Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет»
Институт экономики и управления
Кафедра Информационных технологий и моделирования

Г.Л.Нохрина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов направления 09.03.03 и 38.03.05 всех форм обучения.

ЕКАТЕРИНБУРГ 2015 г.

Введение

Данные методические указания предназначены в помощь студентам при выполнении лабораторных работ по курсу «Математическая экономика».

В методических указаниях содержатся краткие теоретические сведения, необходимые при выполнении той или иной работы, задания и примеры выполнения лабораторных работ. Лабораторные работы выполняются в свободном математическом процессоре SMathStudio, поэтому методические указания содержат сведения о математическом процессоре SMathStudio и знакомят студентов с некоторыми особенностями работы в нём.

Содержание

Лабораторная работа №1

Знакомство с математическим процессором SMathStudio

Сведения о системе SMathStudio

Система SMathStudio относится к свободным математическим пакетам, предназначена для автоматизации математических расчётов и в некотором роде является аналогом пакета **MathCAD,** разработанным американской фирмой **MathSoft.** Отличительной чертой интегрированных математических систем является подготовка документов, которые объединяют задание исходных данных, математическое описание их обработки и результаты вычислений (в виде числовых данных, таблиц и графиков).

Запуск системы

Чтобы запустить **SMathStudio**, надо начать с команд ***пуск – программы –*** **SMathStudio**. После этого на экране на некоторое время, зависящее от быстродействия ПК, появляется титульная заставка системы **SMathStudio**. Оно вскоре сменяется основным окном системы, которое представляет собой гибрид типового окна **Windows**-программ и окна **SMathStudio.** Соответствующее ему окно редактирования получает название **Untitled: N**, где **N** — порядковый номер документа, который начинается с цифры 1.

Панели инструментов системы MathCAD

SMathStudio имеет две панели инструментов – стандартную и форматирование, содержание которых в основном всем знакомо и которые включаются/ выключаются в позиции меню **Вид**. Кроме того, **SMathStudio** имеет удобные перемещаемые наборные панели (в оригинале **Palletes** — палитры) со знаками пиктограмм, которые служат для вывода заготовок — шаблонов математических знаков (цифр, знаков арифметических операций, матриц, знаков интегралов, производных и т. д.). Основные значки этой панели представлены на рисунке 1.

