхней высоты от возраста и с учетом статистик подгонки и простоты была выбрана известная зависимость логарифма высоты от возраста (Schumacher, 1939)

$$\ln H = c_0 + c_1(1/A), \quad (93)$$

где c_0 и c_1 - неизвестные параметры. Первая производная от нее по возрасту имела вид

$$(dH/dA)/H = -c_1(1/A^2). \quad (94)$$

Выражения (91), (92) и (94) представляли собой относительно простые, сепарабельные линейные дифференциальные уравнения. Их интегрирование в интервале возрастов от A_1 до A_2 дало следующие уравнения роста, или проекции:

$$\ln V_2 = \ln V_1 + b_1(\ln H_2 - \ln H_1) + b_2(\ln B_2 - \ln B_1) + e_V^* \quad (95)$$

$$\ln B_2 = \ln B_1 + a_1(\ln H_2 - \ln H_1) + e_B^* \quad (96)$$

$$\ln H_2 = \ln H_1 + c_1(1/A_2 - 1/A_1), \quad (97)$$

где V_i - запас, куб. футов/акр, в возрасте A_i ; B_i - площадь сечений, кв. футов/акр, в возрасте A_i ; H_i - верхняя высота, футов, в возрасте A_i ; A_i - возраст, лет, в момент i ; $i = 1, 2$. Вследствие наличия взаимосвязи между классом бонитета и верхней высотой в систему была включена модель проекции высоты древостоя. Уравнение (97) косвенным образом определяет систему бонитетных кривых, позволяющую дать совместимые оценки величин V_1, B_1, V_2, B_2 и H_2 , используя данные H_1, A_1, A_2 и N_0 и соответственно уравнения (89), (90), (95), (96) и (97).

Все эти модели можно было рассчитать изолированно, используя ОМНК; однако, как и в моделях Г. Фурнивала и Р. Уилсона (Furnival, Wilson, 1971), результирующие модели прогноза и проекции в таком случае не были бы совместимыми. К моделям динамики запаса и площади сечений можно было бы применить приемы А. Салливана и Дж. Клаттера (Sullivan, Clutter, 1972) или Г. Буркхарта и П. Спринца (Burkhardt, Sprinz, 1984) с минимизацией функции потерь. Однако результирующие оценки параметров в этом случае не имели бы желательных статистических свойств устойчивости и эффективности. Кроме того, этими приемами не предусмотрен вывод доверительных интервалов для результирующих прогнозов роста и прироста древостоев.

Б. Бордерс и Р. Бейли (Borders, Bailey, 1986) рассматривали систему одновременных (взаимозависимых) уравнений, подобных (89), (90), (95), (96) и (97) с k эндогенными переменными и m предопределенными переменными, первое уравнение которой имело вид

$$Y_1 = Y_2 b_{12} + \dots + Y_k b_{1k} + X_1 c_{11} + \dots + X_m c_{1m} + e_1, \quad (98)$$

где Y_i - эндогенные переменные; X_j - предопределенные переменные; b_{1j} - неизвестные параметры для эндогенных переменных; c_{1j} - неизвестные параметры для предопределенных переменных; e_1 - стохастическая составляющая ошибки; $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, m$.

Полная система одновременных уравнений, частично представленная уравнением (98), может быть записана в матричной форме

$$bY = \Gamma X + U = 0$$

где b - $k \times k$ матрица коэффициентов для совместно определенных эндогенных переменных; Γ - $m \times k$ матрица коэф-

коэффициентов c_{ij} для predetermined переменных; Y - $n \times k$ матрица n наблюдений по k эндогенным переменным; X - $n \times m$ матрица n наблюдений по m predetermined переменным; U - $n \times k$ матрица возмущений (ошибок) для n наблюдений по k уравнениям. После деления на b и преобразования получена приведенная форма

$$Y = X\Omega + V, \tag{99}$$

где $\Omega = b^{-1} \Gamma$ - $m \times k$ матрица коэффициентов приведенной формы; $V = b^{-1} U$ - $n \times k$ матрица возмущений приведенной формы. Теперь для оценки параметров приведенной формы можно использовать ОМНК, поскольку все переменные в правой части уравнения являются predetermined и поэтому не коррелированы с составляющими ошибок.

Хотя для идентификации системы уравнений разработаны критерии, нелинейность переменных и параметров, а также межрегрессионные ограничения существенно усложняют процесс идентификации. С использованием метода Дж. Келли (Kelley, 1975) для идентификации моделей при наличии ограничений в пределах уравнения и между уравнениями установлено, что система моделей роста и прироста (89), (90), (95), (96) и (97) является сверхидентифицируемой.

При спецификации структурной формы взаимозависимых систем уравнений лесные биометристы-модельеры находятся в лучшем положении, чем эконометристы, поскольку процессы роста организмов хорошо представлены некоторыми математическими функциями. Кроме того, дифференциально-интегральное соотношение, из которого выведены проективные уравнения (95), (96) и (97) включает некоторые ограничения параметров внутри уравнения и между уравнениями, что способствует идентификации модели. В общем, лесные модельеры могут построить системы моделей роста и прироста, основанные на относительно стабильной основополагающей теории роста, по крайней мере, имеется большое число эмпирических и теоретических работ, пригодных для использования при разработке систем моделей роста.

Как уже отмечалось выше, метод ЗМНК отличается от 2МНК тем, что объясняет одномоментные корреляции между составляющими стохастической ошибки уравнений системы. Это осуществляется путем использования процедуры генерализованного (обоб-

щенного) метода наименьших квадратов. Метод включает три шага:

- шаг 1 - применить 2МНК для освобождения переменных в правой части уравнения от их эндогенности;
- шаг 2 - дать устойчивую оценку матрицы одномоментной ковариации, используя остатки 2МНК;
- шаг 3 - получить одновременные оценки параметров генерализованным методом наименьших квадратов, используя оценку матрицы одномоментной ковариации, полученную на шаге 2.

Уравнения (89), (90), (95), (96) и (97) были рассчитаны вначале отдельно, по генерализованному методу наименьших квадратов. Затем те же модели рассчитаны в виде системы по неограниченному трехшаговому методу наименьших квадратов (НЗМНК), используя процедуру SYSREG программы SAS (система статистического анализа). Термин "неограниченный" означает, что в структурную модель были введены только нулевые ограничения. Оценки параметров по методам НЗМНК и ОМНК оказались близкими (табл. 6, 7, 8) и дали биологически обусловленные тренды.

В этом примере не было выявлено различий между ОМНК и НЗМНК. Однако, это не всегда имеет место. Если коэффициенты R^2 в регрессиях первого шага высокие, то предсказанные значения обычно близки к фактическим, и это означает, что фактические значения не имеют высокой корреляции со стохастическими ошибками в исходных структурных уравнениях, поскольку они хорошо предсказываются predetermined переменными (Gujarati, 1978). При наличии сверхидентифицируемой системы взаимозависимых линейных уравнений можно использовать 2МНК, поскольку в случае, если структурная форма специфицирована корректно, этот метод даст устойчивые и эффективные оценки для выборок большого объема. Кроме того, если модель специфицирована корректно, то при наличии одномоментных корреляций в структуре ошибок вместо 2МНК нужно использовать НЗМНК. В этом случае НЗМНК имеет те же преимущества перед ОМНК, что и 2МНК, и кроме того, НЗМНК будет давать более эффективные оценки параметров в сравнении с 2МНК.

До этого момента при анализе полной системы уравнений применялись нулевые ограничения (т.е. ограничения путем исключения) и ограничения в пределах уравнения. Однако, при вы-

Таблица 6

Оценки параметров уравнения Ф.Шумахера для проекции высоты древостоя (97) с использованием ОМНК, НЭМНК и ОЭМНК

Метод	Параметр c_1 (оценка и стандартное отклонение)
ОМНК	-4,682(0,0303)
НЭМНК	-4,681(0,0299)
ОЭМНК	-5,021(0,0268)

Таблица 7

Оценки параметров для уравнений прогноза (89) и проекции (95) запаса древостоев с использованием методов ОМНК, НЭМНК и ОЭМНК.

Уравнение	Метод	Оценки параметров и их стандартные отклонения		
		b_0	b_1	b_2
(89)	ОМНК	-0,0748(0,0139)	0,762(0,00788)	1,056(0,00422)
	НЭМНК	-0,185(0,0115)	0,838(0,00525)	1,012(0,00264)
	ОЭМНК	-0,0994(0,00999)	0,825(0,00507)	1,005(0,00250)
(95)	ОМНК	-	0,796(0,0163)	1,058(0,0100)
	НЭМНК	-	0,802(0,0141)	1,065(0,00953)
	ОЭМНК	-	0,825(0,00507)	1,005(0,00250)

Таблица 8

Оценки параметров для уравнений прогноза (90) и проекции (96) площади сечений древостоев по методам ОМНК, НЭМНК и ОЭМНК

Уравнение	Метод	Оценки параметров и их стандартные отклонения		
		a_0	a_1	a_2
(90)	ОМНК	-6,665(0,0525)	1,654(0,00652)	0,764(0,00868)
	НЭМНК	-6,627(0,0500)	1,661(0,00682)	0,762(0,00805)
	ОЭМНК	-6,611(0,0500)	1,624(0,00668)	0,766(0,00803)
(96)	ОМНК	-	1,507(0,0111)	-
	НЭМНК	-	1,409(0,0110)	-
	ОЭМНК	-	1,624(0,00668)	-

воде моделей проекции из моделей прогноза вводятся некоторые ограничения параметров между уравнениями. Зависимости (89), (90), (95), (96) и (97) включали следующие межрегрессионные ограничения:

- а) величины b_1 и b_2 в уравнениях (89) и (95) должны быть одни и те же,
- б) значение a_1 в уравнениях (90) и (96) должно быть одно и то же.

Эти ограничения обусловлены обсуждаемым выше дифференциально-интегральным соотношением, и при их соблюдении обеспечивается совместимость модели. При расчете системы моделей на основе 2МНК и 3МНК эти межрегрессионные ограничения просто вводятся в исходные структурные уравнения и их параметры рассчитываются с использованием процедуры SYSREQ по программе SAS. Ограничения параметров были введены в систему линейных уравнений и рассчитана совместимая система моделей роста и прироста с использованием для этого всей исходной эмпирической информации. Результирующие оценки параметров были близки к оценкам по ОМНК (табл. 6,7,8), однако ОЭМНК дает меньшие стандартные ошибки (т.е. более эффективные оценки). Это является прямым следствием устранения одномоментных корреляций в структуре ошибок системы уравнений (табл. 9). Таким

Таблица 9

Одномоментные корреляции в структуре ошибок системы уравнений роста и прироста сосны Эллиота

Номер уравнения	Номер уравнения				
	(89)	(90)	(95)	(96)	(97)
(89)	1,0	0,20	-0,64	-0,20	-0,24
(90)		1,0	0,03	-0,92	0,08
(95)			1,0	0,02	0,49
(96)				1,0	-0,13
(97)					1,0

образом, путем использования теоретически корректных процедур подгонки учтены основополагающие взаимосвязи между уравнениями.

Для получения расчетных значений эндогенных переменных во взаимозависимой системе линейных уравнений необходимы оценки параметров приведенной формы. В приведенной форме все эндогенные переменные прогнозируются как функции одних только predetermined переменных. Так, при наличии устойчивой оценки Ω в (99), скажем, $\hat{\Omega}$, можно получить прогнозируемые точечные оценки всех эндогенных переменных на основе predetermined переменных. Однако, возникает вопрос, как оценить коэффициенты приведенной формы уравнения? Их можно получить непосредственной подгонкой по всем predetermined переменным и на основе ОМНК получить $\hat{\Omega}$. Однако, при непосредствен-

ном выводе коэффициентов приведенной формы путем последовательной подстановки на параметры приведенной формы налагаются некоторые ограничения, если система уравнений является сверхидентифицируемой. Рассмотрим снова общую приведенную форму модели (99)

$$Y = \Omega X + V.$$

Более эффективная, чем $\hat{\Omega}$, оценка, скажем, $\tilde{\Omega}$, относится к приведенной форме, выведенной методом ЗМК, и может быть записана

$$\tilde{\Omega} = \hat{b}^{-1} \hat{\Gamma},$$

где \hat{b} - устойчивая ЗМК-оценка параметров эндогенных переменных; $\hat{\Gamma}$ - устойчивая ЗМК-оценка параметров предопределенных переменных. Математическое доказательство и интуитивное объяснение, почему $\tilde{\Omega}$ более эффективна, чем $\hat{\Omega}$, приводятся в работе Т. Фомби с соавт. (Fomby et al., 1984).

Если представляет интерес прогноз эндогенных переменных на какой-то период времени t

$$Y_t = (Y_{t1}, Y_{t2}, \dots, Y_{tk})$$

по задаваемым значениям предопределенных переменных на момент времени t

$$X_t = (X_{t1}, X_{t2}, \dots, X_{tm}),$$

можно просто подставить X_t в модель приведенной формы и получить

$$Y_t = X_t \tilde{\Omega}, \quad (100)$$

где \hat{Y}_t - $1 \times k$ вектор-строка предсказанных эндогенных переменных. Ошибка прогноза определяется выражением

$$E_t = Y_t - \hat{Y}_t.$$

Устойчивая оценка матрицы асимптотической ковариации для ошибок прогноза определяется (Fomby et al., 1984):

$$\hat{T} = F' \hat{A} \hat{\Psi} \hat{A}' F + \hat{\Theta}, \quad (101)$$

где

$$\hat{A} = (\hat{b}^{-1})' \otimes (\tilde{\Omega}, I_N),$$

где \otimes означает прямое произведение, или произведение Кронекера; \hat{b} - ЗМК-оценки коэффициентов эндогенных переменных;

$F' = I_G \otimes X_t$; $\hat{\Psi}$ - оцененная дисперсионно-ковариационная матрица ЗМК-оценок, упорядоченная согласно:

$$\sqrt{n} \text{vec} \begin{bmatrix} \hat{b} - b \\ \hat{\Gamma} - \Gamma \end{bmatrix} \underset{\text{asy}}{\sim} N(0, \Psi),$$

где n - объем выборки; $N(0, \Psi)$ - многомерное нормальное распределение со средним вектором 0 и дисперсионно-ковариационной матрицей Ψ ;

$\hat{\Theta} = (\hat{b}^{-1})' \hat{\Sigma} (\hat{b}^{-1})$, где $\hat{\Sigma}$ - ЗМК-оценка дисперсионно-ковариационной матрицы одномоментно коррелированных возмущений, которая может быть получена по остаткам ЗМК-подгонки;

I_N - матрица тождества N -го порядка.

Как было показано Т. Фомби с соавт. (Fomby et al., 1984), первую часть выражения для T

$$F' \hat{A} \hat{\Psi} \hat{A}' F$$

можно считать дисперсией прогнозируемой величины \hat{Y}_t относительно ее среднего значения $(X_t \Omega)$, а вторую часть - $\hat{\Theta}$ - дисперсией истинного будущего значения Y_t относительно его среднего. Квадратные корни диагональных элементов матрицы \hat{T} являются оцененными стандартными ошибками вектор-строки \hat{Y}_t и, таким образом, могут быть использованы при построении доверительных интервалов для прогнозируемых эндогенных переменных.

Процедуру можно проиллюстрировать на примере прогнозирования и построения доверительных интервалов для совместимой системы моделей запаса и прироста древостоев сосны Эллиота:

$$\ln B_1 = a_0 + a_1 \ln H_1 + a_2 \ln N_0$$

$$\ln V_1 = b_0 + b_1 \ln H_1 + b_2 \ln B_1$$

$$\ln H_2 = \ln H_1 + c_1(1/A_2 - 1/A_1)$$

$$\ln B_2 = \ln B_1 + a_1(\ln H_2 - \ln H_1)$$

$$\ln V_2 = \ln V_1 + b_1(\ln H_2 - \ln H_1) + b_2(\ln B_2 - \ln B_1).$$

Для этой системы моделей имеются $k = 5$ эндогенных переменных и $m = 5$ предопределенных переменных (включая свободный член).

Матрица b коэффициентов эндогенных переменных для

$$Y = (\ln B_1, \ln V_1, \ln H_2, \ln B_2, \ln V_2)$$

представлена

$$\begin{bmatrix} 1 & -b_2 & 0 & -1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и матрица Γ для

$$x = (1, H_1, \ln N_0, 1/A_2, 1/A_1)$$

представлена

$$\begin{bmatrix} -a_0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & -b_1 & -1 & a_1 & b_1 \\ -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

где $b_0, b_1, b_2, a_0, a_1, a_2, c_1$ - ЭМНК-оценки параметров совокупности, приведенные в табл. 6, 7, 8.

