Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет»

Кафедра автоматизации производственных процессов

Ордуянц Г.Г.

ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ. ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ, РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ.

Методические указания для самостоятельной работы студентов специальности 220301, 220200, 220400, 220700 по дисциплине «Теория автоматического управления»

Екатеринбург
2011

Рассмотрено и рекомендовано методической комиссией
Лесоинженерного факультета
Протокол № ___ от _____________ 2010 г.

Рецензент:

Редактор РИО:
Компьютерная верстка:

Подписано в печать		Поз.
Печать плоская	Формат 60х84 1/16	Тираж 100 экз.
Заказ №	Печ. л.	

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

Задача 1

Найти z – изображение единичной ступенчатой функции $x(t) = 1(t)$.
Решение. Соответствующая этой ступенчатой функции последовательность идеальных импульсов равна:
$x[nT_0] = 1[nT_0]$, $n = 1,2,...,\infty$.
z – изображение этой импульсной функции может быть найдено по выражению:
$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT_0]z^{-n} = 1\cdot z^0 + 1\cdot z^{-1} + 1\cdot z^{-2} + ... = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

Задача 2

Найти функцию $x(t)$, изображение которой $x(z) = \frac{T_0 z}{(z-1)^2}$.

Решение. Делением числителя на знаменатель размножим функцию $x(z)$ в ряд по убывающим ступеням z^{-n}. Получим:
$x(z) = T_0(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + ...)$.
Числовые коэффициенты этого ряда есть дискретные значения $x[nT_0]$ функции $x(t)$, т.е. $x(1T_0) = 1T_0$, $x(2T_0) = 2T_0$, $x(3T_0) = 3T_0, \ldots$, или $x[nT_0] = nT_0$. Отсюда нетрудно получить, что $x(t) = t$.

Задача 3, а

Дана структурная схема импульсной САР (рис. 1). Найти передаточную функцию замкнутой САР по ошибке. Оценить устойчивость замкнутой импульсной САР.

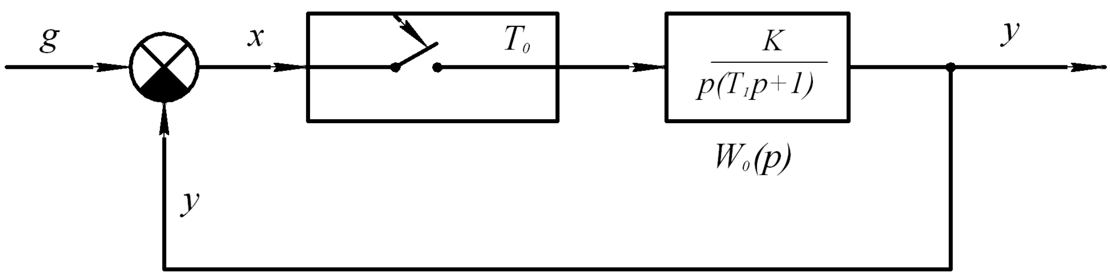

Рис. 1. Структурная схема импульсной САР

Исходные данные: K = 100 с$^{-1}$, период дискретности T_0 = 0,05 с, T_1 = 0,2 с, $\alpha = e^{-T_0/T_1} = 0{,}78$, скважность импульсов $\gamma = 0{,}1$. Передаточная функция непрерывной части импульсов САР задана:

$$W_0(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)}.$$

Решение. Найдем передаточную функцию разомкнутой импульсной САР, воспользовавшись известной формулой:

$$W(Z) = \gamma T_0 Z\{W_0(p)\} = \gamma T_0 Z\left\{\frac{K}{p(T_1 p + 1)}\right\}.$$

Для сведения выражения $W_0(p)$ к табличным операторам удобно разложить его на простые дроби.

$$\frac{K}{p(T_1 p + 1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{T_1 p + 1} = \frac{A(T_1 p + 1) + Bp}{p(T_1 p + 1)} = \frac{p(AT_1 + B) + A}{p(T_1 p + 1)}.$$

