УРАЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

Е.Н. Корепанова

Рабочая тетрадь

к лекционному курсу по дисциплинам «**Механика**»
и «Прикладная механика»

Часть I

Екатеринбург
2014

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный
лесотехнический университет»

Кафедра автомобилестроения

Е.Н. Корепанова

Рабочая тетрадь

к лекционному курсу по дисциплинам «**Механика»**
и «Прикладная механика»
для студентов специальностей 240100.62, 280700.62,
241000.62, 190700.62, 261700.63

Часть I

Екатеринбург
2014

Печатается по рекомендации методической комиссии ИАТТС. Протокол № 2 от 20 сентября 2013 г.

Рецензент − Е.Г. Кучумов, канд. техн. наук доцент

Редактор Е.Л. Михайлова
Оператор компьютерной верстки О.А. Казанцева

Подписано в печать 18.11.14	Формат 60×84 1/8	Поз. 81
Плоская печать	Печ. л. 7,44	Тираж 10 экз.
Заказ №		Цена руб. коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

С Т А Т И К А

Статика -

Основные понятия статики

Абсолютно твёрдым телом называется

Материальной точкой называется

Тело называется свободным

Системой тел называется

Сила -

Внешними силами называются

Внутренними силами называются

Системой сил называется

Уравновешенной системой сил называется

Эквивалентной системой сил называется

Равнодействующей силой называется

Основные аксиомы статики

- Всякое тело сохраняет своё состояние покоя или прямолинейного равномерного движения, пока какие-нибудь силы не выведут тело из этого состояния.

- Силы взаимодействия двух тел всегда равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.
- Для равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием двух сил, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и действовали по одной прямой в противоположные стороны.
- Равновесие твердого тела не нарушится, если к нему приложить или удалить систему уравновешенных сил.

Следствие из аксиом:

- Равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, равна по модулю и совпадает по направлению с диагональю параллелограмма, построенного на данных силах, и приложена в той же точке.

Построение диагонали параллелограмма, сторонами которого являются заданные векторы, называется векторным или геометрическим сложением (рис. 1).

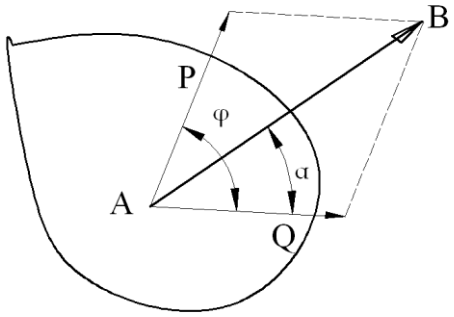


Рис. 1

Модуль и направление двух сил можно определить аналитически.

Модуль Направление

Частные случаи сложения двух сил:

$\varphi = 0$	
$\varphi = 90^0$	
$\varphi = 180^0$	

Связи и реакции связей

Связями называют ____

____

Сила давления ____

____

Сила реакции ____

____

Активные силы ____

____

Реактивные силы ____

____

Нагрузки ____

____

Принцип освобождаемости ____

____

____

____

Идеальная связь ____

____

____

____

Направления реакций идеальных связей

- При опирании тела на связь её реакция направлена от связи к телу перпендикулярно либо к поверхности тела, либо к поверхности связи, либо к общей касательной обеих поверхностей (рис. 2).

Рис. 2

- Если связями являются нити, цепи, тросы, то реакции направлены по связи в направлении от тела (рис. 3).

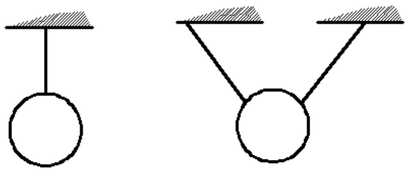


Рис. 3

- Если связь тела осуществляется при помощи подвижного шарнира, то реакция направлена перпендикулярно к опорной поверхности (рис. 4).

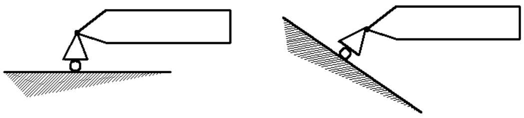


Рис. 4

- Если соединение тела со связью осуществляется при помощи неподвижного шарнира, то определить непосредственно направление реакции нельзя. Сначала определяют две взаимно перпендикулярные составляющие реакции шарнира, а затем по правилу параллелограмма можно определить как модуль, так и направление полной реакции (рис. 5).

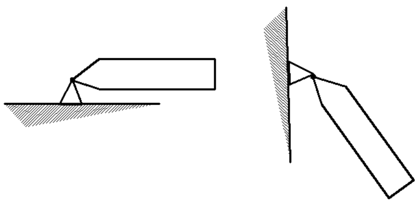


Рис. 5

- Движение тела может быть ограничено жесткой заделкой. Реакцию заделки можно заменить двумя взаимно перпендикулярными составляющими и моментом в заделке (рис. 6).

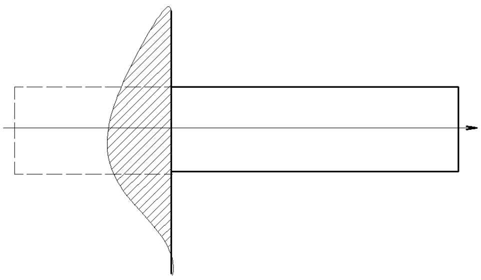


Рис. 6

- Если тело удерживается в равновесии при помощи жестких стержней, шарнирно соединенных с телом и с опорами, то реакции направлены по стержням от тела или к телу (рис. 7).

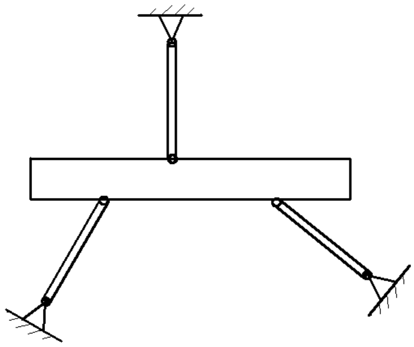


Рис. 7

Нагрузки по способу приложения

Сосредоточенные силы

Распределённые силы (рис. 8)

Интенсивность

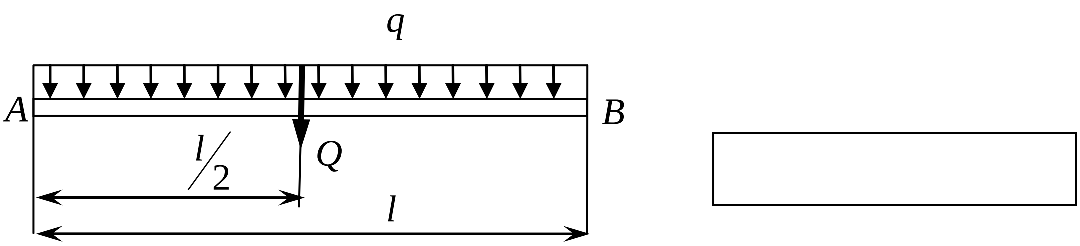
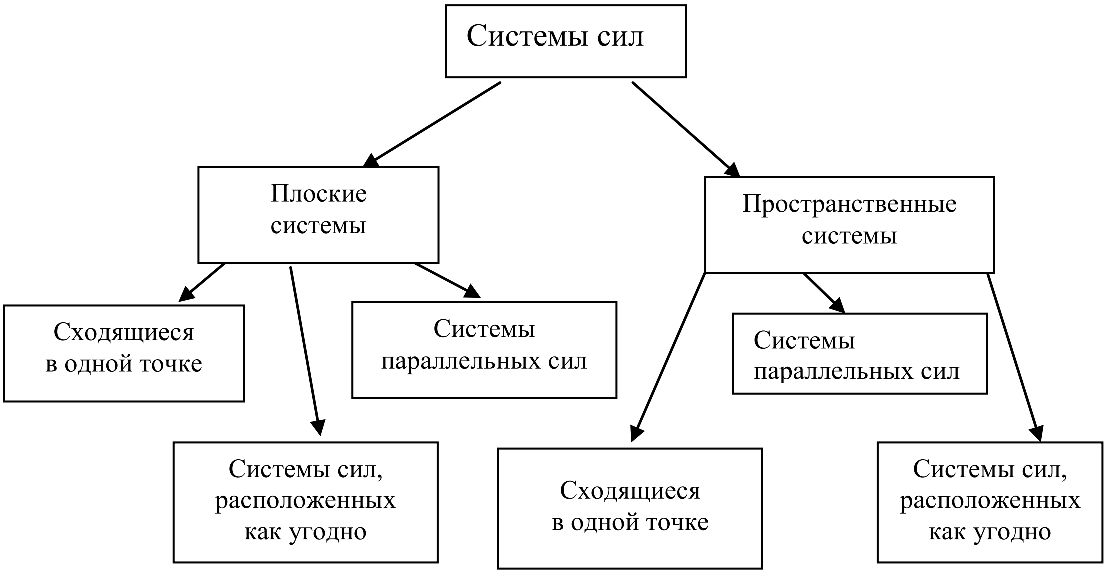


Рис. 8

Системы сил



Плоская система сходящихся сил

Плоской системой сходящихся сил называется ______________________________
____
____

Теорема. Плоская система сходящихся сил в общем случае эквивалентна равнодействующей, которая равна векторной сумме этих сил; линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих (рис. 9).

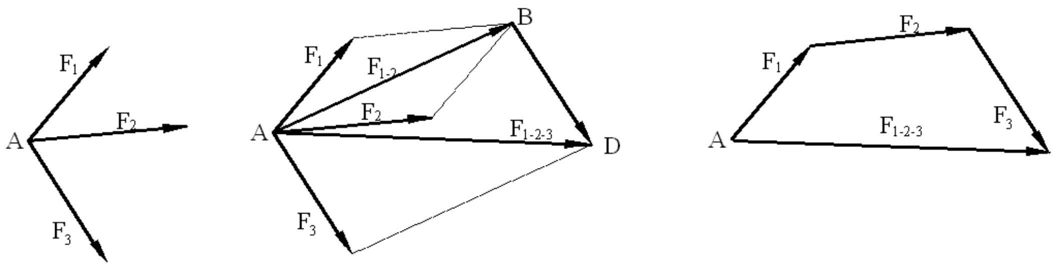


Рис. 9

Необходимо помнить, что стрелки векторов слагаемых сил образуют определенное направление обхода по контуру силового многоугольника, а замыкающая сторона, определяющая модуль и направление равнодействующей, имеет стрелку, направленную против обхода.