Если нужно рассчитать запас и площадь сечений древостоя в возрасте 15 и 20 лет и верхнюю высоту в возрасте 20 лет по известным верхней высоте в возрасте 15 лет, равной 45 футов, и начальной густоте посадки 450 деревьев на акре, тогда x_t вектор-строка будет равна

$$x_t = [1, \ln(45), \ln(450), 1/20, 1/15]$$

Вектор предсказанных эндогенных переменных рассчитан по уравнению (97), где использованы выведенные коэффициенты приведенной формы:

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} -6,611 & -6,744 & 0 & -6,611 & -6,744 \\ 1,624 & 2,457 & 1,0 & 1,624 & 2,457 \\ 0,766 & 0,770 & 0 & 0,766 & 0,770 \\ 0 & 0 & -5,021 & -8,152 & -12,335 \\ 0 & 0 & 5,021 & 8,152 & 12,335 \end{bmatrix},$$

чтобы получить

$$\hat{Y}_t = (4,252; 7,314; 3,890; 4,388; 7,520).$$

После экспонирования имеем: $V_1 = 70,23$ кв. футов/акр;

$V_1 = 1501,1$ куб. футов/акр; $H_2 = 48,93$ футов;

$V_2 = 80,46$ кв. футов/акр; $V_2 = 1843,7$ куб. футов/акр.

Более детальный анализ матрицы $\tilde{\Omega}$ выявил некоторые примечательные взаимосвязи. Первая из пяти колонок представляет оценки параметров приведенной формы по

$$x_t = (1, \ln N_1, \ln N_0, 1/A_2, 1/A_1)$$

для эндогенных переменных соответственно V_1, V_1, H_2, V_2 и V_2 . Приведенные формы уравнений для прогнозирования площади сечений V_1 и проекции высоты древостоя H_2 тождественны структурным формам. Это прямой результат того, что упомянутые две эндогенные переменные являются функциями только предопределенных переменных. Сравнение колонок первой и четвертой в матрице $\tilde{\Omega}$ показывает, что эти коэффициенты приведенной формы образуют совместимую модель прироста и роста площади сечений. Колонки

вторая и пятая образуют совместимое уравнение прироста и роста общего запаса. Таким образом, спецификация совместимой системы моделей прироста и роста в структурной форме определяет также совместимую систему моделей в приведенной форме, с помощью которых выполняются прогнозы.

Асимптотическая оценка дисперсионно-ковариационной матрицы ошибок прогноза рассчитана с использованием уравнения (101) и было получено:

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 0,175 & 0,194 & -0,0216 & 0,0336 & 0,0152 \\ & 0,254 & -0,0182 & 0,0592 & 0,0444 \\ & & 0,0478 & 0,0983 & 0,136 \\ & & & 0,313 & 0,395 \\ & & & & 0,513 \end{bmatrix}$$

После извлечения квадратного корня и экспонирования диагональных элементов матрицы \hat{T} получены стандартные ошибки (SE)

для \hat{Y}_t :

- SE для $V_1 = 1,52$ кв. футов/акр,
- SE для $V_1 = 1,65$ куб. футов/акр,
- SE для $H_2 = 1,24$ фута,
- SE для $V_2 = 1,75$ кв. футов/акр,
- SE для $V_2 = 2,05$ куб. футов/акр.

Эти значения использованы далее при расчете доверительных интервалов для получения соответствующих предельных значений, исходя из нормального распределения. Все расчеты выполнены с использованием процедуры MATRIX программы SAS.

Качество подгонки этой системы оценивалось путем прогнозирования данных, по которым рассчитывались коэффициенты. Хотя очевидно, что подобный тест не является независимым, он использован для сопоставления моделей, рассчитанных методами ОМНК и ОЭМНК. Выполнены две проверки качества подгонки.

Вначале предполагалось, что имеющаяся для прогнозов и проекций информации минимальна. Это соответствует данным о начальной густоте посадки, текущем возрасте, текущей верхней высоте и возрасте проекции. Когда имеются данные только по этим предопределенным переменным, прогнозы с использованием коэффициентов приведенной формы выполняются путем подгонки по ОЭМНК. Если каждая модель рассчитывается отдельно по методу ОМНК, полученная информация применяется для прогнозирования площади сечений в исходном возрасте и верхней высоты в возрасте проекции. Затем эти предсказанные показатели используются

в качестве регрессоров в уравнениях для проекции площади сечений, прогноза запаса и проекции запаса. По существу, экспериментальные данные прогнозировались как по методу ОМНК с предсказанными регрессорами, так и по ОЭМНК для приведенной формы. Для всех эндогенных переменных оценки приведенной формы по ОЭМНК дали результаты, сопоставимые с оценками по ОМНК.

Далее предполагалось, что все регрессоры заранее известны. Так, каждая эндогенная переменная левой части уравнений предсказывалась с использованием фактических данных о всех предопределенных переменных и эндогенных переменных правой части уравнений. В этом случае корректным является сравнение оценок уравнений, рассчитанных методом ОМНК с использованием фактических регрессоров, с оценками структурной формы уравнений, рассчитанных методом ОЭМНК с использованием фактических регрессоров. Все пять эндогенных переменных левой части уравнений были предсказаны одинаково хорошо по обеим системам.

Оказалось, что модель проекции верхней высоты (рассчитанная как методом ОМНК, так и ОЭМНК по приведенной форме) занижает предсказанные значения относительно фактических на 3-4 фута и объясняет лишь около 85 % изменчивости экспериментальных данных. Поскольку верхняя высота "ведет" всю систему моделей прироста, прогноз и проекция площади сечений, а также прогноз и проекция запасов занижают предсказанные значения относительно фактических как по методу ОМНК с использованием предсказанных регрессоров, так и по ОЭМНК с приведенной формой. Бонитетные кривые высота-возраст Ф.Шумахера являются слишком "плоскими", и большая часть предсказанных значений прироста высоты приходится на возраст, меньший 15 лет (рис.4). Это можно отнести к природе функциональной формы модели и к самому массиву данных. Большинство данных, использованных для расчета этой модели, варьируют в возрасте от 2 до 17 лет с 2-3 повторными перечетами и не обеспечивают адекватной оценки асимптотических параметров. Однако, модель была принята Б. Бордерсом и Р. Бейли (Borders, Bailey, 1986) не столько для оперативного использования, сколько для разработки и иллюстрации метода расчета уравнений.

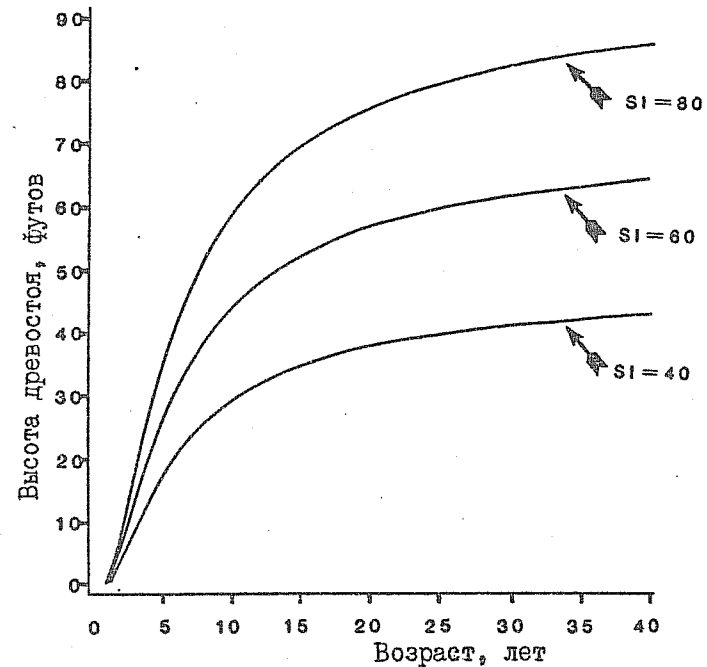


Рис. 4. Бонитетные кривые согласно модели Ф. Шумахера (97) для классов бонитета SI = 40, 60 и 80 футов (Borders, Bailey, 1986).

3.4. ПРОДВИНУТЫЕ ВАРИАНТЫ ЛИНЕЙНОГО МЕТОДА ЭМНК ДЛЯ РАСЧЕТА ОДНОВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

В предыдущих разделах были рассмотрены три метода расчета системы связанных уравнений - метод псевдонесвязанных регрессий (МПНР) (Zellner, 1962; Gallant, 1975), ЭМНК и ЭМНК. Из них МПНР учитывает только одновременную (одномоментную) корреляцию, ЭМНК учитывает только смещение на "одновременность" и ЭМНК, объединяя в себе ЭМНК и МПНР, учитывает как смещение на "одновременность", так и одномоментную корреляцию. Применение названных трех методов предполагает, что ошибки отдельных уравнений независимы и идентично распределены.

Если последнее условие не выполняется, оценки коэффициентов уравнений остаются статистически состоятельными (устойчивыми) и по мере увеличения объема выборки приближаются к истинным значениям. Однако оценки дисперсий коэффициентов явля-

ются при этом смещенными и несостоятельными, и доверительные интервалы для коэффициентов и для среднего предсказанного значения зависимой переменной являются неточными (LeMay, 1990).

3.4.1. Метод минимальной функции потерь

В качестве одной из альтернатив названных трех методов была применена оценка параметров системы связанных уравнений сбегая и объема ствола с минимизацией функции потерь (Reed, 1982; Reed, Green, 1984; Byrne, Reed, 1986). Х. Буркхарт и П. Спринц (Burkhart, Sprinz, 1984) рассчитали систему уравнений (65) и (66) А. Салливана и Дж. Клаттера (Sullivan, Clutter, 1972) с помощью процедуры, которая учитывала ограничение

$$a_1 = b_4/b_3 ; a_2 = b_5/b_3 \quad (\text{см. с. 36})$$

и минимизировала следующую функцию потерь

$$F = \frac{\sum (V_i - \hat{V}_i)^2}{\hat{\sigma}_V^2} + \frac{\sum (B_i - \hat{B}_i)^2}{\hat{\sigma}_B^2},$$

где V_i и \hat{V}_i - фактические и предсказанные запасы древостоя в момент времени i ; B_i и \hat{B}_i - фактические и предсказанные площади сечений в момент i ; $\hat{\sigma}_V^2$ - средняя квадратическая ошибка при расчете параметров модели (66) методом ОМНК; $\hat{\sigma}_B^2$ - средняя квадратическая ошибка при расчете параметров модели (65) методом ОМНК. Однако, результирующие оценки не были устойчивыми и эффективными и зависели от произвольно выбранной функции потерь квадратической ошибки. П. Ван-Дейзен (Van Deusen, 1988) проанализировал метод минимальной функции потерь в связи с методом МПНР, однако при этом не учитывалось смещение на "одновременность", и для минимизации функции потерь необходим нелинейный подход.

3.4.2. Метод вспомогательной переменной

Б. Бордерс (Borders, 1989) предложил модифицированный метод ЗМНК, при котором на первом шаге используются вспомогательные, или "инструментальные", переменные, а на третьем шаге - генерализованный метод наименьших квадратов (линейный или нелинейный), с учетом преимуществ последовательного характера системы уравнений роста и прироста. В качестве исходной он взял модифицированную систему уравнений Дж. Клаттера (Clutter, 1963):

$$\left. \begin{aligned} \ln V_1 &= b_0 + b_1 S + b_2/A_1 + b_3 \ln B_1 \\ \ln B_2 &= A_1/A_2 \ln B_1 + a_0(1-A_1/A_2) + a_1 S(1-A_1/A_2) \\ \ln V_2 &= \ln V_1 + b_2(1/A_2 - 1/A_1) + b_3(\ln B_2 - \ln B_1) \end{aligned} \right\} (102)$$

где обозначения те же, что в уравнениях (63)-(65).

На первый взгляд, это простая рекурсивная система, для оценки параметров которой можно применить ОМНК. Однако, если последующий анализ показывает, что между компонентами ошибки имеются межрегрессионные корреляции, ни метод ОМНК, ни модификация его А. Цельнером, не дадут самых эффективных оценок параметров. Это происходит потому, что эндогенные переменные правой части уравнений могут коррелировать с компонентами ошибки эндогенных переменных левой части, и, таким образом, эта система не является рекурсивной по определению. Чтобы исключить смещение наименьших квадратов и учесть межрегрессионные корреляции, можно использовать ЗМНК. Однако метод ЗМНК, как составная часть метода ЗМНК, использует все предопределенные переменные в регрессиях первого шага, чтобы устранить "эндогенность" эндогенных переменных правой части и тем самым устранить смещение наименьших квадратов (Pindyck, Rubinfeld, 1981; Dutta, 1975). Поэтому, даже если форма каждого уравнения известна, регрессией первого шага она игнорируется и тем самым допускается возможность существенных смещений на этом первом шаге за счет спецификации модели.

Лесные биометристы обычно работают с моделями, по своей природе рекурсивными, подобными, например, (102) (наличие последовательных взаимосвязей между некоторыми уравнениями), но тем не менее, обнаруживающими межрегрессионные корреляции компонентов ошибки, хотя имеются и исключения из этого правила (см. раздел 4). Для такого типа рекурсивных регрессионных систем Б. Бордерс (Borders, 1989) предложил трехшаговую процедуру оценки параметров:

- шаг 1 - оценить коэффициенты каждого уравнения с использованием двухшагового метода вспомогательной переменной (но не традиционного ЗМНК, см. с. 49);
- шаг 2 - рассчитать матрицу межрегрессионной ковариации с использованием остатков по шагу 1;

шаг 3 - применить генерализованный метод наименьших квадратов с учетом коррелированных компонентов ошибки.

Первый шаг выполняется с использованием преимуществ последовательных взаимосвязей внутри системы, т.е. уравнения, не имеющие эндогенных переменных в правой части, рассчитываются в первую очередь с использованием ОМНК. Далее, уравнения с эндогенными переменными в правой части рассчитываются по ОМНК с использованием предсказанных значений эндогенных переменных правой части взамен их фактических значений. Это так называемый метод вспомогательной переменной, служащий той же цели, что и ранее обсуждавшийся метод 2МНК: устранение "эндогенности" эндогенных переменных правой части (Fox, 1968). Шаги 2 и 3 представляют прямое применение стандартного приема, использованного А. Цельнером (Zellner, 1962). Такой метод подгонки обладает тем преимуществом, что в регрессиях первого шага применяются формы модели, основанные на нашем понимании основополагающих теоретических положений, а также учитываются межрегрессионные корреляции, и в итоге получаем оценки, которые являются теоретически предпочтительными.

Очевидно, поскольку первый шаг этой трехшаговой процедуры подгонки представляет собой просто метод вспомогательной переменной, результирующие оценки параметров являются устойчивыми (Fomby et al., 1984). Цель, которую преследовал Б. Бордерс (Borders, 1989) при использовании метода вспомогательной переменной - заменить переменные правой части, которые могут коррелировать с компонентами ошибки, вспомогательными переменными ("инструментами"), которые тесно коррелируют с фактическими переменными правой части, но не коррелируют с компонентами ошибки.

Понимая, что метод 2МНК, определяющий регрессии первого шага включением всех предопределенных переменных системы, является сам по себе просто методом вспомогательной переменной, можно полагать, что "инструменты", использованные на первом шаге изложенной процедуры подгонки, будут иметь преимущество перед "инструментами" 2МНК, если они более тесно коррелированы с исходными переменными правой части. Предсказанные эндогенные переменные правой части, полученные методом, описанным на первом шаге, должны быть более тесно коррелированы с их фактическими значениями, поскольку смещение за счет спе-

цификации модели должно быть меньше, чем в выше изложенной процедуре 2МНК. Суть в том, что поскольку лесные модельеры обычно уверены в правильной спецификации формы модели и системы уравнений часто последовательны во времени, то для получения "инструментов" следует использовать эти модельные формы.

Для оценки коэффициентов в системе (I02) Б. Бордерсом (Borders, 1989) использованы данные повторных перечетов непорезанных плантаций сосны Эллиота в Южной Африке, о которых ранее упоминали Л. Пиенар и Б. Шивер (Pienaar, Shiver, 1986). Подгонка была осуществлена с использованием процедуры SYSNLIN программы SAS (SAS..., 1984). Оценки параметров системы (I02) согласуются с имеющимися данными о ростовых взаимосвязях в плантациях сосны и обеспечивают совместимость между уравнениями прогноза и проекции запаса и уравнением проекции площади сечений (табл. I0). В этой системе имела место довольно высо-

Таблица I0

Оценки параметров для системы (I02), полученные методом вспомогательной переменной

Параметр !	Оценка	! Стандартная ошибка
b_0	3,562	0,363
b_1	0,007	0,004
b_2	-9,939	0,293
b_3	0,921	0,027
a_0	6,433	1,062
a_1	-0,010	0,014 *)

*) a_1 не значима в этом массиве данных вследствие ограниченного диапазона классов бонитета.

кая межрегрессионная корреляция между компонентами ошибки (табл. II).