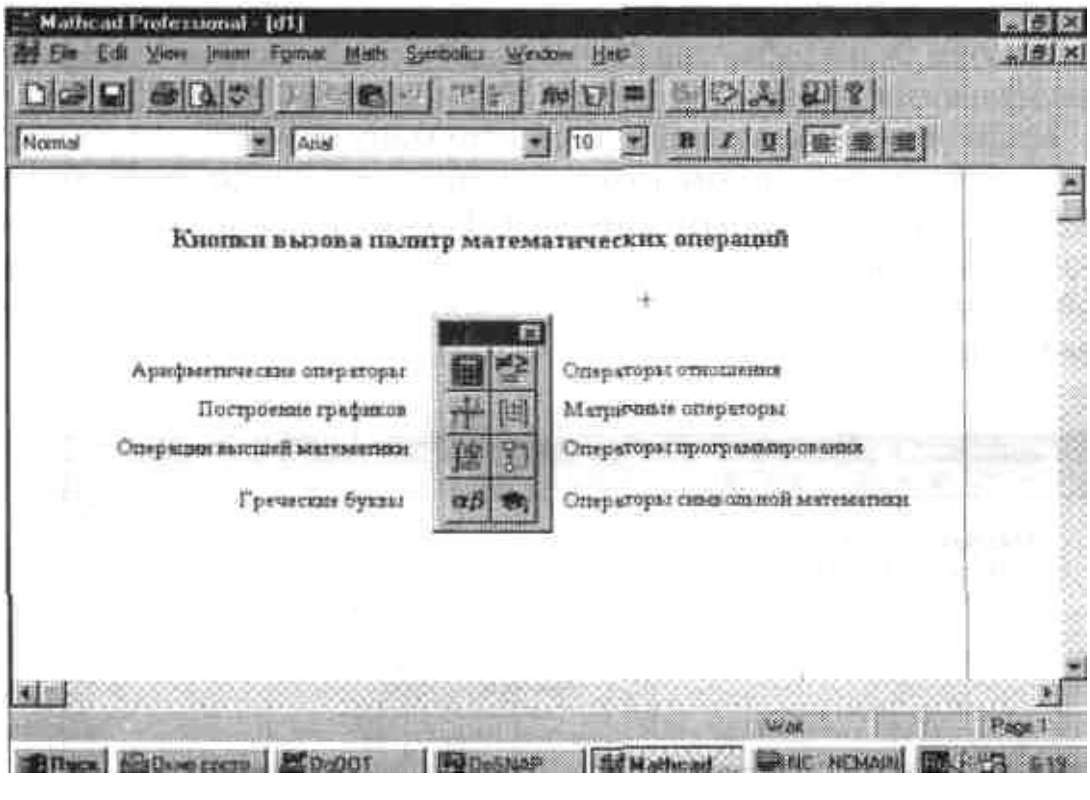


Рис.1. Наборная панель для вызова математических палитр.

Простейшие приемы работы

В простейшем случае работа с системой SMathStudio сводится к подготовке в окне редактирования задания на вычисления и к установке форматов для их результатов. Для этого используются различные приемы подготовки блоков. Блоки могут быть различного типа: тексты (комментарии), формулы, графики, таблицы и т. д. Каждый блок занимает в текущем окне определенную область прямоугольной формы. Для конструирования блоков служат три встроенных в систему редактора: текстовый, формульный и графический. Кроме них существует ещё символьный редактор, выполняющий операции символьной математики.

Формульный редактор

Для запуска формульного редактора достаточно установить курсор мыши в любом свободном месте окна редактирования и щелкнуть левой клавишей. Появится визир в виде маленького красного крестика. Его можно перемещать клавишами перемещения курсора. Визир не надо путать с курсором мыши. Визир указывает место, с которого можно начинать набор формул — вычислительных блоков. Щелчок левой клавиши мыши устанавливает визир на место, указанное острием стрелки курсора мыши. В области формул визир превращается в синий уголок, указывающий направление и место ввода.

Текстовый редактор

Текстовый редактор позволяет задавать текстовые комментарии. Они делают документ с формулами и графиками более понятным. В простейшем случае для открытия текстового редактора достаточно ввести символ " (одиночная кавычка). В появившийся прямоугольник можно начать вводить текст. В текстовом блоке визир имеет вид красной вертикальной черточки и отмечает место ввода. Текст редактируется общепринятыми средствами.

Расположение блоков в документе

Расположение блоков в документе имеет принципиально важное значение. Как уже отмечалось, их выполнение происходит слева направо и сверху вниз. Поэтому блоки не должны взаимно перекрываться (хотя небольшое перекрытие обычно не существенно). Указанный порядок исполнения блоков означает, что, например, при построении графика функции или таблицы ее значений вначале должны исполняться блоки, задающие саму функцию и пределы изменения аргумента, а уже затем блок, задающий вывод таблицы или построение графика функции.

Различные знаки равенств в системе SMathStudio

Ввод объектов (математических выражений, текстовых комментариев, графиков и др.) в текущее окно редактора производится по-разному. На простом примере видны некоторые особенности входного языка общения с системой. Так, символ присваивания: $:=$ отличен от обычно используемого в математике знака равенства =. Это обстоятельство связано с тем, что знак равенства интерпретируется в математических выражениях по контексту. Например, $\boldsymbol{x=y}$ означает либо присвоение переменной x значения ранее определенной переменной y, либо просто факт логического равенства значения x значению y. Такая двойственность недопустима в машинных программах. Поэтому в системах **SMathStudio** используются различные знаки равенств:

$:=$ символ присваивания, применяется для присваивания значений переменным и выражений функциям;

$=$ знак равенства, применяется для вывода результатов вычислений на экран;

$\equiv$ знак тождества, применяется для переприсвоения имен переменных;

$=$ жирное равенство, применяется для сравнения в условном операторе и в системах уравнений;

$\rightarrow$ символьное равенство, применяется для вывода результатов в аналитическом виде.