Отсюда получим:

$$\begin{cases} AT_1 + B = 0, \\ A = K. \end{cases}.$$

Совместное решение системы дает значение $B = -KT$. Тогда:

$$W(Z) = \gamma T_0 Z\left\{\frac{K}{p} - \frac{KT_1}{T_1 p + 1}\right\} = \gamma T_0 Z\left\{\frac{K}{p} - \frac{K}{p + \dfrac{1}{T_1}}\right\} = \gamma T_0\left(\frac{Kz}{z-1} - \frac{Kz}{z-\alpha}\right) =$$

$$= \frac{Kz\gamma T_0(1-\alpha)}{(z-1)(z-\alpha)} = \frac{0{,}11z}{(z-1)(z-0{,}78)},$$

где $\alpha = e^{-T_0/T_1}$.

Передаточная функция замкнутой импульсной САР:

$$W_{ЗАМ}(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{0{,}11z}{z^2 - 1{,}672z + 0{,}78}.$$

Передаточная функция по ошибке:

$$\Phi_x(z) = \frac{1}{1 + W(z)} = \frac{(z-1)(z-0{,}78)}{z^2 - 1{,}672z + 0{,}78}.$$

Оценим устойчивость замкнутой импульсной САР. Корни уравнения $H(Z) = Z^2 - 1{,}672 + 0{,}78 = 0$ должны быть по модулю меньше единицы:

$$z_{1,2} = 0{,}835 \pm \sqrt{(0{,}835)^2 - 0{,}78} = 0{,}835 \pm j0{,}29,$$

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{(0{,}835)^2 + (0{,}29)^2} = 0{,}886 < 1.$$

Импульсная САР устойчива.

Задача 3, б

На вход системы, структурная схема которой представлена на рис. 1, подана ступенчатая функция $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$. Найти *Z*-изображение $Y(z)$ выходного сигнала и ошибки $x(z)$.

Решение. Находим *z*-изображение выходного сигнала по выражению:

$$Y(z) = G(z) \cdot W_{ЗАМ}(z),$$

где *z* – изображение входного сигнала:

$$G(z) = Z\{g_0 \cdot 1(t)\} = \frac{g_0 z}{z-1}.$$

Тогда

$$Y(z) = \frac{g_0 z}{(z-1)} \cdot \frac{0{,}11(z)}{z^2 - 1{,}67z + 0{,}78} = \frac{0{,}11 g_0 z^2}{(z-1)(z^2 - 1{,}67z + 0{,}78)}.$$

Выражение $W_{ЗАМ}(z)$ передаточной функции замкнутой импульсной САР взято из решения предыдущей задачи 3,а.

z-изображение ошибки найдется по выражению:

$$x(z) = G(z)\Phi_x(z) = \frac{g_0 z}{z-1} \cdot \frac{(z-1)(z-0{,}78)}{z^2 - 1{,}67z + 0{,}78} = \frac{g_0 z(z-0{,}78)}{z^2 - 1{,}67z + 0{,}78}.$$

Задача 3, в

Найти разностное уравнение, связывающее выходную и входную величины системы по рис. 1, если передаточная функция ее в замкнутом состоянии равна:

$$W_{ЗАМ}(z) = \frac{0{,}11z}{z^2 - 1{,}67z + 0{,}78}.$$

Решение. Запишем выражение для $W_{ЗАМ}(z)$ несколько иначе, разложив числитель и знаменатель по убывающим степеням *z*. Для этого вынесем z^2 знаменателя за скобки. Получим:

$$W_{ЗАМ}(z) = \frac{0{,}11z}{z^2(1 - 1{,}67z^{-1} + 0{,}78z^{-2})} = \frac{0{,}11z^{-1}}{1 - 1{,}67z^{-1} + 0{,}78z^{-2}}.$$

Определим $Y(z)$:

$$Y(z) = G(z)W_{ЗАМ}(z) = G(z)\frac{0{,}11z^{-1}}{1 - 1{,}67z^{-1} + 0{,}78z^{-2}}.$$

Отсюда

$$Y(z)(1 - 1{,}67z^{-1} + 0{,}78z^{-2}) = G(z) \cdot 0{,}11z^{-1}.$$

Тогда искомое разностное уравнение будет иметь вид:

$$y[n] - 1{,}67y[n-1] + 0{,}78y[n-2] = 0{,}11g[n-1].$$

Задача 4

Передаточная функция замкнутой импульсной САР:

$$W_{ЗАМ}(z) = \frac{0{,}11}{z^2 - 1{,}78z + 0{,}89}.$$

Оценить устойчивость системы.

