

**Новые технологические решения в заготовке,  
переработке и отделке древесины**

Агапов А.И. (ВятГУ, г. Киров, РФ)

**ОПТИМИЗАЦИЯ РАСКРОЯ ПИЛОВОЧНИКА БОЛЬШИХ  
РАЗМЕРОВ С ВЫПИЛИВАНИЕМ ДВУХ БРУСЬЕВ И ДВУХ ПАР  
БОКОВЫХ ДОСОК**

**IMPROVING EFFICIENCY OF LARGE-SIZED LOG CUTTING BY  
PRODUCING TWO SQUARED BEAMS AND TWO PAIRS OF SIDE  
BOARDS**

На практике иногда рекомендуется осуществлять раскрой пиловочника больших размеров брусом – развальным способом с получением двух брусьев и двух пар боковых досок [3]. Такой постав называется четным. Важно знать оптимальные размеры брусьев и досок. Для решения задачи составляем математическую модель. В качестве критерия оптимальности выбираем объемный выход брусьев и боковых обрезных досок, получаемых при первом проходе брусом-развальным способом раскря. Целевую функцию можно представить в виде суммы площадей поперечных сечений двух брусьев и двух пар боковых обрезных досок

$$Z = 2HA + 2T_1v_1 + 2T_2v_2, \quad (1)$$

где:  $H$  - высота бруса,  $A$  - ширина наружной пласти бруса,  $T_1, T_2$  - толщины первой и второй пары боковых досок,  $v_1, v_2$  - ширины первой и второй пар боковых досок.

Для составления уравнений связи воспользуемся теоремой Пифагора.

Взаимосвязь диаметра бревна в вершинном торце с размерами брусьев и досок можно представить следующими уравнениями

$$d^2 - 4H^2 - A^2 = 0, \quad (2)$$

$$d^2 - v_1^2 - 4H^2 - 8HT_1 - 4T_1^2 = 0, \quad (3)$$

$$d^2 - v_2^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8T_1T_2 = 0, \quad (4)$$

где:  $d$  - диаметр в верхнем торце бревна.

Полагаем, что математическая модель составлена. Для решения данной модели воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функцию Лагранжа записываем в следующем виде:

$$L = 2HA + 2T_1v_1 + 2T_2v_2 + \lambda(d^2 - 4H^2 - A^2) + \lambda_1(d^2 - v_1^2 - 4H^2 - 8HT_1 - 4T_1^2) + \lambda_2(d^2 - v_2^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8T_1T_2) \quad (5)$$

где:  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  - коэффициенты (множители) Лагранжа.

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их нулю

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial A} = 2H - 2\lambda A = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial H} = 2A - 8\lambda H - 8\lambda_1 H - 8\lambda_1 T_1 - 8\lambda_2 H - 8\lambda_2 T_1 - 8\lambda_2 T_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial T_1} = 2B_1 - 8\lambda_1 H - 8\lambda_1 T_1 - 8\lambda_2 T_1 - 8\lambda_2 H - 8\lambda_2 T_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial B_1} = 2T_1 - 2\lambda_1 B_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial T_2} = 2B_2 - 8\lambda_2 T_2 - 8\lambda_2 H - 8\lambda_2 T_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial B_2} = 2T_2 - 2\lambda_2 B_2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решаем данную систему уравнений (6) совместно с уравнениями связи.

Рассматриваем первое уравнение системы (6)

$$H = \lambda \cdot A, \quad \lambda = \frac{H}{A}, \quad A = \frac{H}{\lambda}. \quad (7)$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (6)

$$T_2 = \lambda_2 B_2, \quad \lambda_2 = \frac{T_2}{B_2}. \quad (8)$$

Пятое уравнение системы (6) можно представить в виде

$$B_2 = 4\lambda_2 T_2 + 4\lambda_2 H + 4\lambda_2 T_1. \quad (9)$$

В уравнение (9) подставляем равенство (8), получим

$$B_2^2 = 4T_2^2 + 4T_2 H + 4T_1 T_2 = 4T_2 (H + T_1 + T_2). \quad (10)$$

Рассматриваем четвертое уравнение системы (6)

$$T_1 = \lambda_1 B_1, \quad \lambda_1 = \frac{T_1}{B_1}. \quad (11)$$

Третье уравнение системы (6) можно записать в следующем виде:

$$B_1 = 4\lambda_1 H + 4\lambda_1 T_1 + B_2. \quad (12)$$

В уравнение (12) подставляем равенство (11), получим

$$B_1^2 = 4T_1 H + 4T_1^2 + B_1 B_2. \quad (13)$$

В последнее равенство (13) подставляем второе уравнение связи (3), получим

$$B_1 B_2 = d^2 - 4H^2 - 12HT_1 - 8T_1^2. \quad (14)$$

Тогда соотношение ширин досок можно определить по формуле

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{d^2 - 4H^2 - 12HT_1 - 8T_1^2}{d^2 - 4H^2 - 8HT_1 - 4T_1^2}. \quad (15)$$