Символьный редактор

Системы компьютерной алгебры снабжаются специальным процессором для выполнения аналитических (символьных) вычислений. Его основой является ядро, хранящее всю совокупность формул и формульных преобразований, с помощью которых производятся аналитические вычисления. Чем больше этих формул в ядре, тем надежней работа символьного процессора и тем вероятнее, что поставленная задача будет решена, разумеется, если такое решение существует в принципе (что бывает далеко не всегда).

Операции, относящиеся к работе символьного процессора, содержатся в подменю позиции **Symbolic** (Символика) главного меню

Чтобы символьные операции выполнялись, процессору необходимо указать, над каким выражением эти операции должны производиться, т е. надо выделить выражение. Для ряда операций следует не только указать выражение, к которому они относятся, но и наметить переменную, относительно которой выполняется та или иная символьная операция. Само выражение в таком случае не выделяется, ведь и так ясно, что если маркер ввода выделяет переменную какого-либо выражения, то это выражение уже отмечено наличием в нем выделяемой переменной

Символьные операции разбиты на несколько характерных разделов. Наиболее часто используемые операции:

1. с выделенными выражениями, например **Simplify** (Упростить) или **Expand** (Разложить);
2. с выделенными переменными, например **Differentiate** (Дифференцировать по переменной) или **Integrate** (Интегрировать по переменной);
3. операции преобразования.

Задание к лабораторной работе №1

Получить задание у преподавателя и выполнить вычисления по своему варианту.

Лабораторная работа №2

Метод межотраслевого анализа

Экономическая система, для исследования которой применяется метод межотраслевого анализа, может быть большой, как народное хозяйство страны или даже вся мировая экономика, или малой, такой как экономика региона или даже одного предприятия.

В любом случае подход в основном один и тот же. Структура производственного процесса в каждом секторе представляется определенным вектором структурных коэффициентов, который количественно характеризует связь между затратами этого сектора и результатами его деятельности. Взаимозависимость между секторами рассматриваемой экономики описывается системой линейных уравнений, выражающих балансы между совокупными затратами и агрегированным выпуском каждого продукта и услуг, производимых и используемых в течение одного или нескольких промежутков времени.

Соответственно, технологическая структура системы в целом может быть представлена матрицей технологических коэффициентов «затраты-выпуск» всех ее секторов. В то же время эта матрица содержит множество параметров, на которых основываются балансовые соотношения.

Балансовые уравнения

Всю производимую отраслями продукцию удобно разделить на две части: промежуточный продукт и конечный продукт.

Промежуточный продукт - это та часть совокупного продукта, которой производители обмениваются между собой или используют для собственных нужд.

Конечный продукт - это продукция, предназначенная для потребителей.

Сектор конечного спроса - это сектор, где потребляется конечный продукт - домашние хозяйства, экспорт, правительственные закупки.

Введем обозначения: U – общий выпуск; V – промежуточный продукт; k – конечный продукт. Для экономики с $\boldsymbol{n}$ отраслями балансовые уравнения будут иметь вид:

$$U_1 = V_{11} + V_{12} + \ldots + V_{1n} + k_1;$$
$$U_2 = V_{21} + V_{22} + \ldots + V_{2n} + k_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_n = V_{n1} + V_{n2} + \ldots + V_{nn} + k_n$$

Изложенная модель получила название модели «затраты-выпуск», или модели межотраслевого анализа (англ.: Input - Output Analysis).

Технологические коэффициенты

Объем выпуска сектора $\boldsymbol{i}$, используемого сектором $\boldsymbol{j}$ при производстве единицы его совокупного выпуска $\boldsymbol{j}$, обозначается символом a_{ij} и называется технологическим коэффициентом затрат продукта $\boldsymbol{i}$ в секторе $\boldsymbol{j}$.

