

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАГОТОВКЕ, ПЕРЕРАБОТКЕ И ОТДЕЛКЕ ДРЕВЕСИНЫ

А.И. Аганов
ВятГУ, Киров, РФ

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСКРОЯ СЕГМЕНТА С УЧЕТОМ ШИРИНЫ ПРОПИЛА OPTIMIZATION OF CUTTING SEGMENT WITH A VIEW OF CUTTING WIDTH

Поставлена и решена задача определения оптимальных размеров двух обрезных досок, получаемых из сегмента, с учетом ширины пропила.

Optimization of cutting segment given the width of the cut. Solved the problem of determining the optimal sizes of the two-edged boards, received from a segment when cutting timber bare the collapse of the way.

При раскросе пиловочника брусом способом возможен вариант, когда толщина бруса не всегда находится в оптимальном диапазоне. В этом случае получаются сегменты, для которых оптимальные соотношения размеров выпиливаемых досок из него не могут быть приемлемы, так как не обеспечивают получение максимального выхода пилопродукции. Для такого варианта возникает необходимость определения своих оптимальных соотношений размеров досок к диаметру бревна с учетом получаемого бруса [1]. При распиловке пиловочника средних и больших размеров из сегмента целесообразно выпиливать две доски (рисунок).

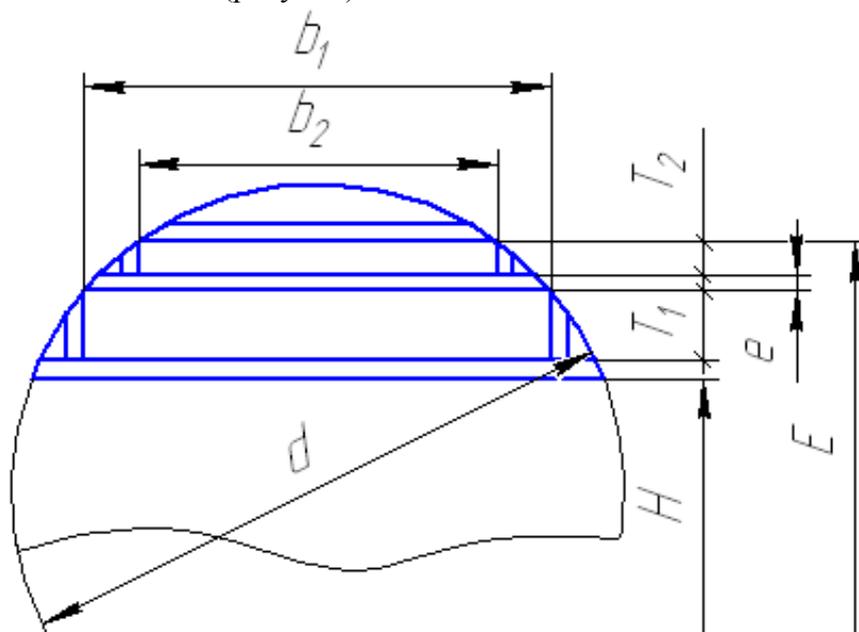


Схема раскроя сегмента с выпиливанием двух обрезных досок

Задачу оптимизации можно решить следующим образом [2]. В качестве критерия оптимальности выбираем выход получаемых из сегмента двух обрезных досок. Целевую функцию можно написать в виде суммы площадей поперечных сечений обрезных досок:

$$Z = T_1 b_1 + T_2 b_2, \quad (1)$$

где T_1, T_2 – толщины первой и второй досок;
 b_1, b_2 – ширины этих досок.

Для нахождения уравнения связи воспользуемся теоремой Пифагора. В этом случае размеры пиловочника и выпиливаемого бруса известны. Тогда для первой доски уравнение связи будет иметь вид:

$$d^2 - b_1^2 - (H + 2T_1 + 2e)^2 = 0, \quad (2)$$

где d – диаметр пиловочника в вершинном торце;
 H – толщина бруса;
 e – ширина пропила.

