Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет»

Кафедра автоматизации производственных процессов

Ордуянц Г.Г.
Санников С.П,

ЗАДАНИЯ ПО КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ 1 И 2 И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К НИМ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

Для студентов заочной формы обучения по специальности 220301, 220200, 220400, 220700

Екатеринбург
2011

Рассмотрено и рекомендовано методической комиссией
Лесоинженерного факультета
Протокол № ___ от _____________ 2010 г.

Рецензент:

Редактор РИО:
Компьютерная верстка:

Подписано в печать		Поз.
Печать плоская	Формат 60х84 1/16	Тираж 100 экз.
Заказ №	Печ. л.	

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

Изучение курса «Теория автоматического управления» осуществляется студентами заочного отделения самостоятельно, с привлечением специальной литературы и в сочетании с обзорными лекциями, лабораторно-практическими занятиями, групповыми и индивидуальными консультациями в период сессии.

Самостоятельная работа включает изучение теоретического материала курса по учебной литературе в соответствии с рабочей программой, выполнение двух контрольных и одной курсовой работ. Содержание контрольных работ и методические указания к ним изложены в настоящем руководстве.

Выбор варианта при выполнении контрольной работы определяется последней цифрой зачетной книжки для задач с четными номерами и предпоследней — с нечетными номерами. Решение каждой задачи должно содержать исходные данные, методику расчета, схемы и графики. Результаты вычислений для функций при разных значениях аргумента рекомендуется представлять в виде таблиц. В случае выполнения подобных расчетов с помощью вычислительной техники в решение задачи надо вклеить распечатку программы и результатов.

Курсовая работа посвящена расчету переходного процесса в системе автоматического регулирования и выполняется по методическим указаниям, изданным на кафедре АПП УГЛТУ.

ПРИМЕРНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА

1. Общие принципы построения систем автоматического управления и регулирования. Классификация систем управления. САР по возмущения, по отклонению, комбинированные. САС, программное регулирование, следящие системы. Статическое и астатическое регулирование.
2. Математическое описание и моделирование линейных элементов и систем управления. Общие понятия о передаточных свойствах СА. Линейные дифференциальные уравнения при описании динамики объектов СА. Операторный метод, динамические характеристики. Частотные характеристики. Основные типовые возмущающие воздействия. Расчет переходных процессов в линейных САР.
3. Характеристики и модели типовых динамических звеньев систем управления. Классификация звеньев. Пропорциональное, дифференцирующее, реальное дифференцирующее, интегрирующее, интегро-дифференцирующее, апериодическое I-го порядка, запаздывающее звенья. Звено 2-го порядка. Соединение звеньев автоматики. Обратные связи жесткие, гибкие. Замкнутые системы.
4. Устойчивость САР. Понятие устойчивости по Ляпунову. Критерии Рауса-Гурвица, Михалова, Найквиста. Логарифмический критерий устойчивости. Построение областей устойчивости по одному параметру (D-разбиение).
5. Основные законы регулирования. Пропорциональное (П), интегральное (И), пропорционально-интегральное (ПИ) и пропорционально-интегрально-дифференциальное (ПИД) регулирование.
6. Переходные процессы в линейных САУ. Качество переходных процессов. Переходные процессы в автоматических системах с типовыми регуляторами. Прямые и косвенные оценки качества регулирования. Оценки качества переходного процесса в системах регулирования постоянной величины при возмущениях вида ступенчатой функции. Корневой метод оценки качества регулирования. Частотные методы анализа качества регулирования. Вещественные частотные характеристики (ВЧХ), их свойства и взаимосвязь с соответствующими им переходными процессами. Приближенное построение переходной характеристики по ВЧХ. Основные качественные оценки по вещественным частотным характеристикам. Интегральные оценки качества регулирования. 1-я, 2-я и3-я интегральные оценки. Ошибки регулирования.
7. Синтез корректирующих элементов в простейших САР. Постановка задачи синтеза. Последовательная и параллельная коррекция по логарифмическим частотным характеристикам.

8. Основы анализа линейных импульсных систем управления. Общие сведения о дискретных системах. Математическое описание дискретных систем. Уравнения в конечных разностях. Дискретное преобразование Лапласа. Метод z-изображений в расчете импульсных САР. Реальные импульсные фильтры. Амплитудно-импульсная модуляция, экстраполятор нулевого порядка, их z-передаточные функции. Устойчивость импульсных систем. Основной критерий устойчивости, критерии Михайлова и Найквиста. Переходные характеристики импульсных систем и оценка качества импульсных систем по этим характеристикам.
9. Характеристики и основные методы анализа нелинейных систем управления. Особенности нелинейных систем. Типовые нелинейные элементы СУ и их характеристики. Метод фазовых траекторий и их построение с помощью изоклин, метод кусочно-линейной аппроксимации, метод гармонической линеаризации. Оценка абсолютной устойчивости а помощью критерия Попова.
10. Оптимальные системы управления. Введение в адаптивное управление. Задачи оптимального управления, критерии оптимальности. Методы теории оптимального управления. Управление. Понятие об адаптивном управлении.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1

Задача 1

На рис. 1 приведена пассивная электрическая цепь в виде моста.

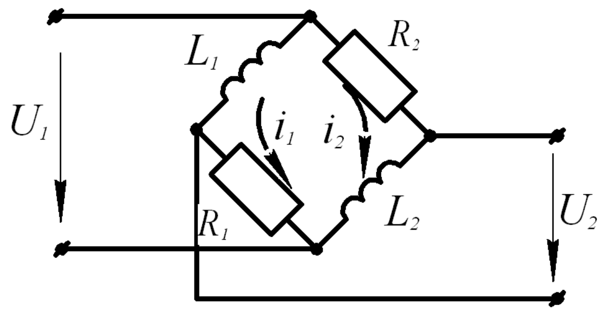

Рис. 1. Мостовая схема к задаче 1

Записать дифференциальные уравнения и найти передаточную функцию, если в качестве входного сигнала взято напряжение на первичных зажимах U_1, в качестве выходного — напряжение на вторичных зажимах U_2.

Значения параметров схемы приведены в табл. 1.

Таблица 1

Варианты параметров

Параметры схемы	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R_1, кОм	1	0,33	0,43	2,2	0,82	0,33	1	3,3	0,82	0,43
R_2, кОм	0,33	0,82	1	3,3	4,3	0,43	4,3	8,2	2,2	0,22
L_1, Гн	0,8	0,4	0,3	1	0,2	0,5	0,9	0,7	1,1	0,25
L_2, Гн	0,3	1,2	0,5	0,4	0,8	0,5	1	0,6	0,4	0,3

Задача 2

На рис. 2 изображена структурная схема автоматической системы.

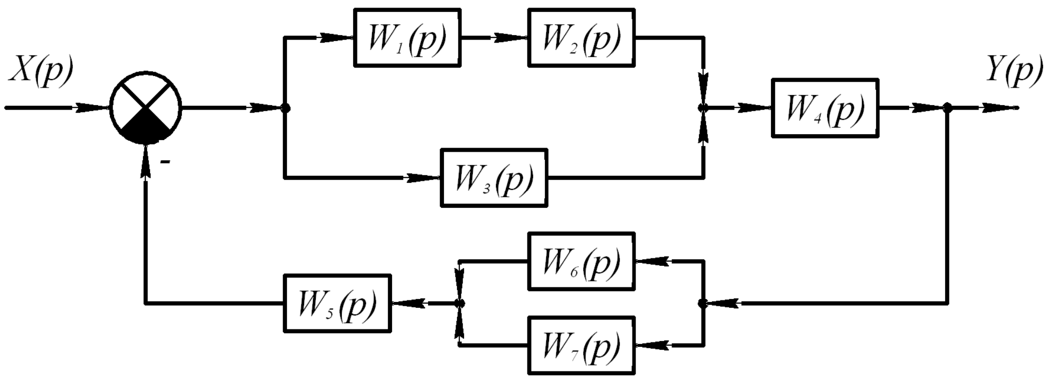

Рис. 2. Структурная схема системы

Передаточные функции имеют вид:

$W_1(p) = K_1$ — усилительное звено;

$W_2(p) = \dfrac{K_2}{p}$ — интегрирующее звено;

$W_3(p) = \dfrac{K_3}{T_1 p + 1}$ — инерционное (апериодическое 1-го порядка) звено;

$W_4(p) = \dfrac{K_4}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$ — апериодическое звено 2-го порядка;

$W_5(p) = K_5$ — усилительное звено;

$W_6(p) = K_6 p$ — дифференциальное звено;

$W_7(p) = K_7$ — усилительное звено.