Множество всех коэффициентов затрат всех секторов рассматриваемой экономики, представленной в форме прямоугольной таблицы, соответствующей таблице межотраслевого баланса, называется структурной матрицей этой экономики.

Технологические коэффициенты образуют следующую квадратную матрицу ***n***-го порядка:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix},$$

На практике структурные матрицы обычно вычисляются на основе межотраслевого баланса в стоимостном выражении. Но во всех случаях коэффициенты затрат должны интерпретироваться как отношения двух количеств, измеренных в физических единицах.

Решение системы балансовых уравнений

Из определения технологических коэффициентов вытекает:

$$v_{ij} = a_{ij} \cdot U_{ij}$$

Следовательно, балансовые уравнения можно записать так:

$$U_1 = a_{11} \cdot U_1 + a_{12} \cdot U_2 + ... + a_{1n} \cdot U_n + k_1;$$
$$U_2 = a_{21} \cdot U_1 + a_{22} \cdot U_2 + ... + a_{2n} \cdot U_n + k_2;$$
....
$$U_n = a_{n1} \cdot U_1 + a_{n2} \cdot U_2 + ... + a_{nn} \cdot U_n + k_{n.}$$

Введя обозначения:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ ... \\ U_n \end{bmatrix} = U, \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{bmatrix} = K,$$

получим матричное уравнение $U = A \cdot U + K$, откуда: $(E - A) \cdot U = K$.

Умножим полученное уравнение на (E-*A)*$^{-1}$*:*

$$(E - A)^{-1} \cdot (E - A) \cdot U = (E - A)^{-1} \cdot K,$$

откуда:

$$U = (E - A)^{-1} \cdot K.$$

Определение цен продуктов

Цены в системе межотраслевых связей определяются из системы уравнений, каждое из которых устанавливает, что цена единицы выпуска соответствующего производственного сектора должна быть равна совокупным издержкам в процессе производства этой продукции (в расчете на единицу выпуска). В эти издержки входит не только оплата затрачиваемых ресурсов, но и добавленная стоимость, которая представляет собой в основном платежи секторам конечного спроса (d_i). Эти платежи состоят обычно из зарплаты, процента на капитал, предпринимательской прибыли, налогов, выплачиваемых правительству и другим секторам конечного спроса.

Обозначим через p_i цену единицы i-го продукта. Тогда балансовые уравнения можно записать так:

$$U_1 p_1 := a_{11} U_1 \cdot p_1 + a_{12} U_2 \cdot p_2 + ...+ a_{1n} \cdot U_n \cdot p_n + d_1 \cdot U_1$$
$$U_2 p_2 := a_{21} U_1 \cdot p_1 + a_{22} U_2 \cdot p_2 + ...+ a_{2n} \cdot U_n \cdot p_n + d_2 \cdot U_2$$
....
$$U_n p_n := a_{n1} U_1 \cdot p_1 + a_{n2} U_2 \cdot p_2 + ...+ a_{nn} \cdot U_n \cdot p_n + d_n \cdot U_n$$

Сократив в обеих частях уравнений U_i получим систему уравнений:

$$p_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n + d_1;$$
$$p_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{n2}p_n + d_2;$$
$$..$$
$$p_n = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{nn}p_n + d_n.$$

или в матричной форме:

$$p = A^T p + D,$$

где A^T- транспонированная матрица технологических коэффициентов, а p и D - вектора цен и платежей секторам конечного спроса соответственно.

Матричное уравнение можно представить в виде:

$$(E - A^T) \cdot p = D.$$

откуда получим в окончательном виде:

$$p = (E - A^T)^{-1} \cdot D.$$

Задание к лабораторной работе №2

Задача

<u>Дано</u>: A - матрица коэффициентов прямых затрат

K - вектор конечной продукции

D - вектор добавочной стоимости

<u>Определить:</u> вектор валового выпуска продукции U и спрогнозировать цены на продукцию каждой отрасли (вектор P).