Для второй доски уравнение связи будет иметь вид:

$$d^2 - b_2^2 - (H + 2T_1 + 2T_2 + 4e)^2 = 0. \quad (3)$$

Полагаем, что математическая модель составлена. Для ее решения воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функцию Лагранжа можно записать в следующем виде:

$$L = b_1 T_1 + b_2 T_2 + \lambda_1 (d^2 - b_1^2 - H^2 - 4T_1^2 - 4e^2 - 4HT_1 - 4He - 8T_1 e) + \lambda_2 (d^2 - b_2^2 - H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 16e^2 - 4HT_1 - 4HT_2 - 8He - 8T_1 T_2 - 16T_1 e - 16T_2 e), \quad (4)$$

где λ_1, λ_2 – множители Лагранжа.

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial b_1} = T_1 - 2\lambda_1 b_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial T_1} = b_1 - 8\lambda_1 T_1 - 4\lambda_1 H - 8\lambda_1 e - 8\lambda_2 T_1 - 4\lambda_2 H - 8\lambda_2 T_2 - 16\lambda_2 e = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial b_2} = T_2 - 2\lambda_2 b_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial T_2} = b_2 - 8\lambda_2 T_2 - 4\lambda_2 H - 8\lambda_2 T_1 - 16\lambda_2 e = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решаем полученную систему уравнений (5) совместно с уравнениями связи. Из первого уравнения системы (5) можно написать:

$$T_1 = 2\lambda_1 b_1, \quad \lambda_1 = \frac{T_1}{2b_1}. \quad (6)$$

Рассматриваем третье уравнение системы (5):

$$T_2 = 2\lambda_2 b_2, \quad \lambda_2 = \frac{T_2}{2b_2}. \quad (7)$$

Рассматриваем четвертое уравнение системы (5), в которое подставляем равенство (7), получим:

$$b_2^2 = 4T_2^2 + 2HT_2 + 4T_1 T_2 + 8eT_2 = 2T_2 (H + 2T_1 + 2T_2 + 4e). \quad (8)$$

В равенство (8) подставляем уравнение связи (3), получим квадратное уравнение:

$$T_2^2 + \frac{3}{4}(H + 2T_1 + 4e)T_2 + \frac{T_1}{2}(H + T_1 + 4e) + \frac{1}{8}(H + 4e)^2 - \frac{d^2}{8} = 0. \quad (9)$$

Решая последнее квадратное уравнение (9), получим:

$$T_2 = \frac{3}{8}(\sqrt{8d^2 + (H + 2T_1 + 4e)^2} - 3(H + 2T_1 + 4e)). \quad (10)$$

Рассматриваем второе уравнение системы (5), в которое подставляем равенство (6), а также последнее уравнение системы (5), получим:

$$b_1 = \frac{4T_1^2}{b_1} + \frac{2HT_1}{b_1} + \frac{4T_1e}{b_1} + b_2. \quad (11)$$

Последнее равенство представляем в виде:

$$b_1^2 - b_2b_1 - 2T_1(H + 2T_1 + 2e) = 0. \quad (12)$$

Из последнего уравнения можно определить ширину первой доски:

$$b_1 = \frac{1}{2}(b_2 + \sqrt{b_2^2 + 8T_1(H + 2T_1 + 2e)}). \quad (13)$$

В уравнение (12) можно подставить уравнение связи (2), получим:

$$b_1b_2 = d^2 - H^2 - 6HT_1 - 8T_1^2 - 4He - 4e^2 - 12eT_1. \quad (14)$$

Тогда ширину второй доски можно определить по формуле:

$$b_2 = \frac{d^2 - H^2 - 6HT_1 - 8T_1^2 - 4He - 4e^2 - 12eT_1}{\sqrt{d^2 - H^2 - 4T_1^2 - 4e^2 - 4HT_1 - 4He - 8eT_1}}. \quad (15)$$

Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (5) совместно с уравнениями связи. Однако по полученным формулам определить непосредственно оптимальные размеры досок не представляется возможным, так как размеры досок в формулах взаимосвязаны.

Для определения оптимальных размеров досок можно воспользоваться численным методом или использовать дополнительные условия (требования). Более упрощенный вариант решения задачи получается при использовании дополнительных условий. Но необходимо иметь в виду, что при этом обеспечивается меньшая точность определения оптимальных размеров досок. Так как целевая функция вблизи экстремума изменяется плавно-медленно, то такое допущение вполне приемлемо.