Таблица II

Матрица межрегрессионной корреляции остатков системы (I02)

	$\ln V_1$	$\ln V_2$	$\ln B_2$
$\ln V_1$	1	0,760	-0,035
$\ln V_2$		1	0,449
$\ln B_2$			1

Изложенную процедуру подгонки Б. Бордерс (Borders, 1989) применил далее к большой системе, включающей как линейные, так и нелинейные уравнения:

$$\begin{aligned}
 H_2 &= N_1 \left[\frac{(1-e^{-\gamma_1 A_2})}{(1-e^{-\gamma_1 A_1})} \right]^{\gamma_2}, \\
 N_2 &= \left\{ N_1^{c_1} + c_2 \left[(A_2/100)^{c_3} - (A_1/100)^{c_3} \right] \right\}^{1/c_1}, \\
 \ln V_1 &= b_0 + b_1(1/A_1) + b_2 \ln N_1 + b_3 \ln H_1 + b_4 \ln N_1/A_1 + \\
 &\quad + b_5 \ln H_1/A_1 + b_6(N_t/N_A)(A_t/A_1), \\
 \ln V_1 &= a_0 + a_1 \ln N_1 + a_2 \ln H_1 + a_3 \ln B_1, \\
 \ln B_2 &= \ln B_1 + b_1(1/A_2 - 1/A_1) + b_2(\ln N_2 - \ln N_1) + \\
 &\quad + b_3(\ln H_2 - \ln H_1) + b_4(\ln N_2/A_2 - \ln N_1/A_1) + b_5(\ln H_2/A_2 - \\
 &\quad - \ln H_1/A_1) + b_6(N_t/N_A) \left[(A_t/A_2) - (A_t/A_1) \right], \\
 \ln V_2 &= \ln V_1 + a_1(\ln N_2 - \ln N_1) + a_2(\ln H_2 - \ln H_1) + a_3(\ln B_2 - \ln B_1),
 \end{aligned}
 \tag{103}$$

где H_i - верхняя высота древостоя в момент времени i , м;
 N_i - число деревьев на i га в момент i ; N_t - число деревьев на i га, удаленных при прореживании в возрасте A_t ; N_A - число деревьев на i га, оставшихся после прореживании в возрасте A_t ; A_t - возраст последнего прореживании, лет.

Когда система уравнений нелинейна по параметрам, для получения их оценок применяются методы итерационного поиска. Пока нет полной теории подгонки нелинейных систем связанных уравнений. Тем не менее, подход А. Целльнера (Zellner, 1962), модифицированный применительно к таким системам А. Галлантом (Gallant, 1975), показал, что он дает строго устойчивые оценки, которые при наличии межрегрессионных корреляций являются асимптотически эффективными.

Система (103) была рассчитана по большому массиву данных из 604 перечетов в прореженных и непрореженных древостоях сосны Эллиота с использованием выше изложенной процедуры. Как видно из табл. 12, все оценки параметров логически приемлемы и обеспечивают совместимость уравнений. Как и система (102), расширенная система (103) также обнаружила сравнительно тесные корреляции между компонентами ошибки (табл. 13), и интуитивно это имеет смысл: если, например, для данного древостоя завышается прогноз площади сечений, то следует ожи-

Оценки параметров для системы уравнений (103), полученные методом вспомогательной переменной

Параметр	Оценка	Стандартная ошибка
γ_1	0,062	0,001
γ_2	1,113	0,016
c_1	-2,029	0,081
c_2	0,00002	$1,14 \times 10^{-5}$
c_3	3,235	0,089
b_0	-0,651	0,143
b_1	-25,09	1,105
b_2	0,225	0,010
b_3	0,979	0,035
b_4	3,066	0,120
b_5	0,864	0,231
b_6	-0,138	0,007
b_7	2,296	0,197
a_0	-1,233	0,063
a_1	0,019	0,008
a_2	1,190	0,022
a_3	0,865	0,016

Таблица 13

Матрица межрегрессионной корреляции остатков системы (103)

	$\ln B_1$	$\ln B_2$	$\ln V_1$	$\ln V_2$	H_2	N_2
$\ln B_1$	1	0,66	0,90	0,59	0,19*	-0,10*
$\ln B_2$		1	0,61	0,91	0,43	0,38
$\ln V_1$			1	0,67	0,21*	-0,10*
$\ln V_2$				1	0,54	0,35
H_2					1	0,27
N_2						1

* Все корреляции достоверно отличаются от нуля на уровне 0,01, за исключением отмеченных *).

дать и завышения запаса. Оценки параметров сошлись после 3 итераций на шаге 1 (ОМНК) процедуры подгонки и после 17 итераций на шаге 3 (модификация А. Галланта, 1975).

Б. Бордерс (Borders, 1989) полагает, что оценки параметров, полученные по описанной выше процедуре, будут устойчивыми и асимптотически эффективными для нелинейных систем уравнений. Это происходит потому, что на первом шаге использованы "инструменты", тесно коррелированные с фактическими эндогенными переменными правой части уравнений, после чего была применена нелинейная модификация А. Галланта, которая, как уже отмечалось, дает строго устойчивые и асимптотически эффективные оценки при наличии межрегрессионных корреляций. Для оценки параметров таких нелинейных систем можно использовать нелинейные двух- или трехшаговые методы наименьших квадратов. Однако, правильный выбор "инструментов" является решающим при получении эффективных оценок, и известно, что такой выбор сделать очень трудно и он зависит от характера нелинейности системы. Следовательно, представленная Б. Бордерсом (Borders, 1989) процедура подгонки является теоретически обоснованной альтернативой нелинейным методам 2МНК и 3МНК для выборок большого объема.

В целом, Б. Бордерсом рассмотрены смещения на "одновременность" и одномоментная корреляция, однако статистические особенности метода подгонки (устойчивость, эффективность, несмещенность оценок) им не обсуждались. Как при методе минимальной функции потерь ошибки, так и при методе вспомогательной переменной, предполагалось, что ошибки отдельных уравнений независимы и одинаково распределены.

3.4.3. Многошаговый метод наименьших квадратов (ММНК)

При построении моделей роста и прироста древостоев по данным переучетов на постоянных пробных площадях не было выявлено гетеросцедастичной структуры ошибок, т.е. структуры ошибок, имеющей дисперсию, существенно зависящую от другой случайной величины. Предыдущие работы показали, что автокорреляция, как результат повторяющихся измерений на одной и той же единице выборочного учета (пробной площади) с течением времени, не влияет отрицательно на оценки параметров методом наименьших квадратов во всех практических приложениях (Elston, Grizzle, 1962; Swindel, 1968; Sullivan, 1969; Sullivan, Clutter, 1972; Borders, Bailey, 1986).

Тем не менее, в эконометрической литературе представлены альтернативные МПНР, 2МНК и 3МНК методы подгонки коэффициентов систем уравнений, в которых элементы ошибок отдельных уравнений сериально (последовательно) коррелированы. Р. Парксом (Parks, 1967) описан линейный метод наименьших квадратов для подгонки уравнений системы, которая была одномоментно коррелированной, но не одновременной (псевдонесвязанная регрессия) и в которой элементы ошибок отдельных уравнений сериально коррелированы. Он ограничил структуру ошибок автокорреляцией первого порядка в пределах уравнения и предложил подход для автокорреляции второго порядка. При этом сериальная корреляция элементов ошибок между уравнениями не учитывалась.

Г. Гилки и П. Шмидт (Guilkey, Schmidt, 1973) разработали метод подгонки, подобный методу Р. Паркса, но в их модель была включена сериальная корреляция элементов ошибки между уравнениями. Для одновременных систем уравнений, в которых элементы ошибок отдельных уравнений сериально коррелированы, Р. Фэйр (Fair, 1984) описал нелинейную процедуру наименьших квадратов для отдельных уравнений, которая дает устойчивые оценки коэффициентов и их дисперсий. Расширение методики на одновременную подгонку всех уравнений для учета одномоментной корреляции (системная подгонка) им не дано. Обсуждение нескольких определителей (отдельных уравнений и их системы) для одновременных уравнений с сериально коррелированными элементами ошибок приведено в работе М. Уикенса (Wickens, 1969). Он также установил, что метод 3МНК можно модифицировать для сериально коррелированных элементов ошибок так, чтобы он давал устойчивые и эффективные оценки коэффициентов в случае, если можно получить устойчивую оценку ковариационной матрицы ошибок системы. Однако, он не дал метода получения этой устойчивой оценки ковариационной матрицы ошибок.

Для системы уравнений с гетеросцедастичными элементами ошибок в отдельных уравнениях было разработано несколько методов подгонки. Для систем псевдонесвязанных регрессий с гетеросцедастичными элементами ошибок в отдельных уравнениях В. Сривастава и Д. Гайлс (Srivastava, Giles, 1987) описали линейный метод наименьших квадратов для случаев, когда выбо-

рочные данные можно сгруппировать так, чтобы каждая выборка отдельной группы имела одну и ту же дисперсию. Видимо, методы, предназначенные для отдельного уравнения, такие как взвешенный метод наименьших квадратов или метод Х. Уайта (White, 1980), могут быть применены и к системам уравнений. Дж. Крэг (Cragg, 1983) описал метод для отдельных уравнений с гетеросцедастичностью неизвестного вида. Он показал, что его процедуру можно применить к одновременным, одномоментно коррелированным системам уравнений, однако не привел примеров такого применения.

Р. Ингл (Engle, 1982) и Дж. Крэг (Cragg, 1982) разработали метод оценки коэффициентов отдельных уравнений с сериальной корреляцией и гетеросцедастичностью. В качестве альтернативы Т. Грегори (Gregoire, 1987) предложил исходное преобразование для исключения и автокорреляции, и гетеросцедастичности. Тем не менее, методов для одновременных, одномоментно коррелированных систем уравнений с сериально коррелированными и гетеросцедастичными элементами ошибок не разработано.

В. Лемэй (LeMay, 1988, 1990) предложил многошаговый метод наименьших квадратов (ММНК) для подгонки одновременной, одномоментно коррелированной системы линейных уравнений с обобщенной структурой ошибок, в которой элементы ошибок отдельных уравнений не являются независимыми и одинаково распределенными. ММНК представляет собой линейный метод подгонки системы уравнений, разработанный на основе метода Р. Паркса (Parks, 1967) для сериально коррелированной системы псевдонесвязанных регрессий и генерализованного метода наименьших квадратов, предложенного А. Цельнером (Zellner, 1962). Метод дает устойчивые оценки ковариационной матрицы ошибок для системы уравнений в виде произведения матриц преобразования для каждого уравнения и оценки матрицы одномоментной ковариации для системы. Поэтому метод является гибким в том смысле, что может быть применен к системам с гетеросцедастичными элементами ошибок или с сериально коррелированными элементами ошибок, или с теми и другими, с целью нахождения устойчивых оценок коэффициентов и их дисперсий при условии описания структуры ошибок. Оценки коэффициентов являются асимптотически нормально распределенными. Использован линейный подход, так что получаемое решение является единствен-

ным; при нелинейном подходе, например, при оценке по максимальному правдоподобию, результирующее решение может давать скорее локальный, чем глобальный, минимум. Кроме того, ММНК является линейным методом, который менее чувствителен к спецификации ошибки и к наличию мультиколлинеарности (взаимной корреляции независимых переменных), чем метод максимального правдоподобия (Summers, 1965).

Ограничения ММНК: уравнения системы должны быть линейными и объемы выборок должны быть равными для всех уравнений. Кроме того, для расчета доверительных интервалов и проверки гипотез требуются выборки большого объема, поскольку оценки коэффициентов и их дисперсий являются устойчивыми, но смещенными.

В. Лемэй (LeMay, 1988, 1990) дает описание применения ММНК для специфицированных структур ошибок, включающих гетеросцедастичность элементов ошибок каждого уравнения системы, автокорреляцию первого порядка элементов ошибок каждого уравнения и автокорреляцию первого порядка вместе с гетеросцедастичностью. Предусмотрено тестирование на гетеросцедастичность и сериальную корреляцию. С математическими основами применения ММНК можно ознакомиться в работах В. Лемэя (LeMay, 1988, 1990). Здесь же мы ограничимся показом метода на конкретном примере - системе уравнений для оценки объема ствола дерева (LeMay, 1990).

Для оценки общего объема ствола разработано множество методов и моделей. Обычно используется традиционная зависимость объема ствола от диаметра на высоте груди в коре и высоты дерева. Однако, измерение высоты дерева является процедурой трудоемкой и нетехнологичной. В качестве альтернативы высота может быть оценена по ее связи с диаметром, и тогда получаем систему двух связанных уравнений:

$$h = a_{11} + a_{12} d + a_{13} d^2 + e_1, \quad (104)$$

$$v = a_{21} + a_{22}(d^2 h) + e_2, \quad (105)$$

где h - высота дерева, м; d - диаметр на высоте груди, см; v - объем ствола в коре, м³. Данные секционного обмера 100 стволов сосны скрученной были получены Лесной службой Альберты (Канада).

На первом шаге процедуры устраняется смещение на "одновременность" как следствие того, что переменная высоты дере-

ва имеется и в правой, и в левой части системы. Поскольку объема ствола нет в правой части обоих уравнений, расчет высоты дерева выполнен по уравнению только первого шага:

$$h_{1s} = 0,584579 + 1,071239 a - 0,009644 a^2. \quad (I06)$$

Поскольку все экзогенные переменные системы находятся в уравнении высот, рассчитанное уравнение первого шага (I06) представляет собой обыкновенную линейную множественную регрессию. Поскольку в правой части уравнения высот нет эндогенных переменных, уравнение высот второго шага то же самое, что уравнение первого шага (I06). Для объема ствола рассчитано уравнение второго шага:

$$v_{2s} = 0,010012 + 3,57027 \cdot 10^{-5} a^2 h_{1s}, \quad (I07)$$

где h_{1s} - значение высоты, полученное расчетом уравнения первого шага (I06) по задаваемой величине a . Для выбора матриц преобразования по каждому уравнению выполнен анализ остатков уравнения второго шага (I07). Поскольку данные не повторяются во времени, остатки на сериальную корреляцию в уравнениях не анализировались. Для проверки на гетеросцедастичность элементов ошибок построены графики остатков в зависимости от расчетных значений эндогенных переменных. Для уравнения высот какой-либо взаимосвязи между названными показателями на графике не было выявлено, тогда как для уравнения объемов некоторая связь была.

Далее был рассчитан статистический критерий на гетеросцедастичность (СКГ) (Goldfeld, Quandt, 1965) в следующей последовательности. Вначале выполнена сортировка модельных деревьев в возрастающем порядке по величине объема, рассчитанного по (I07). Затем были рассчитаны отдельные регрессии для первых 40 и последних 40 модельных деревьев и определена величина СКГ по соотношению

$$СКГ = MSE_2 / MSE_1, \quad (I08)$$

где MSE_2 - среднеквадратическая ошибка регрессии, рассчитанной по последним 40 деревьям; MSE_1 - то же, по первым 40 деревьям. При нулевой гипотезе на однородность дисперсий, СКГ представлен как F-распределение с 38 степенями свободы как для числителя, так и для знаменателя. Для уравнения объемов второго шага СКГ составил 20,8507 и был значим на уровне 0,05. Поэтому элементы ошибок уравнения объемов были гетеросцедастичными.

Поскольку элементы ошибок уравнения высот были независимы и одинаково распределены, то матрица преобразования представляла собой просто единичную матрицу (матрицу тождеств). Для уравнения объемов матрица преобразования получена путем оценки дисперсий каждого элемента ошибки ($\hat{\sigma}_{2m}^2$) уравнения объемов по следующей зависимости:

$$\hat{\sigma}_{2m}^2 = \exp(-5,302447 + 1,832138 \ln v_{2s}), \quad (I09)$$

где $\hat{\sigma}_{2m}^2$ - дисперсия ошибки для m -й выборки и для второго уравнения системы; v_{2s} - расчетный объем ствола по уравнению (I07). Было проверено несколько моделей для оценки дисперсий элементов ошибки, и была выбрана модель (I09), поскольку квадраты остатков были связаны с расчетным значением объема, и график остатков от подгонки преобразованного уравнения объемов второго шага не выявил их гетеросцедастичности. Кроме того, величина СКГ для преобразованного уравнения была близка к величине СКГ, означающей гомосцедастичные дисперсии элементов ошибки.