Решение. Найдем корни характеристического уравнения:

$$z^2 - 1{,}78z + 0{,}89 = H(z) = 0$$

$$z_{1,2} = 0{,}89 \pm \sqrt{0{,}89^2 - 0{,}89} = 0{,}89 \pm \sqrt{-0{,}1} = 0{,}89 \pm j0{,}35.$$

Модули корней $|z_1| = |z_2| = \sqrt{0{,}89^2 + 0{,}35^2} = 0{,}96 < 1$.

Система устойчива.

Задача 5

Дано характеристическое уравнение импульсной САР:

$$5z^3 + 2z^2 + 3z + 1 = 0.$$

Оценить устойчивость системы.

Решение. Применим подстановку:

$$z = \frac{1+w}{1-w}.$$

Тогда исходное уравнение запишется так:

$$5\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + 2\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + 3\frac{1+w}{1-w} + 1 = 0,$$

или

$$5(1+w)^3 + 2(1+w^2)(1-w) + 3(1+w)(1-w)^2 + 1 = 0.$$

После преобразования получим:

$$5w^3 + 13w^2 + 11w + 11 = 0.$$

Для оценки устойчивости системы можно применить любой из критериев, например, Вышнеградского. Все коэффициенты последнего уравнения должны быть положительными и произведение двух крайних должны быть больше произведения средних. Проверим:

$(5,13,11,11) > 0$ и $13 \cdot 11 > 5 \cdot 11$.

Итак, система устойчива.

Задача 6

Оценить устойчивость системы, характеристическое уравнение которой имеет вид: $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Решение. Применим подстановку:

$$z = \frac{1+w}{1-w},$$

Тогда

$$\frac{(1+w)^3}{1-w^3}+\frac{(1+w)^2}{(1-w)^2}+\frac{1+w}{1-w}+1=0\,.$$

После приведения к общему знаменателю получим:

$$(1+w)^3+(1-w)(1+w)^2+(1+w)(1-w)^2+(1-w)^3=0\,.$$

В результате преобразований получим уравнение:

$$4w^2+4=0\,,$$

корни которого $w_{1,2}=\pm j$.

Система неустойчива.

Задача 7

Определить запас устойчивости импульсной САР по модулю и по фазе. Передаточная функция САР в разомкнутом состоянии:

$$W(z)=\frac{\gamma T_0 K(1-\alpha)}{(z-1)(z-\alpha)}\,,$$

где $\gamma=0{,}1$; $T_0=0{,}05$ с; $K=100$ с$^{-1}$; $\alpha=e^{-T_0/T_1}=e^{-0{,}25}=0{,}78$; $T_1=0{,}2$ с

(T_0 – период дискретности, T_1 – постоянная времени).

Решение. Перейдем к частотной передаточной функции, введя замену

$$z=\frac{1+w}{1-w}\,,$$

а затем к абсолютной псевдочастоте $w=j\lambda\dfrac{T_0}{2}$.

Получим:

$$W(j\lambda)=\frac{10(1+0{,}025^2\lambda^2)}{j\lambda(1+j0{,}217\lambda)}\,.$$

Для частоты среза $\lambda_{ср}$ справедливо соотношение:

$$20\lg\left|W(j\lambda_{ср})\right|=0\,,$$

значит $\left|W(j\lambda_{ср})\right|=1$.

