ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУ ВПО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

Н.Л. Воронцова
А.В. Маргулян
Н.К. Орехова
Е.С. Филимонова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Методические указания
к проведению практических занятий
и выполнению индивидуальных заданий
для студентов очной формы обучения
всех специальностей и направлений

Екатеринбург
2009

Рассмотрены и рекомендованы к изданию методической комиссией ФЭУ. Протокол № 5 от 24 ноября 2008 г.

Рецензент доцент В.М. Мухина

Редактор Н.А. Майер
Оператор Г.И. Романова

Подписано в печать 14.09.09		Поз. 5
Плоская печать	Формат 60×84 1/16	Тираж 300 экз.
Заказ №	Печ. л. 1,39	Цена 4 руб. 80 коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

Плоскость в пространстве

1. В декартовых прямоугольных координатах уравнение любой плоскости в пространстве $OXYZ$ определяется уравнением первой степени относительно переменных *x, y, z*. Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

называется ***общим уравнением плоскости***. Коэффициенты *A, B, C* – координаты вектора, перпендикулярного плоскости, и одновременно не равны нулю.

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ называется ***нормальным вектором плоскости***.

Если в уравнении (1) $D = 0$, то плоскость проходит через начало системы координат и ее уравнение имеет вид

$$Ax + By + Cz = 0\,. \tag{2}$$

Если в уравнении (1) $C = 0$, то уравнение принимает вид

$$Ax + By + D = 0 \tag{3}$$

и плоскость параллельна оси OZ.

Аналогично, если $B = 0$, то уравнение плоскости

$$Ax + Cz + D = 0 \tag{4}$$

и плоскость параллельна оси OY.

Если $A = 0$, то уравнение имеет вид

$$By + Cz + D = 0 \tag{5}$$

и плоскость параллельна оси OX.

Если в уравнениях (3), (4), (5) $D = 0$, то уравнения принимают вид

$$Ax + By = 0 \tag{6}$$

$$Ax + Cz = 0 \tag{7}$$

$$By + Cz = 0\,. \tag{8}$$

Эти плоскости проходят соответственно через оси OZ, OY, OX.

Если в уравнении (1) $A = B = 0$, то уравнение плоскости примет вид

$$Cz + D = 0\,. \tag{9}$$

Если в уравнении (1) $B = C = 0$, то уравнение примет вид

$$Ax + D = 0\,. \tag{10}$$

При $A = C = 0$ уравнение примет вид

$$By + D = 0. \qquad (11)$$

Эти плоскости параллельны плоскостям XOY, YOZ, XOZ.

Если в уравнениях (9), (10), (11) $D = 0$, то получим уравнения координатных плоскостей: $Z = 0 \ (XOY)$, $X = 0 \ (YOZ)$, $Y = 0 \ (XOZ)$.

2. Если плоскость проходит через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости, то уравнение этой плоскости имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + D = 0 \qquad (12)$$

и называет*ся **уравнением связки плоскостей***.

3. Если плоскость отсекает на координатных осях отрезки $a, \ b, \ c$, то ее уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (13)$$

Это ***уравнение называется уравнением плоскости в отрезках***.

4. ***Угол между двумя плоскостями***, заданными уравнениями $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0$ и $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 = 0$, вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|}, \qquad (14)$$

где $\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$.

5. ***Условие перпендикулярности двух плоскостей:***

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (15)$$

6. ***Условие параллельности двух плоскостей:***

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (16)$$

7. ***Расстояние*** d ***от точки*** $M(x_0, y_0, z_0)$ ***до плоскости*** $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется формулой

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (17)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;3;-1)$ параллельно плоскости XOZ.

Решение. Уравнение плоскости, параллельной плоскости XOZ, имеет вид $By+D=0$. Подставляем в уравнение координаты точки A, получим $3y+D=0$ $D=-3B$. Подставляя в уравнение $By+D=0$ значение D, получаем $By-3B=0$. Сокращая на B, получаем уравнение плоскости $y-3=0$.

Ответ: $y-3=0$.

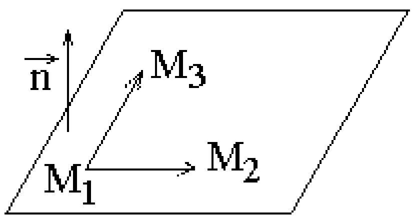
Пример 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось OX и через точку $M(2;1;-2)$.

Решение. Уравнение плоскости в данном случае имеет вид $By+Cz=0$. Подставляем в уравнение координаты точки M, получим $B-2C=0$. Отсюда $B=2C$. Тогда $2\tilde{N}y+Cz=0$ и, сокращая уравнение на C, имеем $2y+z=0$.

Ответ: $2y+z=0$.

Пример 3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;-1)$, $M_2(-1;0;4)$ и $M_3(-2;-1;1)$.