Преобразованные уравнения второго шага имели вид:

$$h_{2s} = 0,584579 + 1,071239 a - 0,009644 a^2, \quad (I10)$$

$$v_{2s}(wt) = 0,001838(wt) + 3,68969 \cdot 10^{-5} a^2 h_{1s}(wt), \quad (I11)$$

где (wt) - обратная величина расчетного стандартного отклонения элемента ошибки $(wt) = 1/\hat{\sigma}_{2m}$; $v_{2s}(wt)$ - общий объем ствола, умноженный на вес (wt) ; $a^2 h_{1s}(wt)$ - квадрат диаметра, умноженный на расчетную высоту по уравнению первого шага, умноженную на (wt) . Затем были оценены одномоментные ковариации по остаткам преобразованных уравнений второго шага. Результирующая оценка матрицы одномоментных ковариаций имела вид:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 6,6046 & 4,2958 \\ 4,2958 & 3,9005 \end{bmatrix}, \quad (I12)$$

где диагональные элементы - это дисперсии для уравнений, соответственно, высот и взвешенных объемов, и ковариация между элементами ошибки уравнения высот и уравнения взвешенных объемов представлена внедиагональными элементами. Ковариационная матрица расчетных ошибок для системы уравнений была представлена произведением матрицы одномоментных ковариаций и матрицы взвешивания:

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 6,6046 w_1 w_1' & 4,2958 w_1 w_2' \\ 4,2958 w_2 w_1' & 3,9005 w_2 w_2' \end{bmatrix} \quad (113)$$

Поскольку уравнение высот имело независимые и одинаково распределенные элементы ошибок, w_1 было равно единичной матрице размера $n \times n$. Матрица w_2 - это $n \times n$ -матрица с диагональными элементами, равными корню квадратному из расчетных дисперсий элементов ошибки для уравнения объемов второго шага ($\hat{\sigma}_{2m}$), и внедиагональными элементами, равными нулю. Отсюда, упрощенная ковариационная матрица ошибок имела вид:

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 6,6046 I_n & 4,2958 w_2 \\ 4,2958 w_2' & 3,9005 w_2 w_2' \end{bmatrix} \quad (114)$$

Окончательный вид уравнений, рассчитанных по ММНК, был:

$$h_{\text{ММНК}} = -0,387283 + 1,105945 d - 0,009356 d^2, \quad (115)$$

$$v_{\text{ММНК}} = 0,000102 + 3,718304 \cdot 10^{-5} d^2 h_{1s}. \quad (116)$$

Система уравнений (104) и (105) была также рассчитана по ЗМНК. В табл. 14 приведены расчетные коэффициенты и соответствующие дисперсии в сопоставлении по ЗМНК и ММНК. Коэффициенты, рассчитанные по двум методам, были аналогичны, за исключением свободных членов уравнений a_{11} и a_{21} . Это вполне естественно, поскольку ЗМНК дает устойчивые оценки коэффициентов, даже если элементы ошибок отдельных уравнений не являются независимыми и одинаково распределенными. Дисперсии коэффициентов уравнения высот, подогнанных по двум методам, также аналогичны. Этого тоже следовало ожидать, поскольку элементы ошибок уравнения высот были независимыми и одинаково распределенными. Дисперсии коэффициентов уравнения объемов, рассчитанные по ЗМНК, были выше дисперсий, рассчитанных по ММНК.

Метод ММНК представляет модификацию ЗМНК для более обобщенной структуры ошибок. Преимущество ММНК перед ЗМНК состоит в том, что оценки коэффициентов и соответствующих дисперсий являются устойчивыми и оценки коэффициентов асимптотически нормально распределены. Для выборок большого объема рассчитываются доверительные интервалы и проверяются гипотезы.

Поскольку ЗМНК является расширением методов ЗМНК и МПНР, то и ММНК можно рассматривать как расширение тех же двух методов. Если система уравнений не является одновременной, первый шаг ММНК можно исключить и рассматривать ММНК как расши-

Таблица 14

Сопоставление оценок коэффициентов и их дисперсий уравнений (104) и (105) по методам ЗМНК и ММНК

Коэффициент	ЗМНК		ММНК	
	оценка	дисперсия	оценка	дисперсия
a_{11}	-0,032804	1,742595	-0,387283	1,871902
a_{12}	1,123254	0,011856	1,105945	0,011313
a_{13}	-0,010619	$4,947844 \cdot 10^{-6}$	-0,009356	$3,683143 \cdot 10^{-6}$
a_{21}	0,009934	$1,335041 \cdot 10^{-4}$	0,000102	$3,724693 \cdot 10^{-6}$
a_{22}	$3,570422 \cdot 10^{-4}$	$4,455235 \cdot 10^{-13}$	$3,718304 \cdot 10^{-5}$	$3,942582 \cdot 10^{-13}$

рение метода МПНР при обобщенной структуре ошибки. При серийно коррелированных элементах ошибки ММНК эквивалентен методу Р. Паркса (Parks, 1967). Если одномоментная корреляция не существенна, то последний шаг ММНК можно исключить и рассматривать ММНК как расширение метода ЗМНК при обобщенной структуре ошибки. В этом случае при серийно коррелированных элементах ошибки метод подгонки ММНК является линейным, аналогичным нелинейному методу подгонки отдельного уравнения, использованному Р. Фэйром (Fair, 1984). Подобная интерпретация метода ММНК как расширения метода ЗМНК полезна, когда лесоводственная проблема моделируется несколькими уравнениями или когда имеется большой массив экспериментальных данных.

Преимущество метода ММНК перед ЗМНК с точки зрения устойчивости оценок дисперсий зависит от степени, в которой элементы ошибок отдельных уравнений не являются независимыми и одинаково распределенными. Дж. Крег (Cragg, 1983) установил, что если гетеросцедастичность является явно выраженной, то возможны эффективные оценки даже при очень малых выборках. Отсюда следует, что для одновременных уравнений использование ММНК наиболее эффективно в случаях, когда элементы ошибок не являются независимыми и одинаково распределенными (LeMay, 1990).

4. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ МЕЖРЕГРЕССИОННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ОШИБОК

Излагаемый ниже пример практического приложения системы связанных уравнений относится скорее к лесоэксплуатационной,

нежели лесоводственной сфере исследований. В этой связи он обладает некоторыми специфическими особенностями, одним из проявлений которых, возможно, является отсутствие межрегрессионной корреляции ошибок, чего не было в изложенных выше лесоводственных приложениях. Хотя вследствие этого процедура оценки уравнений упрощается, в нашем примере важно было показать не столько методическую новизну самой оценки, сколько оригинальность приложения системы связанных уравнений к специфичной области, выполненного Р. Аматейсом с соавт. (Amateis et al., 1984).

Взвешивание автомобильной пачки хлыстов, практикуемое на лесозаготовительных и деревообрабатывающих предприятиях, является более объективным, точным и дешевым в сравнении с другими способами учета. Когда деревья стали заготавливать хлыстами, появилась потребность определять объемы различных сортиментов по данным взвешивания пачки хлыстов и оценивать их стоимость.

Соотношения между объемом и массой древесины исследуются давно. Ф. Шумахер (Schumacher, 1946) рассчитывал значения переводного коэффициента как отношения плотного и складочного объемов, а также объема в досковых футах, к их массе. Он установил, что переводной коэффициент изменяется обратно пропорционально количеству бревен в весовой единице. К. Роу и С. Гуттенберг (Row, Guttenberg, 1966) вывели стереометрическую формулу зависимости объема пиловочного бревна от его массы и применили ее при определении объема автомобильной пачки бревен, включив в формулу количество бревен в этой пачке. Позднее С. Гуттенберг и К. Фейсик (Guttenberg, Fasick, 1973) и К. Фейсик с соавт. (Fasick et al., 1974) ввели метод регрессионных уравнений для прогнозирования общего запаса в досковых футах, в единицах объема фанерного кряжа и маломерных пиловочных бревен по числу деревьев в пачке и ее нетто-массе. Они отмечали наличие проблемы аддитивности оценок, когда общий объем замеренной древесины в пачке не был равен суммарной величине объемов сортиментов, полученных по уравнениям.

Р. Аматейс с соавт. (Amateis et al., 1984) предложили альтернативный подход с использованием систем связанных регрессионных уравнений. Для проверки эффективности рекурсивной и взаимозависимой систем уравнений при оценке объемов сорти-

ментов по данным общего взвешивания для каждой рассчитывались уравнения и сопоставлялись с результатами К. Фейсика с соавт. (Fasick et al., 1974). В рекурсивной системе объем каждого отдельного сортимента оценивался по одному, последовательно, начиная с сортимента с наиболее строгими требованиями качества. Во взаимозависимой системе объемы отдельных сортиментов рассматривались как имеющие случайную встречаемость, без определенного иерархического порядка. Р. Аматейс с соавт. (Amateis et al., 1984) оценивали три сортимента: фанерный кряж, балансы и сортимент для рубки на щепу и распиловки. Объединенные запасы, такие как общий пиловочник (фанерный кряж плюс сортимент для рубки и пиления) и общий запас (фанерный кряж плюс сортимент для рубки и пиления плюс балансы) получали сложением запасов соответствующих отдельных сортиментов. К. Фейсик с соавт. (Fasick et al., 1974) непосредственно оценивали два объединенных запаса и запас фанерного кряжа, а запасы сортиментов для рубки и пиления и балансов получали путем вычитания.

Экспериментальные данные для моделирования были получены по 113 случайно отобранным пачкам хлыстов, поступающих на склад одной из компаний в Ньюберри, Южная Каролина (США). Для каждой пробной пачки хлыстов записывали нетто-массу и число хлыстов. Замеряли диаметры в коре у торца и вершины каждого хлыста, а также через каждые 4,3 фута по его длине. Диаметры без коры рассчитывали регрессионным способом. Каждый отрезок длиной 8,6 фута по стандарту размеров и качества относили к тому или иному сортименту. По формуле Смалиана рассчитан для каждого 4,3-футового отрезка объем без коры, в кубических футах. Затем объемы отдельных сортиментов каждой пачки суммировали.

В качестве переменных в регрессионные уравнения вводили показатели, наиболее технологичные для замера в условиях лесосклада и наиболее коррелированные с общим объемом пачки (TOT), общим объемом пиловочника (STV) и объемом фанерного кряжа (VEN). К. Фейсик с соавт. (Fasick et al., 1974) для оценки TOT, STV и VEN вывели следующие "наилучшие" уравнения (отобранные по наибольшему значению R^2 и наименьшим значениям статистик PRESS и CP):

$$TOT = b_1 + b_2 W, \quad (II7)$$

$$STV = b_3 + b_4 W + b_5 N^2, \quad (II8)$$

$$VEN = b_6 + b_7 W + b_8 N + b_9(W/N) + b_{10}(NW)^{1/2}, \quad (II9)$$

где W - нетто-масса пачки; N - число хлыстов в пачке.

Объем сортимента для рубки и пиления (CNS) получен вычитанием уравнения (II9) из (II8), а объем балансов (PULP) - вычитанием уравнения (II8) из (II7).

Аналогичным образом была сформирована "наилучшая" система рекурсивных уравнений из тех же экзогенных переменных (W , N , N^2 , W/N и $(NW)^{1/2}$), только в этом случае зависимая переменная предыдущего уравнения была включена в последующее в качестве независимой переменной. Уравнения имели следующий окончательный вид:

$$VEN = b_6 + b_7 W + b_8 N + b_9(W/N) + b_{10}(NW)^{1/2}, \quad (I20)$$

$$CNS = c_1 + c_2(VEN) + c_3 W + c_4 N^2 + c_5(W/N) + c_6(NW)^{1/2}, \quad (I21)$$

$$PULP = c_7 + c_8(VEN) + c_9(CNS) + c_{10}W + c_{11}N^2. \quad (I22)$$

В уравнение (I21) введена эндогенная переменная VEN ; а в уравнения (I22) - VEN и CNS . Объединенные запасы $STV(VEN+CNS)$ и $TOT(VEN+CNS+PULP)$ получены соответствующим сложением.

Подобным образом была специфицирована взаимозависимая система уравнений из экзогенных переменных W , N , N^2 , W/N , $(NW)^{1/2}$ и $(W^2N)^{1/3}$ и эндогенных переменных VEN , CNS и $PULP$. Получены структурные уравнения:

$$VEN = d_1 + d_2(CNS) + d_3(PULP) + d_4 W + d_5 N + d_6(W/N) + d_7(NW)^{1/2}, \quad (I23)$$

$$CNS = d_8 + d_9(VEN) + d_{10}(PULP) + d_{11}W + d_{12}N^2 + d_{13}(W/N) + d_{14}(NW)^{1/2}, \quad (I24)$$

$$PULP = d_{15} + d_{16}(VEN) + d_{17}(CNS) + d_{18}W + d_{19}N^2 + d_{20}(W^2N)^{1/3}. \quad (I25)$$

Таким образом, уравнения (I23) и (I24) имели те же экзогенные переменные, которые вошли в уравнения (I20) и (I21), а уравнение (I25) имело те же экзогенные переменные, что вошли в уравнение (I22), за исключением переменной $(W^2N)^{1/3}$, которая введена в (I25) для выполнения порядковых и ранговых условий идентифицируемости системы.

Система уравнений (I20)-(I22) является рекурсивной, только исходя из предварительно обсуждавшихся статистических критериев. Подобное применение рекурсивных уравнений к проблеме

оценки объемов сортиментов не предполагает выявления причинных взаимосвязей, как это принято в эконометрическом анализе. Аналогичным образом, в противоположность эконометрическому анализу ввод дополнительной переменной во взаимозависимую систему с целью поддержания ее идентифицируемости является допустимым, поскольку целью являлся, по существу, прогноз, а не структурный анализ.

Поскольку уравнения (II7)-(II9), (I20)-(I22) и (I23)-(I25) были специфицированы, исходя только из статистических соображений, их относительные преимущества оценивались с использованием статистических нормативов надежности. Массив экспериментальных данных в количестве 113 наблюдений был случайным отбором разделен на две совокупности и по одним и тем же 57 наблюдениям были рассчитаны три прогностические системы: (II7)-(II9) и (I20)-(I22) - с использованием ОМНК, а (I23)-(I25) - на основе ЭМНК. Затем были рассчитаны аналитически выведенные уравнения приведенной формы для (I23)-(I25), чтобы выразить эндогенные переменные как функцию только экзогенных переменных. Остальные 56 наблюдений использованы для верификации трех наборов уравнений. Критериями сопоставления результатов были:

1. Средний остаток. Это среднее отклонение прогнозируемых значений от фактических, обеспечивающее оценку смещения модели.
2. Средний квадратический остаток. Эта статистика предусматривает оценку среднего квадратического расхождения между прогнозируемыми и фактическими значениями.
3. Сумма рангов. Ранжировались прогнозируемые значения по каждой модели. Модели, имеющей предсказанное значение, наиболее близкое к фактическому, присваивался ранг единица по каждому наблюдению. Остальные две модели получали по этому наблюдению нулевой ранг. Затем ранги суммировались. "Наилучшей" считалась модель с наибольшей суммой рангов.

Сопоставление результатов (табл. I5) показало, что в среднем все три системы лишь незначительно различаются по своим прогностическим возможностям. Однако, проверка по сумме рангов свидетельствует, что при оценке всех сортиментов

Таблица I5

Сравнение систем уравнений (II7)-(II9), (I20)-(I22) и (I23)-(I25) по трем статистическим критериям (остаток рас- считан как предсказанное значение минус фактическое и выра- жен в кубических футах)

Критерий сопоставления и сортимент	Система уравнений		
	(II7)-(II9)	(I20)-(I22)	(I23)-(I25)
<u>Средний остаток</u>			
Фанерный кряж ^{*)}	6,27	6,27	5,62
Сортимент для рубки и пиления	-5,26	-6,12	-5,59
Балансы	-8,06	-9,13	-10,56
Общий пиловочник	1,01	0,13	0,03
Общий запас	-7,05	-8,98	-10,53
<u>Среднеквадратический остаток</u>			
Фанерный кряж ^{*)}	2603,0	2603,0	2646,3
Сортимент для рубки и пиления	2081,7	1765,6	1832,9
Балансы	1674,7	1606,5	1683,3
Общий пиловочник	2502,7	2411,5	2405,2
Общий запас	2035,5	2141,2	2199,0
<u>Сумма рангов предсказанных значений</u>			
Фанерный кряж ^{*)}	26	26	30
Сортимент для рубки и пиления	22	12	22
Балансы	20	14	22
Общий пиловочник	23	10	23
Общий запас	24	15	17

*) Уравнения для объема фанерного кряжа в системах (II7)-(II9) и (I20)-(I22) были одни и те же, что выразилось в идентичных значениях критериев. Проверка нулевой гипотезы на отдельных коэффициентах каждого уравнения показала, что все они досто- верны на уровне значимости 0,05.

взаимозависимая система дала лучшие результаты в сравнении с двумя другими. Видимо, мало что потеряно в точности при оценке общего пиловочника и общего запаса путем сложения за- пасов сортиментов в системе (I23)-(I25) в сравнении с их прямой оценкой по системе уравнений (II7)-(II9).

Рекурсивная система уравнений была пересчитана по объе-

диненному массиву данных, и была проверена дисперсионно-кова- риационная матрица остатков с целью определить, достоверно ли отличаются от нуля недиагональные элементы матрицы, по адаптированному критерию Т. Андерсона (Anderson, 1958):

$$\left[n - \frac{(2p + 11)}{6} \right] \ln W \approx \chi_{f, \alpha}^2$$

где W - определитель корреляционной матрицы возмущений; n - число наблюдений; p - число эндогенных переменных в систе- ме; $\chi_{f, \alpha}^2$ - значение критерия "хи-квадрат" при числе степе- ней свободы $f = \frac{p(p-1)}{2}$ и критерии значимости $\alpha = 0,05$.

$$\left[113 - \frac{(2(3) + 11)}{6} \right] \ln(0,9982) \sim \chi_{3, 0,05}^2$$

$$(113 - 2,833) \ln(0,9982) \sim 7,8147$$

$$0,1984 < 7,8147$$

Результаты показали, что предположение о независимости урав- нений (I20)-(I22) в рекурсивной системе было справедливым.