Значения коэффициентов передачи и постоянных времени приведены в табл. 2

Таблица 2

Варианты параметров передаточных функций

Исходные данные	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K_1	1,8	2,1	2,0	1,6	1,4	2,0	0,8	1,2	1,5	1,0
K_2	0,03	0,04	0,01	0,08	0,06	0,06	0,04	0,02	0,01	0,03
K_3	1,6	1,8	2,1	1,4	1,0	0,8	1,2	2,2	2,0	1,6
K_4	1,1	2,4	1,8	1,6	1,2	1,4	2,1	2,0	1,5	1,0
K_5	1,6	2,0	2,2	1,8	1,9	1,3	1,5	2,0	1,8	2,4
K_6	2,1	0,8	1,1	0,8	1,8	1,4	1,6	1,2	1,0	1,5
K_7	1,7	1,2	2,0	1,8	1,0	1,6	1,4	1,1	1,2	1,5

T_1, c	4,0	2,0	2,2	3,5	3,2	2,5	2,2	3,5	4,5	3,2
T_2, c	0,4	0,3	0,8	0,7	0,2	0,7	0,9	0,6	0,8	0,9
T_3, c	1,0	1,2	1,4	1,6	1,2	1,1	1,3	1,5	1,4	1,8

В задаче необходимо выполнить следующее:

1. Найти передаточную функцию разомкнутой системы.
2. Найти передаточную функцию замкнутой системы по задающему воздействию $X(p)$.

Задача 3

Апериодическое звено 2-го порядка описывается передаточной функцией следующего вида:

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

В табл. 3 приведены значения коэффициента передачи и постоянных времени T_1 и T_2.

Построить амплитудно-фазовую (АФХ) (комплексно-частотную (КЧХ)), амплитудно-частотную (АЧХ), фазочастотную (ФЧХ) и асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную (ЛАЧХ) характеристики звена.

Таблица 3

Значения параметров звеньев

Исходные данные	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K	8	6	5	9	4	10	7	8	7	5
T_1, c	0,01	0,012	0,02	0,015	0,02	0,01	0,03	0,01	0,018	0,016
T_2, c	0,1	0,12	0,15	0,2	0,3	0,25	0,2	0,1	0,3	0,24

Задача 4

Система описывается характеристическим уравнением вида:

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Значения коэффициентов $a_0 \div a_3$ приведены в табл. 4.

Таблица 4

Значения коэффициентов

Исходные данные	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_3, c^3	10	12	8	8	8	11	9	12	10	6

a_2, c^2	5	8	4	3	4	6	3	5	4	2
a_1, c	2,5	1,5	1	1,2	2,4	1,2	1,1	2	1	1,3
a_0	10	12	14	16	12	18	16	15	12	10

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Задача 1

В качестве примера рассмотрим нахождение передаточной функции для пассивной цепи, схема которой изображена на рис. 3.

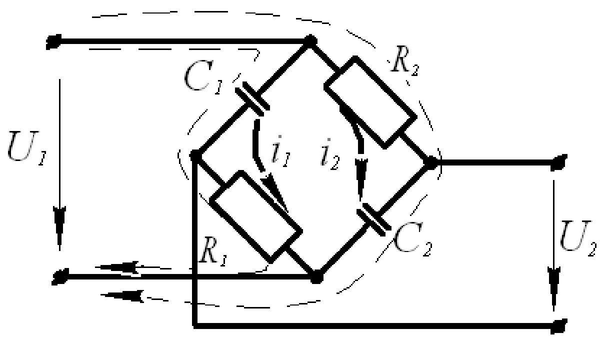

Рис. 3. Схема пассивной цепи

Запишем дифференциальное уравнение для контуров, обозначенных на рис. 3:

$$i_1R_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1dt = U_1 \,,$$

$$i_2R_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2dt = U_1 \,.$$

В операторной форме эти уравнения запишутся так:

$$I_1(p)R_1 + \frac{1}{pC_1}I_1(p) = U_1(p)\,,$$

$$I_2(p)R_2 + \frac{1}{pC_2}I_2(p) = U_1(p)\,,$$

откуда

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)pC_1}{T_1p+1}\,,\; I_2(p) = \frac{U_1(p)pC_2}{T_2p+1}\,,$$

где

$T_1 = C_1R_1$,

$T_2 = C_2R_2$,

p — оператор Лапласа.

Напряжение $U_2(t)$ на вторичных зажимах можно определить следующим образом:

$$U_2(t) = \frac{1}{C_2}\int i_2dt - i_1R_1 \,,$$

или в операторной форме:

$$U_2(p) = \frac{1}{pC_2} I_2(p) - I_1(p) R_1 .$$

Подстановка выражений для токов $I_1(p)$ и $I_2(p)$ позволяет найти связь между входным $U_1(p)$ и выходным $U_2(p)$ сигналами:

$$U_2(p) = \frac{1}{pC_2} \frac{pC_2}{T_2 p + 1} U_1(p) - \frac{R_1 p C_1}{T_1 p + 1} U_1(p) = U_1(p) \frac{1 - T_1 T_2 p^2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

откуда передаточная функция получается равной:

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1 - T_1 T_2 p^2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} .$$

Задача 2

Напомним, что при последовательном соединении звеньев (рис. 4, а) общая передаточная функция определяется произведением передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p),$$

а при параллельном соединении (рис. 4, б) — их суммой:

$$W(p) = \sum_{i=1}^{n} W_i(p) .$$

При соединении с обратной связью (рис. 4, в) общая передаточная функция замкнутой системы находится так:

$$W_з(p) = \frac{W(p)}{1 \mp W(p) W_{о.с.}(p)} .$$

В этом выражении знак (–) относится к положительной обратной связи, когда $X_1(p) = X(p) + Y_{о.с.}(p)$, а знак (+) — к отрицательной обратной связи, когда $X_1(p) = X(p) - Y_{о.с.}(p)$.

Для случая весьма распространенной единичной отрицательной обратной связи (рис. 4, г) выражение для $W_з(p)$ получается таким:

$$W_з(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} .$$

В качестве примера рассмотрим нахождение передаточной функции разомкнутой и замкнутой систем, структурная схема которой изображена на рис. 5.

Звенья с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$ соединены последовательно, а потому их общая передаточная функция:

$$W_{12}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) .$$

В свою очередь звенья с передаточными функциями $W_{12}(p)$ и $W_3(p)$ соединены параллельно, а потому их общая передаточная функция:

$$W_{123}(p) = W_{12}(p) + W_3(p).$$

Звено с такой передаточной функцией соединено последовательно со звеном, имеющим передаточную функцию $W_4(p)$. Тогда:

$$W_{1234}(p) = W_{123}(p) + W_4(p).$$

Это и будет передаточная функция разомкнутой системы, которая теперь запишется так:

$$W_{раз}(p) = W_{1234}(p) = W_4(p)[W_3(p) + W_1(p)W_2(p)].$$

При нахождении $W_з(p)$ учтем, что обратная связь — единичная отрицательная, следовательно:

$$W_з(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{W_4(p)[W_3(p) + W_1(p)W_2(p)]}{1 + W_4(p)[W_3(p) + W_1(p)W_2(p)]}.$$