Это дает возможность определить частоту среза для полученной передаточной функции:

$$\frac{10(1+0{,}025^2\lambda_{ср}^2)}{\lambda_{ср}\sqrt{1+0{,}217^2\lambda_{ср}^2}}=1\,.$$

Решение уравнения дает

$$\lambda_{ср}\approx\sqrt{\frac{10}{0{,}217}}=6{,}8\ \text{с}^{-1}.$$

Для этой частоты запас устойчивости по фазе равен:

$$\mu=180^{\circ}+\varphi=180^{\circ}+(-90^{\circ}-arctg(0{,}217\lambda_{ср}))=90^{\circ}-arctg\,0{,}217\cdot 6{,}8=34^{\circ}$$

Из анализа предыдущего выражения видно, что фаза φ комплексной функции $W(j\lambda)$ достигает значения $\varphi = -180^\circ$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому запас устойчивости по модулю

$$\beta = \frac{1}{|W(j\infty)|} = \frac{0{,}217}{10 \cdot 0{,}026^2} \approx 35\,.$$

Задача 8

Построить амплитудно-фазовую (АФХ) частотную характеристику импульсного фильтра, z-передаточная функция которого:

$$W(z) = \frac{z}{z - 0{,}135}\,.$$

Период дискретности $T_0 = 1$ с.

Решение. Сделаем подстановку:

$$z = e^{pT_0} = e^{j\omega T_0} = \cos\omega T_0 + j\sin\omega T_0\,.$$

Получим частотную передаточную функцию фильтра:

$$W(e^{j\omega T_0}) = \frac{e^{j\omega T_0}}{e^{j\omega T_0} - 0{,}135} = \frac{\cos\omega T_0 + j\sin\omega T_0}{\cos\omega T_0 - 0{,}135 + j\sin\omega T_0}\,.$$

Модуль ее равен:

$$A(\omega T_0) = \left|W(e^{j\omega T_0})\right| = \frac{\sqrt{\cos^2\omega T_0 + \sin^2\omega T_0}}{\sqrt{(\cos\omega T_0 - 0{,}135)^2 + \sin^2\omega T_0}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}135^2 - 0{,}27\cos\omega T_0}}\,,$$

а фаза

$$\varphi = arctg\frac{\sin\omega T_0}{\cos\omega T_0} - arctg\frac{\sin\omega T_0}{\cos\omega T_0 - 0{,}135} = \omega T_0 - arctg\frac{\sin\omega T_0}{\cos\omega T_0 - 0{,}135}\,.$$

Анализ полученных выражений показывает, что АФХ (КЧХ) фильтра представляет собой окружность. При $\omega = 0$ и для всех $\omega T_0 = 2\pi n$, где $n = 1,2,3,...$ модуль и фаза получаются равными:

$$A_0 = A(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0{,}135)^2}} = \frac{1}{1 - 0{,}135} = 1{,}15\,,$$

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi n) = 0\,.$$

При $\omega T_0 = \pi(2n - 1)$ модуль и фаза получаются равными:

$$A(\pi(2n-1)) = \frac{1}{\sqrt{(-1 - 0{,}135)^2}} = \frac{1}{1 + 0{,}135} = 0{,}88\,,$$

$$\varphi(\pi(2n-1)) = \pm 180^\circ.$$

Радиус окружности $R = \dfrac{1}{1 - 0{,}135^2} = 1{,}01$, смещение центра ее вправо от начала координат $c = \dfrac{0{,}135}{1 - 0{,}135^2} = 0{,}136$.

На рис. 2 изображение АФХ (КЧХ) импульсного фильтра.