Решение.



Чтобы написать уравнение плоскости, достаточно знать координаты одной точки, через которую проходит точка, и координаты нормального вектора плоскости: $\vec{n}=(A,B,C)$. Введем векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$.

$\overline{M_1M_2}=(-2;-2;5)$, $\overline{M_1M_3}=(-3;-3;2)$. Вектор $\vec{n}$ перпендикулярен векторам $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$. Тогда $\vec{n}=\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}$ и

$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}=11\vec{i}-11\vec{j}$, т.е. $\vec{n}=(11;-11;0)$. Уравнение плоскости имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Подставляем координаты точки A в данное уравнение, получим $11(x-1)-11(y-2)=0$. Отсюда $x-y+1=0$.

Ответ: $x-y+1=0$

Пример 4. Найти расстояние между двумя плоскостями

P: $2x+3y-4z+16=0$ и

Q: $4x+6y-8z+3=0$.

Решение. Плоскости *P* и *Q* параллельны, так как $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$. Поэтому для решения задачи достаточно на одной из плоскостей выбрать точку и найти расстояние от этой точки до плоскости по формуле

$$d=\frac{\left|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Выберем на плоскости *P* произвольную точку, например $M_0=(0;0;4)$. Тогда расстояние от точки M_0 до плоскости *Q* равно

$$d=\frac{\left|4\cdot 0+6\cdot 6-8\cdot 4+3\right|}{\sqrt{4^2+6^2+8^2}}=\frac{29}{\sqrt{116}}=\frac{29}{2\cdot\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{29}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Прямая линия в пространстве

8. Прямую линию в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+Cz_1+D_1=0, \\ Ax_2+By_2+Cz_2+D_2=0. \end{cases} \tag{18}$$

Эти уравнения называются ***общими уравнениями прямой***.

9. ***Канонические уравнения прямой*** имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{19}$$

где (x_0, y_0, z_0) – координаты точки, через которую проходит прямая; (m, n, p) – координаты направляющего вектора прямой ℓ.

Направляющий вектор прямой – это ненулевой вектор $\vec{s}=(m,n,p)$, коллинеарный прямой ℓ или лежащий на данной прямой.

10. Если в уравнении (19) каждое из отношений приравняем к некоторому параметру ***t***, то получим ***параметрические уравнения прямой***

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t, \text{ отсюда}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (20)$$

11. ***Уравнение прямой, проходящей через две данные точки*** $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (21)$$

12. ***Угол между двумя прямыми***

$\frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1} = \frac{z - z_0}{p_1}$ и $\frac{x - x_0}{m_2} = \frac{y - y_0}{n_2} = \frac{z - z_0}{p_2}$ определяется из формулы

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (22)$$

13. ***Условие параллельности*** двух прямых имеет вид

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (23)$$

14. ***Условие перпендикулярности*** двух прямых имеет вид

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + z_1 z_2 = 0. \qquad (24)$$

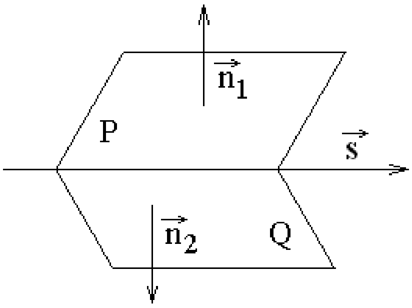
Пример 5. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0 = (2; -2; 3)$ параллельно прямой $\ell: \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z - 2}{2}$.

Решение. Для решения этой задачи достаточно знать координаты точки и координаты направляющего вектора прямой. Координаты точки известны, а так как прямые по условию задачи параллельны, то за направляющий вектор искомой прямой можно принять направляющий вектор данной прямой $\vec{s} = (3; -1; 2)$ (23). Тогда уравнения имеют вид

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z - 3}{2}.$$

Пример 6. Преобразовать уравнение прямой $\begin{cases} 2x + 3y + 2z + 8 = 0, \\ x - y - z - 9 = 0 \end{cases}$ к параметрическому виду.

Решение. Для решения задачи необходимо найти точку, лежащую на прямой, то есть на линии пересечения плоскостей. Решим систему $\begin{cases} 2x + 3y + 2z + 8 = 0, \\ x - y - z - 9 = 0. \end{cases}$ Пусть $x = 0$, тогда $\begin{cases} 3y + 2z + 8 = 0, \\ y - z - 9 = 0. \end{cases}$



Решая систему, получим $y=10$, $z=-19$. Точка $M(0;10;-19)$ лежит на прямой. Направляющий вектор прямой можно рассматривать как векторное произведение векторов $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$, где $\overrightarrow{n_1}$ – нормальный вектор плоскости $\boldsymbol{P}$, а $\overrightarrow{n_2}$ – нормальный вектор плоскости $\boldsymbol{Q}$.