В целом, Р. Аматейс с соавт. (Amateis et al., 1984) уста- новили, что между тремя подходами практически нет различий, но взаимозависимая система дает несколько лучший результат как для отдельных сортиментов, так и для объединенных запасов. Рекурсивная и взаимозависимая системы являются теорети- чески более обоснованными, и имеет смысл предполагать, что запас любого отдельного сортимента, полученный по общей мас- се пачки хлыстов, будет зависеть от запасов других сортимен- тов в этой пачке. Рекурсивная и взаимозависимая системы объ- единяют такую информацию в виде прогностических уравнений. Кроме того, рекурсивные и взаимозависимые уравнения могут оказаться более устойчивыми при большем разнообразии исход- ных данных, особенно когда в систему вводятся дополнительные сортименты.

5. ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ РЕКУРСИВНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ТАКСАЦИИ ФИТО- МАССЫ ДРЕВОСТОЕВ

Известно, что получение экспериментальных данных о фито- массе лесов несравненно более трудоемко в сравнении с тради- ционными стереометрическими методами оценки запасов стволо-

вой древесины. Сегодня экологический мониторинг и реализация экологических программ различного уровня определяют необходимость создания баз данных о фитомассе лесов (Усольцев и др., 1995), для чего нужна нормативная основа в виде многофакторных регрессионных моделей и соответствующих таксационных таблиц.

В предыдущих разделах основное внимание было уделено методам оценки параметров связанных уравнений в различных лесоводственных приложениях. Ниже рассматриваются некоторые аспекты применения многовариантных систем рекурсивных (рекуррентных) уравнений при разработке нормативной базы для таксации фитомассы лесов.

5.1. РЕКУРСИВНЫЕ ВЗАИМОСВЯЗИ ПРИ АНАЛИЗЕ РЕГИОНАЛЬНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ ФИТОМАССЫ ДРЕВОСТОЕВ

При исследованиях в области таксации фитомассы древостоев до сих пор практикуется публикация результатов той или иной обработки фактических данных в виде уравнений и таблиц, а исходные экспериментальные данные со временем безвозвратно уходят вместе с их обладателями. Вместе с тем, после разработки того или иного норматива возникает проблема его экстраполяции на прилегающие регионы или регионы, близкие по природным условиям, т.е. проблема, связанная с исследованием географических закономерностей распределения фитомассы лесов в условиях отсутствия исходной базы данных.

В настоящее время для всей территории России разработаны и изданы региональные лесотаксационные нормативы, касающиеся, главным образом, запасов стволовой древесины. При исследовании географических закономерностей динамики и структуры как запасов стволовой древесины, так и всей фитомассы, приходится иметь дело с огромным региональным разнообразием исходных шкал разрядов высот и классов бонитета, вследствие чего опубликованные данные о фитомассе древостоев разных регионов становятся несопоставимыми. Во многих случаях привести их в сопоставимый вид можно с помощью систем рекурсивных взаимосвязей.

Например, систему уравнений (104) и (105) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} h &= a_0 + a_1 \ln d \\ \ln p_i &= b_0 + b_1 \ln d + b_2 \ln h \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

где p_i - фитомасса i -й фракции дерева (ствол, хвоя, ветви, корни), кг. Первое уравнение системы (126) можно представить как зависимость $h \sim d$ для одного разряда высот. Тогда вся шкала разрядов высот может быть представлена уравнением

$$h = a_0 + a_1 \ln d + a_2 E, \quad (127)$$

где E - порядковый номер разряда высот, и тогда система (126) приводится к виду

$$h = a_0 + a_1 \ln d + a_2 E \quad (128)$$

$$\ln p_i = b_0 + b_1 \ln d + b_2 \ln h. \quad (129)$$

Уравнение (129) можно рассматривать как основное, отражающее зависимость фитомассы дерева от определяющих факторов, а уравнение (128) является вспомогательным, служащим в данном случае для приведения таблиц фитомассы деревьев в сопоставимый вид. Если уравнение (129) действительно для всего аппроксимированного диапазона высот и диаметров независимо от соотношения последних, то (128) - лишь для одного соотношения высот и диаметров, соответствующего данной шкале разрядов высот, и таких шкал может быть несколько. Иными словами, уравнение (129) имеет более общий характер по сравнению с (128), а поскольку одному уравнению (129) может соответствовать несколько уравнений (128), то очевиден многовариантный характер рекурсивной системы уравнений (128) и (129) (Усольцев, 1988). Это ее свойство имеет важный практический смысл: возможность привязки уравнения (129) к любой шкале разрядов высот. Например, протабулировав уравнение (129), выведенное для березы уральского региона, по данным шкалы разрядов высот березовых древостоев Ленинградской области, приводим показатели фитомассы березы Урала и Северо-Запада России в сопоставимый вид.

Обеспечение сопоставимости показателей фитомассы с помощью рекурсивной системы уравнений можно проиллюстрировать и на уровне древостоев, когда сравниваются таблицы хода роста фитомассы древостоев, составленные по разным бонитетным шкалам. Для островных боров Северного Казахстана по данным

64 пробных площадей было выведено уравнение (Усольцев и др., 1995):

$$\ln P_c = -9,7299 + 4,5818 \ln A - 1,2626 \ln A \ln N_{100} + 1,9109 \ln N_{100} \ln B - 0,9235 (\ln B)^2; R^2 = 0,706, \quad (130)$$

где P_c - масса ветвей (скелета кроны) сосны в абсолютно сухом состоянии, т/га; N_{100} - класс бонитета, выраженный средней высотой древостоя, м, в базовом возрасте 100 лет по бонитетной шкале М.М.Орлова. Путем подстановки в (130) значения $N_{100} = 21,5$ м модель (130) была приведена к частному виду для III класса бонитета, графически представленному поверхностью I (рис. 5):

$$\ln P_c = -9,7299 + 0,7081 \ln A + 5,8626 \ln B - 0,9235 (\ln B)^2. \quad (131)$$

В ТХР каждому возрасту древостоя данного класса бонитета соответствует определенное значение площади сечений B , м²/га. В частности, для сомкнутых сосняков островных боров Северного Казахстана (Тургайский прогиб) в III классе бонитета возрастам 20, 40, 60, 80 и 100 лет соответствуют значения B , равные 13,8; 25,1; 31,1; 35,0; 37,7 м²/га (кривая 2 на рис. 5), что в общем случае описывается зависимостью

$$B = f(A, N_{100}). \quad (132)$$

Путем подстановки перечисленных значений A и B в уравнение (131) получили зависимость массы ветвей на 1 га от возраста для сосняков III класса бонитета, совмещенную с ТХР сосняков островных боров (кривая 4 на рис. 5). Чтобы сопоставить полученную закономерность возрастного изменения массы ветвей с аналогичными показателями сосняков другого региона, например, для ленточных боров Прииртышья, уравнение (130) совмещается с ТХР сосны ленточных боров, где возрастам 20, 40, 60, 80 и 100 лет в III классе бонитета соответствуют значения B , равные 20,4; 32,1; 35,6; 37,4 и 38,3 м²/га (кривая 3 на рис. 5). Это уже иная, отличная от ТХР сосны островных боров зависимость (132). Подстановкой ее в (131) получили другую линию роста массы ветвей (кривая 5 на рис. 5), отличную от кривой 4, которую теперь можно сопоставлять с аналогичной закономерностью, полученной по экспериментальным данным фитомассы в ленточных борах.

Для березняков Северного Казахстана зависимость массы листы P_f , т/га, описана уравнением, в котором независимая

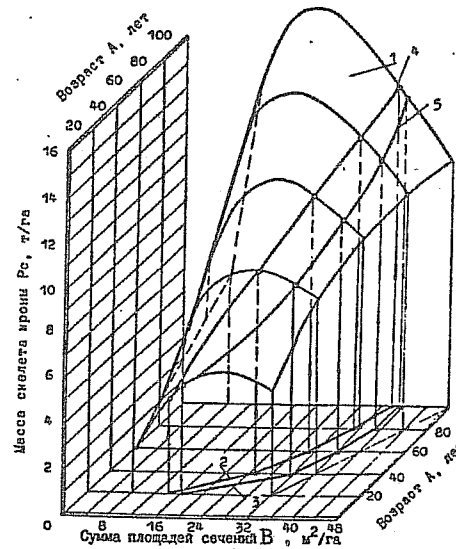


Рис. 5. Геометрическая интерпретация уравнения (130) для III класса бонитета: I - поверхность, описываемая уравнением (131). Зависимости $B = f(A)$, заимствованные из ТХР сосняков островных (линия 2) и ленточных (линия 3) боров Казахстана, спроецированные на поверхность I, дают линии соответственно 4 и 5, описывающие возрастные тренды массы скелета крон при заданных значениях N_{100} и B (Усольцев и др., 1995).

переменная B расчленена на две составляющие - средний диаметр D , см, и число стволов на 1 га N , имеющих общий вид (Усольцев, 1988):

$$P_f = \psi(A, N_{50}, D, N), \quad (133)$$

где N_{50} - класс бонитета, выраженный высотой древостоя, м, в базовом возрасте 50 лет по бонитетной шкале М.М.Орлова. Путем подстановки в (133) значения $N_{50} = 16$ м для III класса бонитета уравнение (133) приведено к частному виду, представленному поверхностью 7 (рис. 6). Морфологическая специфика онтоценогенеза конкретного древостоя определяется зависимостью его среднего диаметра D в данном классе бонитета N_{50} от возраста A и текущей плотности N :

$$D = \varphi(A, N_{50}, N). \quad (134)$$

Зависимость (134) посредством подстановки в нее значения $A = 50$ лет и $N_{50} = 16$ м приведена к частной зависимости $D \sim N$, представленной кривой I (рис. 6), проецированием которой на поверхность 7 получены зависимости $P_f = \varphi(D)$ и $P_f = \varphi(N)$. Для разных регионов зависимости (134), как и ТХР, будут специфичными. Путем подстановки их в (133) обеспечивается сопоставимость показателей массы листы березы разных регионов.

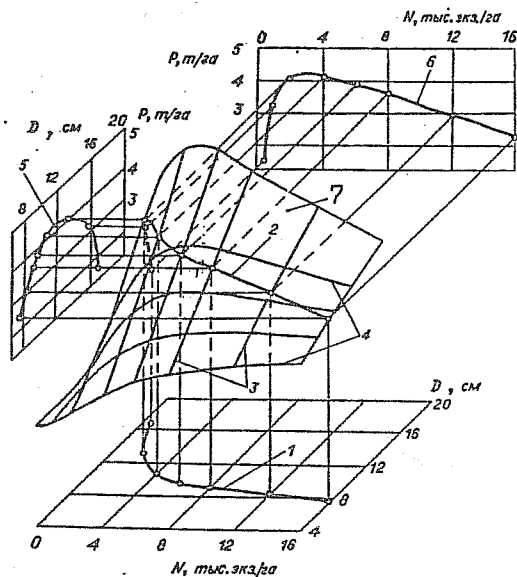


Рис. 6. Геометрическая интерпретация рекурсивной системы уравнений (I33) (поверхность 7) и (I34) (линия 1) для массы листвы березовых древостоев III класса бонитета в возрасте 50 лет: 1 - кривая зависимости $D \sim N$; 2 - проекция линии 1 на поверхность 7, описываемую уравнением $P_f = \varphi(D, N)$; 3 - линии равной густоты; 4 - линии равного диаметра D ; 5 - кривая зависимости $P_f = \varphi(D)$; 6 - кривая зависимости $P_f = \varphi(N)$ (Усольцев, 1988).

5.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕКУРСИВНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОРРЕКТНОЙ СПЕЦИФИКАЦИИ МОДЕЛИ

Свойство многовариантности можно показать также на примере рекурсивной системы, использованной при составлении таблицы объемов ветвей березы Северного Казахстана (Усольцев, 1988). В этом случае основное уравнение для объема ветви v (без учета ответвлений более высоких порядков) имеет всеобщий характер, поскольку представляет функциональную стереометрическую зависимость

$$v = (\pi/4) \cdot L \cdot f_n \cdot d_{0,1}^2, \quad (135)$$

где L - длина ветви, м; f_n - нормальное видовое число; $d_{0,1}$ - диаметр на $1/10$ длины ветви, см.

Вспомогательные уравнения, аппроксимирующие экспериментальные данные:

$$f_n = 0,505 - 0,048/L; R^2 = 0,910, \quad (136)$$

$$d_{0,1} = 0,218 + 0,852 d_0; R^2 = 0,994, \quad (137)$$

(где d_0 - диаметр у основания ветви, см) имеют стохастическую

природу и действительны только для диапазона значений f_n , L , $d_{0,1}$ и d_0 , характеризующих исследуемую совокупность ветвей. По существу, система уравнений (I35)-(I37) в данном случае служит цели спецификации модели объема ветвей, т.е. корректного формирования ее структуры с учетом основополагающих зависимостей. Подставив (I36) и (I37) в функциональную зависимость (I35), получили уравнение

$$v = (0,505L - 0,0377)(0,218 + 0,852 d_0)^2, \quad (138)$$

на основе которого была составлена таблица объемов ветвей (типа баварской для стволов) по двум легко измеряемым показателям: длине ветви и диаметру у ее основания (Усольцев, 1985а).

5.3. СИСТЕМЫ РЕКУРСИВНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ МНОГОЦЕЛЕВОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОЦЕНОЧНОЙ МОДЕЛИ ФИТОМАССЫ

Иногда свойство многовариантности рекурсивной модели обеспечивает ее многоцелевое назначение. Как и всякие модели, многомерные регрессии обладают той особенностью, что отражают субъективные представления их автора о природе исследуемого явления. Эта субъективность при подборе структуры регрессионной модели проявляется в ранжировании приоритетов независимых переменных, или определяющих факторов, включаемых в модель. Часто в модели прикладного характера отбор определяющих факторов определяется не столько субъективным видением исследователя, сколько целевой постановкой задачи. В любом случае, в лесоводственных исследованиях постоянно возникают ситуации, когда регрессия, рассчитанная по такому набору факторов, не может быть использована на практике (например, при составлении нормативов таксации) только потому, что на новом объекте (или в другое время) регистрировались иные определяющие факторы, как правило, в той или иной мере коррелирующие с независимыми переменными упомянутой модели. В таком случае необходим расчет дополнительных уравнений, в которых независимые переменные упомянутой модели выступают в качестве зависимых переменных, как функций определяющих факторов на новом объекте или на том же объекте, но в изменившейся ситуации.

Так, для саксаульников юга Казахстана, произрастающих на площади около 12 млн. га, была получена регрессионная модель вида (Усольцев, 1985а):

$$\ln p_o = a_o + a_1 \ln d_o + a_2 \ln d_{кр} + a_3 \ln h, \quad (139)$$

где p_o - общая масса дерева; d_o - диаметр корневой шейки; $d_{кр}$ - диаметр кроны и h - общая высота дерева. С использованием шкалы разрядов высот в качестве вспомогательной зависимости

$$h = f(d_o, E) \quad (140)$$

была составлена трехходовая ($d_{кр}$, h , d_o) таблица общей фитомассы деревьев по разрядам высот.

С переходом от наземных методов лесоинвентаризации к дистанционным регрессионная модель (139) и соответствующий ей норматив оказались непригодными, поскольку содержали "лишний" фактор - диаметр корневой шейки, не дешифрируемый при таксации с использованием аэрокосмической съемки. Поэтому было выведено вспомогательное уравнение

$$\ln d_o = a_o + a_1 \ln d_{кр} \quad (141)$$

и получена рекурсивная система уравнений

$$\left. \begin{aligned} d_o &= f(d_{кр}) \\ h &= f(d_o, E) \\ p_o &= f(d_o, d_{кр}, h), \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

последовательным табулированием которой по задаваемым ступеням диаметра кроны в направлении, указанном стрелками, была составлена двухходовая ($d_{кр}$ и h) таблица фитомассы деревьев по разрядам высот.

Таким образом, одна и та же модель для оценки фитомассы саксаула (139) явилась основой двух таблиц, из которых одна служит для наземной, а вторая - для дешифровочной таксации. Проверка тех и других Казахским лесоустроительным предприятием не выявила существенных расхождений результатов, полученных наземным и дешифровочным способом таксации (Усольцев, 1988).

5.4. РЕКУРСИВНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ КАК СПОСОБ СОГЛАСОВАНИЯ ОЦЕНОК ФИТОМАССЫ ДРЕВОСТОЕВ ПО СОСТАВЛЯЮЩИМ ФРАКЦИЯМ

При оценке фитомассы деревьев и древостоев по уравнениям ее связи с массообразующими показателями не все фракции находятся в равном положении с точки зрения точности оценки. Если масса ствола является интегральным показателем за весь

ростовой цикл, то масса листвы представляет итоговый результат ее роста за один (у листопадных) или 3-5 лет (у хвойных), а масса ветвей занимает между ними промежуточное положение. Иными словами, отдельные фракции фитомассы аккумулируют реакцию дерева или древостоя на среду обитания за периоды различной длительности, а массообразующие показатели отражают конечный результат за весь ростовой цикл, и, как следствие, точность оценки массы надземных фракций снижается в последовательности: ствол, ветви, листва. Если масса ствола удовлетворительно описывается зависимостью только от его высоты и диаметра, то масса ветвей связана не только с высотой и диаметром, но и с массой ствола. Масса листвы, в свою очередь, определяется не только высотой и диаметром ствола, но также массой ствола и ветвей. Похожая ситуация была описана в разделе 4, когда запас отдельного сортимента в пачке хлыстов определялся не только общей массой пачки и числом хлыстов в ней, но и запасом других сортиментов.