<u>Самостоятельно</u> определить план валового выпуска продукции, если выпуск конечной продукции надо увеличить на 20%. Как изменятся прогнозируемые цены, если добавочная стоимость возрастет на 15%?

Пример решения задачи

Введем исходные данные

$$A := \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.18 \\ 0.2 & 0.3 & 0.07 \\ 0.4 & 0.02 & 0.3 \end{bmatrix} K := \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \\ 100 \end{bmatrix} D := \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 35 \end{bmatrix}$$

$ORIGIN := 1$- задаем системную переменную для начала нумерации элементов матриц

$N := 3$

$i := 1..N$- задаем размерность матрицы и индексы для нумерации элементов матриц

$j := 1..N$

$E := identity(N)$ - задаем единичную матрицу

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(E - A) = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.18 \\ -0.2 & 0.7 & -0.07 \\ -0.4 & -0.02 & 0.7 \end{bmatrix}$$ - находим разность единич. матрицы и матрицы технологич. коэффициентов

$|E - A| = 0.372$ - находим определитель разности матриц, если он отличен от 0, то можно найти обратную матрицу, если он <0, то матрица не продуктивна

$$(E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.314 & 0.198 & 0.358 \\ 0.452 & 1.501 & 0.266 \\ 0.764 & 0.156 & 1.641 \end{bmatrix}$$ - находим обратную матрицу

$$U := (E - A)^{-1} \cdot K$$

$$U = \begin{bmatrix} 71.949 \\ 110.699 \\ 187.134 \end{bmatrix}$$ - находим вектор валового выпуска продукции

$$P := \left(E - A^{T}\right)^{-1} \cdot D$$

$$P = \begin{bmatrix} 101.474 \\ 45.371 \\ 80.63 \end{bmatrix}$$ - находим вектор прогнозируемых цен на продукцию

Задание

Получить задание у преподавателя и выполнить вычисления по своему варианту.

Лабораторная работа №3

Разработка плана предприятия методом межотраслевого анализа

Метод межотраслевого анализа применим и для такой экономической системы, как предприятие. В этом случае место отраслей займут цеха, а конечного продукта - товарная продукция предприятия. Допустим, что предприятие состоит из ***n*** производственных цехов, производящих однородные продукты *1, 2, ..., n.* Основа технико-экономического плана промышленного предприятия есть система технико-экономических норм. В эту систему входят:

1. Нормы затрат .продуктов собственного производства в отдельных цехах; эти нормы можно представить в виде матрицы:

$$\mathrm{Hz} := \left(z_{i,\,j}\right) \qquad (i= 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,n$$

2. Нормы расхода сырья, основных материалов, топлива и электроэнергии на единицу продукта, произведенного в соответствующем цехе; эти нормы можно записать в виде матрицы:

$$Hs := \left(s_{i,\,j}\right) \qquad (i= 1,2,\ldots,g; j = 1,2,\ldots,n,$$

3. Нормы времени работы машин и оборудования; эти нормы можно представить в виде матрицы:

$$Hm := \left(m_{i,\,j}\right) \qquad (i= 1,2,\ldots,r; j = 1,2,\ldots,n);$$

4. Нормы, определяющие время работы отдельных групп персонала, необходимое для производства единицы продукта в соответствующем цехе; эти нормы можно представить в виде матрицы:

$$Hl := \left(l_{i,\,j}\right) \qquad (i= 1,2,\ldots,f; j = 1,2,\ldots,n);$$

Обозначим через U_i совокупную продукцию ***i***-го цеха, а через k_i, - товарную продукцию этого цеха, т. е. ту часть совокупной продукции, которая остается после обеспечения производственных цехов и предназначается для сбыта. Поскольку затраты продукции ***i*** -го цеха на единицы продукта ***j***-го цеха определяются по матрице $Hz := \left(z_{i,\,j}\right)$,*(i,j = 1,2,...,n)* можно записать следующую систему уравнений в матричной форме:

$$\boldsymbol{U=HzU + K.}$$

Решение, данного уравнения есть матрица:

$$\boldsymbol{U=(E - Hz)^{-1} K.}$$

Отсюда следует, что матрица продукции есть произведение матрицы норм полных затрат продуктов, произведенных отдельными цехами, и вектора плановой товарной продукции предприятия.