Геометрическим способом называется

Графическим способом называется

Геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил

Метод проекций (рис. 10)

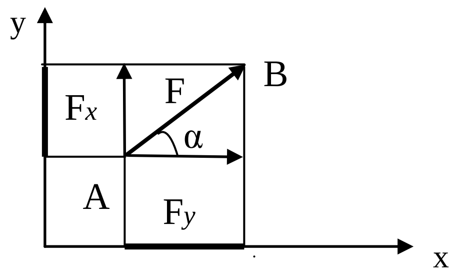


Рис. 10

Проекцией силы на ось называется

Правило знаков

Аналитический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил

Аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил

Момент силы относительно точки (рис. 11)

Моментом силы относительно точки называется

Центром момента называется

Плечом силы относительно центра момента называется

Правило знаков

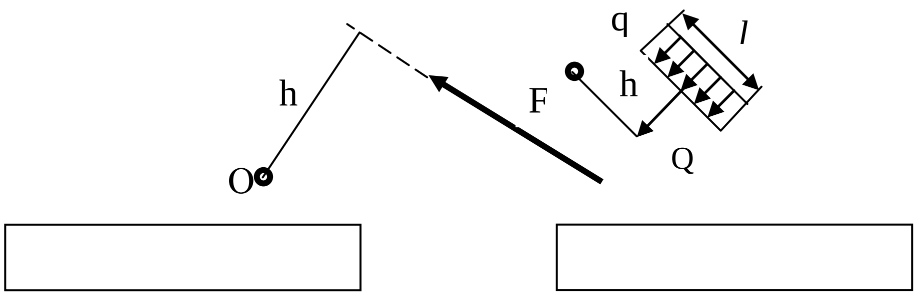


Рис. 11

Пара сил и момент пары (рис. 12)

Две равные антипараллельные силы образуют пару.

Моментом пары называют

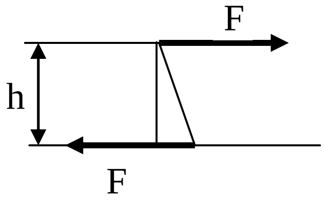


Рис. 12

Правило знаков

Основные свойства пары

Две пары называются эквивалентными, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела.

Теорема об эквивалентных парах

Следствия

Теорема о сложении пар (рис. 13)

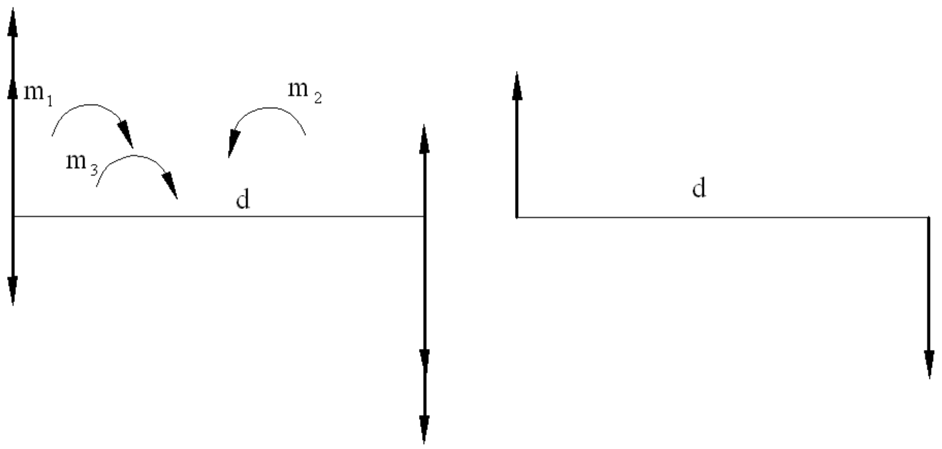


Рис. 13

Условие равновесия плоской системы пар

Плоская система произвольно расположенных сил

Лемма о параллельном переносе сил (рис. 14)

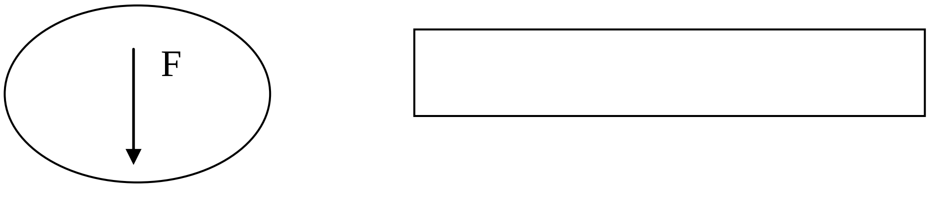


Рис. 14

Приведение плоской системы произвольно расположенных сил к данному центру (рис. 15)

Приведением системы сил называется замена её другой системой, но более простой.

Теорема

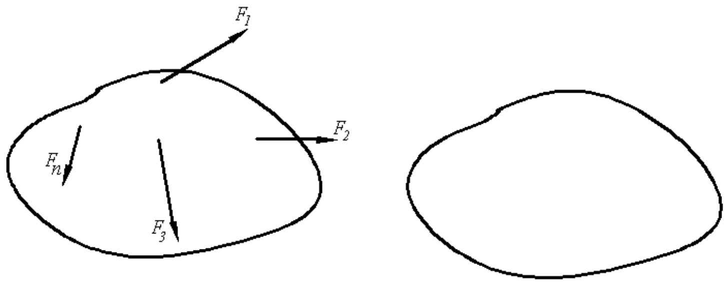


Рис.15

Главный вектор

Главный момент

Свойства главного вектора и главного момента

1

2

3

4

Теорема Вариньона

Различные случаи приведения плоской системы произвольно расположенных сил

$F_{гл} \neq 0 \quad M_{гл} \neq 0$	
$F_{гл} \neq 0 \quad M_{гл} = 0$	
$F_{гл} = 0 \quad M_{гл} \neq 0$	
$F_{гл} = 0 \quad M_{гл} = 0$	

Аналитические условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил

Этапы расчёта задач статики

1. Выбирают тело, равновесие которого будет рассматриваться.
2. Отбрасывают связи, заменяя их реакциями, и устанавливают, какая система сил действует на тело.
3. Пользуясь условиями равновесия, находят неизвестные величины.
4. Выполняют проверку, используя другой способ расчёта, или изменяют направления осей координат.

При решении задач статики аналитическим способом целесообразно составлять уравнения равновесия так, чтобы в каждом из них была только одна неизвестная величина.

Пространственная система сил

Равнодействующая пространственной системы трех сил, сходящихся в одной точке, приложена в той же точке и равна по модулю и направлению диагонали параллелепипеда, ребра которого равны и параллельны заданным силам (рис. 16).

Модуль равнодействующей трех сходящихся сил, расположенных в пространстве перпендикулярно друг другу, равен корню квадратному из суммы квадратов модулей этих сил.

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}, \quad \cos\alpha_1 = F_1 / F_{\Sigma}, \quad \cos\alpha_2 = F_2 / F_{\Sigma}, \quad \cos\alpha_3 = F_3 / F_{\Sigma}.$$

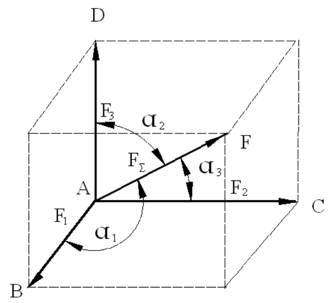


Рис. 16

Равнодействующая любого числа сходящихся сил, расположенных в пространстве, равна замыкающей стороне многоугольника, стороны которого равны и параллельны заданным силам.

Аналитический способ определения равнодействующей:

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2 + F_{\Sigma z}^2}, \quad \cos\alpha_x = F_{\Sigma x} / F_{\Sigma}, \quad \cos\alpha_z = F_{\Sigma z} / F_{\Sigma}, \quad \cos\alpha_y = F_{\Sigma y} / F_{\Sigma}.$$

Аналитическое условие равновесия пространственной системы сходящихся сил выражается тремя уравнениями

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum F_{ky} = 0, \qquad \sum F_{kz} = 0.$$

Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси называется алгебраическая величина, равная моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью (рис. 17).

$$T_y(F) = F_{xz} l$$

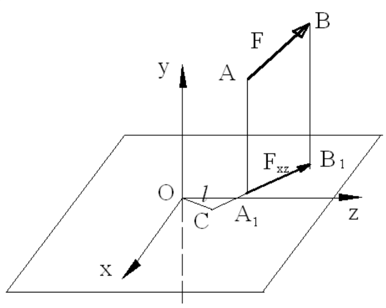


Рис. 17

Теорема о моменте равнодействующей относительно оси

Момент равнодействующей относительно оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же оси.

Произвольная пространственная система сил. Условия равновесия

$$\sum T_x(F_k) = 0; \qquad \sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum T_y(F_k) = 0; \qquad \sum F_{ky} = 0;$$
$$\sum T_z(F_k) = 0. \qquad \sum F_{kz} = 0.$$

Центр тяжести

Центр тяжести – точка, через которую проходит линия действия равнодействующей элементарных сил тяжести.

$$X_c = \frac{\sum G_k x_k}{\sum G_k};$$

$$Y_c = \frac{\sum G_k y_k}{\sum G_k};$$

$$Z_c = \frac{\sum G_k z_k}{\sum G_k},$$

где G_k – вес тела, x_k, y_k ,z_k – координаты центра тяжести элемента тела (рис. 18 – рис. 20).

Формулы для определения координат центра тяжести фигуры, составленной из отрезков линий:

$$X_c = \frac{\sum l_k x_k}{\sum l_k};$$

$$Y_c = \frac{\sum l_k y_k}{\sum l_k};$$

$$Z_c = \frac{\sum l_k z_k}{\sum l_k}.$$

где l_k – длина отрезка.

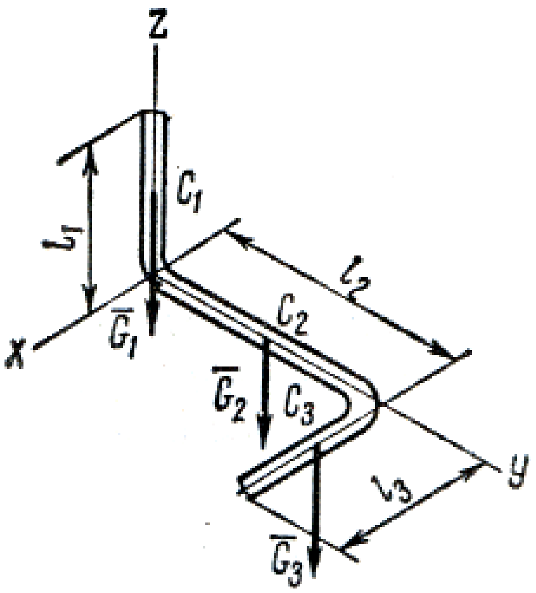


Рис. 18

Формулы для определения координат центра тяжести фигуры, составленной из площадей:

$$X_c = \frac{\sum A x_k}{\sum A_k};$$

$$Y_c = \frac{\sum A_k y_k}{\sum A_k};$$

$$Z_c = \frac{\sum A_k z_k}{\sum A_k}.$$

где A_k – площадь элемента.

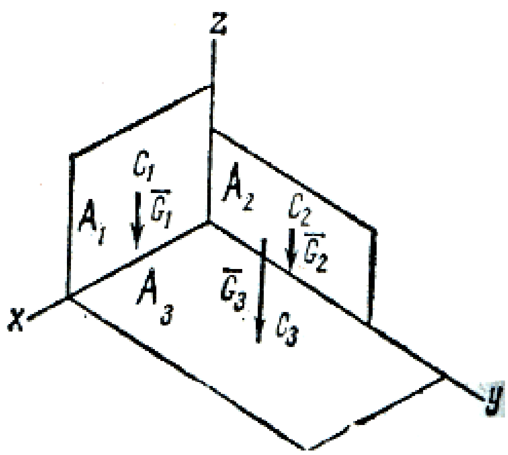


Рис. 19

Формулы для определения координат центра тяжести фигуры, составленной из однородных объемов:

$$X_c = \frac{\sum V x_k}{\sum V_k};$$

$$Y_c = \frac{\sum V_k y_k}{\sum V_k};$$

$$Z_c = \frac{\sum V_k z_k}{\sum V_k}.$$

где V_k – объем элемента.