Регрессионная модель (139) объясняла 90 % изменчивости общей массы отдельного дерева саксаула. Но кроме общей массы необходимо было оценить запас кормовой массы p_k , или веточного корма (ассимилирующие побеги последних двух лет толщиной 2-3 мм), причем, не всего, а лишь доступного для поедания овцами, т.е. находящегося на высоте до 1,2 м от земли. Естественно, такой показатель не мог быть оценен адекватно тремя массообразующими регрессорами, входящими в (139). Поэтому в дополнение к ним в качестве эндогенной переменной был включен показатель общей массы p_o и рассчитано уравнение

$$p_k = f(p_o, d_o, d_{кр}, h), \quad (143)$$

объясняющее 70 % изменчивости кормовой массы, и вклад каждого из четырех регрессоров был статистически значимым (Усольцев, 1988).

Оценка фитомассы древостоев на больших территориях с помощью лазерного зондирования с борта авианосителя выполняется практически по одному регистрируемому лазером массообразующему показателю - высоте древостоя H , м. По данным 60 пробных площадей, заложенных в березняках Урало-Казахстанского региона, было рассчитано уравнение для массы стволов древостоя P_{st} в абсолютно сухом состоянии, т/га (Усольцев, 1996):

$$\ln P_{st} = 0,2230 + 1,5111 \ln H, \quad (144)$$

объясняющее 87 % ее общей изменчивости. Таким же уровнем объясненной изменчивости характеризовались уравнения вида (144) для массы стволов сосны, ели и осины. Зависимость (144) является отражением так называемого закона Эйхгорна, согласно которому, одной определенной высоте для всех классов бонитета и возраста соответствует один и тот же общий запас древостоя. Однако, расчет уравнений, аналогичных (144), для массы листьев дал неприемлемо низкие значения объясненной изменчивости - в пределах от 0,4 до 4,2 % для разных пород. Поэтому были рассчитаны уравнения для массы скелета кроны (т.е. ветвей без листьев) березы P_c , т/га

$$\ln P_c = -0,1584 + 0,2660 \ln P_{st} + 0,5590 \ln H; R^2 = 0,724, \quad (145)$$

и для массы листьев P_f

$\ln P_f = 5,1468 + \ln P_{st} + 0,1453 \ln P_c \ln H - 1,7611 \ln H; R^2 = 0,821. \quad (146)$
Показатели объясненной изменчивости для уравнений (145) и (146), рассчитанных для остальных трех пород, были такими же. Таким образом, применение рекурсивной системы уравнений (144) - (146) дало возможность получить состоятельные оценки фитомассы древостоев, используемые при лазерном зондировании лесных площадей. Оценочные рекурсивные уравнения для фитомассы деревьев и древостоев позволяют иметь согласованные ее оценки для различных фракций, при этом исключается ситуация, когда отдельные фракции фитомассы, оцениваемые изолированно, получают несостоятельные оценки.

5.5. СИСТЕМА РЕКУРСИВНЫХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ КАК СПОСОБ СОВМЕЩЕНИЯ ОЦЕНОЧНОЙ МОДЕЛИ ФИТОМАССЫ С ТРАДИЦИОННЫМИ ТАКСАЦИОННЫМИ НОРМАТИВАМИ И БАНКАМИ ЛЕСОУСТРОИТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

При разработке нормативной базы для оценки фитомассы древостоев можно пойти по пути традиционной лесной таксации, за свою 150-летнюю историю накопившей огромный арсенал нормативов оценки запасов стволовой древесины. Однако, насущная сегодняшняя потребность в нормативах оценки фитомассы и несопоставимо большая ее трудоемкость в сравнении с традиционной таксацией делают этот путь не приемлемым. Единственно возможный вариант - создание баз данных о фитомассе лесов на осно-

ве имеющихся нормативов таксации стволовой древесины и банков лесоустроительных данных с использованием систем рекурсивных взаимосвязей.

Создание баз данных о фитомассе лесов возможно по двум вариантам, с использованием а) банков данных периодических государственных учетов лесного фонда по стране в целом и б) банков лесоустроительных данных о запасах стволовой древесины на уровне лесхозов. В первом случае необходимы регрессионные модели для переводных коэффициентов вида

$$P_i / V = f (A, B, H_{100}), \quad (147)$$

(где P_i - фитомасса i-й фракции, т/га; V - запас стволовой древесины, м³/га), включающие в виде регрессоров основные массообразующие показатели древостоев. Принципы совмещения таких моделей с банками лесоустроительных данных были изложены ранее (Усольцев и др., 1995).

Во втором случае необходимы эти же регрессионные модели, чтобы совместить их с поведельными банками данных лесоустройства лесхозов. Эти данные должны быть на магнитных носителях, а в Свердловской области, например, только половина лесхозов устроена по современной компьютерной технологии, по остальным имеется информация в виде традиционных таксационных описаний. Поэтому при повторном лесоустройстве в технологию лесоустроительных работ необходимо внести изменения, позволяющие после систематизации поведельных данных получить информацию о всей фитомассе инвентаризируемых древостоев на данной территории. Основой для этого могут служить регрессионные модели вида (147) либо ТХР фитомассы древостоев.

Традиционные ТХР включают в себя закономерности возрастной динамики по классам бонитета следующих показателей:

$$\left. \begin{aligned} V &= f (A, H_{100}) \\ N &= f (A, H_{100}) \\ D &= f (A, H_{100}) . \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

В настоящее время для основных лесообразующих пород, отдельно для двух регионов - Среднего Урала и Северного Казахстана, получены регрессионные модели оценки фитомассы древостоев вида

$$P_i / V = f (A, H_{100}, N, D), \quad (149)$$

табулированием которых по данным соответствующих ТХР, описываемым зависимостями (148), составлены эскизы ТХР фитомассы древостоев по фракциям (Усольцев, 1988).

При составлении таблиц запасов фитомассы важное значение имеет установление эталона полноты, принимаемого за 1,0. Если для древостоев лесной зоны это не представляет проблемы, то для лесных экосистем пустынной зоны Средней Азии, представляющих сообщества открытой структуры (саксауловые редколесья), вопрос эталона полноты долгое время оставался открытым. В конце концов, после длительной проверки в лесоустроительной практике за эталон полноты была принята площадь проекций крон G^H , тыс. м²/га, реально существующая при оптимальных условиях роста, как функция средней высоты древостоя H , м, по В.М. Жирину (Усольцев, 1988):

$$G^H = 0,267 + 1,293 H. \quad (150)$$

Таблицы для оценки фитомассы саксаульников были составлены на основе апробированного практикой эталона полноты (150) и бонитетной шкалы Казахского лесоустроительного предприятия. С учетом последней по экспериментальным данным были рассчитаны уравнения для высоты древостоя

$$\lg H = 0,1369 + 0,7498 \lg D_{кр} - 0,1982 \lg E, \quad (151)$$

(где $D_{кр}$ - средний диаметр крон, м; E - порядковый номер класса бонитета - 1, 2 и 3), и для оценки общей фитомассы

$$\lg P_0 = 0,1850 + 0,8750 \lg H + \lg G, \quad (152)$$

где G - фактическая площадь проекций крон древостоя, тыс. м²/га. Уравнения (150)-(152) составили рекурсивную систему

$$\left. \begin{array}{l} H = f(D_{кр}, E) \\ G^H = f(H) \\ P_0 = f(H, G) \end{array} \right\} \quad (153)$$

последовательным табулированием которой по задаваемым значениям $D_{кр}$ в пределах каждого класса бонитета составлены таблицы общей фитомассы саксаула на 1 га нормальных древостоев.

5.6. СИСТЕМА РЕКУРСИВНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОЦЕНКЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАПАСОВ ФИТОМАССЫ ДРЕВОСТОЕВ

При расчетах углеродного баланса оценки ежегодно связываемого лесной растительностью углерода разнятся на порядок и более: на планетарном уровне от 1 до 10 Гт, а для лесов России и бывшего СССР - от 200 до 4000 млн. т (Усольцев и др., 1995). При таком разбросе данных возможность какого-либо прогнозирования экологической ситуации представляется сомнительной. Прежде всего, необходимо иметь надежную базу данных о фитомассе лесов и о предельно возможных ее запасах на единице площади.

Экспериментальный материал для такого исследования на уровне биогрупп как микромоделей древостоев различной плотности получен в березняках разнотравных Тургайского прогиба. В возрасте от 5 до 50 лет заложены 21 пробная площадь в порослевых и 13 - в семенных березняках. Обмерено и закартировано 5300 деревьев в порослевых и 3050 - в семенных березняках и выделено соответственно 360 и 280 биогрупп с учетом территориальной сближенности деревьев.

Запас ствольной древесины биогруппы на единице ее площади при заданном возрасте в предельном ценотическом состоянии (т.е. при максимально возможной густоте) определяется основными двумя массообразующими показателями - средним диаметром и средней высотой. Поэтому вначале было необходимо рассчитать траектории изменения среднего диаметра, максимального для каждого класса возраста, и в пределах одного возраста - для каждой градации густоты. Для получения исходных данных к расчету таких траекторий все экспериментальные данные средних диаметров биогрупп были распределены в двухходовые (по возрасту и густоте) матрицы и из каждой ячейки матрицы были отобраны максимальные значения среднего диаметра. Последние аппроксимированы зависимостями для семенных и порослевых березняков отдельно

$$D_{\max} = f(A, N), \quad R^2 = 0,962 - 0,988, \quad (154)$$

где D_{\max} - максимальное значение среднего диаметра стволов биогруппы; N - число стволов, приходящееся на единицу площади биогруппы, в данном случае на 1 условный гектар ее.

Положение предельных траекторий максимального диаметра D_{\max} и их огибающей относительно экспериментальных значений средних диаметров всех семенных биогрупп показано на рис. 7.

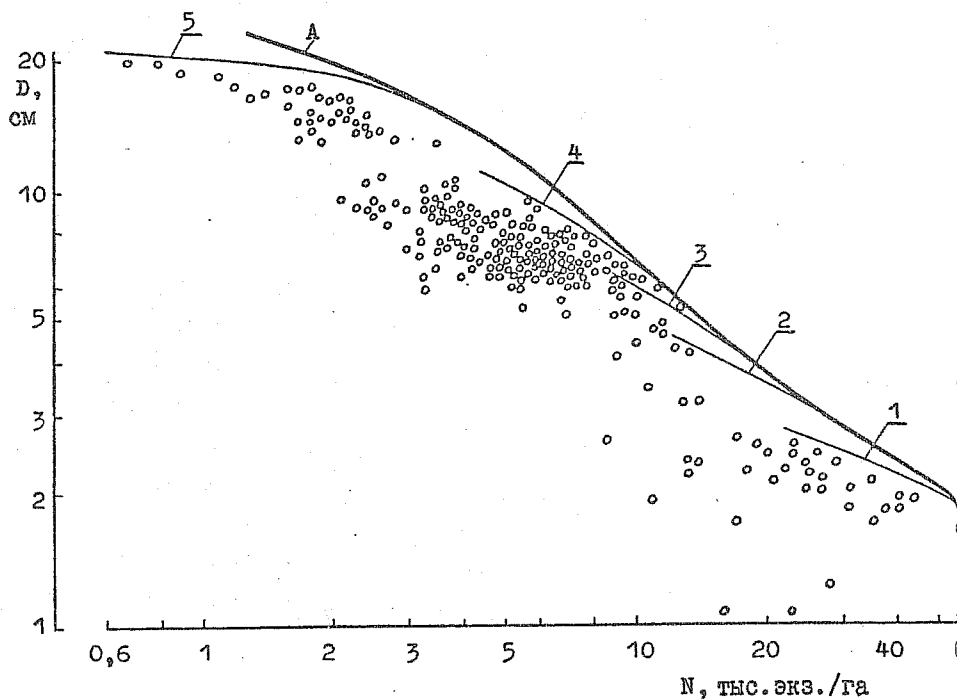


Рис. 7. Кривые $D_{\max} = f(N)$ для семенных биогрупп в возрасте 10, 20, 30, 40 и 50 лет (линии соответственно 1, 2, 3, 4 и 5), полученные табулированием уравнения (154) по задаваемым значениям плотности биогрупп; А - огибающая (Усольцев, Усольцев, 1996).

Средняя высота биогруппы изменяется не только в связи с возрастом и густотой, но также в связи со средним диаметром стволов. Поэтому для получения исходных данных к расчету траекторий изменения максимальных значений средних высот биогрупп H_{\max} все экспериментальные данные средних высот были распределены в трехходовые (по возрасту А, густоте N и среднему диаметру D) матрицы и из каждой ячейки матрицы отобраны максимальные значения средних высот. Последние были

аппроксимированы трехфакторной зависимостью

$$H_{\max} = f(A, N, D); R^2 = 0,974. \quad (155)$$

Предельные траектории изменения H_{\max} по возрасту и густоте биогрупп были рассчитаны путем подстановки уравнения (154) в уравнение (155) (рис. 8).

Запас стволовой древесины биогрупп описан зависимостью от четырех показателей - возраста А, густоты N, среднего диаметра D и средней высоты биогрупп H:

$$V = f(A, N, D, H); R^2 = 0,930-0,972. \quad (156)$$

Положение предельных траекторий изменения запасов биогрупп V_{\max} и их огибающей относительно всех экспериментальных значений запаса V показано на рис. 9. Эти траектории получены путем последовательного табулирования рекурсивной системы уравнений (157)

$$\left. \begin{aligned} D_{\max} &= f(A, N) \\ H_{\max} &= f(A, N, D) \\ V &= f(A, N, D, H). \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

Вначале табулируется уравнение (154) по заданным А и N, затем по тем же А и N и полученным D_{\max} табулируется уравнение (155) и, наконец, по тем же А и N и полученным D_{\max} и H_{\max} табулируется уравнение (156).

Таблица 16

Расчет предельных показателей фитомассы семенных и порослевых березняков

А, лет	К	N_{\max} , тыс. экз./га		D_{\max} , см	H_{\max} , м	Предельный V, м ³ /га		Предельная фитомасса (сухая), т/га			
		био-группы	древос-тоя			био-группы	древос-тоя	ство-лы	вет-ви	лис-тья	ито-го
Семенные березняки											
20	0,97	20	19	3,5	7,4	123	119	108	6	3	117
30	0,91	17	15	4,2	9,2	128	116	106	4	1	111
40	0,84	12	10	5,7	11,8	172	144	134	3	1	138
50	0,78	6	5	10,6	16,5	416	324	306	17	4	327
Порослевые березняки											
20	0,79	14	11	4,0	6,1	97	77	68	6	3	77
30	0,80	5	4	8,1	10,2	192	154	144	20	3	167
40	0,78	4	3	9,8	12,1	258	201	192	28	3	223
50	0,72	3	2	12,6	14,4	364	262	254	43	3	300

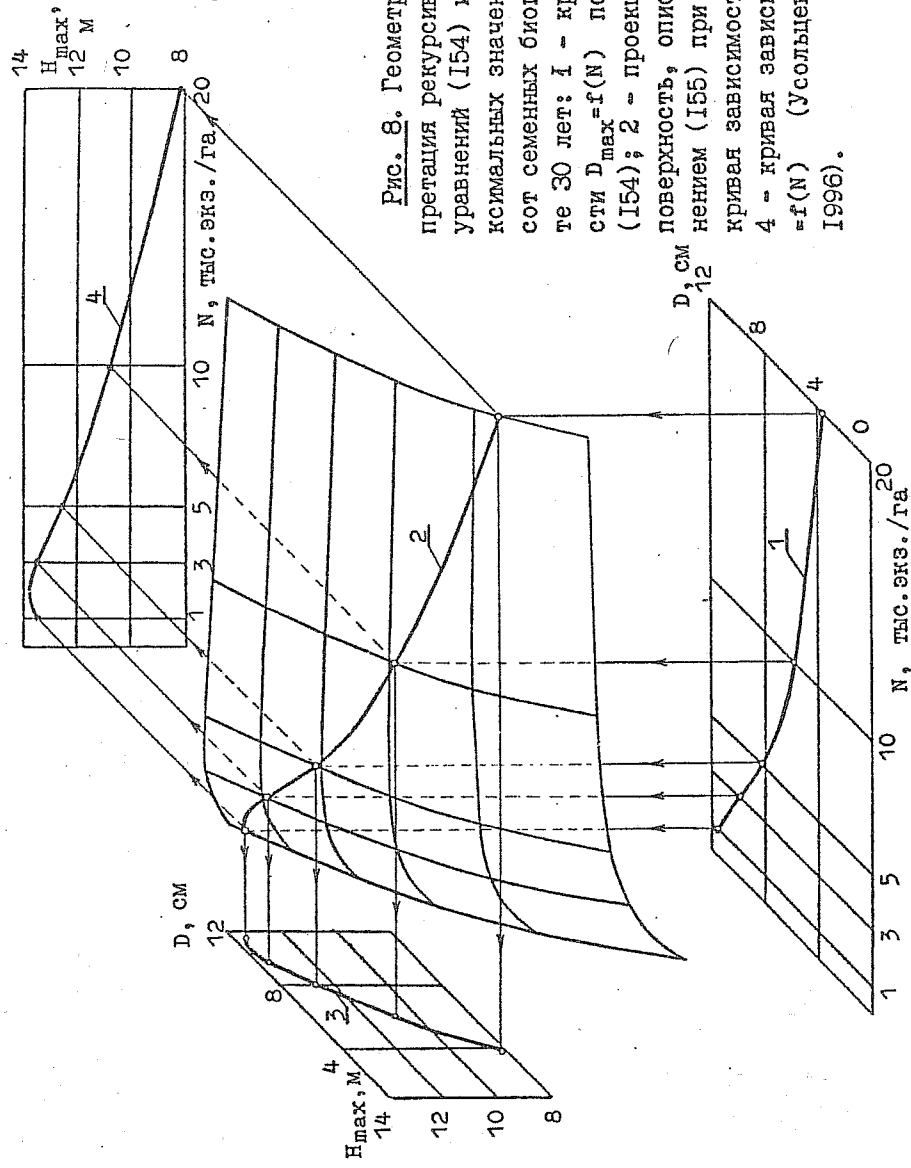


Рис. 8. Геометрическая интерпретация рекурсивной системы уравнений (154) и (155) для максимальных значений средних высот семенных биогрупп в возрасте 30 лет: 1 - кривая зависимости $D_{max}=f(N)$ по уравнению (154); 2 - проекция линии 1 на поверхность, описываемую уравнением (155) при $A=30$ лет; 3 - кривая зависимости $N_{max}=f(D)$; 4 - кривая зависимости $N_{max}=f(N)$ (Усольцев, Усольцев, 1996).