$\overrightarrow{n_1}=(2;3;2)$, $\vec{n_2}=(1;-1;-1)$. $\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$.

$$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}.$$

Тогда канонические уравнения прямой запишутся в виде

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-10}{4}=\frac{z+19}{-5}.$$

Перейдем к параметрическим уравнениям $\frac{x}{-1}=\frac{y-10}{4}=\frac{z+19}{-5}=t$.

Отсюда $\begin{cases}x=-t,\\ y=4t+10,\\ z=-5t-19.\end{cases}$

Пример 7. Найти угол между прямыми $\ell_1:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-5}{1}$ и $\ell_2:\ \begin{cases}x-y+2z-4=0\\ 2x+y-z-5=0\end{cases}.$

Решение. Воспользуемся формулой (22). Для этого надо найти направляющие векторы прямых ℓ_1 и ℓ_2. Направляющий вектор прямой ℓ_1 имеет вид $\overrightarrow{s_1}=(2;-2;1)$. Направляющий вектор прямой ℓ_2 найдем из условия $\overrightarrow{s_2}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$ (см. задачу 3)

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}, \qquad \overrightarrow{s_2}=(-1;5;3).$$

Тогда $\cos\varphi = \frac{2(-1)+(-2)5+13}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+5^2+3^2}} = \frac{-9}{3\sqrt{35}} = \frac{-3}{\sqrt{35}} = -\frac{3}{\sqrt{35}} = -0{,}51$.

Ответ: $\cos\varphi = -0{,}51$.

Пример 8. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M=(1;-5;3)$ перпендикулярно прямым $\ell_1: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$ и

$$\ell_2: \begin{cases} x = 3t+1, \\ y = -t-5, \\ z = 2t+3. \end{cases}$$

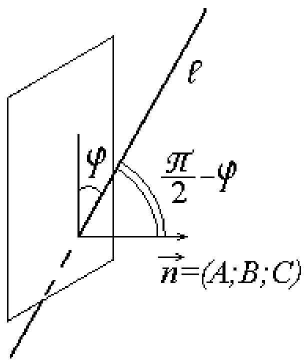
Решение. Направляющий вектор искомой прямой $\vec{s} = \vec{s_1}\times\vec{s_2}$, где $\vec{s_1} = (2;3;-1)$ и $\vec{s_2} = (3;-1;2)$. Тогда $\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 7\vec{j} - 11\vec{k}$, то есть $\vec{s} = (5;-7;-11)$.

Канонические уравнения прямой запишем по формуле (19):

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+5}{-7} = \frac{z-3}{-11}.$$

Прямая и плоскость в пространстве

Пусть уравнения прямой ℓ заданы в каноническом виде $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, а уравнение плоскости задано общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$.

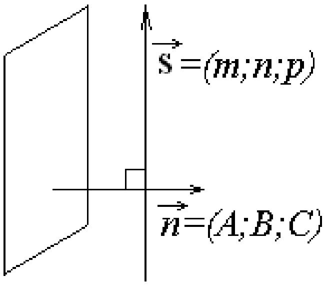


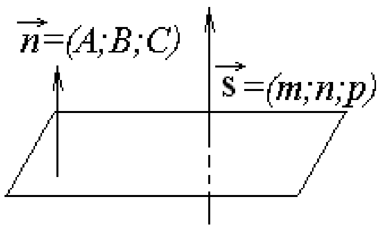
15. Тогда ***угол*** φ ***между прямой и плоскостью*** определяется из формулы

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin\varphi = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \quad (25)$$

16. ***Условие параллельности прямой и плоскости*** имеет вид

$$Am + Bn + Cp = 0\,. \qquad (26)$$





17. ***Условие перпендикулярности прямой и плоскости*** имеет вид

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}\,. \qquad (27)$$

Пример 9. При каком значении A плоскость $P:\ Ax + 6y - 4z + 1 = 0$ перпендикулярна прямой $\ell:\ \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$.

Решение. По условию задачи $\vec{s} = (4;3;-2)$, $\vec{n} = (A;6;-4)$. По условию перпендикулярности прямой и плоскости (27) $\dfrac{A}{4} = \dfrac{6}{3} = \dfrac{-4}{-2}$. Тогда, решая пропорцию, получаем $A = 8$.

Ответ: $A = 8$.

Пример 10. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 8 = 0$.

Решение. Так как координаты точки пересечения прямой и плоскости должны удовлетворять уравнениям и прямой и плоскости, то для нахождения их надо решить систему уравнений. Для этого в уравнение плоскости подставляем значения x, y, z.

$$3(5t+7) - (t+1) + 2(4t+5) - 8 = 0\,.$$

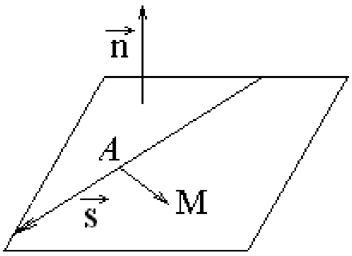
Решив уравнение, получим значение параметра $t = -1$.