Матрица ***Hs*** норм расхода сырья, материалов, топлива и электроэнергии есть основа плана материально - технического снабжения. Из матрицы ***Hs*** следует, что расходы отдельных видов сырья и материалов составляют в матричной форме:

$$\boldsymbol{R = HsU.}$$

Подставляя выражение для определения матрицы товарной продукции, получаем:

$$\boldsymbol{R = Hs(E-Hz)^{-1}K.}$$

Элементы произведения $\boldsymbol{Hs(E\text{-}Hz)^{-1}}$ можно назвать коэффициентами полных затрат сырья и материалов.

Матрица ***Hm*** - основа плана использования машин и оборудования. Использование машин и оборудования в производстве составляет в матричной форме:

$$\boldsymbol{M = Hm\ U = Hm\ (E\text{-}Hz)^{-1}\ K.}$$

Элементы матрицы $\boldsymbol{Hm\ (E\text{-}Hz)^{-1}}$ называются коэффициентами полного использования машин и оборудования.

Матрица *Hl*- основа плана по труду. Матрица рабочей силы есть:

$$\boldsymbol{L = Hl.U = Hl\ (E\text{-}\ Hz)^{-1}\ K.}$$

Элементы произведения $\boldsymbol{Hl\ (E\text{-}\ Hz)^{-11}}$ называются коэффициентами полных затрат рабочей силы.

Матричная форма технико-экономического плана в значительной мере упрощает планирование и уменьшает его трудоемкость: она позволяет быстро разработать различные варианты технико-экономического плана

Задание к лабораторной работе №3

Задача

Промышленное предприятие состоит из 4 цехов. Продукт одного цеха перерабатывается в следующих цехах. Продукты цехов также м.б. товарной продукцией. Плановая деятельность предприятия основывается на следующей системе технико-экономических норм.

Наименование показателей	Единица измерения	ЦЕХА				Матрица
		1	2	3	4	
1. Производственные услуги и полуфабрикаты						**Hz**
1	т	0,1+0,01*i	0,1	0,3-0,02*n	0,1	
2	$м^3$	0,1	0,2	0,4	0,2	
3	т	0,2	0,2	0,5-0,01*i	0,15	
4	т	0,1	0,6-0,02*i	0,2	0,3	
2. Сырье, материалы, электроэнергия						**Hs**
s1	т	0,1	0	0	0,2	
s2	т	0,15-0,01*n	0,05	0	0,07	
s3	$м^3$	0,2	0,03	0,06	0,1	
s4	т	0	0	0,5-0,02*n	0,3	
s5	квт.ч.	0,11	0,07	0,14	0,08	
3. Труд						**Hl**
персонал категории8	чв-ч	1,2-0,03*i	0,3	0,6	0,4	
персонал категории9	чв-ч	0,9	0,2	0,4	0,5	
персонал категории10	чв-ч	0,6	0,1+0,1*n	0,8	0,7	
где ***i*** - номер студента, ***n*** - номер группы (от1 до 4)						

Необходимо разработать два варианта плана выпуска продукции и потребности в сырье, материалах и электроэнергии, а также два плана по труду для двух вариантовпланового задания по товарной продкции цехов соответственно:

1) к1=0, к2=100, к3=200-50*n, к4=30000+1000*i
2) к1=400, к2=600, к3=800-100*n, к4=30000+1000*i

Задание

Решить задачу и выполнить расчеты по своему варианту.

Лабораторная работа №4

Свойства производственных функций

Математические и экономические предположения

Рассмотрим в данном работе функции с одним продуктом и несколькими ресурсами – трудовыми и материальными. Если считать, что параметры уже определены и их влияние нас не интересует, то функция выпуска приобретает вид:

$$y := f(x), \qquad (1)$$

где: $x := (x_1, x_2, .., x_n)$ - вектор с неотрицательными компонентами.