Из уравнения (13) можно определить ширину второй пары досок

$$v_2 = v_1 - \frac{4T_1}{v_1}(H + T_1). \quad (16)$$

Равенство (10) подставим в уравнение связи (4), получим

$$T_2^2 + \frac{3}{2}T_2(H + T_1) + \frac{1}{2}(H + T_1)^2 - \frac{d^2}{8} = 0. \quad (17)$$

Решая полученное квадратное уравнение (17), получим

$$T_2 = \frac{1}{4} \left( \sqrt{2d^2 + (H + T_1)^2} - 3(H + T_1) \right). \quad (18)$$

Рассматриваем второе уравнение системы (6), которое можно представить в виде:

$$A = 4\lambda H + v_1. \quad (19)$$

Подставив в уравнение (19) равенство (7), получим

$$A^2 = 4H^2 + v_1 A. \quad (20)$$

В равенство (20) подставим уравнение связи (2), получим

$$v_1 = \frac{d^2 - 8H^2}{\sqrt{d^2 - 4H^2}}. \quad (21)$$

Возведем обе части равенства (21) в квадрат, получим

$$v_1^2 = \frac{(d^2 - 8H^2)^2}{d^2 - 4H^2}. \quad (22)$$

В последнее равенство (22) подставим уравнение связи (3) и освободимся от знаменателя

$$(d^2 - 4H^2)T_1^2 + 2(d^2 - 4H^2)HT_1 - 2H^2(d^2 - 6H^2) = 0. \quad (23)$$

Решаем полученное квадратное уравнение (23), получим

$$T_1 = H \left( \sqrt{\frac{3d^2 - 16H^2}{d^2 - 4H^2}} - 1 \right). \quad (24)$$

Зная ширину пласти первой пары досок и используя уравнение связи (3), можно определить толщину этой пары досок по формуле

$$T_1 = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - v_1^2} - H. \quad (25)$$

Зная ширину и толщину первой пары досок, можно используя уравнение (16) определить ширину второй пары досок. Толщину второй пары досок можно определить используя уравнение связи (4)

$$T_2 = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - v_2^2} - (H + T_1). \quad (26)$$

Таким образом, рассмотрена система уравнений (6) совместно с уравнениями связи и получены формулы для определения оптимальных размеров брусьев и досок. Однако в этих формулах размеры брусьев и досок взаимосвязаны. Поэтому определить оптимальные размеры брусьев и досок по данным формулам обычным методом не представляется возможности. Для решения данной задачи воспользуемся численным

методом и определим размеры брусьев и досок по выше приведенным формулам. Алгоритм решения задачи представляется ниже.

Для облегчения расчетов и анализа результатов полученные ранее формулы представляем в относительных единицах, полагая  $m_H = \frac{H}{d}$ .

Относительная ширина наружной пласти бруса

$$m_A = \frac{A}{d} = \sqrt{1 - 4m_H^2}. \quad (27)$$

Относительная ширина первой пары досок

$$m_{B_1} = \frac{B_1}{d} = \frac{1 - 8m_H^2}{m_A}. \quad (28)$$

Относительная толщина первой пары досок

$$m_{T_1} = \frac{T_1}{d} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 - m_{B_1}^2} - 2m_H \right). \quad (29)$$

Относительная ширина второй пары досок

$$m_{B_2} = \frac{B_2}{d} = m_{B_1} - \frac{4m_{T_1}}{m_{B_1}} (m_H + m_{T_1}). \quad (30)$$

Относительная толщина второй пары досок

$$m_{T_2} = \frac{T_2}{d} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 - m_{B_2}^2} - 2(m_H + m_{T_1}) \right). \quad (31)$$

Относительная площадь поперечного сечения брусьев

$$Z_{бр} = 2m_H \cdot m_A. \quad (32)$$

Относительная площадь поперечного сечения досок

$$Z_d = 2m_{T_1} \cdot m_{B_1} + 2m_{T_2} \cdot m_{B_2}. \quad (33)$$

Суммарная площадь поперечных сечений брусьев и досок

$$Z = Z_{бр} + Z_d. \quad (34)$$

Расчеты выполняются в два этапа. В начале задаемся толщиной бруса с градацией 0,01 d и определяем остальные размеры брусьев и досок, а также значение целевой функции. Далее определяем диапазон толщин брусьев, при которых целевая функция принимает наибольшее значение. Затем в этом оптимальном диапазоне изменяем толщину бруса с градацией 0,001 d и определяем все размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции. По этим данным находим максимальное значение целевой функции и оптимальные размеры брусьев и досок. Результаты расчетов представлены в таблице 1.