В связи с этим задаемся дополнительными условиями, используя которые можно определить размеры боковых досок. Одно из требований, которое должно соблюдаться при раскрое сегмента, толщина внешней доски T_2 должна быть меньше толщины внутренней доски T_1 . Тогда можно написать:

$$T_1 = aT_2, \quad (16)$$

где a – величина увеличения толщины внутренней доски относительно толщины внешней доски.

Величина «а» по исследованиям автора [2] может находиться в пределах 1,3–2,5, и в среднем рекомендуется принимать в расчетах равной 2,0. Подставим это равенство (16) в уравнение (10), получим:

$$T_2 = \frac{\sqrt{4d^2(2 + 3a + a^2) + (H + 4e)^2} - (3 + 2a)(H + 4e)}{4(2 + 3a + a^2)}. \quad (17)$$

Второе условие, которое можно использовать при решении такой задачи – это величина пифагорической зоны E , которая взаимосвязана с размерами досок следующим равенством [3]:

$$E = H + 2T_1 + 2T_2 + 4e. \quad (18)$$

Используя равенство (16), можно написать:

$$T_2 = \frac{E - H - 4e}{2(a + 1)}. \quad (19)$$

Пифагорическую зону E можно определить, задаваясь шириной второй доски b_2 по формуле:

$$E = \sqrt{d^2 - b_2^2}. \quad (20)$$

Подставим выражение (19) в формулу (17), получим:

$$a = \frac{E(2E - (H + 4e)) - d^2}{d^2 - E^2}. \quad (21)$$

Для анализа и выбора рациональных размеров боковых обрезных досок рекомендуется представленные выше формулы использовать в относительных единицах, полагая $H/d = m_n$. Алгоритм решения задачи можно представить в следующем виде.

Задаемся шириной второй доски в относительных единицах $\frac{b_2}{d} = m_{b_2}$ и определяем размер пифагорической зоны по формуле:

$$m_E = \frac{E}{d} = \sqrt{1 - m_{b_2}^2}. \quad (22)$$

Затем определяем величину увеличения первой доски по сравнению с толщиной второй доски:

$$a = \frac{m_E(2m_E - (m_n + 4m_e)) - 1}{1 - m_E^2}. \quad (23)$$

Можно также задаваться величиной увеличения толщины внутренней (первой) доски по сравнению с толщиной внешней доски, а затем определять размеры досок.

Толщину второй боковой доски определяем по формуле:

$$m_{T_2} = \frac{T_2}{d} = \frac{\sqrt{4(2 + 3a + a^2) + (m_n + 4m_e)^2} - (3 + 2a)(m_n + 4m_e)}{4(a^2 + 3a + 2)}. \quad (24)$$

Толщину первой доски определяем по формуле:

$$m_{T_1} = \frac{T_1}{d} = am_{T_2}. \quad (25)$$

Ширину второй боковой доски можно определить по формуле:

$$m_{b_2} = \frac{b_2}{d} = \sqrt{1 - (m_n + 2m_{T_2}(a + 1) + 4m_e)^2}. \quad (26)$$

Ширину первой доски можно определить по формуле:

$$m_{b_1} = \frac{b_1}{d} = \sqrt{1 - (m_n + 2m_{T_1} + 2m_e)^2}. \quad (27)$$

Относительная площадь поперечного сечения (первой) внутренней доски определяется по формуле:

$$Z_1 = m_{T_1}m_{b_1}. \quad (28)$$

Относительная площадь поперечного сечения (второй) внешней доски определяется по формуле:

$$Z_2 = m_{T_2}m_{b_2}. \quad (29)$$

Суммарная относительная площадь поперечных сечений обрезных досок определяется по выражению:

$$Z = Z_1 + Z_2. \quad (30)$$

Таким образом, используя предлагаемый алгоритм решения задачи, можно определить оптимальные размеры обрезных досок, получаемых из сегмента.