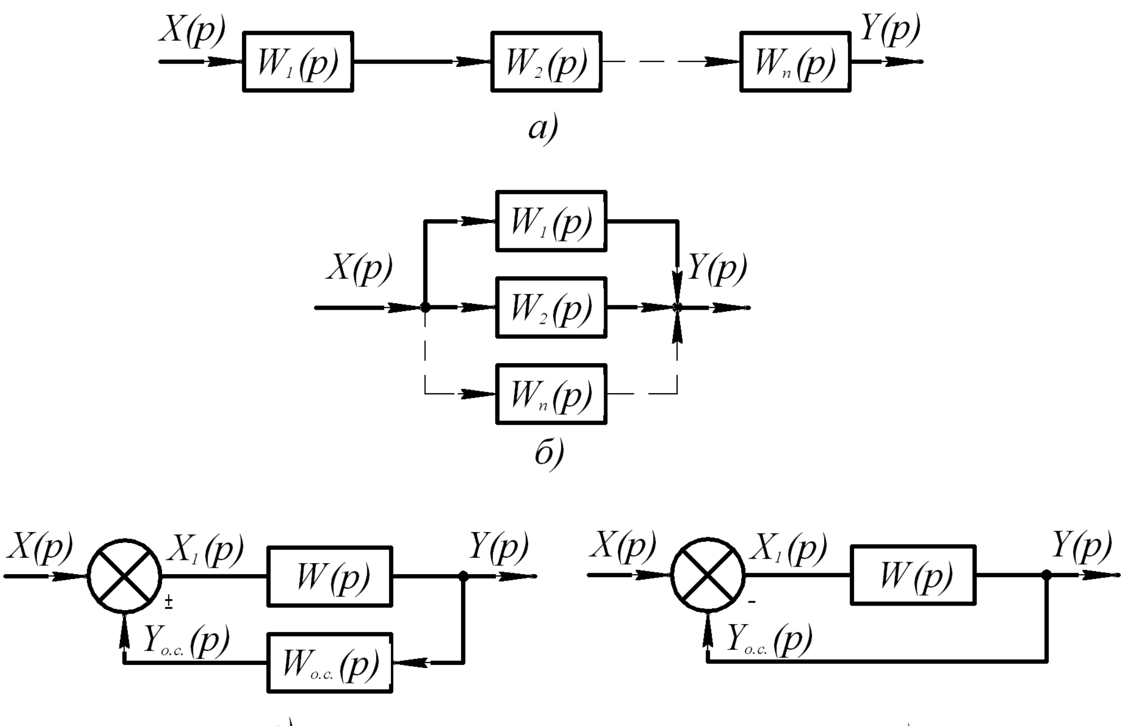

Рис. 4. Соединение звеньев автоматики

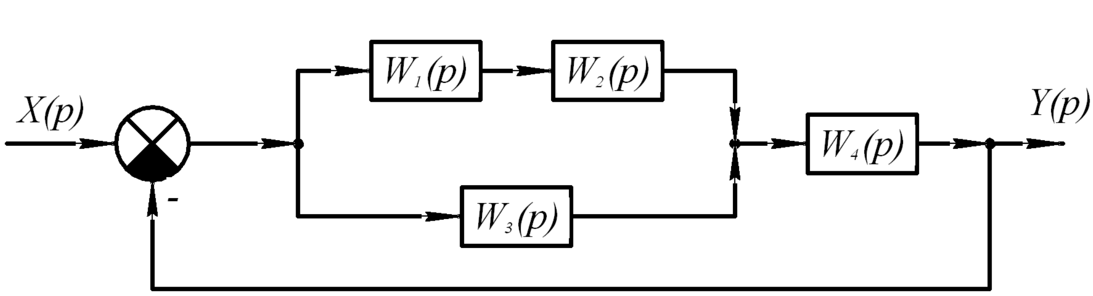

Рис. 5.Структурная схема системы

Задача 3

В качестве примера рассмотрим построение частотных характеристик звена с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{10}{p(0{,}25p+1)}.$$

Амплитудно-фазовой (АФХ) (комплексно-частотной (КЧХ)) характеристикой называется геометрическое место концов вектора $W(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞.

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega(0{,}25j\omega+1)} = \overbrace{\frac{10}{\omega\sqrt{(0{,}25\omega)^2+1}}}^{A(\omega)}\ \overbrace{\underline{|-90^{\circ} - arctg 0{,}25\omega}}^{\varphi(\omega)}$$

Зависимость модуля $A(\omega)$ функции $W(j\omega)$ от частоты есть амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), зависимость фазы $\varphi(\omega)$ функции $W(j\omega)$ от частоты — фазо-частотная характеристика (ФЧХ).

Данные расчета сведены в табл. 5.

Таблица 5

Расчетные данные звена

ω, c^{-1}	0	1	2	4	10	
$A(\omega)$		9,98	4,45	1,77	0,37	0
$\varphi(\omega)$	-90°	-104°	-126°34′	-135°	-153°30′	-180°

По данным табл. 5 строим АФХ, АЧХ, ФЧХ (рис. 6).

Асимптотическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 7) соответствует выражению:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg\frac{10}{\omega\sqrt{(0{,}25\omega)^2+1}} = 20\lg\frac{10}{\omega} - 10\lg\left[(0{,}25\omega)^2+1\right].$$

По оси абсцисс отложен логарифм частоты ω в декадах (и сама частота ω, c^{-1}), по оси ординат — $L(\omega)$ в децибелах.

Начальный участок характеристики соответствует интегрирующему звену ($20\lg\frac{10}{\omega}$) и представляет собой прямую, проходящую с наклоном $-20\,{}^{дб}\!/_{дек}$ через точку (0; 20lg10). В точке, соответствующей частоте сопряжения $\omega_c = \frac{1}{0{,}25} = 4\ c^{-1}$ наклон изменяется еще на $-20\,{}^{дб}\!/_{дек}$, в результате чего общий наклон 2-го участка равен $-40\,{}^{дб}\!/_{дек}$.