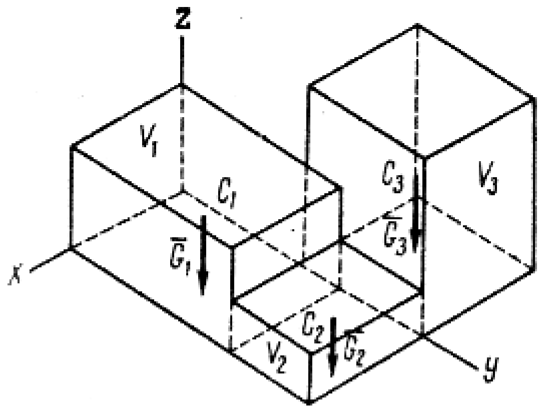


Рис. 20

При решении задач на определение положения центра тяжести любого однородного тела, составленного либо из тонких стержней (линий), либо из пластин (площадей), либо из объемов, целесообразно придерживаться следующего порядка:

1) выполнить рисунок тела, положение центра тяжести которого нужно определить;
2) разбить тело на составные части (отрезки линий или площади, или объемы), положение центра тяжести которых определяется исходя из размеров тела;
3) определить или длины, или площади, или объемы составленных частей;
4) выбрать расположение осей координат;
5) определить координаты центров тяжести составных частей;
6) найденные значения длин, площадей или объемов отдельных частей, а также координат их центров тяжести подставить в соответствующие формулы и вычислить координаты центра тяжести всего тела;
7) по найденным координатам указать на рисунке положение центра тяжести тела.

К И Н Е М А Т И К А

Кинематика -

Основные понятия кинематики

Система отсчёта -

Движение называется абсолютным

Движение называется относительным

Траекторией точки называется

В зависимости от формы траектории движение точки бывает двух видов: прямолинейное и криволинейное.

Естественный способ задания движения

Координатный способ задания движения

Скорость -

Направление вектора скорости при прямолинейном движении

Направление вектора скорости при криволинейном движении

Движение называется ускоренным

Движение называется замедленным

Истинная скорость при любом движении точки равна

Ускорение точки в криволинейном движении

Истинное ускорение точки в криволинейном движении

Вектор ускорения в криволинейном движении всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

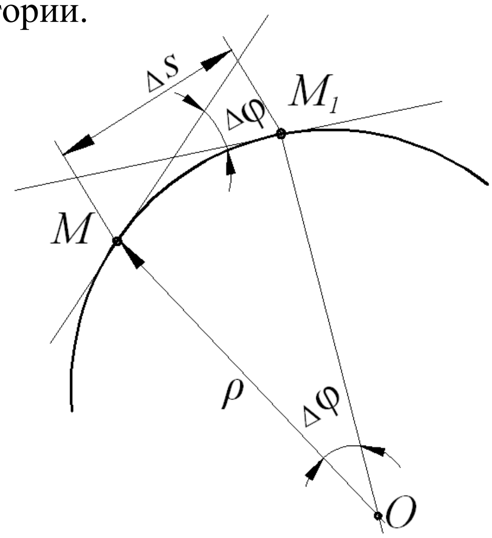


Рис. 21

Кривизна кривой (рис. 21)

Радиус кривизны

Нормальное ускорение (рис. 22)

Касательное ускорение (рис. 22)

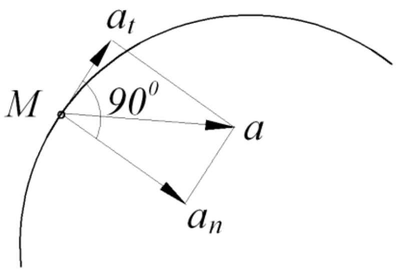


Рис. 22

Движение будет ускоренным

Движение будет замедленным

Зная касательное и нормальное ускорения, можно вычислить модуль и направление полного ускорения по формулам:

Касательное и нормальное ускорения точки являются главными кинематическими величинами, определяющими вид и особенности движения точки.

Виды движения точки в зависимости от ускорения

	a_n	a_t
Движение равномерное $(v = const)$ прямолинейное $(\rho = \infty)$		
Движение равномерное $(v = const)$ криволинейное $(\rho \neq const)$		
Движение равнопеременное прямолинейное $(\rho = \infty)$		
Движение равнопеременное криволинейное $(\rho \neq const)$		
Движение неравномерное $(v \neq const)$ прямолинейное $(\rho = \infty)$		
Движение неравномерное $(v \neq const)$ криволинейное $(\rho \neq \infty)$		

Таким образом, движение точки классифицируется по двум признакам: по степени неравномерности движения и по виду траектории.

Степень неравномерности движения точки задана уравнением, а вид траектории задается непосредственно.

Равномерное прямолинейное движение точки

Уравнение движения имеет вид

Графики движения имеют вид рис. 23.

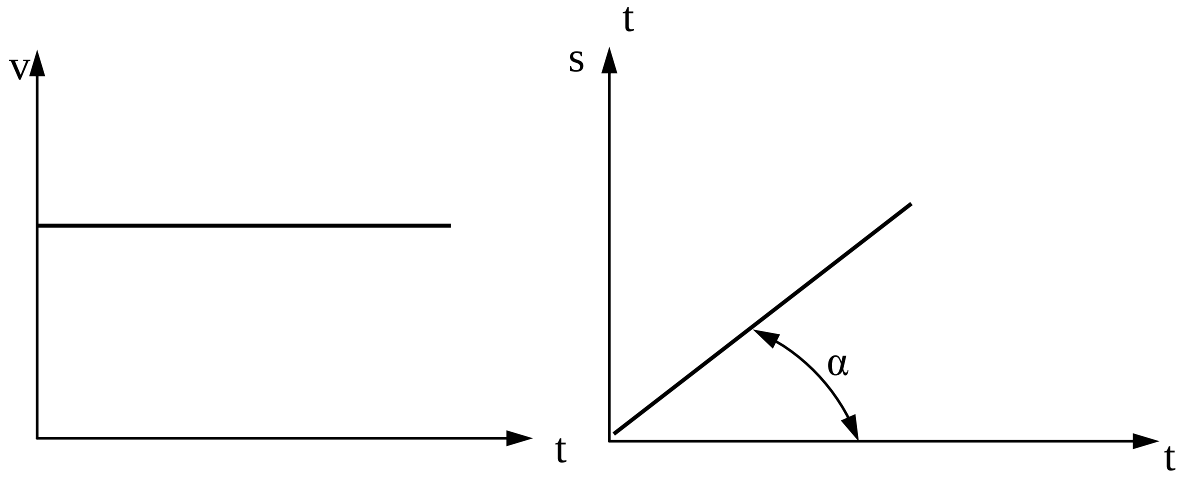


Рис. 23

Равномерное криволинейное движение точки

В частном случае при движении по окружности

$$v = \frac{\pi d}{T},$$

где T – период обращения.

Равнопеременное прямолинейное движение точки

Уравнение равнопеременного движения независимо от его траектории имеет вид:

Числовое значение скорости:

Вспомогательные формулы:

Равнопеременное криволинейное движение точки

Если точка совершает криволинейное движение, то она имеет нормальное ускорение

а модуль её полного ускорения

Свободным падением называется____
____

Ускорение свободного падения

Поступательное движение твёрдого тела

При поступательном движении тела все его точки движутся по одинаковым траекториям и в каждый данный момент они имеют равные скорости и равные ускорения. Поэтому поступательное движение тела задают движением какой-либо одной точки, обычно движением центра тяжести.

Вращательное движение твёрдого тела (рис. 24)

Вращательным называется движение_______________________________________
____
____

Ось вращения -____
____
____

Вращательное движение тела в зависимости от времени *t* характеризуют угловые величины: φ (угол поворота в радианах), ω (угловая скорость в c^{-1}) и ε (угловое ускорение в c^{-2}).

Закон вращательного движения тела выражается уравнением

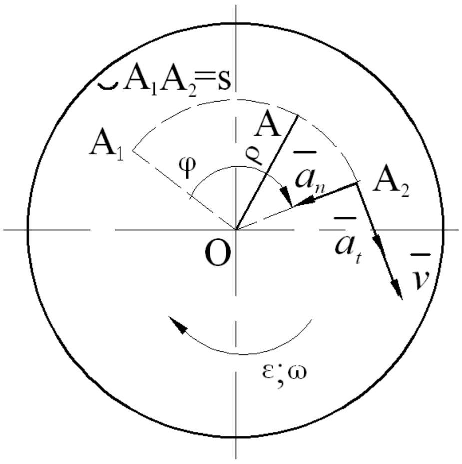


Рис. 24

Угловым перемещением тела называется

Угловое перемещение выражается в радианах (рад) или оборотах (об); в последнем случае угловое перемещение обозначают *N*.

φ=

Путь любой точки вращающегося тела

s=

Скорость любой точки вращающегося тела

v=

Угловая скорость

ω=

Вектор скорости точки вращающегося тела направлен

Частотой вращения называют

$\boxed{n=\qquad\qquad}$

Угловое ускорение

$\boxed{\varepsilon=\qquad\qquad}$

Равномерное вращательное движение

Движение тела называется равномерным, если

Уравнение равномерного вращения имеет вид

$\boxed{\varphi=\qquad\qquad}$

Угловая скорость равномерно вращающегося тела

$\boxed{\omega=\qquad\qquad}$

Параметры движения точки вращающегося тела:

$s=\qquad\qquad v=$

$a_t=0\qquad\qquad a_n=$

Неравномерное вращательное движение

Неравномерным вращательным называется движение ____

____

____

$\varphi =$, $\omega =$, $\varepsilon =$.

Для любой точки неравномерно вращающегося тела:

$a_t =$; $a_n =$; $a =$; $tg(a, a_n) =$.

Если направление углового ускорения совпадает с направлением вращения, то вращательное движение является ускоренным, и наоборот.

Равнопеременное вращательное движение

Движение называется равнопеременным ____

____

____

$\omega =$; $\varphi =$.

Необходимо ясно представлять зависимость между угловыми величинами, характеризующими вращательное движение тела, и линейными величинами, характеризующими движение различных точек этого тела.

Параметры	Характер движения	Движение поступательное	Движение вращательное
Перемещение	Равномерное	$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
	Равнопеременное		
	Неравномерное		
Скорость	Равномерное		
	Равнопеременное		
	Неравномерное		
Ускорение касательное	Равномерное		
	Равнопеременное		
	Неравномерное		
Ускорение нормальное			

Сложное движение точки и тела

Движение точки называется сложным

Относительным называется движение

Движение называется переносным

Движение называется абсолютным

Метод изучения сложного движения

Если необходимо изучить относительное движение точки, то следует мысленно остановить переносное движение, если необходимо изучить переносное движение точки, то следует мысленно остановить относительное движение.

Абсолютная скорость -

Относительная скорость -

Переносная скорость -

Теорема о сложении скоростей

Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным движением твердого тела называется

Вопрос о плоскопараллельном движении тел сводится к вопросу о движении отрезка прямой в плоскости, параллельной основной.