Исследования автора [2], а также формулы (21) и (23) показывают, что размеры досок, получаемые из сегмента, зависят от толщины бруса и размера пифагорической зоны. Таким образом, для нахождения оптимальных относительных размеров досок, получаемых из сегмента, напрашивается использование численного метода расчета. Для поиска оптимального варианта задаемся относительной толщиной бруса, а затем задаемся величиной увеличения толщины внутренней (первой) доски относительно внешней доски и определяем размеры досок, а также величину целевой функции. По результатам расчетов находим максимальное значение целевой функции. Этот результат и будет являться оптимальным. При этом относительную ширину пропила выбираем равной 0,015d [2]. Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты расчетов по предлагаемому алгоритму при относительной ширине пропила $m_c = 0,015$

m_n	m_c	a	m_{T2}	m_{T1}	m_{b2}	m_{b1}	Z_1	Z_2	Z
0,3	0,015	1,5	0,1076	0,1614	0,4396	0,7574	0,1222	0,0473	0,1696
0,3	0,015	1,6	0,1040	0,1665	0,4331	0,7485	0,1246	0,0450	0,1697
0,3	0,015	1,7	0,1007	0,1713	0,4269	0,7399	0,1267	0,0430	0,1698
0,3	0,015	1,8	0,0976	0,1758	0,4209	0,7316	0,1286	0,0411	0,1697
0,3	0,015	1,9	0,0947	0,1800	0,4152	0,7236	0,1303	0,0393	0,1696
0,35	0,015	1,5	0,0991	0,1487	0,4238	0,7355	0,1093	0,0420	0,1514
0,35	0,015	1,6	0,0959	0,1534	0,4174	0,7267	0,1115	0,0400	0,1515
0,35	0,015	1,7	0,0928	0,1578	0,4114	0,7183	0,1133	0,0382	0,1515
0,35	0,015	1,8	0,0900	0,1620	0,4056	0,7101	0,1150	0,0365	0,1515
0,35	0,015	1,9	0,0873	0,1659	0,4000	0,7023	0,1165	0,0349	0,1514
0,4	0,015	1,5	0,0906	0,1360	0,4070	0,7121	0,0968	0,0369	0,1337
0,4	0,015	1,6	0,0877	0,1403	0,4008	0,7035	0,0987	0,0351	0,1338
0,4	0,015	1,7	0,0849	0,1443	0,3950	0,6952	0,1003	0,0335	0,1339
0,4	0,015	1,8	0,0823	0,1481	0,3894	0,6872	0,1018	0,0320	0,1339
0,4	0,015	1,9	0,0798	0,1517	0,3840	0,6796	0,1031	0,0306	0,1338
0,45	0,015	1,5	0,0822	0,1223	0,3892	0,6869	0,0847	0,0320	0,1167
0,45	0,015	1,6	0,0795	0,1272	0,3833	0,6785	0,0863	0,0304	0,1168
0,45	0,015	1,7	0,0770	0,1309	0,3776	0,6705	0,0878	0,0290	0,1168
0,45	0,015	1,8	0,0746	0,1343	0,3722	0,6628	0,0890	0,0277	0,1168
0,45	0,015	1,9	0,0724	0,1376	0,3671	0,6553	0,0902	0,0265	0,1168
0,5	0,015	1,5	0,0737	0,1106	0,3702	0,6598	0,0730	0,0273	0,1003
0,5	0,015	1,6	0,0713	0,1142	0,3645	0,6517	0,0744	0,0260	0,1004
0,5	0,015	1,7	0,0691	0,1175	0,3591	0,6440	0,0756	0,0248	0,1005
0,5	0,015	1,8	0,0670	0,1206	0,3540	0,6365	0,0767	0,0237	0,1004
0,5	0,015	1,9	0,0650	0,1235	0,3490	0,6294	0,0777	0,0226	0,1004
0,55	0,015	1,6	0,0632	0,1011	0,3445	0,6228	0,0630	0,0217	0,0847
0,55	0,015	1,7	0,0612	0,1040	0,3393	0,6154	0,0640	0,0207	0,0848
0,55	0,015	1,8	0,0593	0,1068	0,3344	0,6083	0,0649	0,0198	0,0848
0,55	0,015	1,9	0,0575	0,1094	0,3297	0,6015	0,0658	0,0189	0,0848
0,55	0,015	2,0	0,0559	0,1118	0,3252	0,5949	0,0665	0,0181	0,0847
0,6	0,015	1,6	0,0550	0,0881	0,3229	0,5915	0,0521	0,0177	0,0699
0,6	0,015	1,7	0,0533	0,0906	0,3180	0,5845	0,0530	0,0169	0,0699
0,6	0,015	1,8	0,0517	0,0930	0,3134	0,5777	0,0537	0,0162	0,0699
0,6	0,015	1,9	0,0501	0,0953	0,3089	0,5713	0,0544	0,0155	0,0699
0,6	0,015	2,0	0,0487	0,0974	0,3047	0,5651	0,0550	0,0148	0,0699