Результаты расчетов показывают, что наибольший выход пилопродукции наблюдается при толщине бруса 0,212 d. Причем, при увеличении толщины бруса объем их возрастает, а объем боковых досок уменьшается. Следовательно, предположение сделанное ранее подтверждается – имеется такое соотношение размеров брусьев и досок, при котором суммарный объем брусьев и досок становится наибольшим.

Таблица 1 – Изменение размеров брусьев и досок при изменении толщины бруса

$m_H$	$m_A$	$m_{b1}$	$m_{T1}$	$m_{b2}$	$m_{T2}$	$Z_{бр}$	$Z_d$	$Z$
0,19	0,9250	0,7689	0,1297	0,5532	0,0968	0,3515	0,3066	0,658074
0,2	0,9165	0,7419	0,1352	0,4975	0,0985	0,3666	0,2987	0,665279
0,21	0,9075	0,7131	0,1405	0,4369	0,0992	0,3812	0,2871	0,668287
0,22	0,8980	0,6824	0,1455	0,3707	0,0989	0,3951	0,2719	0,666999
0,23	0,8879	0,6496	0,1501	0,2982	0,0971	0,4084	0,2530	0,661420
0,208	0,9094	0,7191	0,1395	0,4495	0,0992	0,3783	0,2897	0,668027
0,209	0,9084	0,7161	0,1400	0,4432	0,0992	0,3797	0,2884	0,668179
0,21	0,9075	0,7131	0,1405	0,4369	0,0992	0,3812	0,2871	0,668287
0,211	0,9066	0,7102	0,1410	0,4306	0,0993	0,3826	0,2858	0,668353
0,212	0,9057	0,7072	0,1415	0,4241	0,0993	0,3840	0,2844	0,668375
0,213	0,9047	0,7041	0,1420	0,4177	0,0993	0,3854	0,2829	0,668354
0,214	0,9038	0,7011	0,1425	0,4112	0,0992	0,3868	0,2815	0,668290
0,215	0,9028	0,6980	0,1430	0,4046	0,0992	0,3882	0,2780	0,668183
0,216	0,9019	0,6949	0,1435	0,3980	0,0992	0,3896	0,2784	0,668033

Важно знать оптимальные соотношения размеров брусьев и досок при оптимальной толщине бруса  $H = 0,212 d$ , которые представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Оптимальные соотношения размеров брусьев и досок и их площадей поперечных сечений

$m_H$	$\lambda$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\frac{b_1}{A}$	$\frac{b_2}{b_1}$	$\frac{T_1}{H}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{Z_{бр}}{Z}$	$\frac{Z_d}{Z}$	$\frac{Z_d}{Z_{бр}}$
0,212	0,234	0,200	0,234	0,780	0,60	0,668	0,70	0,5745	0,4255	0,74

Результаты таблицы 2 показывают, что  $\lambda = \lambda_2$ . Это значит, что отношение толщины бруса к ширине пласти его равно отношению толщины второй доски к ее ширине. Тогда можно написать

$$\frac{H}{A} = \frac{T_2}{b_2}, \quad Hb_2 = AT_2. \quad (35)$$

В этом варианте раскроя пиловочника объем брусьев получается больше, чем объем досок. Пифагорическая зона в этом случае составляет 0,905 d.

Анализируя данные таблицы 1 можно сделать вывод, что ширина наружной пласти второй пары досок  $b_2$  должна быть равна двум толщинам бруса - 2H. Подставляем это соотношение в уравнение (13), получим

$$b_1^2 - 2Hb_1 - 4HT_1 - 4T_1^2 = 0. \quad (36)$$

Решаем это квадратное уравнение (36), получим

$$b_1 = 2(H + T_1). \quad (37)$$

Подставляем полученное равенство (37) в уравнение связи (3), получим

$$T_1^2 + 2HT_1 - \frac{d^2 - 8H^2}{8} = 0. \quad (38)$$

Решая полученное квадратное уравнение (38), получим

$$T_1 = \frac{d}{\sqrt{8}} - H. \quad (39)$$

Приравниваем равенство (39) и (22), получим

$$\sqrt{\frac{3d^2 - 16H^2}{d^2 - 4H^2}} = \frac{d}{\sqrt{8}H}. \quad (40)$$

Возводим обе части равенства в квадрат и производим сложение подобных членов. В результате получаем биквадратное уравнение.

$$H^4 - \frac{7}{32}d^2H^2 + \frac{d^4}{128} = 0. \quad (41)$$

Решая это уравнение получим одно значение корня удовлетворяющее требованиям задачи, которое определяется по формуле

$$H = \frac{d}{8} \sqrt{7 - \sqrt{17}}. \quad (42)$$

Таким образом, получено наиболее точное выражение для определения оптимальной толщины бруса.