Плоскопараллельное движение изучается двумя методами: 1) методом мгновенных центров скоростей и 2) методом разложения плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное.

Разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное (рис. 25)

Теорема ____

____

____

____

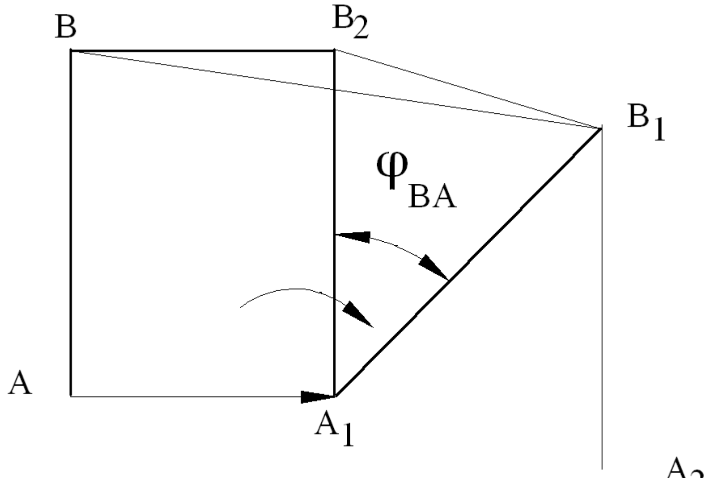


Рис. 25

Плоскопараллельное движение тела может осуществляться путем одновременно происходящих вращательного и поступательного движений; поступательное движение можно считать переносным, а вращательное – относительным.

Вектор абсолютной скорости точки *B* равен вектору абсолютной скорости любой другой точки *A* плюс вектор скорости точки *B* в относительном вращательном движении отрезка *AB* вокруг точки *A*.

Одним из методов определения кинематических характеристик является метод планов скоростей и ускорений.

Определение скоростей (рис. 26) и ускорений (рис. 27) с помощью планов

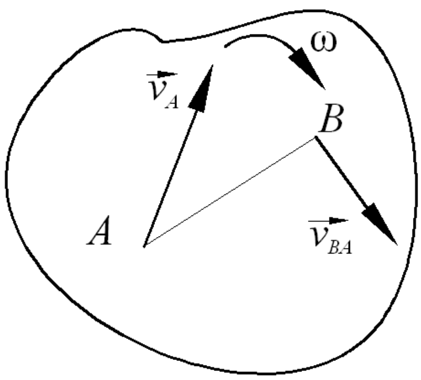


Рис. 26

Для плоского звена скорость $\vec{v}_B$ его точки B выражается через скорость $\vec{v}_A$ его точки A и относительную скорость $\vec{v}_{AB}$ (точки B относительно A) векторным равенством $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$,
где $\vec{v}_{BA}$=$AB\,\omega$ (AB – длина отрезка; ω – угловая скорость звена).

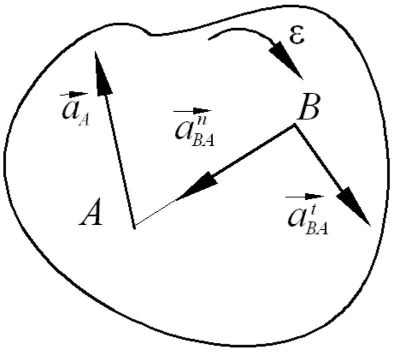


Рис. 27

Соответственно для ускорения $\vec{a}$ имеем

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{BA} + \vec{a}^t_{BA} ,$$

где относительное ускорение $\vec{a}_{BA}$ есть векторная сумма двух составляющих: нормальной $\vec{a}^n_{BA}$ и тангенциальной $\vec{a}^t_{BA}$,

$$\vec{a}^n_{BA} = AB\omega^2 = v^2_{BA} / AB \quad \text{и} \quad \vec{a}^t_{BA} = AB\varepsilon ,$$

где ε – угловое ускорение.

ДИНАМИКА

Динамика - ______________________________

____

Изолированная материальная точка - ______________________________

____

Законы динамики

Первый закон динамики - ______________________________

____

____

____

____

Инерция или инертность - ______________________________

____

Второй закон динамики

Из второго закона Ньютона следует, что под действием постоянной силы находящаяся в покое свободная материальная точка движется прямолинейно равнопеременно.

Основное уравнение динамики

Масса

Принцип независимости действия сил

Уравнение плоского движения материальной точки в координатной форме

Дифференциальные уравнения плоского движения материальной точки

Две основные задачи динамики

В тех случаях, когда при решении задач имеем дело с несвободной материальной точкой, необходимо применить принцип освобождаемости.

Метод кинетостатики

Сила инерции

Принцип Даламбера

Силы инерции в криволинейном движении (рис. 28)

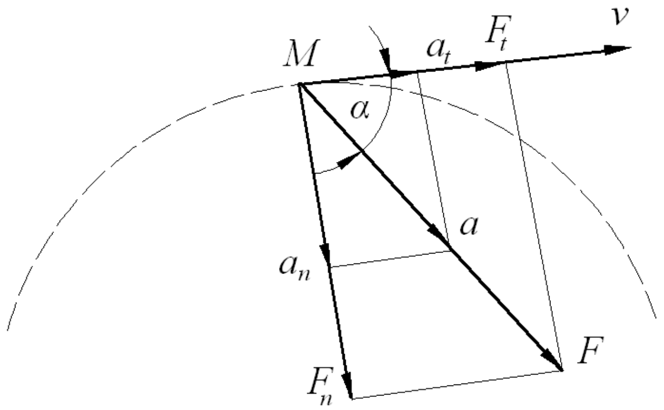


Рис. 28

Каждому ускорению соответствует своя сила инерции:

– касательная, или тангенциальная;

– нормальная, или центробежная;

– полная.

Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути (рис. 29)

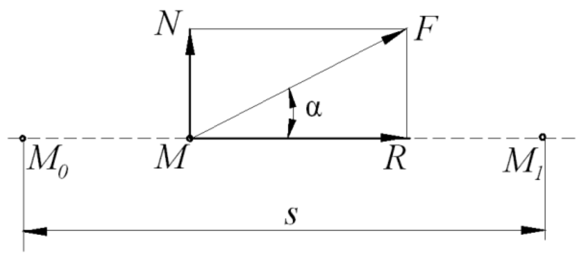


Рис. 29

Работа силы

Работа положительна, если

Работа отрицательна, если

Работа равна нулю, если

Силы, совершающие положительную работу, называются движущими силами, силы, совершающие отрицательную работу, – силами сопротивления.

Единица работы

Работа переменной силы на криволинейном участке пути (рис. 30)

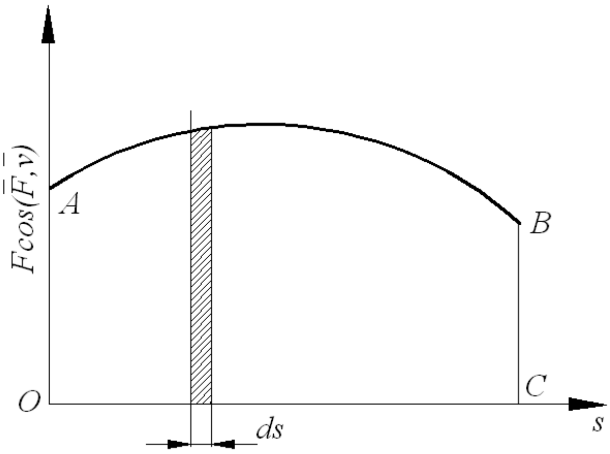


Рис. 30

Теорема о работе равнодействующей:

Теорема о работе сил тяжести:

Потенциальные силы -

Работа постоянной силы, приложенной к вращающемуся телу (рис. 31)

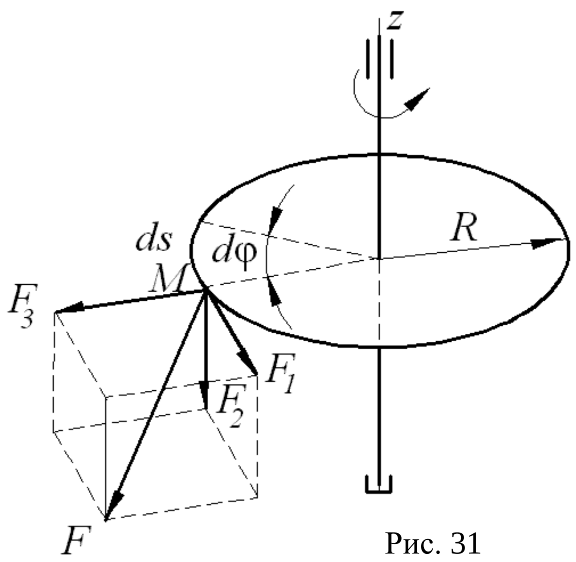


Рис. 31

Вращающий момент –

Работа постоянной силы

Мощность силы -

Если работа совершается равномерно	
Если направление силы и направление перемещения совпадают	
Если работа совершается силой, приложенной к вращающемуся телу	
Единица мощности	

Коэффициент полезного действия

Энергией называется

Силы полезного сопротивления -

Силы вредного сопротивления

Коэффициент полезного действия

Механический к.п.д.

Теорема об изменении количества движения

Количеством движения материальной точки называется

Единица количества движения:

Импульсом постоянной силы называется

Единица импульса силы:

Теорема об изменении количества движения:

Для прямолинейного движения под действием постоянной силы

В случае криволинейного движения материальной точки под действием переменной по модулю и направлению силы

Если к материальной точке приложено несколько постоянных сил, то изменение количества движения будет равно сумме (алгебраически, если силы действуют по одной прямой, или векторной, если силы действуют под углом друг другу) импульсов данных сил.

Теорема об изменении кинетической энергии

Механической энергией называют

Кинетической энергией называют

Единица кинетической энергии

Теорема об изменении кинетической энергии:

Если к материальной точке приложено несколько сил, то

Закон сохранения механической энергии

Потенциальной называют энергию

При падении точки под действием лишь одной силы тяжести (рис. 32) совершается работа

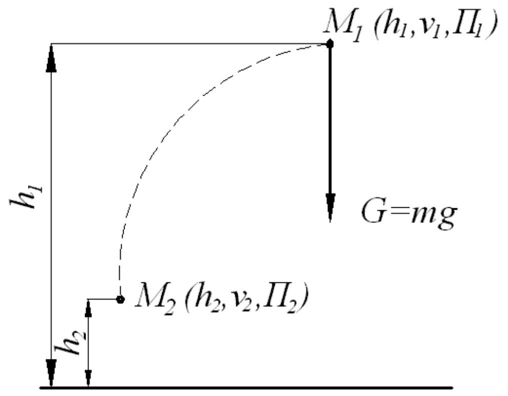


Рис. 32

Работа равна изменению кинетической энергии

Закон сохранения механической энергии:

Уравнения поступательного и вращательного движений твёрдого тела

Все формулы динамики точки применимы для тела, движущегося поступательно.