Подставив $t = -1$ в уравнения прямой, получим координаты точки $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$.

Ответ: $M(2;0;1)$.

Пример 11. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;1;-2)$ и прямую $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{5}$.

Решение. На прямой лежит точка $A(1;3;0)$. Введем вектор $\overrightarrow{AM}$.



$\overrightarrow{AM}=(0;-2;-2)$.

$\vec{n}\perp\vec{s}$, $\vec{n}\perp\overrightarrow{AM}$.

Тогда $\vec{n}=\vec{s}\times\overrightarrow{AM}$.

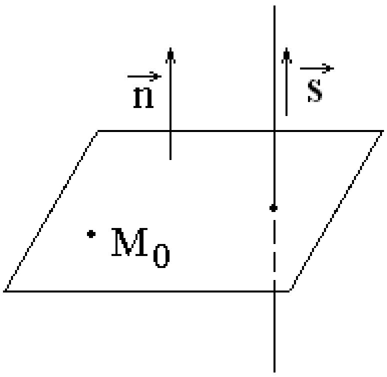
$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 5\\ 0 & -2 & -2\end{vmatrix}=8\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k},\quad \vec{n}=(8;4;-4).$$

Уравнение плоскости запишется в виде $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Подставляя координаты точки $A(1;3;0)$ и координаты нормального вектора плоскости $\vec{n}=(8;4;-4)$, получаем $8(x-1)+4(y-1)-4(z+2)=0$.

После преобразований уравнение примет вид $2x+y-z-8=0$.

Ответ: $2x+y-z-8=0$

Пример 12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;2;-1)$ перпендикулярно прямой



$$\begin{cases} x=t+3,\\ y=-3t+2,\\ z=4t-1.\end{cases}$$

Решение. Уравнение плоскости записываем в виде $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Направляющий вектор прямой $\vec{s}=(1;-3;4)$.

Воспользуемся условием (27): $\dfrac{A}{1}=\dfrac{B}{-3}=\dfrac{C}{4}$.

Но так как координаты $\vec{n}$ пропорциональны координатам $\vec{s}$, то уравнение плоскости примет вид $1(x-1)-3(y-2)+4(z+1)=0$.

Упростив это уравнение, получим $x-3y+4z+9=0$.

Ответ: $x-3y+4z+9=0$.

Поверхности второго порядка

Уравнение поверхности второго порядка определяется уравнениями второй степени относительно переменных $x,\ y,\ z$:

$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Px+Qy+Kz+L=0$, где хотя бы один из коэффициентов $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ не равен нулю.

Цилиндрические поверхности

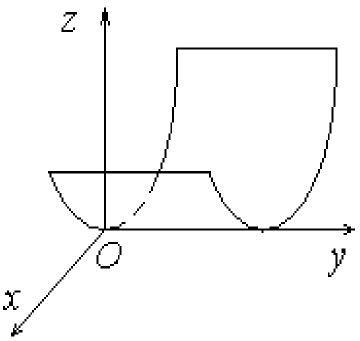
Цилиндрической поверхностью называется поверхность, описанная прямой (***образующей***), которая движется, оставаясь параллельной данной прямой и пересекая данную кривую (***направляющую***).

Если цилиндрические поверхности такие, что образующие их параллельны одной оси координат, а направляющей является плоская кривая, лежащая в одной из координатных плоскостей, то уравнения таких поверхностей содержат только две переменные. В них отсутствует переменная, одноимённая с той координатной осью, которой параллельны образующие. Например, всякое уравнение вида

$$F(x,y)=0 \text{ или } y=f(x) \tag{28}$$

определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны оси OZ, а направляющая лежит в плоскости XOY.

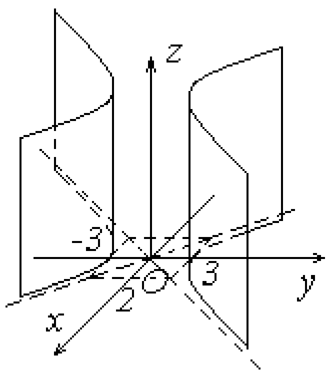
Пример 13. Определить вид поверхности $x^2=3z$ и построить ее.



Решение. Данное уравнение содержит только две переменные x, z. Оно определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующая параллельна оси OY, а направ-ляющей служит парабола $x^2=3z$, лежащая в плоскости XOZ.

Такая поверхность называется ***параболическим цилиндром***.

Пример 14. Определить вид поверхности $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ и построить ее.



Решение. Это цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси OZ, а направляющей является гипербола $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, лежащая в плоскости XOY.

Эта поверхность называется ***гиперболическим цилиндром***.