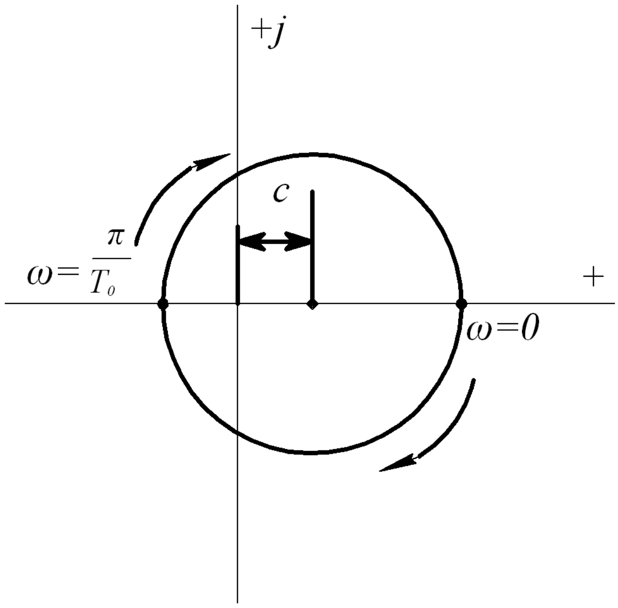

Рис. 2. АФХ (КЧХ) импульсного фильтра

Задача 9

На вход импульсной САР с передаточной функцией в замкнутом состоянии:

$$\Phi(z) = \frac{0{,}1}{z^2 - 1{,}3z + 0{,}4},$$

подается ступенчатая функция $x(t) = 1(t)$. Построить $y[nT]$ и определить время переходного процесса T_0 (период дискретности).

Решение. Запишем выходной сигнал:

$$Y(z) = \Phi(z) \cdot \bar{x}(z) = \frac{0{,}1}{z^2 - 1{,}3z + 0{,}4} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{0{,}1z}{(z-1)(z^2 - 1{,}3z + 0{,}4)}.$$

Оценим корни уравнения

$$z^2 - 1{,}3z + 0{,}4 = 0,$$

$$z_{1,2} = +0{,}65 \pm \sqrt{(0{,}65)^2 - 0{,}4} = 0{,}65 \pm \sqrt{0{,}0225} = 0{,}65 \pm 0{,}15,$$

$$z_1 = 0{,}8;\ z_2 = 0{,}5.$$

Тогда $Y(z)$ можно представить так:

$$Y(z) = \frac{0{,}1z}{(z-1)(z-0{,}8)(z-0{,}5)} = Z\left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0{,}8} + \frac{C}{z-0{,}5}\right).$$

Разложение на простые дроби дает:

$A = 1$; $B = -1{,}67$; $C = 0{,}67$.

Итак,

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{-1{,}67z}{z-0{,}8} + \frac{0{,}67z}{z-0{,}5},$$

$y[nT_0] = 1[nT_0] + (-1{,}67)e^{-\alpha n T_0} + 0{,}67e^{-\beta n T_0}$ (см. табличные операторы),

где α и β определяются из соотношения:

$\alpha_1 = e^{-\alpha T_0} = 0{,}8$,

$\alpha_2 = e^{-\beta T_0} = 0{,}5$.

Отсюда

$$\alpha T_0 = \ln\frac{1}{0{,}8} \text{ и } \alpha = \frac{1}{T_0}\ln\frac{1}{0{,}8} = 0{,}223 \text{ с}^{-1}.$$

Аналогично

$$\beta T_0 = \ln\frac{1}{0{,}5} \text{ и } \beta = \frac{1}{T_0}\ln\frac{1}{0{,}5} = 0{,}693 \text{ с}^{-1}.$$

Тогда

$$y[nT_0] = 1[nT_0] + (-1{,}67)e^{-0{,}223 n T_0} + 0{,}67e^{-0{,}693 n T_0}.$$

Данные расчета объединим в таблицу 1.

Таблица 1.

Результаты расчета $y[nT_0]$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$y[nT_0]$	0	0	0,1	0,23	0,36	0,48	0,58	0,65	0,78	0,86	0,89	0,91

n	12	13	14	15
$y[nT_0]$	0,92	0,93	0,94	0,95

По данным расчета строим решетчатую функцию $y[nT_0]$ (рис. 3).