Обычно относительно производственной функции (1) делают предположение, очень удобное с математической точки зрения: функция (1) задана при всех неотрицательных значениях составляющих вектора x и является непрерывной или нужное число раз дифференцируемой функцией своих аргументов.

Частная производная производственной функции по одному из ресурсов является предельной производительностью (эффективностью) данного ресурса - $\partial f/\partial x_i$. Она характеризует скорость изменения функции выпуска по отношению к изменению затрат ресурса. Если предельная производительность ресурса положительна, то, следовательно, выпуск растет при росте затрат ресурса. Если предельная производительность ресурса отрицательна, то выпуск уменьшается при росте затрат ресурса.

Средней производительностью ресурса будет показатель $f(x)/x_i$.

Относительной характеристикой изменения выпуска продукции при увеличении затрат ресурсов будет показатель эластичности выпуска по отношению к изменению затрат i-го ресурса:

$$\varepsilon_i := \frac{x_i}{f(x)} \cdot \left(\frac{d}{dx} f\right) \qquad (2)$$

Эластичность выпуска по отношению к изменению затрат ресурса показывает, на сколько процентов возрастет объем продукции при увеличении затрат ресурсов на 1%.

Свойства ПФ сформулируем в виде экономических предположения.

Первое предположение. Производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса (точнее незаменимого ресурса), т. е.

$$\begin{aligned} f(0, x_2, ..., x_n) &:= 0 \\ f(x_1, 0, ..., x_n) &:= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(x_1, x_2, ..., 0) &:= 0; \end{aligned} \qquad (3)$$

Это означает, что каждый из ресурсов необходим хотя бы в малых количествах. Полное его отсутствие не может быть компенсировано другими ресурсами.

Второе предположение. При увеличении затрат производственных ресурсов выпуск продукции не уменьшается. Это означает, что предельные эффективности ресурсов положительны. В математической форме:

$$\frac{d}{dx_i} f(x) \geq 0. \qquad (4)$$

Предположение (4), являющееся на первый взгляд очевидным, выполняется не всегда.

Третье предположение. По мере увеличения количества одного ресурса при постоянных количествах других предельная эффективность использования этого ресурса не возрастает. Математически это требование для дважды дифференцируемых функций выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dx_i}\left(\frac{d}{dx_i}f\right)\le 0,\quad i := 1, .., n. \tag{5}$$

Четвертое предположение. Производственная функция характеризуется определенной отдачей от расширения масштабов производства. Последняя характеризует изменение выпуска продукции при пропорциональном изменении затрат ресурсов и математически выражается в умножении всех компонентов вектора ***x*** на положительный скаляр ***t***. Скалярная функция ***f(x)*** является однородной функцией степени **δ**, если для любого вектора ***x*** и любого скаляра ***t*** она удовлетворяет соотношению:

$$f(tx) := t^{\delta}\cdot f(x). \tag{6}$$

Математически четвертое предположение состоит в требовании однородности производственной функции. Если ***δ > 1***, то производственная функция характеризуется возрастающей отдачей от расширения масштабов производства; если ***δ=1*** – постоянной отдачей; при ***δ< 1*** - убывающей отдачей. Естественно, что выполняется предположение ***δ ≥ 1***, ибо в противном случае нарушалось бы условие (4). Данное предположение выполняется далеко не для всех производственных функций, используемых в экономических исследованиях. Для характеристики последствий изменения масштаба производства вводят показатель ***ε(x),*** называемый **эластичностью производства** и определяемый следующие образом:

$$\varepsilon(x) := \lim_{t\to 1}\left[\frac{t}{f(tx)}\cdot\left(\frac{d}{dt}f(tx)\right)\right] \tag{7}$$