Вращательное движения твёрдого тела (рис. 33)

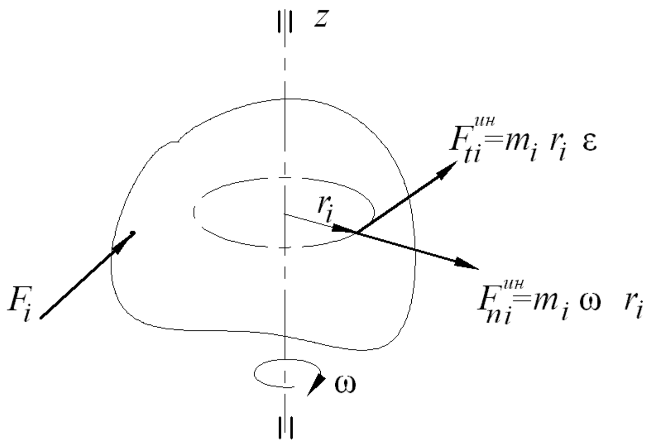


Рис. 33

$$\Sigma M_z = 0, \qquad \Sigma M_z(F_i) - \Sigma M_z\left(F_{ti}^{ин}\right) = 0.$$

$$T = \Sigma M_z\left(F_{ti}^{ин}\right) = \Sigma\left(m_i r_i^2 \varepsilon\right) = \varepsilon \Sigma m_i r_i^2.$$

Моментом инерции тела относительно оси называется

Единица момента инерции:

Уравнение вращательного движения твёрдого тела

Чем больше момент инерции тела, тем больший вращающий момент надо приложить, чтобы сообщить телу заданное угловое ускорение.

Момент инерции тела относительно какой-либо оси *z*, параллельной центральной

Кинетическая энергия твёрдого тела

Кинетическая энергия твёрдого тела равна

Тело движется поступательно	
Тело вращается вокруг неподвижной оси	
Тело движется плоскопараллельно	

Теорема об изменении кинетической энергии системы тел:

Формулы динамики для поступательного и вращательного движений твёрдого тела

	Вид движения	
	поступательное	вращательное
Уравнение движения		
Работа		
Мощность		
Кинетическая энергия		

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Основные понятия

Прочностью называется

Деформацией называется

Жёсткостью называется

Устойчивостью называется

Элементы расчёта:

Силы упругости −

Упругостью называется

Упругой деформацией называется

Остаточной или пластической деформацией называется

Пластичными называются материалы

Хрупкими называются материалы

Основные задачи курса

1.

2.

3.

Основные гипотезы и допущения

1. Гипотеза об отсутствии первоначальных внутренних усилий.

2. Допущение об однородности, непрерывности, изотропности материала.

3. Допущение об идеальной упругости.

Изменение линейных и угловых размеров тела называется соответственно линейной и угловой деформацией. Изменение положения (координат) точек тела, вызванное деформацией, называется перемещением.

4. Допущение о малости перемещений или принцип начальных размеров.

5. Допущение о линейной деформируемости тел.

6. Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли).

7. Принцип независимости действия сил.

При изучении сопротивления материалов некоторые положения теоретической механики оказываются неприменимы.

1.

2.

3.

Виды деформаций (рис. 34)

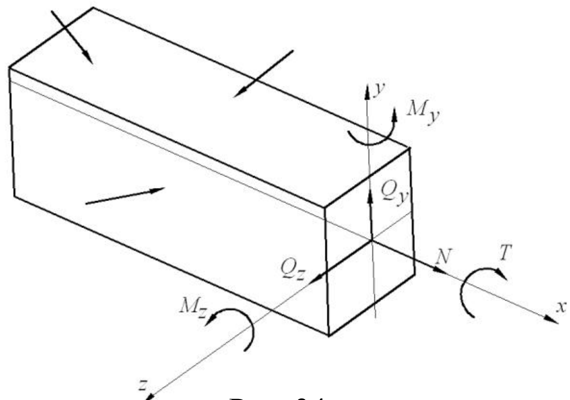


Рис. 34

В сечении возникает только продольная сила N − деформация

В сечении возникает только поперечная сила Q − деформация

В сечении возникает только момент M − деформация

В сечении возникает только момент T − деформация

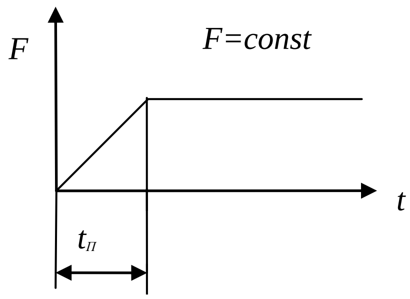
Если в сечении одновременно возникает несколько внутренних силовых факторов, то в этих случаях имеет место сочетание основных деформаций.

Внешние силы (нагрузки)

Нагрузки – это

В зависимости от характера действия нагрузки подразделяют на статические и динамические.

Статическими (рис. 35) называют нагрузки



где $t_П$ – время пуска или разгона

Рис. 35

Динамическими (рис. 36) называют нагрузки

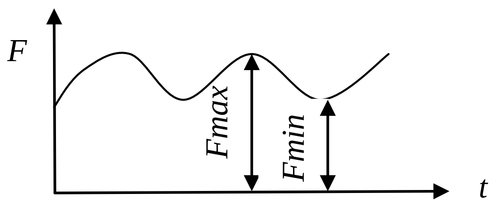


Рис. 36

Случайными (рис. 37) называют нагрузки

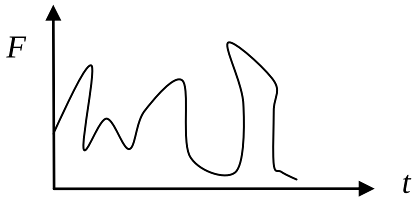


Рис. 37

Метод сечений (рис. 38)

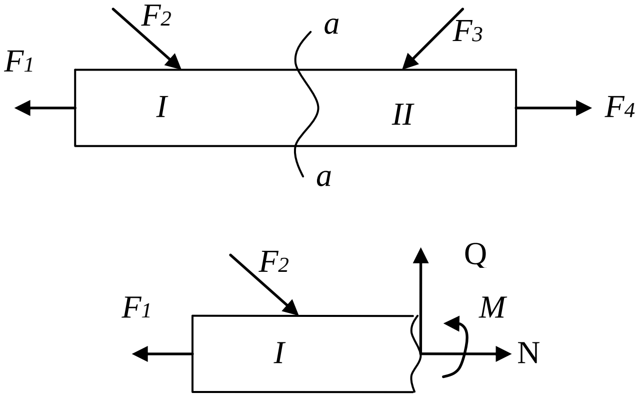


Рис. 38

Если внешние силы лежат в одной плоскости, то для их уравновешивания необходимо в общем случае приложить в сечении три внутренних усилия: силу *N*, направленную вдоль оси тела (бруса) и называемую продольной силой; силу *Q*, действующую в плоскости поперечного сечения и называемую поперечной силой, и момент *M*, плоскость действия которого перпендикулярна плоскости сечения. Этот момент возникает при изгибе стержня и называется изгибающим моментом.

Напряжение (рис. 39)

Напряжение характеризует

Напряжение − величина векторная.

Единица напряжения:

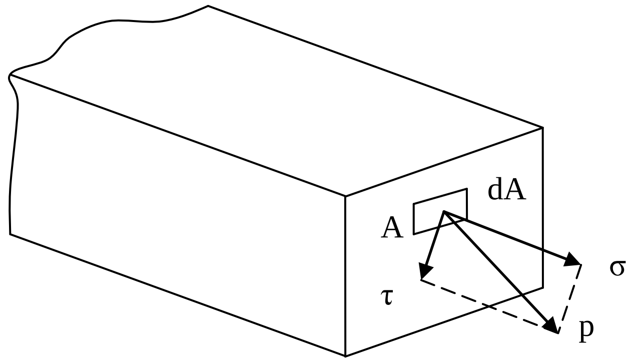


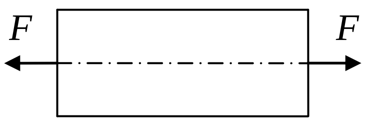
Рис. 39

σ

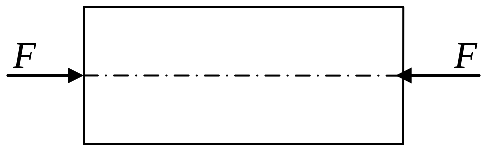
τ

ρ

Понятие об осевом растяжении (сжатии)



а)



б)

Брусья с прямой осью (прямые брусья), работающие на растяжение или сжатие, называют стержнями.

Части бруса постоянного сечения, заключённые между поперечными плоскостями, в которых приложены активные или реактивные силы, будем называть участками (рис. 40).

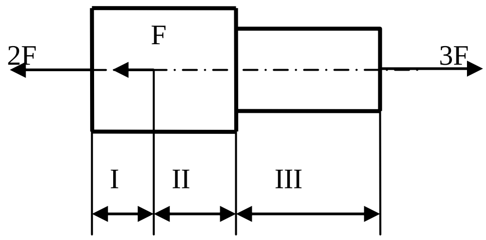


Рис. 40

Продольная сила в поперечном сечении бруса численно равна

Правило знаков:

Для наглядного изображения распределения вдоль оси бруса продольных сил и нормальных напряжений строят графики, называемые эпюрами.

Деформации при растяжении (сжатии) (рис. 41)

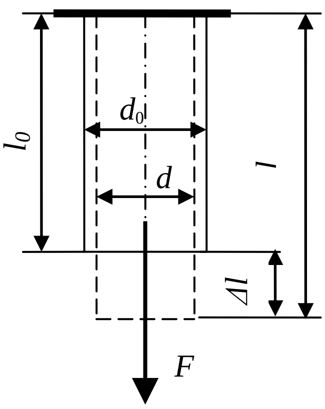


Рис. 41

Деформации бывают:

1) абсолютные: продольные $\Delta l = l - l_0$; поперечные $\Delta d = d_0 - d$;

2) относительные: продольные $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$; поперечные $\varepsilon_1 = \dfrac{\Delta d}{d_0}$.

Опытным путем установлено, что при центральном растяжении или сжатии отношение относительных поперечной и продольной деформаций для данного материала – величина постоянная.

$$|\varepsilon_1| = \mu |\varepsilon|.$$

Здесь μ – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

Закон Гука при растяжении (сжатии)

E – модуль продольной упругости − характеризует ____________________

____

Единица модуля упругости:

Формула Гука

Произведение EA называется________________________

Если участков несколько, то

Испытание материалов на растяжение и сжатие

Для испытаний применяют образцы, изображённые на рис. 42.