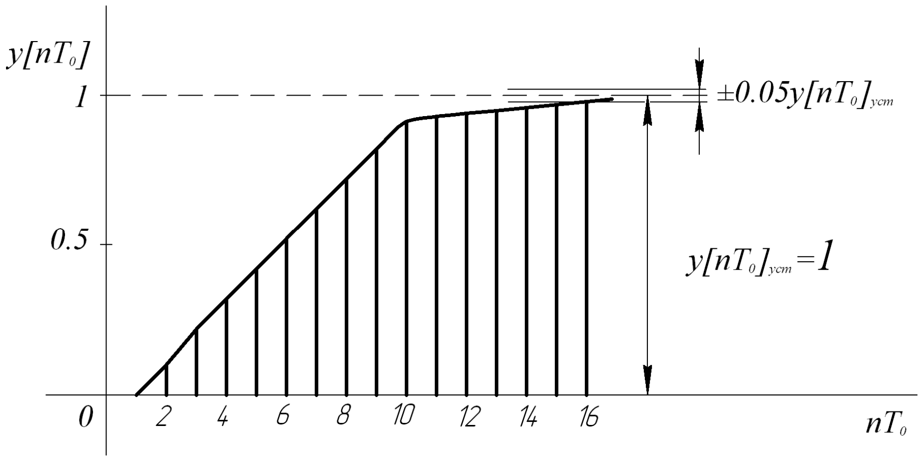

Рис. 3. Решетчатая функция

Время переходного процесса (с точностью до $\pm 5\%$ от $y_{уст}$) определим из графика: $t_П = 16T_0 = 16$ с.

Задача 10

Решить предыдущую задачу разложением в ряд Лорана.

Решение. Разложим $Y(z)$ в ряд Лорана, поделив числитель на знаменатель.

$$
\begin{array}{l|l}
-\;0.1z & z^3-2.32z^2+1.72z-0,4 \\
\quad 0.1z-0.23+0.17z^{-1}-0.04z^{-2} & \hline 0.1z^{-2}+0.23z^{-3}+0.36z^{-4}+0.48z^{-5}+\ldots \\
\hline
\qquad +0.23-0.17z^{-1}+0.04z^{-2} & \\
\qquad -0.23-0.53z^{-1}+0.39z^{-2}-0.092z^{-3} & \\
\hline
\qquad\quad -\;0.36z^{-1}-0.35z^{-2}-0.092z^{-3} & \\
\qquad\qquad 0.36z^{-1}-0.826z^{-2}+0.61z^{-3}-0.144z^{-4} & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0.48z^{-2}+0.52z^{-3}+0.144z^{-4} &
\end{array}
$$

Итак, $y(z) = 0 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + 0{,}1z^{-2} + 0{,}23z^{-3} + 0{,}36z^{-4} + 0{,}48z^{-5} + \ldots$

С другой стороны, можно представить выходной сигнал импульсной САР так:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[nT_0]z^{-n} = y[0]z^0 + y[T_0]z^{-1} + y[2T_0]z^{-2} + y[3T_0]z^{-3} + \ldots$$

Здесь T_0 – период дискретности.

Сравнение этих двух выражений дает значения выходной величины $y[nT_0]$:

$y[0] = 0$; $\qquad y[3T_0] = 0{,}23$;

$y[T_0] = 0$; $\qquad$ ……………

$y[2T_0] = 0{,}1$;

Полученное решение совпадает с решением предыдущей задачи.

Задача 11

Известно, что z-изображение выходного сигнала импульсной САР таково:

$$Y(z) = \frac{z(z+0{,}5)}{(z+2)(Z+1)}.$$

Найти и построить $y[nT]$, если период повторения импульсов T.

Решение. Задача может быть решена двумя способами.

Способ 1.

Для нахождения $y[nT]$ применим формулу разложения. Если $F(z)$ можно представить в виде:

$$F(z) = \frac{z \cdot A(z)}{B(z)},$$

то

$$f[nT] = \sum_{K=1}^{N} \frac{A(z_K)}{B(z_K)} z_K^n ,$$

где z_K – корни характеристического уравнения $B(z) = 0$, а N – порядок этого уравнения.

В нашем случае $A(z) = z + 0{,}5$; $B(z) = (z+2)(z+1)$.

Найдем корни: $(z+2)(z+1) = 0$,

откуда $z_1 = -2$; $z_2 = -1$,

$B'(z) = [(z+2)(z+1)]' = (z+2) + (z+1)$.