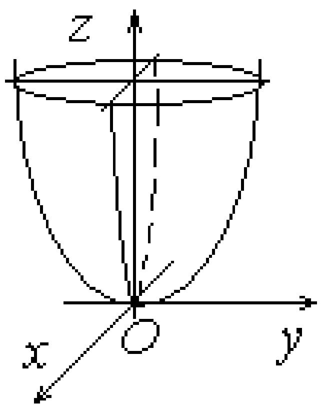
Поверхности вращения

Уравнение поверхности вращения в общем случае содержит три текущие координаты x, y, z. Вид поверхности вращения определяют обычно методом сечений. Для этого пересекают поверхность плоскостями, параллельными координатным плоскостям, или самими координатными плоскостями.

Пример 15. Определить вид поверхности $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ и построить ее.

Решение. 1. Пересекая данную поверхность плоскостью YOZ, ее уравнение $X = 0$, получим $z = \frac{y^2}{9}$. Это уравнение параболы, лежащей в плоскости YOZ.

2. Пересекая поверхность плоскостью XOZ $(Y = 0)$, получим $z = \frac{x^2}{4}$. Это уравнение параболы, лежащей в плоскости XOZ.



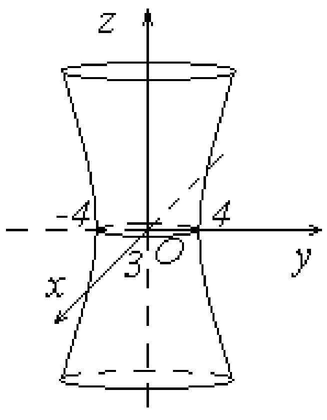
3. Пересекая поверхность плоскостью $Z = 4$, то есть плоскостью параллельной плоскости XOY, получим $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 4$ и после преобразования $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$. Это уравнение эллипса, лежащего в плоскости $Z = 4$.

4. При $Z = 0$ получим точку $O(0,0,0)$.

Эта поверхность называется ***эллиптическим параболоидом***.

Пример 16. Определить вид поверхности $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{36} = 1$ и построить ее.

Решение. 1. Пересекая поверхность плоскостью $X = 0$, получим $\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{36} = 1$. Это уравнение гиперболы, лежащей в плоскости YOZ.

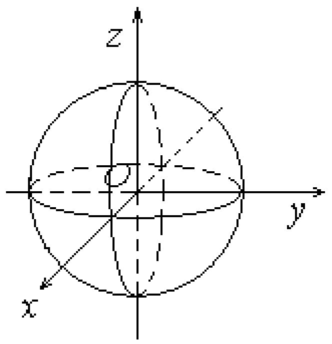


2. Пересекая поверхность плоскостью $Y = 0$, получим $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1$. Это уравнение гиперболы, лежащей в плоскости XOZ.

3. Пересекая поверхность плоскостью $Z = 0$, получим $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. Это уравнение эллипса, лежащего в плоскости XOY.

Эта поверхность называется ***однополостным гиперболоидом***.

Пример 17. Определить вид поверхности $x^2+y^2+z^2=R^2$ и построить ее.



Решение. Пересекая поверхность плоскостями $X=0$, $Y=0$ и $Z=0$, видим, что в каждом из сечений лежит окружность, радиус которой равен R.

Эта поверхность называется ***сферой***.

Задачи для самостоятельного решения

1. Плоскость

1.1. Даны точки $A(2;-1;0)$ и $B(1;3;-2)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *B* перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$.

1.2. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину, если $A(2;3;-1)$, $B(0;1;-3)$.

1.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2;1;0)$ и $B(4;-3;-3)$ параллельно оси OX.

1.4. Уравнение плоскости P: $x-y+z-5=0$, плоскость *Q* проходит через точки $A(-2;0;3)$, $B(-3;1;4)$, $C(1;2;0)$. Найти угол между плоскостями *P* и *Q*.

1.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-2;1)$ и отсекающей на осях OX и OY отрезки $a=5$, $b=4$.

1.6. Плоскость P проходит через точки $A(1;0;2)$, $B(3;-1;1)$, $C(4;0;3)$. Плоскость *Q* задана уравнением $5x-4y-5z+1=0$. Найти расстояние между плоскостями P и *Q*.

1.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-1;-2)$ перпендикулярно плоскостям: $2x-3y+5z=0$, $4x+y-2=0$.

1.8. Найти расстояние от точки M(1;-1;0) до плоскости, проходящей через точку $A(2;0;-4)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(-2;2;-1)$.

1.9. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x-2y+z-5=0$ и проходящей через точку $M(3;4;-5)$. Найти расстояние между этими плоскостями.

1.10. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки $A(-1;0;1)$, $B(1;1;2)$.

1.11. Точка $M(3;4;5)$ одинаково удалена от оси OZ и от плоскости $2x+2y+z+D=0$. Найти коэффициент *D*.