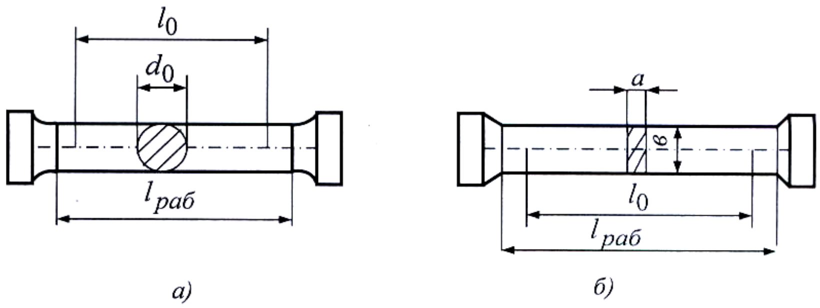


Рис. 42

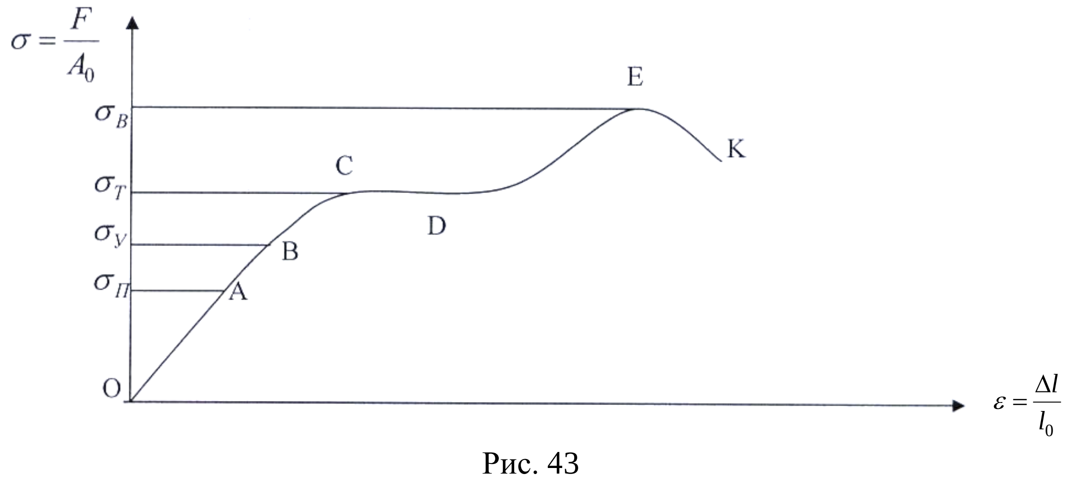


Рис. 43

Эту диаграмму (рис. 43) называют условной диаграммой растяжения низкоуглеродистой стали.

$\sigma_П$ –

$\sigma_У$

$\sigma_Т$

$\sigma_В$

Степень пластичности материала может быть охарактеризована (в процентах) остаточным относительным удлинением δ и остаточным относительным сужением ψ шейки образца после разрыва. Чем больше δ и ψ, тем пластичнее материал.

Материалы, обладающие очень малой пластичностью, называют хрупкими. Диаграмма растяжения хрупких материалов не имеет площадки текучести.

Расчеты на прочность при растяжении и сжатии

Предельным напряжением при статической нагрузке для пластичных материалов является предел текучести, для хрупких материалов − предел прочности.

Коэффициентом запаса прочности называется

Опасным сечением называется

Допускаемым коэффициентом запаса прочности называется

Для пластичных материалов

Для хрупких материалов

Допускаемым напряжением называется

Условие прочности при растяжении (сжатии)

Три вида задач:

1. Проектный расчёт

2. Проверочный расчёт

3. Определение допускаемых нагрузок

Смятие

Напряжение смятия

Полагают, что при контакте по плоскости возникают нормальные напряжения смятия, равномерно распределенные по площади контакта. Условие прочности на смятие имеет вид

При контакте двух деталей по цилиндрической поверхности (рис. 44) (например заклёпочное соединение) закон распределения напряжений смятия по поверхности контакта сложен (рис. 44, *а, б*), поэтому при расчете на смятие цилиндрических поверхностей в расчетную формулу подставляют не площадь боковой поверхности полуцилиндра, по которой происходит контакт, а площадь *abce* диаметрального сечения отверстия или цилиндра (условная площадь смятия); тогда

где d – ____________________________________;
δ – ______________________________________.

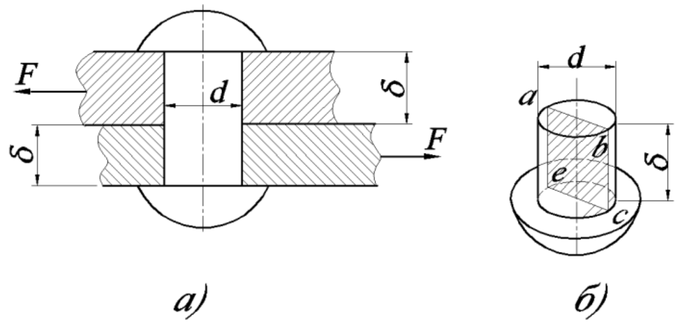


Рис. 44

Допускаемое напряжение смятия для пластичных материалов

$$[\sigma]_{см} = \frac{(1{,}75...2)\sigma_T}{[S]},$$

где σ_T – предел текучести материала детали, $[S]$–допускаемый коэффициент запаса прочности.

Сдвиг (рис. 45)

Сдвигом (рис. 45, *а*) называется ____
____
____

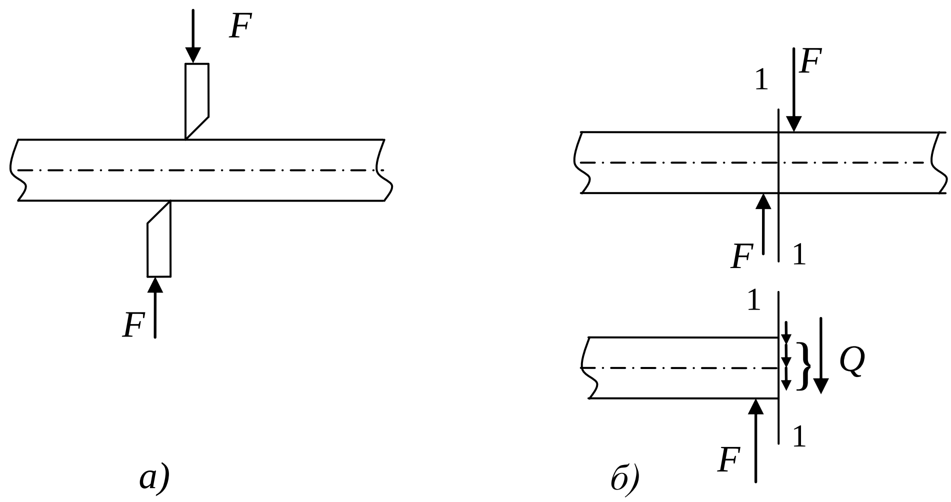


Рис. 45

Для определения поперечной силы Q применяется метод сечений (рис. 46, *б*)

Расчётная формула при сдвиге

Деформация сдвига, доведённая до разрушения материала, называется срезом (применительно к металлическим деталям) или скалыванием (применительно к неметаллическим конструкциям).

Допускаемое напряжение на срез выбирают для пластичных материалов в зависимости от предела текучести.

При расчётах на срез в случае, если соединение осуществляется несколькими одинаковыми деталями, полагают, что все они нагружены одинаково.

Деформация и закон Гука при сдвиге (рис. 46)

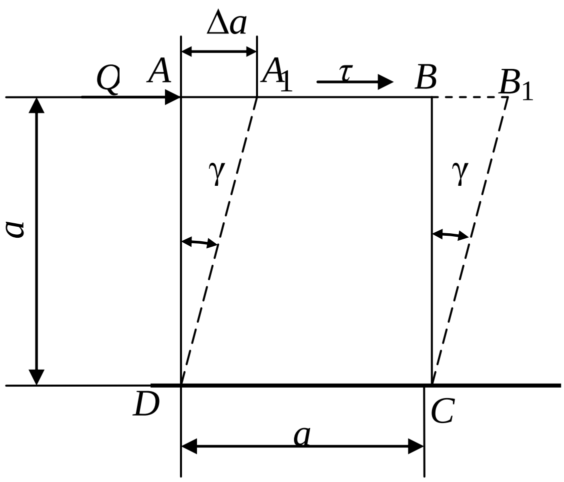


Рис. 46

Абсолютным сдвигом называется

Относительным сдвигом называется

Закон Гука при сдвиге

Модулем сдвига или модулем упругости второго рода называется

Единица модуля сдвига:

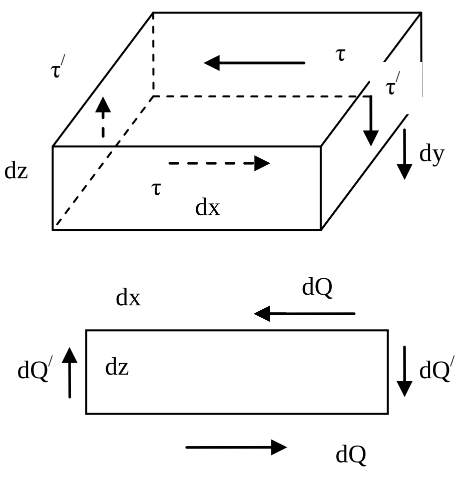
Между тремя упругими постоянными *E*, *G*, μ существует зависимость

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Принимая для сталей $\mu = 0{,}25$, получим $G_{стали} \approx 0{,}4E_{стали}$.

Закон парности касательных напряжений

Касательные напряжения в двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные их общему ребру, равны по модулю.



Доказательство:

Парные касательные напряжения в двух взаимно перпендикулярных сечениях направлены либо к линии пересечения плоскостей, либо от этой линии.

Геометрические характеристики плоских сечений

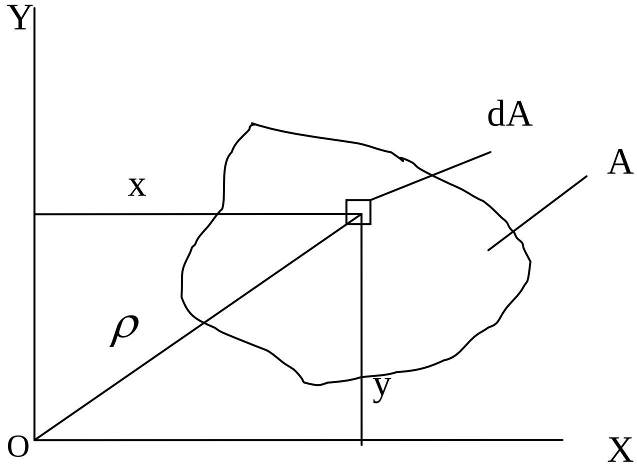


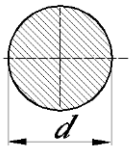
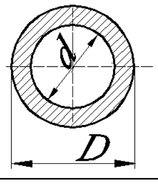
Рис. 47

Статическим моментом площади плоской фигуры (рис. 47) относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется

Примечание:

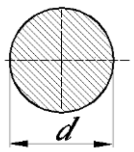
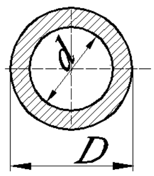
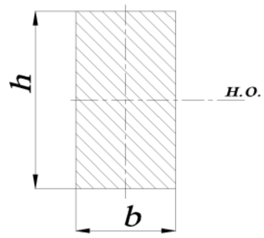
Полярным моментом инерции плоской фигуры (рис. 47) относительно полюса, лежащего в той же плоскости, называется

Примечание:

Осевым моментом инерции плоской фигуры (рис. 47) относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется

Примечание:

Момент инерции при параллельном переносе осей

Центральными осями называются оси

Центральным моментом инерции называется

Теорема:

Примечание:

Главными осями инерции называются

Главным моментом инерции называется

Главной центральной осью называется

Главным центральным моментом инерции называется

Кручение

Кручением называется

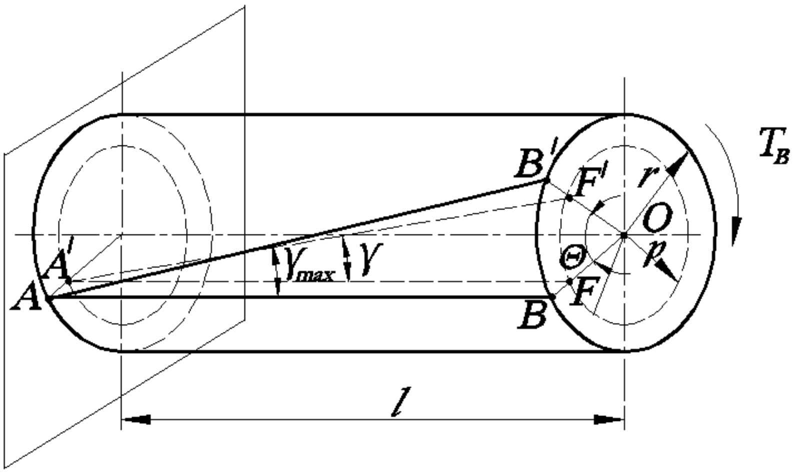


Рис. 48

При деформации (рис. 48) можно наблюдать:

1.