Расчеты по формуле (42) показали, что оптимальное значение толщины бруса равно 0,2120176 от диаметра бревна. Для этого значения оптимальные размеры брусьев и досок будут следующими: ширина наружной пласти бруса  $A = 0,906 d$ ; размеры первой пары досок – толщина  $T_1 = 0,14155 d$ , ширина  $e_1 = 0,707 d$ ; размеры второй второй пары досок – толщине  $T_2 = 0,0993 d$ , ширина  $e_2 = 0,424 d$ .

Используя эти оптимальные соотношения расчетные размеры брусьев и досок представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Расчетные оптимальные размеры брусьев и досок

Параметры брусьев и досок	Оптимальные размеры брусьев и досок (мм) для различных диаметров бревна, в см							
	d52	d56	d60	d64	d68	d72	d76	d80
H	110,2	118,7	127,2	135,7	144,2	152,6	161,1	169,6
A	471,1	507,4	543,6	579,8	616,1	652,3	688,6	724,8
$e_1$	367,6	395,9	424,2	452,5	480,8	509,0	537,3	656,6
$T_1$	73,58	79,2	84,9	90,6	96,2	101,9	107,5	113,2
$e_2$	220,5	237,4	254,4	271,4	288,3	305,3	322,2	339,2
$T_2$	51,6	55,6	59,6	63,6	67,5	71,5	75,5	79,4

Результаты таблицы 3 показывают, что обрезные доски шириной 125...150 мм целесообразно получать из брусьев, выпиленных из бревен диаметром 60...72 см.

В этом случае боковые доски получаются толщиной 60...100 мм. Учитывая эти оптимальные размеры брусьев и досок, можно составить оптимальные поставка с получением максимально – возможного выхода пилопродукции.

Таким образом, задача решена – определены оптимальные размеры брусьев и досок получаемых при распиловке пиловочника больших размеров брусом – развальным способом с выпиливанием двух брусьев и двух пар боковых досок.

### Библиографический список

1. Пижурин А.А. Основы моделирования и оптимизации процессов деревообработки: Учебник для вузов/ Пижурин А.А., Розенблит М.С. - М.: Лесная пром-сть, 1988.-293с.
2. Аксенов П.П. Теоретические основы раскря пиловочного сырья. – М.; Л.: Гослесбумиздат, 1960.-216с.
3. Ветшева В.Ф. Раскря крупномерных бревен на пиломатериалы. - М.: Лесная пром-сть, 1976.-168с.
4. Агапов А.И. Определение оптимальных размеров основного постава брусоразвального способа раскря бревен\ Сб.мат ВНТК «Наука-производство-технологии-экология»- Киров:ВятГУ, 2003. Том 5. ФАМ, ИСФ –с.97-98
5. Агапов А.И. Оптимизация раскря крупномерных бревен\ Сб.мат ВНТК «Наука-производство-технологии-экология»- Киров:ВятГУ, 2003. Том 5. ФАМ, ИСФ – с.99-100
6. Агапов А.И. Определение оптимального соотношения высоты бруса и диаметра бревна при брусом-развальном способе раскря бревен больших размеров\ Деп.рукопись в ВИНТИТИ г.Москва, №499-В2004 26.03.04
7. Агапов А.И. Теоретические предпосылки к расчету оптимальных размеров пилопродукции при раскря пиловочника брусом-развальным способом\ Сб.мат. Международной НТК, Уральской гос.лесотехн.университет – г.Екатеринбург, 2007. 438 с.116-119
8. Агапов А.И. Определение оптимальной зоны размеров бруса и боковых досок при брусом-развальном способе раскря пиловочника (статья)\ Сб.мат ВНТК «Наука-производство-технологии-экология»- Киров:ВятГУ, 2008. Том 4. ФАМ, ФСА 340с (с.139-140)
9. Агапов А.И. Оптимизация раскря пиловочника больших размеров\УДК 061.3:001 ББК Ч 215.16 ВНТК «Наука-производство-технология-экология» Сборник материалов. В 3т – Киров: Изд-во ГОУ ВПО Вят.ГУ, 2009, том2. ХБ, БФ, ФАМ – с.262 (с.188-191).

**Арико С. Е., Мохов С. П.** (БГТУ, г. Минск, РБ) [sergeyariko@mail.ru](mailto:sergeyariko@mail.ru)

## **ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ВАЛОЧНО-СУЧКОРЕЗНО- РАСКРЯЖЕВОЧНОЙ МАШИНЫ ESTIMATION OF HARVESTER STABILITY**

Энергетический парк лесозаготовительных и лесохозяйственных предприятий Республики Беларусь долгие годы состоял из гусеничных тракторов Российского производства и агрегатных машин, созданных на их базе и предназначенных для заготовки древесины по хлыстовой технологии. В последние годы в Республике наметилась ус-