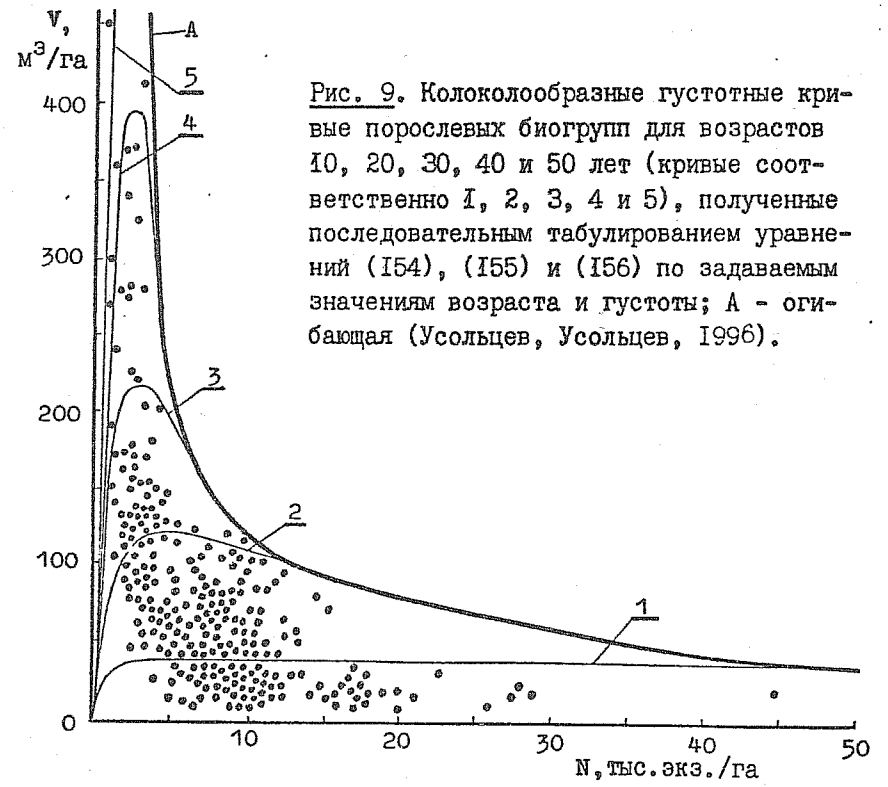


Рис. 9. Колоколообразные густотные кривые порослевых биогрупп для возрастов 10, 20, 30, 40 и 50 лет (кривые соответственно 1, 2, 3, 4 и 5), полученные последовательным табулированием уравнений (154), (155) и (156) по задаваемым значениям возраста и густоты; А - огибающая (Усольцев, Усольцев, 1996).

В табл. 16 для задаваемого возраста и предельной для этого возраста густоты N_{max} (точка пересечения колоколообразной кривой с огибающей на рис. 9) приведены соответствующие значения предельного запаса V . Подстановкой величин N_{max} для каждого возраста в уравнение (154) получены значения D_{max} и подстановкой этих значений в (155) получены величины N_{max} . Для пересчета показателей с уровня биогруппы на уровень древостоя был использован корректировочный коэффициент $K = C_{пд} / C_{пб}$, где $C_{пд}$ и $C_{пб}$ - соответственно сомкнутости полога древостоя и биогрупп (см. Усольцев, 1985а, табл. 4.12). Умножением коэффициента K на значения N_{max} и предельного V биогруппы получены соответствующие показатели для древостоя (Усольцев, Усольцев, 1996).

После расчета для заданных возрастов предельных значений N_{max} и V (табл. 16), скорректированных через коэффици-

ент K на древостой (соответственно колонки 4 и 8), а также значений D_{\max} и H_{\max} (колонки 5 и 6), получены предельные показатели надземной фитомассы березняков по фракциям путем подстановки названных значений в следующее рекурсивное уравнение общего вида

$$P_i/V = f(A, N, D, H), \quad (158)$$

которое было рассчитано по тем же экспериментальным данным, что и уравнение (149). R^2 для массы стволов составил 0,638, для ветвей - 0,886 и для листвы - 0,975.

Таким образом, рекурсивная система уравнений (154), (155), (156) и (158) дала возможность установить предельно возможные запасы надземной фитомассы в березняках разнотравных семенного и порослевого происхождения степной зоны. Использование биогрупп как микромоделей древостоев различной густоты позволяет получить для любой древесной породы достоверные показатели предельных запасов фитомассы при минимальных трудозатратах.

5.7. РЕКУРСИВНАЯ СИСТЕМА ЗАВИСИМОСТЕЙ КАК ОСНОВА ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

В рекурсивной системе зависимостей (148) и (149) уравнение (149) является основным, действительным для всего диапазона условий, охваченных экспериментальным материалом, а зависимость (148) имеет локальный характер и действительна лишь для данной ТХР. Таким образом, система зависимостей (148) и (149) является многовариантной по отношению к имеющимся ТХР.

Уравнение (149) нельзя считать динамическим, т.к. оно не способно дать прогноз возрастной динамики фитомассы. Поскольку, как уже отмечалось, ТХР тоже не дает возрастной динамики запасов, а лишь характеризует балансовый итог прироста и отпада на тот или иной момент, то система зависимостей пригодна лишь для оценки фитомассы древостоев в статике. Если же уравнение (149) связать с изложенными в разделе 2 совместимыми моделями роста и прироста древостоев, то полученная система связанных уравнений будет динамической и многовариантной по отношению к имеющимся моделям роста и прироста древостоев.

В последнее время в зарубежном лесоводстве получили широкое распространение имитационные модели, описывающие возрастную динамику массообразующих показателей и запаса древостоев, исходя из начальных условий (густоты и характера размещения деревьев), индекса конкурентных отношений, режимов хозяйственного вмешательства и т.д. (Усольцев, 1985а). Если уравнение (149) связать с такой имитационной моделью, то полученная система зависимостей будет, по существу, имитационной и многовариантной по отношению не к имеющимся ТХР или совместимым моделям роста и прироста древостоев, а к конкретным исследуемым насаждениям.

Изложенные три варианта представляют частные случаи общего принципа параметрического прогнозирования (Лиера, 1980), когда сначала предсказываются массообразующие показатели и запас древостоя, а по ним с использованием статической зависимости (149) - его фитомасса. Этот принцип, по существу, составляет основу имитационного моделирования, когда на каждом очередном шаге имитации модель отвечает на вопрос типа "Что будет, если...?", и тем самым на каждом шаге реализуется принцип многовариантности (см. заставку). По такой же схеме осуществляется проекция запаса и площади сечений на задаваемые возрастные периоды, когда на каждом возрастном этапе модель корректируется по принципу "Что будет, если...?". Такая же схема лежит и в основе цепочки рекурсивных уравнений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование систем связанных регрессионных уравнений при исследовании лесных экосистем предполагает наличие четких представлений исследователя об основополагающих процессах, протекающих в изучаемом объекте. Только при этом условии возможна корректная спецификация каждого уравнения системы. Одновременный расчет нескольких связанных стохастических зависимостей порождает проблему состоятельности и смещенности оценок коэффициентов, и этой проблеме было уделено значительное внимание. Известно, что несостоятельные оценки хуже, чем бесполезные, поскольку они создают ауру ложной точности, которая может ввести в большое заблуждение (Cottam et al., 1963). Хотя необходимость и преимущества более слож-

ных процедур оценки в приведенных примерах были не всегда показательными, тем не менее, применение корректных статистических методов является гарантией того, что при любом исходном экспериментальном материале получаемые оценки не будут ложными.

Необходимо отметить, что оценка параметров, при всей ее важности, является тем не менее заключительным этапом в процессе построения модели. До него необходимо затратить немало времени и усилий на получение экспериментальных данных и разработку или анализ теоретических положений, на которых основываются математические модели. Фактически, любой практический выигрыш в обеспечении корректности модели достигается, прежде всего, благодаря адекватной базе данных и надежной основополагающей теории, чем статистически обоснованной процедуре оценки параметров. Как полагает Л. Клейн (Klein, 1960), необходимо учитывать все возможности повышения адекватности модели и ценен любой выигрыш, даже самый малый; выбор же более мощных средств математической статистики не является панацеей. И хотя Л. Клейн имел в виду эконометрическую ситуацию, его предпосылка действительна и при моделировании лесоводственных закономерностей. В теоретическом аспекте важна не только практически реализуемая точность оценки, но и логическая обоснованность модели, фундаментальность основополагающей парадигмы и, наконец, корректность методов расчета.

В заключительной главе был дан краткий обзор различных вариантов и приемов использования рекурсивных уравнений при таксации фитомассы древостоев. Приведенные при этом регрессионные оценочные модели следует рассматривать как предварительные. Во-первых, не всегда обеспечивалась репрезентативность экспериментального материала. Например, при расчете модели (I49) для оценки фитомассы сосняков были недостаточно представлены высокополнотные молодняки и низкополнотные спелые древостои (Усольцев, 1988, табл. 4.4) и, во избежание смещений от экстраполяции, действие модели на эти периферийные участки поля распределения экспериментальных данных распространять нельзя. Во-вторых, в расчет моделей не была включена коррекция смещений на логарифмирование, которое обычно применялось для приведения модели к линейному виду. И хотя при высоких коэффициентах детерминации, которые характеризовали

большинство моделей, смещение не выходит обычно за пределы 1 %, тем не менее, в случае низкой их детерминированности систематическая ошибка может быть существенной. В-третьих, регрессионные модели не были верифицированы на независимых выборках, что также снижает их надежность. И, в-четвертых, все рекурсивные модели рассчитаны методом ОМЖ. Хотя было показано, что он вполне приемлем для оценки коэффициентов рекурсивных уравнений, это имеет место лишь при отсутствии межрегрессионной корреляции остатков, а такие тесты не были выполнены.

Упомянутые четыре фактора недостаточной корректности регрессионных моделей для оценки фитомассы деревьев и древостоев, по существу, определяют направления дальнейших исследований в этой области. Предстоит также выявить возможности применения здесь систем взаимозависимых уравнений, нашедших наиболее широкое применение в эконометрии. Они могут обеспечить большую гибкость и универсальность регрессионных систем, имитирующих динамику роста и прироста древостоев в увязке с их фитопродуктивностью. Успешное применение описанных в работе методов будет означать, что лесоводы имеют возможность развивать целые системы совместимых моделей роста и прироста фитомассы древостоев, построенных на теоретически обоснованных статистических процедурах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Исследование зависимостей.- М.: Финансы и статистика, 1985.- 487 с.
- Лиёпа И.Я. Текущий прирост запаса наличного древостоя как полный дифференциал запаса // Вопросы биологии.- Рига: Зинатне, 1969.- С. 13-23.
- Лиёпа И.Я. Динамика древесных запасов: Прогнозирование и экология.- Рига: Зинатне, 1980.- 170 с.
- Лиёпа И.Я., Усольцев В.А. Определение текущего прироста по запасу в березняках Северного Казахстана // Вестн. с.-х. науки Казахстана.- 1985.- № 8.- С.80-83.
- Лиёпа И.Я., Усольцев В.А. Определение текущего прироста по запасу в сосняках островных боров // Там же.- 1986.- № 4.- С. 68-70.
- Маленко Э. Статистические методы в эконометрии.- М.: Статистика, 1975.- Вып.1.- 422 с.; 1976.- Вып.2.- 325 с. (Пер. с франц.).
- Усольцев В.А. Математическое моделирование прироста березы повислой // Лесоведение.- 1979.- № 2.- С. 13-22.
- Усольцев В.А. Моделирование структуры и динамики фитомассы древостоев.- Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1985а.- 191 с.
- Усольцев В.А. Принципы полифакториальной оценки биопроductивности древостоев.- Красноярск: Ин-т леса и др. (препринт), 1985б.- 48 с.
- Усольцев В.А. Рост и структура фитомассы древостоев.- Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.- 253 с.
- Усольцев В.А. Исследование структуры и фитомассы лесного полога путем лазерного зондирования.- Екатеринбург: УГЛТА, 1996.- 109с.
- Усольцев В.А., Сальников А.А., Горбунова С.А., Нагимов З.Я. Принципы формирования баз данных по фитомассе лесов России и Швейцарии // Леса Урала и хоз-во в них.- 1995.- Вып.18.- С.198-227.
- Усольцев В.А., Усольцев А.В. Оценка предельных показателей продуктивности березовых древостоев по исходным данным составляющих их биогрупп // ИВУЗ. Лесн. журн.- 1996.- № 4-5.- С.12-21.

- Ферстер Э., Ренц Б. Методы корреляционного и регрессионного анализа.- М.: Финансы и статистика, 1983.- 302 с. (пер. с нем.).
- Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования.- М.: Статистика, 1977.- 200 с.
- Четыркин Е.М., Калихман И.Л. Вероятность и статистика, 1982.- 319 с.
- Amateis R.L., Burkhart H.E., Greber B.J., Watson E.E. A comparison of approaches for predicting multiple-product yields from weight-scaling data // Forest Sci.- 1984.- Vol.30, N 4.- P. 991-998.
- Anderson T.W. An introduction to multivariate statistical analysis.- New York: John Wiley and Sons, 1958.- 374 p.
- Anderson T.W., Rubin H. Estimation of the parameters of a single equation in a complete system of stochastic equations // Ann. Math. Statist.- 1949.- Vol.20.- P.46-63.
- Basman R.L. A generalized classical method of linear estimation of coefficients in a structural equation // Econometrica.- 1957.- Vol. 25.- P. 77-83.
- Borders B.E. Systems of equations in forest stand modeling // Forest Sci.- 1989.- Vol.35, N 2.- P. 548-556.
- Borders B.E., Bailey R.L. A compatible system of growth and yield equations for slash pine fitted with restricted three-stage least squares // Forest Sci.- 1986.- Vol.32, N 1.- P. 185-201.
- Brender E.V. Growth predictions for natural stands of loblolly pine in the lower Piedmont.- Ga.Forest Res. Council Rep. 6.- 1960.- 7 p.
- Brown B.W. The identification problem in systems nonlinear in the variables // Econometrica.- 1983.- Vol.51.- P.175-196.
- Buckman R.E. Growth and yield of red pine in Minnesota // U.S. Dept. Agric.- 1962.- Tech. Bull. 1272.- 50 p.
- Buell J.H. The prediction of growth in unevenaged timber stands on the basis of diameter distribution // Duke Univ. School For.- 1945.- Bull.11.- 70 p.
- Burkhart H.E., Sprinz P.T. Compatible cubic volume and basal area projection equations for thinned old-field loblolly pine plantations// Forest Sci.-1984.- Vol.30.- P. 86-93.