2.

3.

Из сказанного следует, что деформация кручения круглого стержня заключается в повороте поперечных сечений относительно друг друга вокруг оси стержня.

Полным углом закручивания Θ называется

Относительным углом закручивания φ_o называется

Метод сечений при построении эпюр крутящих моментов

Крутящий момент в любом поперечном сечении

Правило знаков

Напряжения и деформации при кручении

Рассмотрим $\Delta A' FF'$ (рис. 48)

Получим величину касательного напряжения в любой точке поперечного сечения (рис. 49).

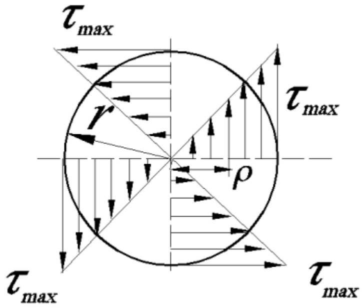


Рис. 49

Вывод формулы для определения угла закручивания (рис. 50).

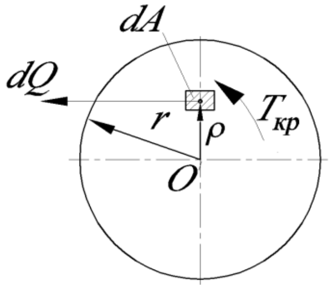


Рис. 50

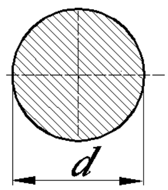
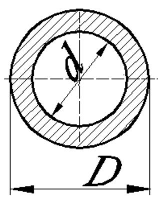
Жёсткостью сечения при кручении называется

Для цилиндрического бруса, имеющего несколько участков, отличающихся материалом, размерами поперечного сечения, значением крутящего момента, полный угол закручивания равен алгебраической сумме углов закручивания отдельных участков.

Выведем формулу для определения напряжений.

Полярным моментом сопротивления, или моментом сопротивления при кручении, называется

Единица момента сопротивления

Для круглого сплошного сечения	
Для кольцевого сечения	

Условие статической прочности вала при кручении

Здесь $[\tau]_{кр}$ – допускаемое напряжение при кручении.

Для сталей $[\tau_к] = (0.55...0,6)[\sigma_р]$.

Условие жёсткости вала при кручении.

Величины допускаемых относительных углов закручивания:

$$[\varphi_o^\circ] = (0{,}25...1)\,{}^{град}\!/_{м}.$$

С помощью выведенных расчётных формул выполняют три вида расчётов конструкций на прочность и жёсткость при кручении – проектный, проверочный и определение допускаемой нагрузки.

Изгиб

Общие понятия о деформации изгиба (рис. 51)

Чистым изгибом называется

Прямым изгибом называется

Поперечным изгибом называется

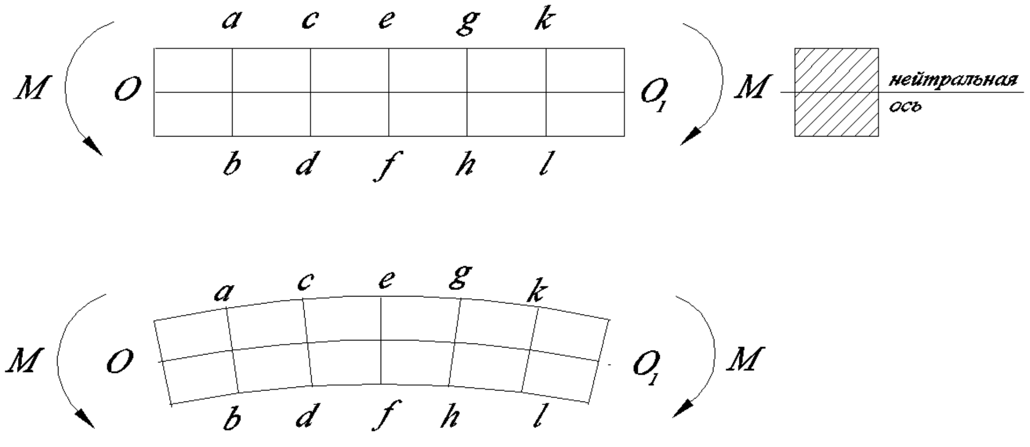


Рис. 51

Наблюдения:

Вывод:

Нейтральной осью называется

Метод сечений при изгибе

Поперечная сила в сечении балки численно равна

Изгибающий момент в сечении балки численно равен

Правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 52)

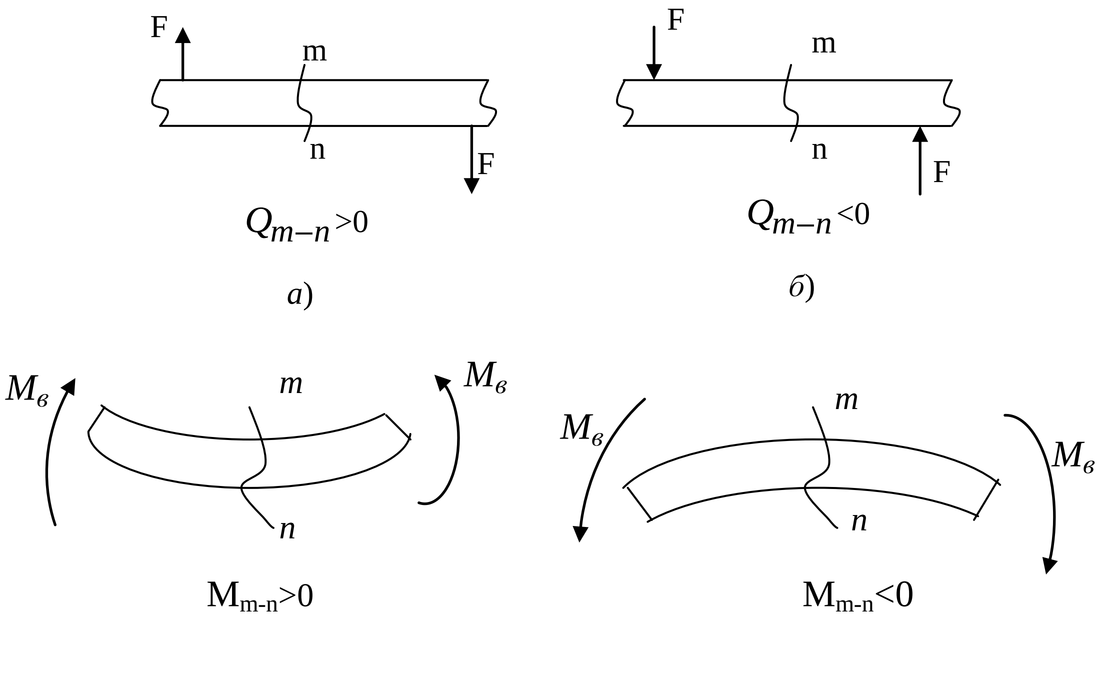


Рис. 52

Дифференциальные зависимости при изгибе

Между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки существуют дифференциальные зависимости, основанные на теореме Журавского.

Теорема:

Рассмотрим балку (рис. 53).

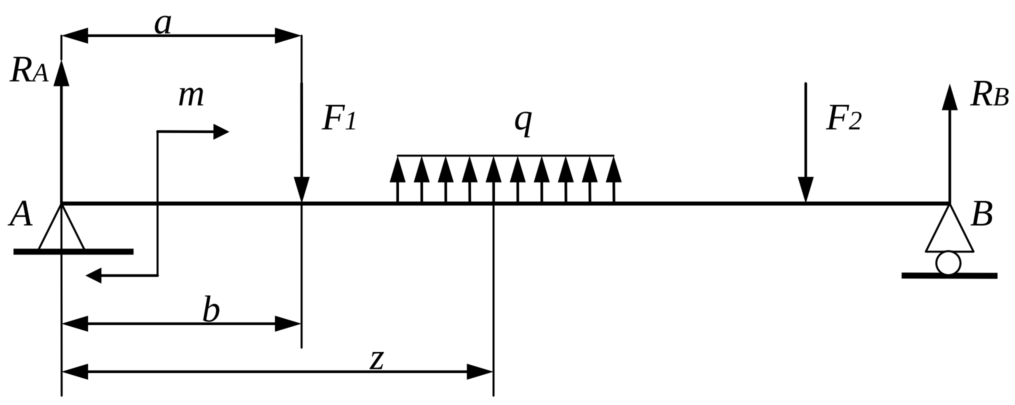


Рис. 53

Уравнение изгибающего момента в сечении с координатой z

Продифференцируем это выражение:

Продифференцируем вторично

Нормальные напряжения при чистом изгибе (рис. 54)

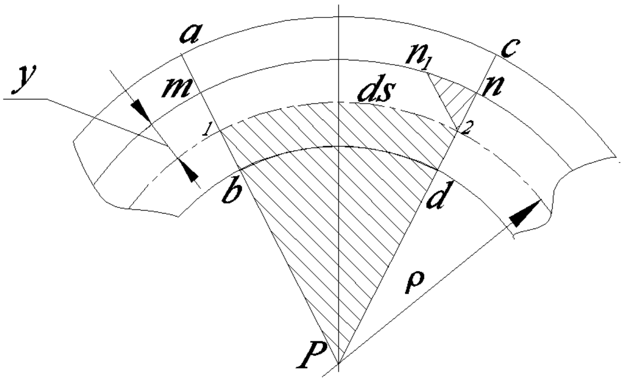


Рис. 54

Вводя гипотезу, что волокна балки не оказывают давления друг на друга, можно утверждать, что при чистом изгибе в поперечном сечении балки возникают только нормальные напряжения растяжения и сжатия, неравномерно распределённые по сечению. На нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю. Вопрос о распределении напряжений по поперечному сечению решается путём рассмотрения деформаций волокон балки.

Из анализа формулы следует, что нормальные напряжения при изгибе распределены по высоте сечения неравномерно: максимальные напряжения возникают в волокнах, наиболее удалённых от нейтральной оси, т.е. у верхнего и нижнего краёв сечения (рис. 55).