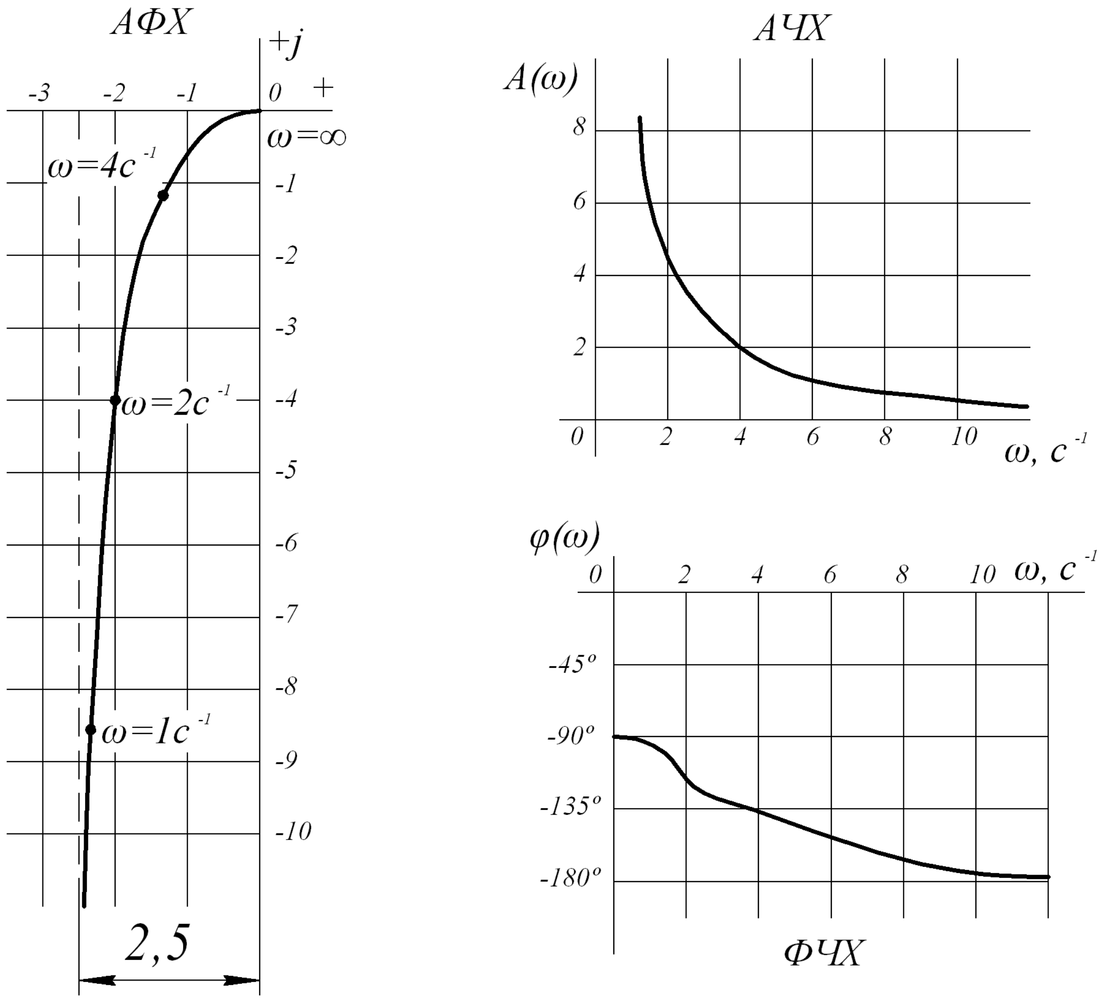

Рис. 6. Частотные характеристики звена

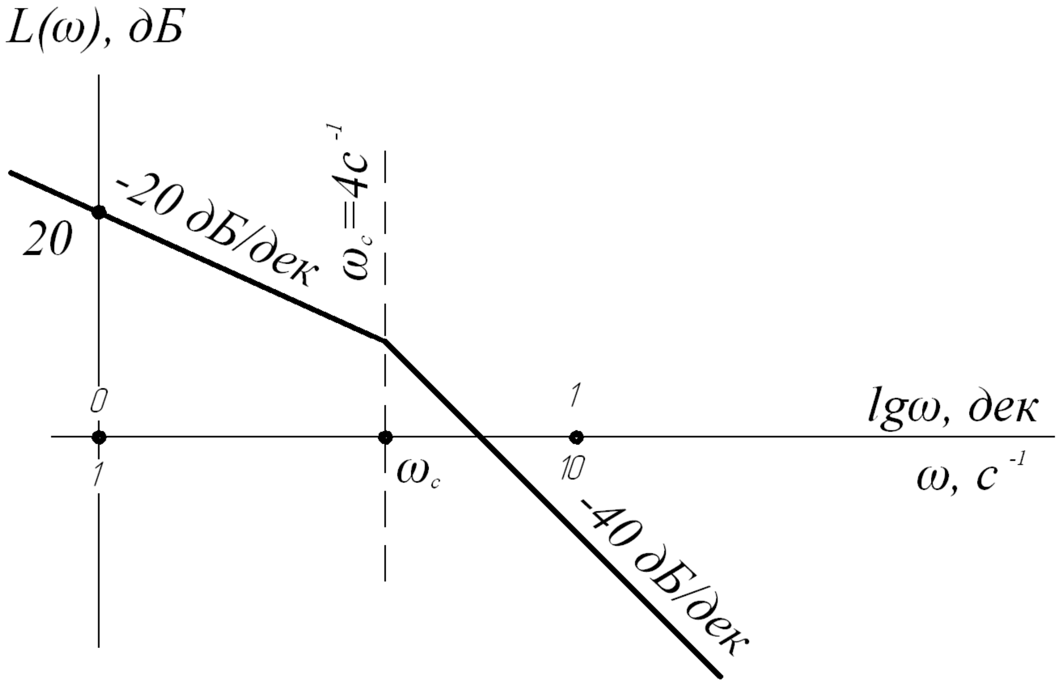

Рис. 7. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика звена

Задача 4

Критерий Рауса-Гурвица позволяет оценить устойчивость системы, описываемой характеристическим уравнением вида:

$$H(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

Составим определитель из коэффициентов этого уравнения:

$$\Delta n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & ... & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & ... & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & a_0 \end{vmatrix}$$

При заполнении определителя по главной диагонали ставятся все коэффициенты характеристического уравнения, начиная со второго (a_{n-1}). Выше диагонального члена ставятся коэффициенты при более низких степенях p, ниже — при более высоких. На место коэффициентов, индексы которых больше n или меньше нуля, ставятся нули. Диагональные миноры выделены пунктирными линиями.

САР устойчива, если при $a_n > 0$ определитель Δ_n (Рауса-Гурвица) и все его диагональные миноры, получающиеся вычеркиванием из предыдущего определителя последней строки и последнего столбца, положительны.

Например, характеристическое уравнение САР имеет вид:

$$H(p) = 6p^3 + 3p^2 + p + 10 = 0 .$$

Тогда

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 10 - 6 \cdot 10 \cdot 10 < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 60 < 0 ,$$

$$\Delta_1 = |3| = 3 > 0 .$$

Система неустойчива, т.к. Δ_3 и Δ_2 отрицательны.

Для оценки устойчивости по критерию Михайлова надо построить кривую Михайлова (геометрическое место концов вектора $H(j\omega)$). Если она начинается на вещественной положительной оси, поворачивается с ростом частоты в положительном направлении (против часовой стрелки), проходит последовательно n квадрантов, нигде не обращаясь в ноль и в n - ом квадранте уходит в бесконечность, то САР устойчива.

Оценим устойчивость системы, характеристическое уравнение которой таково:

$$H(p) = 0{,}2p^3 + p^2 + p + 10 = 0\,.$$

Запишем $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = 0{,}2(j\omega)^3 + (j\omega)^2 + j\omega + 10 = -0{,}2j\omega^3 - \omega^2 + j\omega + 10 =$$

$$= (10 - \omega^2) + j\omega(1 - 0{,}2\omega^2) = A(\omega) + jB(\omega) = 0\,.$$

Результаты расчета $A(\omega)$ и $B(\omega)$ для разных частот ω сведем в табл. 6.

Таблица 6

Расчетные данные для построения

ω, с$^{-1}$	0	0,5	1	1,5	2	3	4
$A(\omega)$	10	9,75	9	7,75	6	1	–6
$B(\omega)$	0	0,475	0,8	0,8	0,4	–2,4	–8,8

По данным расчета строим семейство векторов, огибающая концов которых (рис. 8) и есть кривая Михайлова. Видно, что САР неустойчива, т.к. не соблюдается последовательность прохождения квадрантов.

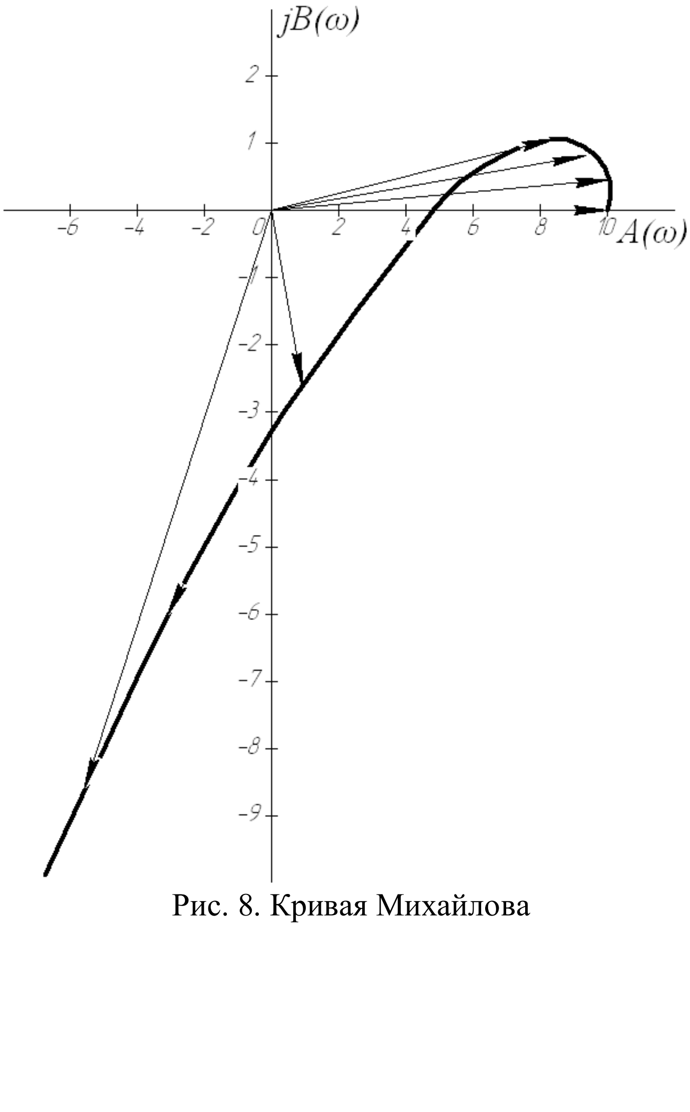

Рис. 8. Кривая Михайлова

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2

Задача 5

Расчет переходного процесса в линейной системе автоматического регулирования

Рассматривается система автоматического регулирования уровня связующего (или любой иной жидкости) в баке. Объект регулирования (ОР) — бак (рис. 9), регулируемый параметр — уровень H. Возмущающим воздействием, нарушающим материальный баланс и приводящим к отклонению уровня от заданного $H_{зад}$, является изменение нагрузки аппарата, т.е. расход связующего G_p. Уровень жидкости измеряется с помощью датчика LE. На основе сравнения текущего значения уровня H с заданным $H_{зад}$ автоматический регулятор (АР) LC вырабатывает управляющее воздействие, приводящее в движение исполнительный механизм (ИМ) и регулирующий орган (РО), изменяющие, в свою очередь, приток $G_П$ жидкости в бак.

Вместо текущих значений переменных H, G_p и $G_П$ удобно рассматривать их отклонения от некоторого исходного состояния:

$y = H - H_{зад}$ — отклонение уровня от заданного значения (выходной параметр);

$f = G_p - G_{p_0}$ — отклонение расхода относительного начального значения (возмущение);

$x = G_П - G_{П_0}$ — отклонение притока относительно начального значения (управляющее воздействие).

Тогда дифференциальное уравнения объекта (ОР) может быть записано так:

$$T\frac{dy}{dt} + y = K_x x - K_f f,$$

где t — текущее время;

T — постоянная времени ОР;

K_f — коэффициент передачи ОР по каналу возмущения;

K_x — коэффициент передачи ОР по каналу управления.