- Byrne J.C., Reed D.D. Complex compatible taper and volume estimation systems for red and loblolly pine // Forest Sci.- 1986.- Vol. 32.- P. 423-443.
- Clutter J.L. Compatible growth and yield models for loblolly pine // Forest Sci.- 1963.- Vol. 9, N 3.- P. 354-371.
- Clutter J.L., Fortson J.C., Pienaar L.V., Brister G.H., Bailey R.L. Timber management: A quantitative approach.- New York: John Wiley and Sons, 1983.- 333 p.
- Coile T.S. Soil productivity for southern pines. Part I. Shortleaf and loblolly pines// Forest Farmer.- 1952.- Vol.11, N 7.- P. 10-13.
- Cottam G., Curtis J.T., Hale B.W. Some sampling characteristics of a population of randomly dispersed individuals // Ecology.- 1953.- Vol. 34, N 4.- P. 741-757.
- Cragg J.G. Estimation and testing in time-series regression models with heteroscedastic disturbances // J. Econ.- 1982.- Vol. 20.- P. 135-157.
- Cragg J.G. More efficient estimation in the presence of heteroscedasticity of unknown form// Econometrica.- 1983.- Vol. 51.- P. 751-763.
- Curtis R.O. A method of estimation of gross yield of Douglas-fir // Forest Sci. Monogr.- 1967.- N 13.- 24 p.
- Dahms W.G. Gross and net yield tables for lodgepole pine // U.S. Forest Service.- 1964.- Res.Pap. PNW-8.- 14 p.
- Drew T.I., Flewelling J.W. Some recent Japanese theories of yield-density relationships and their application to Monterey pine plantations //Forest Sci.-1977.-Vol.23, N 4.-P.517-534.
- Dutta M. Econometric methods.- South-Western: Cincinnati, OH, 1975.- 382 p.
- Ehrlich R.L. Cash-futures price relationships for live beef cattle// Amer. J. Agric. Econ.-1969.-Vol.51.- P. 26-40.
- Elston R.C., Grizzle J.E. Estimation of time response curves and their confidence bounds// Biometrics.-1962.-Vol.18.- P. 148-159.
- Engle R.F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation // Econometrica.- 1982.- Vol. 50.- P. 987-1007.
- Ezekiel M. The cobweb theorem// Q.J.Econ.-1938.-Vol.53.- P. 255-280.

- Fair R.C. Specification, estimation and analysis of macroeconomic models.- Cambridge: Harvard Univ. Press, 1984.- 274 p.
- Fasick C.A., Tyre G.L., Riley F.M. Weight-scaling tree-length timber for veneer logs, saw logs and pulpwood // Forest Prod. Journ.- 1974.- Vol. 24.- P. 17-20.
- Fisher F.M. The identification problem in econometrics.- New York: McGraw-Hill, 1966.- 203 p.
- Fomby T.B., Hill R.C., Johnson S.R. Advanced econometric methods.- New York: Springer-Verlag, 1984.- 624 p.
- Förster E., Rönz B. Methoden der Korrelations- und Regressionsanalyse: Ein Leitfaden für Ökonomen.- Berlin: Die Wirtschaft, 1979.- 324 s.
- Fox K.A. Intermediate economic statistics.- New York: John Wiley, 1968.- 568 p.
- Freese F. Testing accuracy //Forest Sci.-1960.-Vol.6.-P.139-145.
- Furnival G.M., Wilson R.W. Systems of equations for predicting forest growth and yield// Statistical Ecol.-1971.-Vol.3, p. 43-55.
- Gallant A.R. Seemingly unrelated nonlinear regressions // J. of Econometrics.- 1975.- Vol. 3.- P. 35-50.
- Gevorkiantz S.R. The approach of under-stocked stands to normality // J. Forestry.- 1934.- Vol. 32.- P. 47-488.
- Goldberger A.S. Econometric theory.- New York: John Wiley, 1964.
- Goldfeld S.M., Quandt R.E. Some tests for homoscedasticity// J. Amer. Statist. Assoc.- 1965.- Vol. 60.- P. 539-547.
- Gregoire T.G. Generalized error structure for forestry yield models // Forest Sci.- 1987.- Vol. 33, N 2.- P. 423-444.
- Guilkey D.K., Schmidt P. Estimation of seemingly unrelated regressions with vector autoregressive errors // J. Amer. Statist. Assoc.- 1973.- Vol. 68.- P. 642-647.
- Gujarati D. Basic econometrics.- New York: McGraw-Hill, 1978.- 462 p.
- Guttenberg S., Fasick C.A. Scaling multiple products by weight // Forest Prod. Journ.- 1973.- Vol. 23.- P. 34-37.
- Haavelmo T. The statistical implications of a system of simultaneous equations //Econometrica.-1943.-Vol.11, N 1.-P.1-12.
- Halvorsen R. Residential demand for electric energy // Rev. Econ. and Stat.- 1975.- Vol. 57.- P. 12-18.

- Harlow A.A. A recursive model of the hog industry // Agric. Econ. Res.- 1962.- Vol. 14.- P. 1-12.
- Johnston J. Econometric methods.- New York: McGraw-Hill, 1963.- 300 p.
- Johnston J. Econometrics.- New York: Marcel Dekker, 1972.- 269 p.
- Kelley J.S. Linear cross-equation constraints and the identification problem //Econometrica.-1975.-Vol. 43.- P.125-140.
- Klein L.R. Single equation vs. equation system methods of estimation in econometrics //Econometrics.-1960.-Vol.28, N 4.- P. 867.
- Klein L.R. An introduction to econometrics.- Englewood Cliffs, N.Y.: Prentice-Hall, 1962.
- LeMay V.M. Comparisons of fitting techniques for systems of forestry equations.- Ph.D.Thesis. Vancouver: Univ. of British Columbia.- 1988.
- LeMay V.M. MSLS: a linear least squares technique for fitting a simultaneous system of equations with a generalized error structure //Can.J.For.Res.-1990.-Vol. 20.- P. 1830-1839.
- MacKinney A.L., Chaiken L.E. Volume, yield and growth of loblolly pine in the mid-Atlantic coastal region // Appalachian Forest Expt. Sta.- 1939.- Techn.Note 33.- 30 p.
- Maddala G.S. Econometrics.- New York: McGraw-Hill,1977.-516 p.
- Meyer W.H. Yields of evenaged stands of loblolly pine in northern Louisiana // Yale School Forestry Bul.-1942.-Vol. 54.- 58 p.
- Moore H.L. Forecasting the yield and the price of cotton.- New York: The Macmillan Company, 1917.- 173 p.
- Moser J.W., Hall O.F. Deriving growth and yield functions for uneven-aged forest stands // Forest Sci.- 1969.- Vol.15, N 2.- P. 183-188.
- Murphy P.A., Beltz R.C. Growth and yield of shortleaf pine in the West Gulf region // USDA Forest Serv.-1981.- Res.Pap. SO-169.- 15 p.
- Murphy P.A., Sternitzke H.S. Growth and yield estimation for loblolly pine in the West Gulf// USDA Forest Serv.-1979.- Res. Paper SO-154.- 8 p.
- Nelson T.C. Current research in the South// Fourth Conf. South. Indus. Forest Manage. Proc.- 1960.- P. 52-60.
- Nelson T.C., Bennett F.A. A critical look at the normality concept // J. Forestry.-1965.-Vol.63, N 2.- P.107-109.
- Parks R.W. Efficient estimation of a system of regression equations when disturbances are both serially and contemporaneously correlated// J. Amer. Statist. Assoc.-1967.-Vol.62.- P. 500-509.
- Pienaar L.V., Shiver B.D. Basal area prediction and projection equations for pine plantations // Forest Sci.-1986.-Vol. 32, N 3.- P. 626-633.
- Pindyck R.S., Rubinfeld D.L. Econometric models and econometric forecasts. Ed.2.-New York: McGraw-Hill, 1981.- 630 p.
- Reed D.D. Simultaneous estimation of tree taper and merchantable volume in loblolly pine // Va.J.Sci.(Abstr.).-1982.- Vol. 33.- P. 85.
- Reed D.D. Estimation procedures for analytically related growth and yield models// Proc. 1986 Soc. Amer. For. Nat. Conf. Soc. Amer. For.- Bethesda, MD, 1987.- 352 p.
- Reed D.D., Green E.J. Compatible stem taper and volume ratio equations // Forest Sci.-1984.- Vol. 30.- P. 977-990.
- Reineke L.H. Perfecting a stand density index for even-aged stands// J.Agric.Res.-1933.- Vol. 46.- P. 627-638.
- Richards F.L. A flexible growth function for empirical use// J.Experimental Bot.- 1959.- Vol. 10.- P. 290-300.
- Rönz B., Förster E. Regressions- und Korrelationsanalyse: Grundlagen-Methoden-Beispiele.-Wiesbaden: Gabler,1992.-370 s.
- Rothenberg T.J. Identification in parametric models // Econometrica.- 1971.- Vol. 39.- P. 577-592.
- Row C., Guttentberg S. Determining weight-volume relationships for saw logs // Forest Prod. Journ.-1966.-Vol.16, N 5.-P.39-47.
- SAS Institute Inc. SAS/ETS User's Guide, Version 5 Ed.- SAS Institute Inc.: Cary,NC.- 1984.- 738 p.
- Schumacher F.X. A new growth curve and its application to timber-yield studies// J. Forestry.-1939.-Vol.37.- P.819-820.
- Schumacher F.X. Volume-weight ratios of pine logs in the Virginia-North Carolina coastal plain // J. Forestry.- 1946.- Vol. 44.- P. 583-586.
- Schumacher F.X., Coile T.S. Growth and yield of natural stands of the southern pines.- Durham, N.C.: T.S.Coile,Inc, 1960.- 115 p.

Simmons E.M., Schnur G.L. Effect of stand density on mortality and growth of loblolly pine // J.Agric.Res.-1937.-Vol. 54.- P. 47-58.

Spurr S.H. Forest inventory.-New York: Ronald Press.-1952.- 476 p.

Srivastava V.K., Giles D.E.A. Seemingly unrelated regression equations models.- New York: Marcel Dekker,1987.- 256 p.

Stahelin R. Thinning even-aged loblolly and slash pine stands to specified densities// J.Forestry.-1949.-Vol.47.-P.538-540.

Sullivan A.D. Estimation of simultaneous forest growth and yield parameters from remeasurement plot data.- Ph.D.Thesis, Univ.Ga., Athens., 1969.- 45 p. (Diss,Abstr.Int.-1969.- Vol. 30, N 7.- P. 2977-B).

Sullivan A.D., Clutter J.L. A simultaneous growth and yield model for loblolly pine// Forest Sci.-1972.-Vol.18, N 1.- P. 76-86.

Summers R. A capital intensive approach to the small sample properties of various simultaneous equation estimators // Econometrica.- 1965.- Vol. 33.- P. 1-41.

Swindel B.F. On the estimation of forest growth parameters in a linear model with correlated errors.- Ph.D.Thesis, North Carolina State Univ., Univ.Microfilms, Ann.Arbor., Mich., 1968.- 114 p. (Diss.Abstr.Ser. B 29.- P. 807).

Theil H. Repeated least-squares applied to complete equation systems.- The Hague: The Central Planning Bureau, The Netherlands.- 1953.

Thomasius H.O. Kritik der Wachstumsfunktion von G.Backman// Wiss.Z.Techn.Univ.Dresden.-1965.-Bd.14, N 4.- S.1019-1031.

Turnbull K.J. Population dynamics in mixed forest stands. A system of mathematical models of mixed stand growth and structure.- Ph.D.Thesis. Univ.Washington, Seattle,WA.-1963.

Van Deusen P.C. Simultaneous estimation with a squared error loss function// Can.J.For.Res.-1988.-Vol.18.- P. 1093-1096.

Warren W.G. Record of preplanned and spontaneous discussions concerning the paper by Furnival G.M. and Wilson R.W. "Systems of equations for predicting forest growth and yield"// Statistical Ecol.- 1971.- Vol. 3.- P. 56-57.

Waugh F.W. Cobweb models // J.Farm.Econ.-1964.-Vol.46.- P. 732-750.

Wenger K.F., Evans T.C., Lotti T., Cooper R.W., Brender E.V. The relation of growth to stand density in natural loblolly pine stands // U.S.Forest Serv. Southeast.Forest Expt. Sta.- 1958.- Paper 97.- 10 p.

White H. A heteroscedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroscedasticity // Econometrica.- 1980.- Vol. 48.- P. 817-838.

Wickens M.R. The consistency and efficiency of generalized least squares in simultaneous equation systems with autocorrelated errors //Econometrica.-1969.-Vol.37.- P. 654-659.

Zellner A. An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias //J.Amer. Statist. Assoc.- 1962.- Vol. 57.- P. 348-368.

Zellner A., Theil H. Three-stage least squares: simultaneous estimation of simultaneous equations //Econometrica.- 1962.- Vol. 30.- P. 54-78.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	3
I. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ.....	5
I.1. Структурные формы систем связанных уравнений.....	5
I.2. Проблема оценки параметров в одновременных системах	10
I.3. Проблема идентификации системы одновременных уравнений.....	15
2. СОВМЕСТИМЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РОСТА И ПРИРОСТА ДРЕВОСТОЕВ.....	18
2.1. Краткая предыстория появления совместимых моделей прироста и роста древостоев.....	19
2.2. Совместимые модели наличного запаса и его прироста в разновозрастных древостоях.....	22
2.3. Совместимые модели запаса и его прироста в разновозрастных древостоях.....	25
2.4. Совместимые модели общей производительности и ее прироста в разновозрастных древостоях.....	29
3. РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ОДНОВРЕМЕННЫХ СОВМЕСТИМЫХ МОДЕЛЕЙ В ЛЕСОВОДСТВЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ.....	35

3.1.	Оценка параметров совместимых уравнений роста и прироста древостоев методом максимального правдоподобия	35
3.2.	Оценка параметров несовместимых систем уравнений роста и прироста методами ОМНК, ЗМНК и ЭМНК.....	39
3.3.	Оценка параметров совместимых моделей роста и прироста древостоев методом ЭМНК.....	45
3.4.	Продвинутое варианты линейного метода ЭМНК для расчета одновременных систем уравнений.....	57
3.4.1.	Метод минимальной функции потерь.....	58
3.4.2.	Метод вспомогательной переменной.....	58
3.4.3.	Многошаговый метод наименьших квадратов (ММНК).....	64
4.	ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ МЕЖРЕГРЕССИОННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ОШИБОК.....	71
5.	ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ РЕКУРСИВНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ТАКСАЦИИ ФИТОМАССЫ ДРЕВОСТОЕВ.....	77
5.1.	Рекурсивные взаимосвязи при анализе региональной изменчивости фитомассы древостоев.....	78
5.2.	Использование рекурсивной системы уравнений для корректной спецификации модели.....	82
5.3.	Системы рекурсивных уравнений при многоцелевом использовании оценочной модели фитомассы.....	83
5.4.	Рекурсивная система уравнений как способ согласования оценок фитомассы древостоев по составляющим фракциям	84
5.5.	Система рекурсивных взаимосвязей как способ совмещения оценочной модели фитомассы с традиционными таксационными нормативами и банками лесоустроительных данных.....	86
5.6.	Система рекурсивных уравнений при оценке предельных запасов фитомассы древостоев.....	89
5.7.	Рекурсивная система зависимостей как основа параметрического прогнозирования.....	94
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	95
	ЛИТЕРАТУРА.....	98
	ОГЛАВЛЕНИЕ.....	105

АННОТАЦИЯ

При моделировании процессов, протекающих в лесных экосистемах, изолированные зависимости редко дают адекватные результаты. Раздельное описание основополагающих зависимостей регрессионными уравнениями приводит к тому, что полученные оценки характеристик будут несбалансированы. Обычно динамика лесных экосистем более эффективно описывается с помощью нескольких закономерностей, частично или полностью взаимозависимых. Математические зависимости, объединенные в единую логически непротиворечивую концепцию, образуют систему связанных уравнений, основным достоинством которой является внутренняя согласованность описываемых закономерностей.

В работе дается общее представление о двух категориях связанных уравнений - рекурсивных и одновременных. На конкретных примерах показано развитие методов оценки их параметров от обычного метода наименьших квадратов (ОМНК) к двухшаговому (ЗМНК), затем к трехшаговому (ЭМНК) и, наконец, к многошаговому (ММНК) методам наименьших квадратов. Особое внимание уделено применению названных методов к расчету совместимых моделей роста и прироста древостоев. На конкретных примерах изложены различные варианты применения рекурсивных систем уравнений при оценке фитомассы деревьев и древостоев.

USOLTSEV V.A. USE OF A SYSTEM OF RELATED REGRESSION EQUATIONS IN FORESTRY RESEARCH. Ekaterinburg: Urals State Forest Engineering Academy, 1997.- 108 p.

ABSTRACT

When modeling basic processes proceeding in forest ecosystems, isolate estimates seldom produce adequate enough results. Separate describing some basic dependences by means of regression equations is resulted in obtaining non-balanced estimations of some investigated values. Usually forest ecosystem dynamics is described more effectively using a number of relationships that are interdependent partly or completely. Mathematical dependencies united into some common and logically non-contradictory conception form a system of related equations. Their principal merit is inherent co-ordination of described regularities.

A common presentation of two categories of related equations, i.e. recursive and simultaneous ones, is given in this book. Using a number of real examples, development of the methods of their parameter estimation is shown from ordinary least squares (OLS) to two-stage least squares (2SLS), then to three-stage least squares (3SLS) and finally to multistage least squares (MSLS). A particular attention is given to application of these methods to development of compatible growth and yield models for forest stands. Using some concrete examples, different applications of recursive equation systems to estimation of forest tree and stand biomass are shown.

Владимир Андреевич Усольцев

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ СВЯЗАННЫХ
РЕГРЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ
В ЛЕСОВОДСВЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