Результаты расчетов в табл. 1 показывают, что для каждой относительной высоты бруса имеется свое оптимальное соотношение размеров обрезных досок, при которых целевая функция принимает максимальное значение, обеспечивая максимальный выход пилопродукции. Величина «а» с увеличением толщины бруса возрастает. Для одной и той же толщины бруса увеличение «а» вызывает увеличение объема первой доски и уменьшение объема второй доски, хотя толщина первой доски при этом возрастает, а ширина ее уменьшается. Размеры второй доски (толщина и ширина) при этом уменьшаются.

Следует отметить, что целевая функция для одной толщины бруса m_n с изменением «а» изменяется плавно-постепенно и незначительно. Это дает основание величину «а» выбирать в пределах от 1,5 до 2,0.

Важно знать, как изменяются отношения оптимальных размеров досок между собой. Результаты расчетов соотношений размеров досок представлены в табл. 2.

Таблица 2

Оптимальные соотношения размеров досок и пифагорической зоны для различных m_n

m_n	m_e	a	m_E	$\frac{m_{T1}}{m_{b1}}$	$\frac{m_{T2}}{m_{b2}}$	$\frac{Z_1}{Z}$	$\frac{m_{b1}}{m_{b2}}$
0,3	0,015	1,7	0,9043	0,2316	0,2361	0,746	1,733
0,35	0,015	1,7	0,9114	0,2198	0,2257	0,748	1,746
0,4	0,15	1,7	0,9187	0,2077	0,2150	0,790	1,760
0,45	0,015	1,7	0,9259	0,1953	0,2039	0,751	1,775
0,5	0,015	1,7	0,9333	0,1825	0,1924	0,753	1,793
0,55	0,015	1,8	0,9424	0,1756	0,1775	0,766	1,819
0,6	0,015	1,8	0,9496	0,1611	0,1650	0,768	1,844

Из табл. 2 видно, что с увеличением толщины бруса толщины досок уменьшаются в большей степени, чем ширины этих досок. Объем второй боковой доски составляет примерно четвертую часть от всего объема получаемой пилопродукции. С увеличением толщины бруса отношение толщины доски к ширине ее уменьшается примерно равномерно для обеих досок, при этом отношение ширины первой доски к ширине второй доски постепенно возрастает и примерно равно величине «а». Пифагорическая зона с увеличением толщины бруса возрастает и колеблется в широких пределах 0,90–0,95 от диаметра бревна в вершинном торце.

Таким образом, предлагаемый алгоритм решения задачи оптимизации раскроя сегмента с выпиливанием двух обрезных досок позволяет определять оптимальные размеры досок и раскрывает возможности правильного выбора соотношения размеров толщины и ширины этих досок.

Библиографический список

1. Агапов А.И. Определение оптимальных соотношений размеров боковых досок при брусомо-развальном способе раскроя пиловочника / А.И. Агапов // Наука – производство – технологии – экология: всерос. науч.-техн. конф.: сб. материалов. В 3 т. Т. 2. ХФ, БФ, ФАМ. – Киров: Изд-во ВятГУ, 2009. – С. 192–195.
2. Агапов А.И. Оптимизация брусомо-развального способа раскроя пиловочника с выпиливанием двух брусьев / А.И. Агапов // Киров: Изд-во ВятГУ, 2011. – 77 с. Деп. в ВИНТИ РАН 08.07.2011, № 333 – В2011.