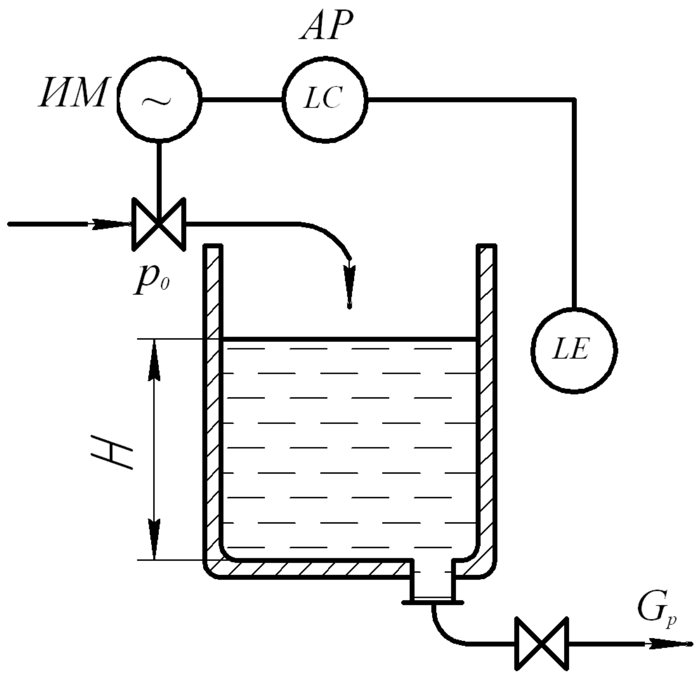

Рис. 9. Схема системы автоматического регулирования

Предполагается, что возмущающее воздействие имеет вид неединичного скачка $f(t) = f \cdot 1(t)$,

где $f = const$, а $1(t) = \begin{cases} 1 & для \quad t \ge 0, \\ 0 & для \quad t < 0. \end{cases}$

В задаче требуется:

1) представить ОР в виде структурной схемы и определить передаточные функции по каналам управления $W_x(p)$ и возмущения $W_f(p)$;
2) рассчитать и построить кривую переходного процесса $y(t)$ в ОР а отсутствие автоматического регулятора (АР), если возмущение имеет вид неединичного скачка заданной величины f;
3) составить структурную схему системы автоматического регулирования (САР) и найти передаточную функцию замкнутой САР по каналу возмущения;
4) рассчитать и построить кривую переходного процесса $y(t)$ в системе с АР при скачкообразном изменении возмущения на величину f;
5) оценить влияние АР на изменение времени переходного процесса в ОР;
6) сделать соответствующие выводы.

Исходные данные для расчета приведены в табл. 7. Там же указаны размерности этих величин. Размерность выходного параметра $[y] = м$. Размерность управляющего воздействия $[x] = м^3 / с$.

Таблица 7

Исходные данные системы

Исходные данные	Номер варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T, с	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K_f, с/м^2	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	5,0	3,2	4,0	3,8
K_x, с/м^2	1,2	1,4	1,2	1,4	1,5	1,7	1,6	1,8	1,9	1
$f \cdot 10^{-2}$, м^3/с	2	2,2	1,6	1,8	2,4	2,6	1,4	1,2	2,8	2
Тип регулятора	П	П	ПИ	ПИ	П	П	ПИ	ПИ	П	ПИ
K_p	1,8	2	2,2	2,5	3	2,8	2,2	2,6	1,6	1,6
$T_{из}$	–	–	4	4,5	2	2	5	5,5	–	6

Задача 6

На рис. 10 изображена структурная схема импульсной САР, состоящей из импульсного фильтра (ИФ) и непрерывной части с передаточной функцией $W_0(p)$. Период замыкания ключа T.

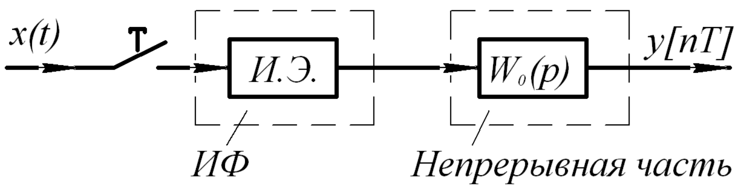

Рис. 10. Структурная схема импульсной САР

Известно, что z- изображение выходного сигнала $Y(z)$ определяется выражением:

$$Y(z) = \frac{az}{(z-1+a)(z-1)}.$$

Найти и построить решетчатую функцию $y[nT]$. Значения параметра a приведены в табл. 8.

Таблица 8

Значение параметра системы a

Исходные данные	Номер варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	0,5	0,8	1	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	0,2	1,2

Задача 7

Свободное движение нелинейной системы автоматического регулирования описывается уравнением:

$$a\frac{dy}{dt} + by^2 = 0.$$

Построить фазовую траекторию линейной САР и исследовать на устойчивость при различных начальных условиях.

Значения параметров a и b приведены в табл. 9.

Таблица 9

Коэффициенты нелинейного уравнения

Исходные данные	Номер варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1	1,2	1,5	2	2,5	3	0,5	1,8	0,8	4
b	-1	1	-0,5	1,5	-1,5	-2	1	2	1,5	-4

.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

Задача 5

Рассмотрим пример расчета для следующих исходных данных: $T = 10$; $K_f = 4{,}5$; $K_x = 1{,}5$; $f = 2 \cdot 10^{-2}$; параметр П-регулятора: $K_p = 2$; параметры ПИ-регулятора — $K_p = 2$; $T_{из} = 5$.

1. Анализ объекта регулирования.
   Запишем уравнение движения объекта в операторной форме:
$$TpY(p) + Y(p) = K_x X(p) - K_f F(p),$$
   или
$$Y(p)(Tp+1) = K_x X(p) - K_f F(p).$$
   Отсюда
$$Y(p) = \frac{K_x}{Tp+1} X(p) - \frac{K_f}{Tp+1} F(p) = W_x(p) X(p) - W_f(p) F(p),$$
   где $W_x(p)$ — передаточная функция ОР по управляющему воздействию;
   $W_f(p)$ — передаточная функция ОР по Возмущению.
   Тогда структурную схему ОР можно представить в таком виде (рис. 11).

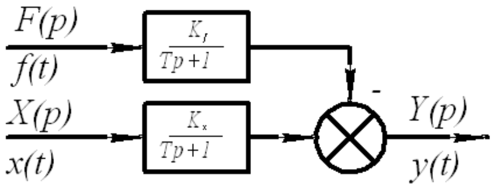

Рис. 11. Структурная схема ОР

2. Построение переходного процесса $y(t)$ в ОР в отсутствие автоматического регулятора (АР) в случае, когда возмущение имеет вид неединичного сигнала $f(t) = f \cdot 1(t) = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1(t)$.
   Положим в исходном уравнении $x(t) = 0$. Тогда получим:
$$T\frac{dy}{dt} + y = -K_f f.$$
   Решением этого уравнения является функция:
$$y(t) = -K_f f(1 - e^{-t/T}) = -9 \cdot 10^{-2}(1 - e^{-t/10})\,\text{м}.$$
   Расчет переходного процесса следует вести для интервала времени $0 \le t \le 5T = 50$ с.
   Выберем шаг по времени $\Delta t = 5$ с.

Данные расчета сведем в табл. 10.

Таблица 10

Расчетные данные для построения $y(t)$

t, с	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$t/10$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$e^{-t/10}$	1	0,61	0,37	0,22	0,14	0,08	0,05	0,03	0,02	0,01	0,007
$1-e^{-t/10}$	0	0,39	0,63	0,78	0,86	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	0,993
$y=-4{,}5\cdot 2\cdot 10^{-2}(1-e^{-t/10})$, м	0	$-3{,}54\cdot 10^{-2}$	$-5{,}68\cdot 10^{-2}$	$-7\cdot 10^{-2}$	$-7{,}78\cdot 10^{-2}$	$-8{,}26\cdot 10^{-2}$	$-8{,}55\cdot 10^{-2}$	$-8{,}73\cdot 10^{-2}$	$-8{,}84\cdot 10^{-2}$	$-8{,}9\cdot 10^{-2}$	$-8{,}94\cdot 10^{-2}$

По данным табл. 10 строится график $y(t)$ (рис. 12). Из графика видно, что $y_{уст}=-K_f f=-0{,}9$ м, а время регулирования (с точностью $\delta=\pm 0{,}05 y_{уст}$) равно $t_П \cong 30$ с.

3. Структурная схема замкнутой САР изображена на рис. 13.