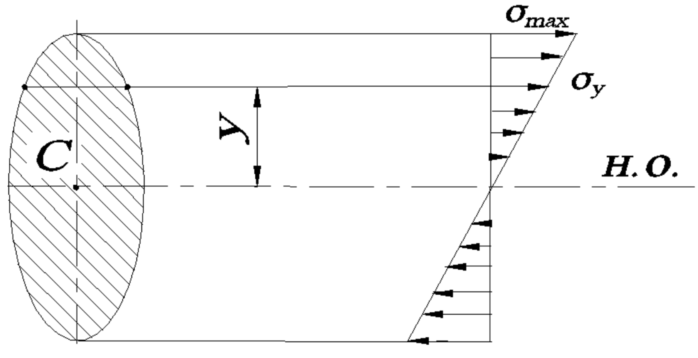


Рис. 55

Для вывода формулы, связывающей нормальные напряжения с изгибающим моментом, применим метод сечений и рассмотрим равновесие части балки, изображённой на рис. 56.

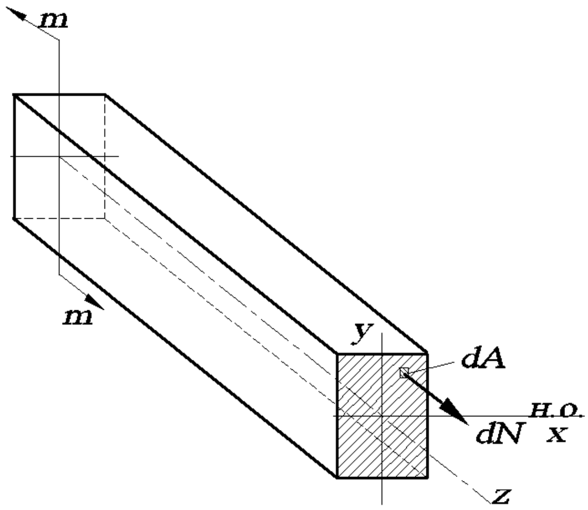


Рис. 56

Изогнутая ось такой балки представляет собой дугу окружности. Нейтральная ось проходит через центр тяжести площади поперечного сечения.

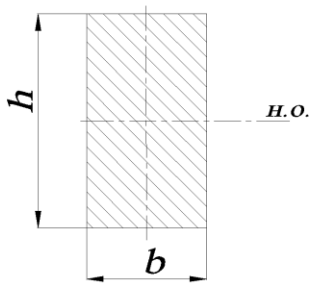
Моментом сопротивления изгибу называется

Единица момента сопротивления

Расчёты на прочность при изгибе

Моменты сопротивления изгибу наиболее распространённых сечений:

1) прямоугольник размером $b \times h$ (рис. 57)



$$W = \frac{J}{y_{\max}} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}.$$

Рис. 57

2) круг диаметром d:

$$W = \frac{\pi d^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1 d^3$$

3) кольцо размером $D \times d$:

$$W = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)/64}{D/2} = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32D} \approx 0{,}1\frac{D^4 - d^4}{D}.$$

Допускаемое нормальное напряжение при изгибе рассчитывают так же, как при растяжении и сжатии:

$$[\sigma]_и = \sigma_{Tи}/[S],$$

где $\sigma_{Tи}$ – предел текучести на изгиб для пластичных материалов, $\sigma_{Tи} = (1{,}1 \ldots 1{,}2)\sigma_T$;

σ_T – предел текучести на растяжение, МПа.

$[S] = (1{,}3 \ldots 2)$ – допускаемый коэффициент запаса прочности при статической нагрузке для пластичных материалов.

Определение деформаций при изгибе (рис. 58)

При изгибе ось балки искривляется, оставаясь в плоскости нагрузки. В результате каждое сечение (центр тяжести) получает вертикальное смещение и поворачивается на некоторый угол θ=arc tgy$^{/}$. Уравнение изогнутой оси $y = y(x)$ определяет прогибы сечений в функции от их координат. Для малых деформаций (θ=y$^{/}$) дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид $y^{\|} = \dfrac{M}{EJ}$,

интегрируя которое получаем уравнение для углов поворота сечений

$$y^{|} = \theta = \int_0^x \frac{M}{EJ} dx + \theta_0$$

и уравнение изогнутой оси (прогибов)

$$y = \int_0^x \left(\int_0^x \frac{M}{EJ} dx \right) dx + \theta_0 x + y_0 ,$$

где y_0 и θ_0 − прогиб и угол поворота сечения в начале координат.

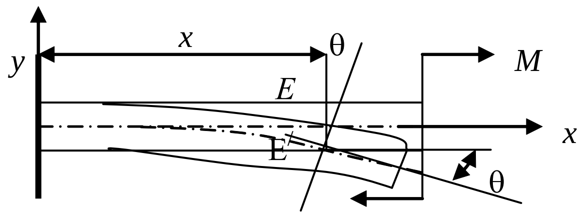


Рис. 58

Если при решении этого дифференциального уравнения рассматривать все участки балки в единой системе координат, помещая начало координат в крайнее левое либо правое сечение, все распределенные нагрузки продлить до конца балки, вводя компенсирующие, то, интегрируя его, получим универсальные уравнения для углов поворота сечений и изогнутой оси (прогибов) балки.

Универсальное уравнение углов поворота сечений

$$EJ\theta = EJy^{|} = EJ\theta_0 \pm \sum \frac{M_0 (x - -a)^1}{1!} \pm \sum \frac{F(x - -b\ )^2}{2!} \pm \sum \frac{q(x - -c)^3}{3!}.$$

Универсальное уравнение прогибов или изогнутой оси

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x \pm \sum \frac{M_0 \left(x - -a^2\right)}{2!} \pm \sum \frac{F(x-b)^3}{3!} \pm \sum \frac{q(x-c)^4}{4!}.$$

В этих уравнениях: E − модуль упругости первого рода; J − момент инерции поперечного сечения балки относительно оси Z, перпендикулярной плоскости нагрузки; a, b, c − расстояния от начала координат до нагрузки M_0, F,q соответственно (расстояние берется до начала распределенной нагрузки).

Параметры y_0 и θ_0 определяются из граничных условий:

- для консольной балки угол поворота и прогиб сечения в заделке равны нулю;
- для балки на двух опорах прогибы на этих опорах равны нулю.

Знак каждого члена в универсальном уравнении определяется по правилу знаков для изгибающих моментов, так как интегрируется уравнение $M=EJy^{||}$.

Расчеты на жесткость основываются на условиях

$y_{\max} \le [y]$,

$\theta_{\max} \le [\theta]$.

Построение изогнутой оси балки – построение графиков прогибов. Для приближенного построения необходимо вычислить прогибы в наиболее характерных точках. Через эти точки, используя граничные условия в закреплении, строят изогнутую ось балки.

Правила проверки основаны на связи изгибающего момента и кривизны балки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ},$$

где ρ − радиус кривизны в сечении:

- на участке, где изгибающий момент положителен, ось балки изогнута выпуклостью вниз;
- на участке, где изгибающий момент отрицателен, ось балки изогнута выпуклостью вверх;
- на участке, где момент равен нулю, ось балки − прямая линия;
- в сечении, где момент равен нулю, у изогнутой оси балки точка перегиба.

Энергетический метод определения перемещений с использованием интеграла Мора

Метод Мора – универсальный способ для определения линейных и угловых перемещений в любых плоских и пространственных системах, состоящих из шарнирно или жестко соединенных прямых или кривых брусьев.

Порядок определения перемещений.

- К балке или раме, освобожденной от внешних нагрузок, к сечению, перемещение которого определяется, прикладывается единичная сила, если определяется линейное перемещение, или единичный момент, если определяется угловое перемещение, в направлении искомого перемещения.
- Заданная балка или рама с внешними нагрузками и балка или рама с единичной нагрузкой разбиваются на одинаковые участки, и на каждом из них одинаковым образом задается координата произвольного сечения.
- Составляются уравнения для изгибающего момента M по участкам в заданной балке или раме и M_1 в балке или раме с единичной нагрузкой.
- Искомое линейное или угловое перемещение δ определяется с помощью интегралов Мора:

$$\delta = \sum_i \int_0^l \frac{MM_1}{EJ} dx_i.$$

Интегрирование проводится по длине каждого участка, суммирование – по всем участкам.

При применении метода Мора положительное значение искомого перемещения получается в том случае, если его направление совпадает с направлением приложенной единичной силы (единичного момента). Знак минус указывает на то, что искомое перемещение направлено против действия этой единичной силы (момента).

Примем в дальнейшем такие обозначения деформаций:

$\delta_A^в$ − вертикальное перемещение точки А;

$\delta_A^г$ − горизонтальное перемещение точки А;

θ_A − угол поворота сечения А.

Сочетание основных деформаций

Если в поперечном сечении бруса возникают только нормальные напряжения, то суммарное значение напряжения можно определить как сумму напряжений от каждой из нагрузок (рис. 59).

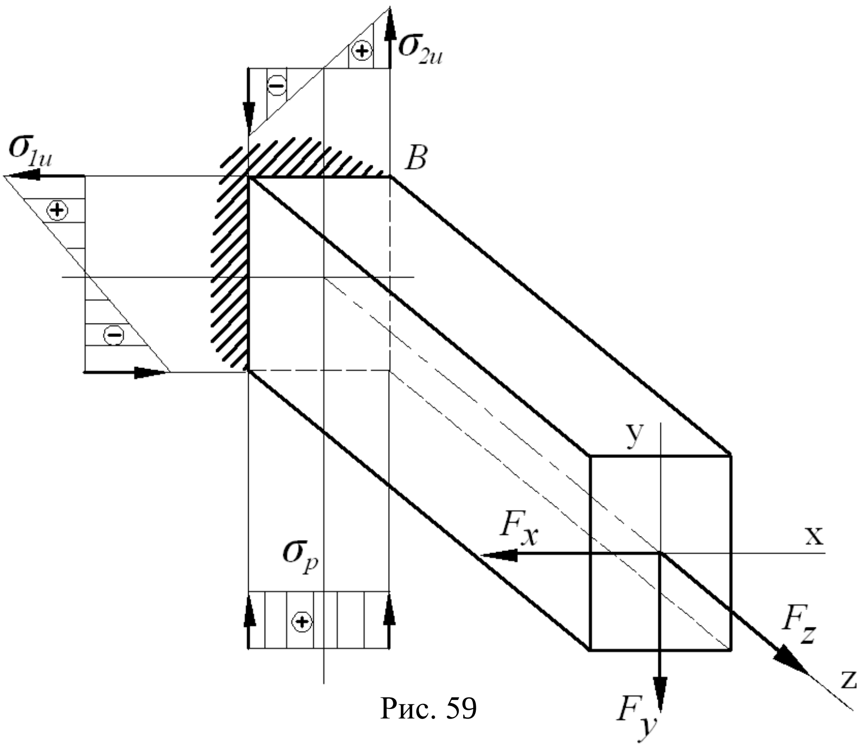


Рис. 59

Применим принцип независимости действия сил и определим максимальные нормальные напряжения в опасном сечении.

Гипотезы прочности

Гипотезы прочности – это

Эквивалентным напряжением называется

1. Гипотеза наибольших касательных напряжений:

2. Гипотеза Мора

3. Энергетическая гипотеза