Тогда $y[nT] = \dfrac{(z_1 + 0{,}5)}{(z_1+2)+(z_1+1)} z_1^n + \dfrac{(z_2+0{,}5)}{(z_2+2)+(z_2+1)} z_2^n =$

$$= \frac{(-2+0{,}5)}{-2+1}(-2)^n + \frac{(-1+0{,}5)}{(-1+2)}(-1)^n = 1{,}5(-2)^n - 0{,}5(-1)^n .$$

Задавая значения $n = 1,2,3,...$ получим ординаты решетчатой функции $y[nT]$. Данные расчеты сведем в таблицу 2.

Таблица 2.

Ординаты решетчатой функции

n	0	1	2	3	4	5	6	7
y[nT]	1	-2,5	5,5	-11,5	23,5	-47,5	…	…

По данным расчета строим несколько первых значений $y[nT]$.

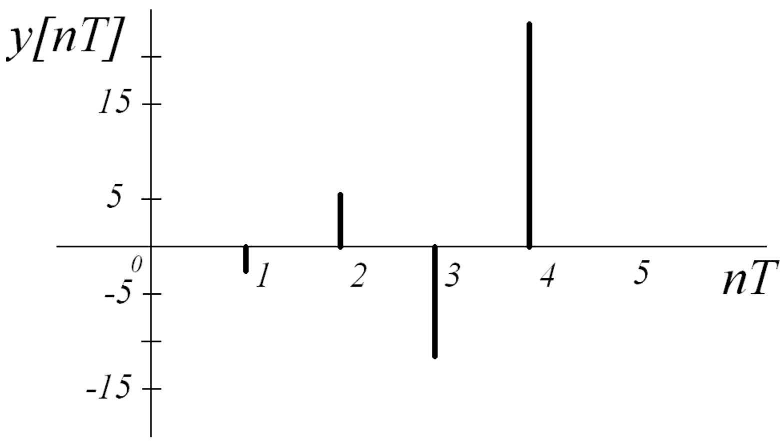

Рис. 4. Ординаты решетчатой функции

Способ 2.

Разложим функцию $Y(z)$ в ряд Лорана по убывающим степеням z, поделив числитель на знаменатель.

$$
\begin{array}{l|l}
-\; z^{2}+0.5z & z^{2}+3z+2 \\
\quad\underline{z^{2}+3z+2} & \overline{1-2.5z^{-1}+5.5z^{-2}-11.5z^{-3}+23.5z^{-4}\ldots} \\
\qquad -2.5z-2 & \\
\quad -\;\underline{-2.5z-7.5-5z^{-1}} & \\
\qquad\qquad +5.5+5z^{-1} & \\
\qquad -\;\underline{-5.5+16.5z^{-1}+11z^{-2}} & \\
\qquad\qquad\quad -11.5z^{-1}-11z^{-2} & \\
\qquad\quad -\;\underline{-11.5z^{-1}-34.5z^{-2}-23z^{-3}} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 23.5z^{-2}+23z^{-3} &
\end{array}
$$

Итак,

$$Y(z) = 1 - 2,5z^{-1} + 5,5z^{-2} - 11,5z^{-3} + 23,5z^{-4} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y[nT]z^{-n} = y[0] + y[T]z^{-1} + y[2T]z^{-2} + \ldots$$

Видно, что коэффициенты при z^{n} есть значения решетчатой функции, и они совпадают с расчетными в таблице 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин М.В. Автоматическое управление. – М.: ИНФА-М: ФОРУМ, 2007.
2. Ким Д.П. Теория автоматического управления. т.1.– М.: Физматлит, 2003.
3. Лукас В.А. Теория автоматического управления: Учебн. для вузов. 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Недра, 2004.
4. Ротач В.Я. Импульсные системы автоматического регулирования. – М.: Энергия, 1964.
5. Цыпкин Я.С., Попков Ю.С. Теория линейных импульсных систем. – М.: Наука, 1973.
6. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие для вузов /Под ред. В.А. Бесекерского. 5-е изд., перераб. и доп.– М.: Наука, 1978.