Отклонение выходного параметра $y(t)$ от установившегося значения возникает как следствие возникновения возмущения $f(t)$. На входе АР сигнал $\Delta y(t)=g(t)-y(t)$, где $g(t)$ — задающее воздействие (в нашем случае — $H_{зад}$). В зависимости от величины и знака этого отклонения АР формирует управляющее воздействие $x(t)$, действие которого на ОР противоположно действию возмущения $f(t)$. В результате этого отклонения y либо ликвидируется полностью, либо значительно уменьшается (в зависимости от типа регулятора).

Передаточные функции регуляторов:

«П» — $W_П(p)=K_p$;

«ПИ» — $W_{ПИ}(p)=K_p+K_И\dfrac{1}{p}=K_p(1+\dfrac{1}{T_{из}p})=\dfrac{K_p(T_{из}p+1)}{T_{из}p}$.

Параметры K_p и $T_{из}$ являются настроечными, т.е. могут изменяться при настройке АР.

В соответствии со структурной схемой (рис. 13) найдем передаточные функции замкнутой САР по возмущению.

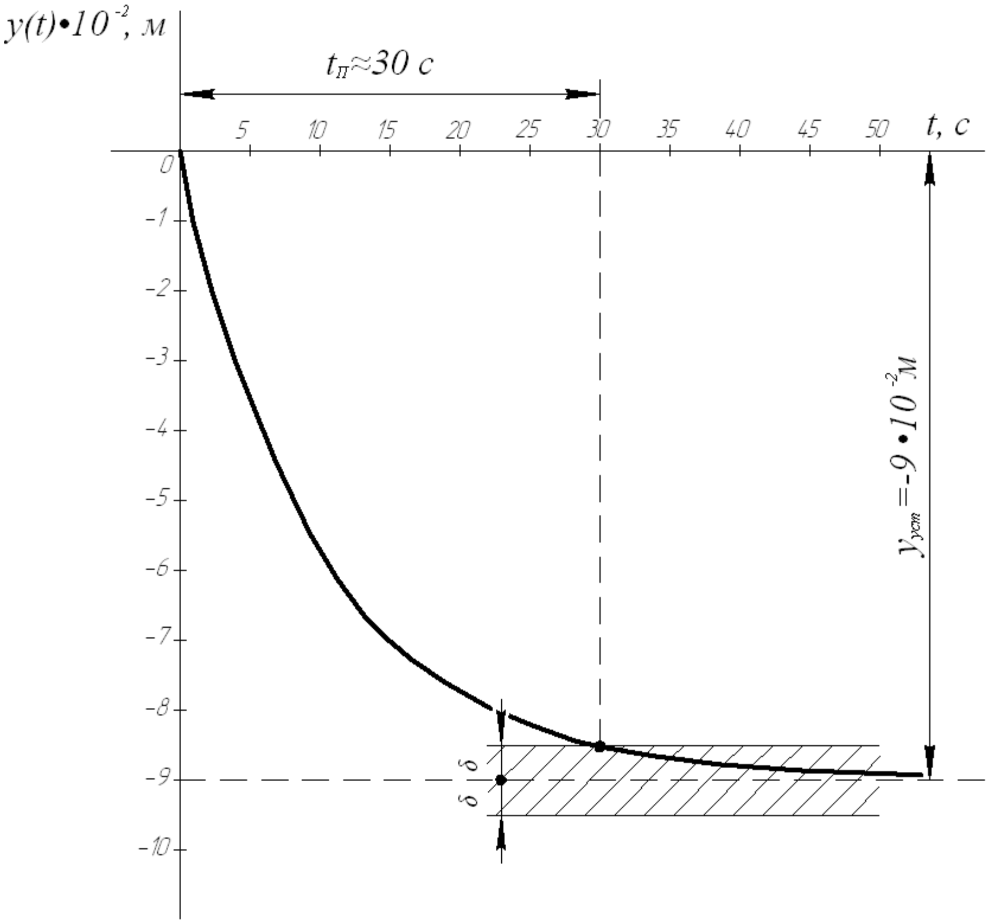

Рис. 12. График переходного процесса в ОР

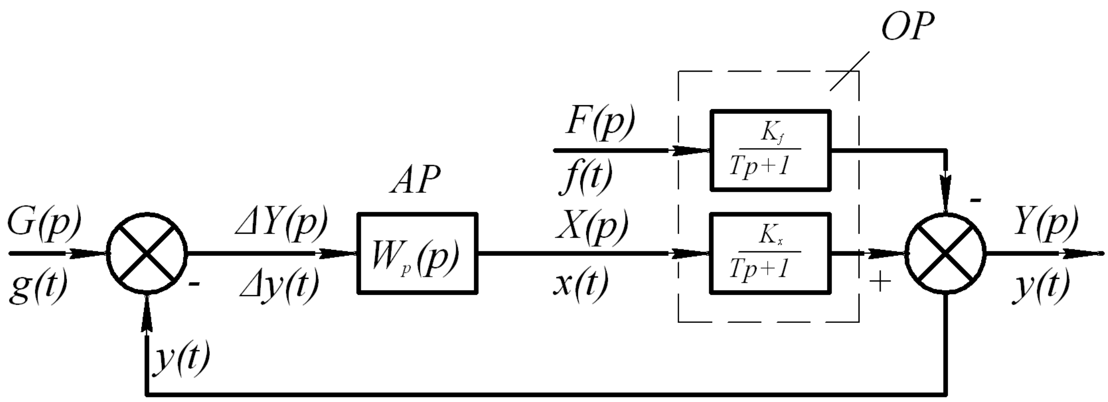

Рис. 13. Структурная схема САР

$$W_{f\ зам}(p) = \frac{y(p)}{F(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W_f(p) W_x(p)}.$$

Тогда для системы с П-регулятором передаточная функция будет равна:

$$\underset{"П"}{W_{f\ зам}}(p) = \frac{-K_f}{Tp + 1 + K_p K_x},$$

для системы с ПИ-регулятором:

$$W_{\substack{f\ зам\\ "ПИ"}}(p)=\frac{-K_f T_{из} p}{T_p T_{из} p^2 + pT_{из}(1+K_p K_x)+K_p K_x}.$$

4. Построение кривой переходного процесса в системе с АР при скачкообразном изменении возмущения $f(t)$.

В операторной форме выходной сигнал может быть найден так:

$$Y(p)=W_{f\ зам}(p)\cdot F(p)=\frac{G(p)}{H(p)},$$

где $F(p)=\dfrac{f}{p}$ — изображение неединичного возмущения.

Для перехода от $Y(p)$ к $y(t)$ можно воспользоваться теоремой разложения.

Изображению $Y(p)=\dfrac{G(p)}{H(p)}$ соответствует оригинал:

$$y(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{G(p_k)}{H'(p_k)}e^{p_k t},$$

где $G(p_k)=G(p)$ при $p=p_k$,

$H'(p_k)=\dfrac{d}{dp}[H(p)]$ при $p=p_k$,

p_k — корни уравнения $H(p)=0$, $k=1,2,......,n$.

Корни уравнения $H(p)=p(10p+4)=0$ получаются равными $p_1=0$, $p_2=-0{,}4$. Откуда $H'(p_1)=4$, $H'(p_2)=-4$.

Тогда для системы с П-регулятором получается:

$$Y(p)=\frac{-K_f f}{p[Tp+1+K_p K_x]}=\frac{-4{,}5\cdot 2\cdot 10^{-2}}{p[10p+1+2\cdot 1{,}5]}=\frac{-9\cdot 10^{-2}}{p(10p+4)}=$$

$$=y(t)=\sum_{k=1}^{2}\frac{G(p_k)}{H'(p_k)}e^{p_k t}=-9\cdot 10^{-2}\left(\frac{1}{4}e^{0\,t}+\frac{1}{-4}e^{-0,4t}\right)=$$

$$=-2{,}25\cdot 10^{-2}(1-e^{-t/2,5}),$$

где $G(p_1)=G(p_2)=9\cdot 10^{-2}$.

Расчет проведен для $0\le t\le 5T$, где $T=2{,}5$ с.

Данные расчета сведены в табл. 11.