1.12. Найти угол между плоскостями *P* и *Q*, если плоскость *P* имеет уравнение $16x+8y+2z=0$, а плоскость *Q* проходит через начало координат перпендикулярно вектору $\vec{n}=(2;-1;-2)$.

1.13. Плоскость *P* параллельна плоскости *Q:* $3x-4z+3=0$ и проходит через точку $A(-1;2;-3)$. Составить уравнение плоскости *P* и найти расстояние от нее до начала координат.

1.14. Плоскости *P*: $2x+3y-6z=0$ и *Q:* $3x+4y+Cz-3=0$ перпендикулярны. Найти значение параметра C и точку пересечения плоскости *Q* с осью ординат.

1.15. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскостям: $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$.

1.16. Вершины тетраэдра: $A(-1;2;5)$, $B(0;-4;5)$, $C(-3;2;1)$, $D(1;2;4)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через вершину D параллельно плоскости грани ABC.

1.17. Можно ли провести плоскость через четыре точки: $A(2;1;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;4;-2)$, $D(-1;2;0)$? Если можно, то составить ее уравнение.

1.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки: $A(3;1;0)$, $B(0;1;2)$ и $C(-1;0;-5)$. Точка $D(6;1;z)$ лежит в этой плоскости. Найти координату z.

1.19. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;2;3)$, $B(2;-1;3)$ параллельно вектору $\vec{p}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

1.20. В плоскости $2x+3y-5z-1=0$ лежат три точки $A(a;b;1)$, $B(3;b;-2)$, $C(1;3;m)$. Найти координаты $a,\ b,\ m$.

1.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(3;1;0) и B(0,1,2) перпендикулярно плоскости $x-2y+3z-5=0$.

1.22. Определить, при каком значении коэффициента С плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x+3y+2z+5=0$ перпендикулярны? Будет ли точка $N\left(-\dfrac{8}{7};-\dfrac{9}{7};0\right)$ лежать на линии пересечения этих плоскостей?

1.23. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $B(2;-1;1)$ перпендикулярно к двум плоскостям: $3x-y+2z-1=0$ и $2x+4y-5z+3=0$.

1.24. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и точки $A(2;-1;3)$ и $B(4;1;1)$.

1.25. Точка $B(-1;2;z)$ находится от начала координат на расстоянии трех единиц. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $O(0;0;0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OB}$.

2. Прямая в пространстве

2.1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(3;-1;2)$ перпендикулярно прямым $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+1}{-1}$ и $\begin{cases} x=2+3t, \\ y=-1-t, \\ z=5-4t. \end{cases}$

2.2. Записать уравнения прямой $\begin{cases} 3x+4y-z+3=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ в параметрическом виде.

2.3. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-3;1;2)$ параллельно прямой $\begin{cases} x-2y-z-9=0, \\ 2x-z-6=0. \end{cases}$

2.4. Найти острый угол между двумя прямыми $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ и $\begin{cases} y-z+6=0, \\ 4x-7y-14=0. \end{cases}$

2.5. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(3;-1;4)$ и $B(2;1;5)$. Найти точку пересечения этой прямой с плоскостью XOY.

2.6. Найти направляющий вектор прямой $\begin{cases} 2x-y+2z+5=0, \\ x-y-z-8=0. \end{cases}$

2.7. Определить угол между двумя прямыми: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x=z+2, \\ y=3-z. \end{cases}$

2.8. Привести к каноническому виду уравнения прямой $\begin{cases} 2x+4y-5z+8=0, \\ x-3y+4z-14=0. \end{cases}$

2.9. Найти острый угол между двумя прямыми $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$ и $\begin{cases} x=3-t, \\ y=2+3t, \\ z=1-2t. \end{cases}$

2.10. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;-5;3)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$

2.11. Найти угол между двумя прямыми $\begin{cases} 2x+3y+4z-8=0, \\ 2x+y-z-4=0 \end{cases}$ и $\frac{x+2}{4}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-1}{-2}$.

2.12. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-3;2;4)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x-y+5z-1=0, \\ x-3z+2=0. \end{cases}$

2.13. Найти угол между двумя прямыми $\begin{cases} x-y+2z-8=0, \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3+2t, \\ y=-1+t, \\ z=4-t. \end{cases}$

2.14. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через начало координат перпендикулярно прямым $\frac{x+4}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$.

2.15. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;-5;3)$, перпендикулярно прямым $\begin{cases} 2x+3y-z=0, \\ x-y+z+5=0 \end{cases}$ и $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z}{4}$.

2.16. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через середину отрезка AB, где $A(2;3;1)$ и $B(-4;1;3)$ параллельно прямой $\begin{cases} x=3-4t, \\ y=2+3t, \\ z=-1+2t. \end{cases}$

2.17. Найти угол между двумя прямыми $\begin{cases} 2x+3y-5=0, \\ 3x-z+1=0 \end{cases}$ и $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z-2}{1}$.