Таблица 11

Результаты расчета

t, с	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14
$0{,}4t$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,8	5,6
$e^{-0{,}4t}$	1	0,67	0,45	0,3	0,2	0,14	0,09	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,004
$1-e^{-0{,}4t}$	0	0,33	0,55	0,7	0,8	0,86	0,91	0,94	0,96	0,97	0,98	0,99	0,996
$y=-2{,}25\cdot10^{-2}(1-e^{-0{,}4t})$, м	0	$-0{,}74\cdot10^{-2}$	$-1{,}24\cdot10^{-2}$	$-1{,}57\cdot10^{-2}$	$-1{,}8\cdot10^{-2}$	$-1{,}94\cdot10^{-2}$	$-2{,}05\cdot10^{-2}$	$-2{,}11\cdot10^{-2}$	$-2{,}16\cdot10^{-2}$	$-2{,}19\cdot10^{-2}$	$-2{,}21\cdot10^{-2}$	$-2{,}23\cdot10^{-2}$	$-2{,}25\cdot10^{-2}$

Для системы с ПИ-регулятором:

$$Y(p)=\frac{-K_{из}T_{из}f}{TT_{из}p^2+T_{из}(1+K_pK_x)p+K_pK_x}=\frac{-4{,}5\cdot5\cdot2\cdot10^{-2}}{10\cdot5p^2+5(1+2\cdot1{,}5)p+2\cdot1{,}5}=$$

$$=\frac{-0{,}9\cdot10^{-2}}{p^2+0{,}4p+0{,}06}=y(t)=\sum_{k=1}^{2}\frac{G(p_k)}{H'(p_k)}e^{p_kt}=$$

$$=-0{,}9\cdot10^{-2}\left[\frac{1\cdot e^{(-0{,}2+j0{,}14)t}}{2(-0{,}2+j0{,}14)+0{,}4}+\frac{1\cdot e^{(-0{,}2-j0{,}14)t}}{2(-0{,}2-j0{,}14)+0{,}4}\right]=$$

$$=-6{,}42\cdot10^{-2}e^{-0{,}2t}\sin0{,}14t\,.$$

При расчете учитывалось, что уравнение

$$H(p)=p^2+0{,}4p+0{,}06=0$$

имеет корни $p_1=-0{,}2+j0{,}14$, $p_2=-0{,}2-j0{,}14$;

$$H'(p)=2p+0{,}4\,.$$

График $y(t)$ в этом случае представляет собой отрицательную синусоиду с амплитудой 6,42 и частотой $\omega=0{,}14$ с$^{-1}$, вписанную в экспоненту $e^{-0{,}2t}$ с постоянной времени $T=\dfrac{1}{0{,}2}=5$ с.

Для расчета графика по точкам следует выбрать интервал времени $0\le t\le4T=20$ с с шагом $\Delta t=2$ с.

Данные расчета сведены в табл. 12.

Таблица 12

Данные расчета переходного процесса

t, с	0	4	5	6
$-0{,}2t$	0	-0,4	-0,8	-1,2
$e^{-0,2t}$	1	0,67	0,45	0,3
$0{,}14t$	0	0,28	0,56	0,84
$\sin 0{,}14t$	0	0,28	0,53	0,75
$y(t) = -6{,}42 \cdot 10^{-2} e^{-0,2t} \sin 0{,}14t$	0	$-1{,}18 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}53 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}44 \cdot 10^{-2}$

8	10	12	14	16	18
-1,6	-2	-2,4	-2,8	-3,2	-3,6
0,2	0,14	0,09	0,06	0,04	0,03
1,12	1,4	1,68	1,96	2,24	2,52
0,9	0,98	0,99	0,93	0,78	0,58
$-1{,}16 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}85 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}58 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}36 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}21 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}1 \cdot 10^{-2}$

20	22	24	26
-4	-4,4	-4,8	-5,2
0,02	0,012	0,008	0,006
2,8	3,08	3,36	3,64
0,34	0,062	-0,22	-0,48
$-0{,}04 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}005 \cdot 10^{-2}$	$0{,}011 \cdot 10^{-2}$	$0{,}018 \cdot 10^{-2}$

По данным табл. 11 и 12 построены графики переходного процесса (рис. 14). Кривая 1 — переходный процесс в САР с П-регулятором, кривая 2 — с ПИ-регулятором.

Можно перейти от изображения $Y(p)$ к оригиналу $y(t)$ с помощью табличных операторов (см. приложение). Продемонстрируем этот прием для системы с П-регулятором.

$$Y(p) = \frac{-9 \cdot 10^{-2}}{p(10p+4)} = y(t) = ?$$

«Подгоним» выражение для $Y(p)$ под табличный оператор вида:

$$\frac{1}{p(p+a)} = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}).$$

Для этого вынесем в знаменателе функции $Y(p)$ за скобку число 10. Получим:

$$Y(p) = \frac{-9 \cdot 10^{-2}}{10p\left(p + \frac{4}{10}\right)} = \frac{-9 \cdot 10^{-2}}{10} \cdot \frac{1}{p(p+0{,}4)} =$$

$$= y(t) = -9 \cdot 10^{-3}\frac{1}{0{,}4}(1 - e^{-0{,}4t}) = -2{,}25 \cdot 10^{-2}(1 - e^{-t/2{,}5}),$$

что совпадает с результатом, полученным с помощью теоремы разложения.

Аналогичным образом можно найти оригинал $y(t)$ для

$$\underset{ПИ}{Y(p)} = \frac{-0{,}9 \cdot 10^{-2}}{p^2 + 0{,}4p + 0{,}06},$$

«сводя» при этом выражение $\overset{ПИ}{Y(p)}$ к табличному оператору следующего вида:

$$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} = e^{-at}\sin\omega t.$$

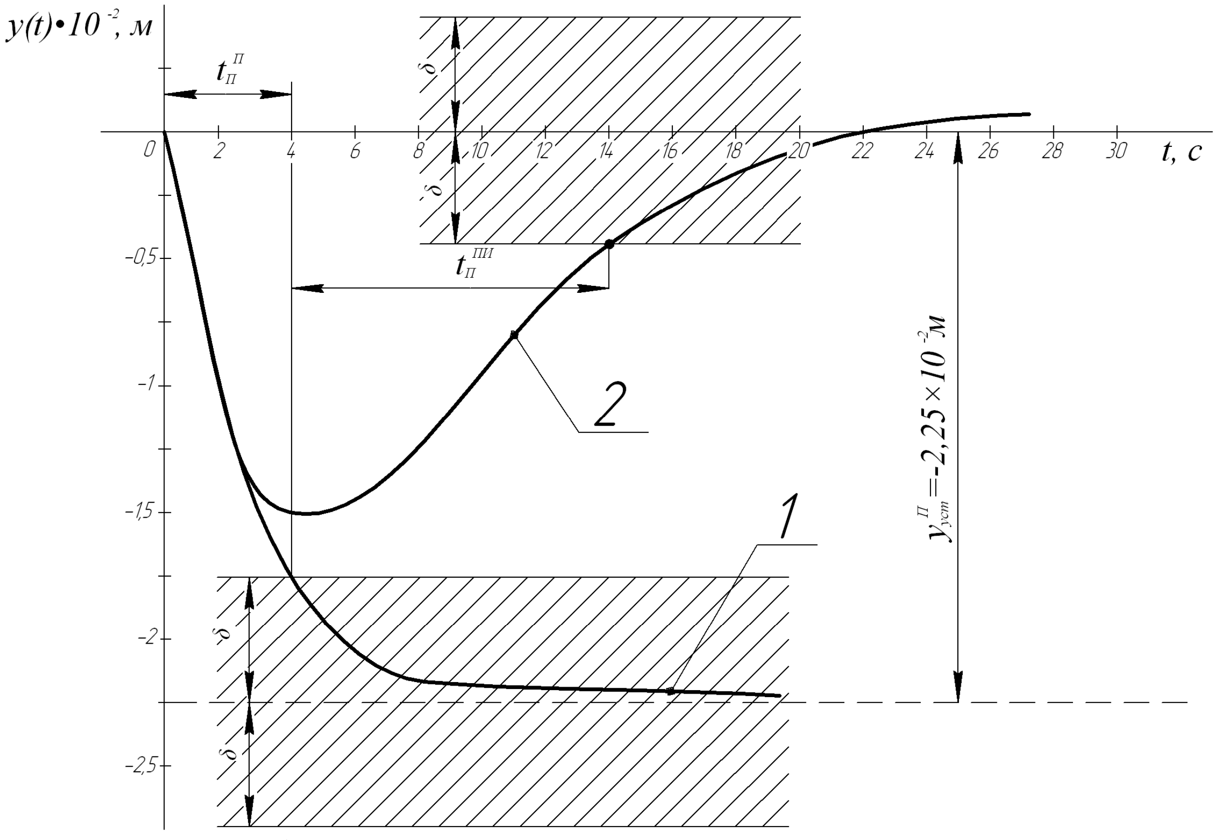

Рис. 14. Графики переходных процессов в САР с П- и ПИ- регуляторами

5. Найдем время переходного процесса $t_П$ в системе без регулятора и с П- и ПИ-регуляторами.