2.18. Найти угол между двумя прямыми $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-2}$ и $\begin{cases} x=2+t, \\ y=-1+t, \\ z=5-4t. \end{cases}$

2.19. Привести уравнения прямой $\begin{cases} x+2y-3z-2=0, \\ 3x-4y+6z-21=0 \end{cases}$ к каноническому виду.

2.20. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(0;-1;1)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x-4y+z+1=0, \\ 2x+y+3z-3=0. \end{cases}$

2.21. Найти угол между двумя прямыми $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x=z+1, \\ y=1-z. \end{cases}$

2.22. Составить параметрические уравнения прямой, соединяющей точки $A(2;-3;4)$ и $B(8;-5;7)$. Найти длину отрезка AB.

2.23. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(3;-1;-4)$ и середину отрезка CD, если $C(5;-1;4)$, $D(1;3;8)$.

2.24. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(-3;1;1)$ и $B(-2;0;4)$.

2.25. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-1;2;-2)$ параллельно прямой $\begin{cases} x+y=1, \\ y-z=1. \end{cases}$

3. Прямая и плоскость

3.1. Доказать, что прямая $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+3}{3}$ лежит в плоскости $2x+y-z=0$.

3.2. Доказать, что прямая, проходящая через точки $A(-1;-1;3)$ и $B(1;-2;6)$, параллельна плоскости $2x+y-z=0$.

3.3. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ с плоскостью $3x-2y+z-3=0$.

3.4. Найти точку, симметричную точке $A(3;1;1)$ относительно плоскости $2x-4y+2z-7=0$.

3.5. Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} x+z-1=0, \\ y-2=0 \end{cases}$ и плоскости $y-z=0$.

3.6. Найти угол между плоскостью $2x+y+5z-16=0$ и прямой, проходящей через точки $A(2;-1;-3)$ и $B(3;1;-1)$.

3.7. Найти проекцию точки $A(5;2;2)$ на плоскость $x+2y+3z-29=0$.

3.8. Найти угол между прямой $\begin{cases} 3x-y-1=0, \\ 3x+2z-2=0 \end{cases}$ и плоскостью $2x+y+z-4=0$.

3.9. Выяснить взаимное расположение прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ и плоскости $x+2y+3z-29=0$.

3.10. Выяснить взаимное расположение плоскости $x-y-z=0$ и прямой, проходящей через точки $A(1;-1;2)$ и $B(2;-3;5)$.

3.11. Выяснить взаимное расположение прямой, проходящей через точки $M(1;2;0)$ и $N(4;3;1)$ и плоскости $x+2y-5z=0$.

3.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;2;-3)$ перпендикулярно к прямой AB, где $A(4;-2;0)$, $B(5;4;-2)$.

3.13. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = t, \\ z = t-3 \end{cases}$ перпендикулярно плоскости $2x - y + z - 8 = 0$.

3.14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1;2;-3)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x-2=0, \\ y-z-1=0. \end{cases}$

3.15. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$ и точку $A(3;4;0)$.

3.16. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x = t-1, \\ y = 2t+1, \\ z = -3t \end{cases}$ и точку $A(1;0;-1)$.

3.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ перпендикулярно плоскости $2x + 3y - z = 4$.

3.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x = t-1, \\ y = t, \\ z = 2t+1 \end{cases}$ перпендикулярно плоскости $x + 2y - z + 1 = 0$.

3.19. Составить уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

3.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\begin{cases} x-3z+4=0, \\ y-z-2=0 \end{cases}$ и $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$.

3.21. Найти точку пересечения двух прямых $\begin{cases} x-z+2=0, \\ y-2z-1=0 \end{cases}$ и $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$.

3.22. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x = t, \\ y = 3t-1, \\ z = 4t+2 \end{cases}$ параллельно плоскости $2x - 3y + z = 0$.

3.23. Найти проекцию точки $M(3;1;-1)$ на плоскость $x+2y+3z-30=0$.

3.24. Найти угол между плоскостью $x+y-z=0$ и прямой, проходящей через точки $A(0;0;4)$, $B(2;0;0)$.

3.25. Найти проекцию середины отрезка AB на плоскость P,если $A(8;2;5)$, $B(-2;0;-7)$ и $P:3x+y+z-20=0$.

Поверхности второго порядка

Установить вид поверхности и построить ее:

4.1. $x^2=2y-4$

4.2. $16x^2+25y^2=400$

4.3. $x^2-4y^2=4$

4.4. $x^2+z=4$

4.5. $4x^2+9z^2=36$

4.6. $16x^2+9y^2=144$

4.7. $y-z^2=0$

4.8. $9y^2+16z^2=144$

4.9. $y^2-9y^2=9$

4.10. $x^2+y^2=2y$

4.11. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$

4.12. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}=-1$

4.13. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$

4.14. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{16}=0$

4.15. $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}=y$

4.16. $x^2+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$

4.17. $x=\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}$

4.18. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$

4.19. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=-1$

4.20. $-x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=-1$

4.21. $-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$

4.22. $\frac{x^2}{4}+y^2=-z$

4.23. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=-1$

4.24. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z$

4.25. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=z$

Ответы

1.1. $x-4y+2z+15=0.$

1.2. $x+y+z-1=0.$

1.3. $3y-4z-3=0.$

1.4. $x+z-1=0,\ \varphi=\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

1.5. $4x+5y+z-20=0.$

1.6. $d=\sqrt{\frac{6}{11}}$.

1.7. $5x-20y-14z-63=0.$

1.8. $d=\frac{4}{3}$.

1.9. $2x-2y+z+7=0,\ d=4.$

1.10. $x-3y+z=0$.

1.11. $D=-4$.

1.12. $\varphi=\arccos\frac{10}{27}$.

1.13. $d=1,8.$

1.14. $C=3,\ \left(0;{}^{3}\!/_{4};0\right).$

1.15. $7x-y-5z=0$

1.16. $6x+y-3z+4=0.$

1.17. $2x+6y+7z-10=0.$

1.18. $2x-23y+3z+17=0,\ D(6;1;-2).$

1.19. $6x+2y-5z+5=0$.

1.20. $a=10,5;\ b=-5;\ m=2.$

1.21. $4x+11y+6z-23=0.$

1.22. $C=6,$ *Да.*

1.23. $3x-19y-14-11=0.$

1.24. $2x-5y-3z=0.$

1.25. $x-2y-2z=0,\ x-2y+2z=0.$

2.1. $\frac{x-3}{11}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{7}$

2.2. $\begin{cases} x=\frac{1}{7}+3t, \\ y=-\frac{6}{7}-4t, \\ z=-7t. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x=-3+2t, \\ y=1-t, \\ z=2+4t. \end{cases}$

2.4. $\varphi=\pi-\arccos\frac{23}{27}$.

2.5. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{-1},$
$(7;-9;0).$

2.6. $\vec{a}=(3;4;-1).$

2.7. $\varphi = 90^0$.

2.8. $\dfrac{x-3,2}{1} = \dfrac{y+3,6}{-13} = \dfrac{z}{-10}$

2.9. $\varphi = \arccos 0,175;\ \varphi \cong 79,9^0$

2.10. $\cos\varphi = \dfrac{10}{3\sqrt{165}};\ \varphi \approx 75^0$.

2.11. $\dfrac{x-2}{11} = \dfrac{y+5}{-17} = \dfrac{z-3}{-13}$.

2.12. $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-2}{11} = \dfrac{z-4}{1}$.

2.13. $\varphi = 90^0$.

2.14. $\dfrac{x}{10} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z}{-8}$

2.15. $\begin{cases} x = -2-17t, \\ y = 5-23t, \\ z = -3+7t. \end{cases}$

2.16. $\dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-2}{2}$

2.17. $\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{19}\sqrt{47}};\ \varphi \approx 84,2^0$

2.18. $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \varphi = 45^0$.

2.19. $\dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{2}$.

2.20. $\dfrac{x}{-13} = \dfrac{y-1}{-7} = \dfrac{z+1}{11}$

2.21. $\varphi = 90^0$.

2.22. $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$;
$|AB| = 7$.

2.23. $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-6}{10}$.

2.24. $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$.

2.25. $\begin{cases} x = -1-t, \\ y = 2+t, \\ z = -2+t. \end{cases}$

3.3. $(5;5;-2)$

3.4. $\left(\dfrac{7}{2};0;\dfrac{3}{2}\right)$

3.5. $(-1;2;2)$

3.6. $\sin\varphi = \dfrac{14}{3\sqrt{30}}$

3.7. $(6;4;5)$

3.8. $\sin\varphi = 1/\sqrt{6}$

3.9. Прямая и плоскость пересекаются в точке $(6;4;5)$.

3.10. Прямая лежит в плоскости.

3.11. Прямая и плоскость параллельны.

3.12. $x+2y-2z-9=0$.

3.13. $x-2y-7=0$.

3.14. $y+z+1=0$.

3.15. $y-z-4=0$.

3.16. $x+y+z=0$.

3.17. $8x-5y+z-11=0.$

3.18. $5x-3y-z+6=0.$

3.19. $x+2y-2z-1=0$.

3.20. $5x-y-14z+22=0$.

3.21. $x+2y-5z=0$.

3.22. $2x-3y+z+5=0$.

3.23. $(5;5;5)$.

3.24. $\sin\varphi=2\sqrt{2}/3$.

3.25. $(6;2;0)$.

Содержание