Под временем $t_П$ понимают отрезок времени, по истечении которого выходной параметр $y(t)$ отличается от своего нового установившегося значения не более чем на заранее установленную величину δ, которую обычно принимают равной $0{,}05y_{уст}$ в системе без регулятора. В рассматриваемом примере

$$\delta = 0{,}05 \cdot 9 \cdot 10^{-2} = 0{,}45 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Выделив на графиках $y(t)$ зоны, ограниченные $\pm\delta$, получим:

– для системы без регулятора $t_П = 30$ с (рис. 12);
– для системы с П-регулятором $t_П^П = 4$ с (рис. 14);
– для системы с ПИ-регулятором $t_П^{ПВ} = 14$ с (рис. 14).

6. Выводы.

1) Для варианта с П-регулятором.

Его применение позволило уменьшить время переходного процесса с 30 до 4 с. Установившееся значение отклонения выходного параметра уменьшилось в $(1 + K_p K_x)$ раз с $-9 \cdot 10^{-2}$ м до $-2{,}25 \cdot 10^{-2}$ м. Наличие этого отклонения (статической ошибки) является характерной особенностью систем этого типа с П-регулятором. Уменьшение статической ошибки возможно за счет увеличения настроечного параметра (K_p) П-регулятора, но чрезмерно это делать нельзя из-за возможной потери устойчивости системой.

2) Для системы с ПИ-регулятором.

Применение регулятора этого типа позволило уменьшить время переходного процесса с 30 до 14 с и полностью устранить остаточное отклонение выходного параметра. Статическая ошибка регулирования в этом случае равна нулю.

Задача 6

Известно, что решетчатая функция $f[nT]$ и ее z-изображение $F(z)$ связаны между собой выражением:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] z^{-n} = f(0) z^0 + f[T] z^{-1} + f[2T] z^{-2} + \ldots$$

Нетрудно видеть, что если функцию $F(z)$ представить в виде бесконечного ряда по убывающим степеням z, начиная с z^0, то коэффициенты этого ряда $f(0)$, $f[T]$, $f[2T]$, … есть ординаты решетчатой функции $f[nT]$.

В качестве примера построим решетчатую функцию $f[nT]$, если ее z-изображение:

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Для разложения функции $F(z)$ в ряд по убывающим степеням z поделим числитель ее на знаменатель.

$$
\begin{array}{l|l}
\;\;z & z^{3}-2z+1 \\
\cline{2-2}
-\;z-2+z^{-1} & z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+\ldots \\
\cline{1-1}
\quad 2-z^{-1} & \\
\quad -\;2-4z^{-1}+2z^{-2} & \\
\cline{1-1}
\qquad 3z^{-1}-2z^{-2} & \\
\qquad -\;3z^{-1}-6z^{-2}+3z^{-3} & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 4z^{-2}-3z^{-2} & \\
\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Итак, $F(z) = 0\cdot z^{0} + 1\cdot z^{-1} + 2\cdot z^{-2} + 3\cdot z^{-3} + 4\cdot z^{-4} + \ldots$

Значения коэффициентов при убывающих степенях z и есть ординаты решетчатой функции: $f[0] = 0$, $f[T] = 1$, $f[2T] = 2$, …

На рис. 15 изображена решетчатая функция. Пунктиром обозначена основная огибающая ее.

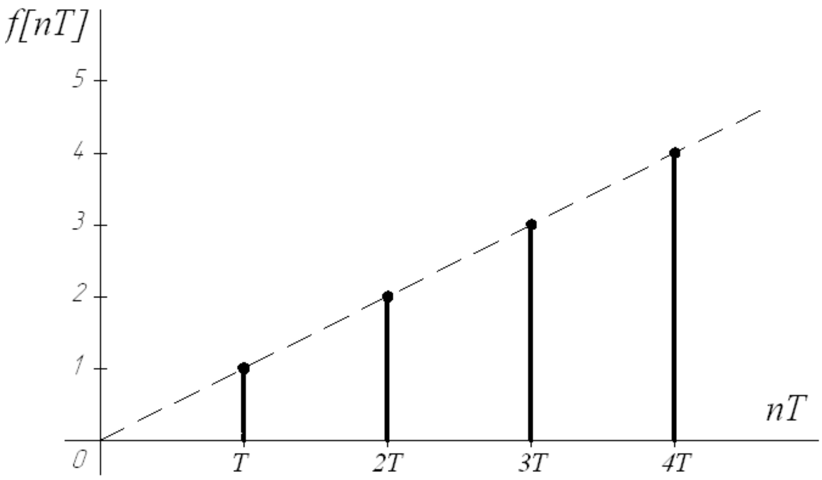

Рис. 15. Решетчатая функция $f[nT]$

Задача 7

В качестве примера рассмотрим построение фазовой траектории для случая, когда свободное движение нелинейной системы описывается нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^{2} + 2y = 0.$$

Фазовая траектория движения нелинейной системы строится в координатах y и y', где $y' = \dfrac{dy}{dt}$. Запишем исходное уравнение через вновь введенную переменную y'.

$$(y')^{2} + 2y = 0,$$

откуда

$$(y')^2 = -2y\,.$$

Фазовая траектория, соответствующая полученной зависимости, изображена на рис. 16.

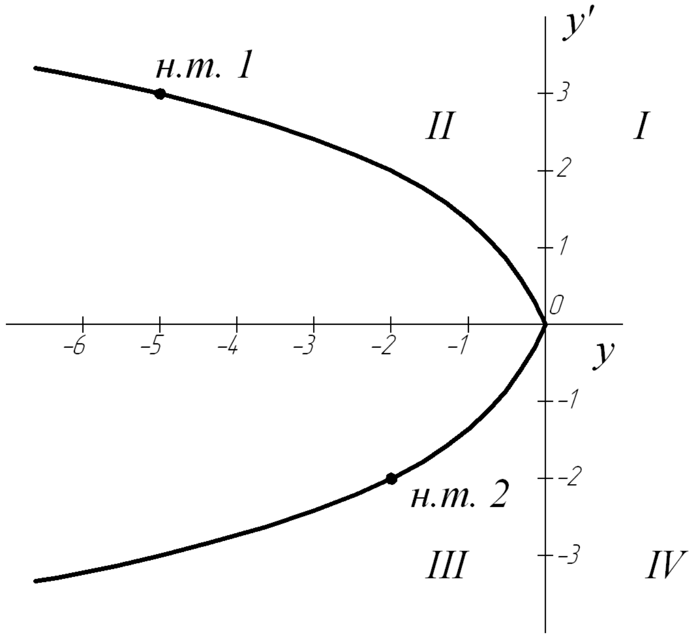

Рис. 16. Фазовая траектория нелинейной САР

Для анализа устойчивости системы необходимо выяснить, движется ли изображающая точка к состоянию устойчивого равновесия (к особой точке — началу координат). Общее правило таково: для всех $y' > 0$ движение изображающей точки по фазовой траектории идет в сторону возрастания y, а для всех $y' < 0$ — в сторону убывания y. Нетрудно видеть (рис. 16), что из начального состояния, соответствующего н.т. 1 изображающая точка при своем движении придет в начало координат, а из н.т. 2 движение изображающей точки будет в сторону от начала координат. Следовательно, для всех начальных точек, расположенных во II квадранте движение нелинейной САР устойчиво, а в III — неустойчиво.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Изображение по Лапласу функций времени

Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\mp at}$	$\frac{1}{p \pm a}$
$\frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$	$\frac{1}{p(p+a)}$
$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин М.В. Автоматическое управление. – М.: ИНФА-М: ФОРУМ, 2007.
2. Ким Д.П. Теория автоматического управления. т.1.– М.: Физматлит, 2003.
3. Лукас В.А. Теория автоматического управления: Учебн. для вузов. 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Недра, 2004.
4. Ким Д.П., Дмитриева Н.Д. Сборник задач по теории автоматического регулирования. Линейные системы.– М.: Физматлит, 2007.
5. Теория автоматического управления: Учебн. для вузов. В 2ч./Под ред. А.А. Воронова. 2-е изд., перераб. и доп..– М.: Высшая школа, 1986.
6. Теория автоматического управления: Учебн. для вузов. В 2 ч./Под ред. В.А. Нетушила. 2-е изд., перераб. И доп.– М.: Высшая школа, 1976.
7. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие для вузов /Под ред. В.А. Бесекерского. 5-е изд., перераб. и доп.– М.: Наука, 1978.
8. Цыпкин Я.С., Попков Ю.С., Теория линейных импульсных систем.- М.: Наука, 1973.