Этот показатель характеризует процентное изменение выпуска продукции при изменении масштаба производства на 1% при данной структуре ресурсов х. Эластичность производства в некоторой точке пространстве ресурсов равна сумме эластичности выпуска по отношению к затратам производственных ресурсов в этой точке. Для производственных функций, удовлетворяющих соотношению (6), получаем $\varepsilon(x) := \delta$. Для производственных функций с постоянной отдачей от расширения масштабов производства (6) связь между эластичностями выпусков и эластичностью производства приобретает вид:

$$\varepsilon(\dot{x}) := \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{i(x)} := \delta \tag{8}$$

Задание к лабораторной работе №4

Задача

Производственный процесс описывается с помощью степенной производственной функции типа (СПФ): $f(x, y) = a \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta}$, где x – капитал, y – труд. Требуется проверить, удовлетворяет ли данная функция изложенным выше экономическим предположениям.

Пусть А – способ производства, при котором x = K, y = L.Требуется вычислить:

1. объем производства при способе А;
2. предельную производительность труда и предельную фондоотдачу при способе А.
3. среднюю производительность труда и среднюю фондоотдачу при способе А;

Пример решения задачи

Задаем формулу для производственной функции: $f(x,y) := 10 \cdot x^{0.5} \cdot y^{0.5}$

Первое предположение. Производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса (точнее незаменимого ресурса) – выполняется.

$10 \cdot 0^{0.5} \cdot y^{0.5} \rightarrow 0$ $\qquad$ $10 \cdot x^{0.5} \cdot 0^{0.5} \rightarrow 0$

Второе предположение. При увеличении затрат производственных ресурсов выпуск продукции не уменьшается. Это означает, что предельные эффективности ресурсов положительны

Предельная эффективность МПФ по каждому из ресурсов:

$\frac{d}{dx} f(x,y) \rightarrow \frac{5.0}{x^{.5}} \cdot y^{.5}$ - предельная фондоотдача:

$\frac{d}{dy} f(x,y) \rightarrow 5.0 \frac{x^{.5}}{y^{.5}}$ - предельная эффективность труда:

Видно, что они положительны при положительных **x** и **y,** т.е. второе предположение выполняется

Третье предположение. По мере увеличения количества одного ресурса при постоянных количествах других предельная эффективность использования этого ресурса не возрастает, т.е. вторая производная отрицательна – выполняется.

$\frac{d^2}{dx^2} f(x,y) \rightarrow \frac{-2.50}{x^{1.5}} \cdot y^{.5}$ $\qquad$ $\frac{d^2}{dy^2} f(x,y) \rightarrow -2.50 \frac{x^{.5}}{y^{1.5}}$

Четвертое предположение. Производственная функция характеризуется определенной отдачей от расширения масштабов производства (однородность ПФ). $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{tx}) := \boldsymbol{t}^{\delta} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

$f(t \cdot x, t \cdot y) \rightarrow 10 \cdot (t \cdot x)^{.5} \cdot (t \cdot y)^{.5}$ - выполняется

Ещё можем найти в общем виде следующее:

Средняя эффективность каждого из ресурсов:

$\frac{f(x,y)}{x} \rightarrow \frac{10}{x^{.5}} \cdot y^{.5}$ $\qquad$ $\frac{f(x,y)}{y} \rightarrow 10 \cdot \frac{x^{.5}}{y^{.5}}$

Эластичность выпуска по каждому из ресурсов:

$$\varepsilon 1(x,y) := \frac{x}{f(x,y)} \cdot \left(\frac{d}{dx} f(x,y)\right) \qquad \varepsilon 1(x,y) \rightarrow .500000000000000000$$

$$\varepsilon 2(x,y) := \frac{y}{f(x,y)} \cdot \left(\frac{d}{dy} f(x,y)\right) \qquad \varepsilon 2(x,y) \rightarrow .500000000000000000$$

Эластичность производства равна:

$$E(x,y) := \varepsilon 1(x,y) + \varepsilon 2(x,y)$$

$$E(x,y) \rightarrow 1.00000000000000000$$

Поскольку ε=1, то имеем равномерную отдачу от увеличения масштабов производства.

1) Вычислим объем производства при способе А.

$x := 4 \qquad y := 9 \qquad f(x,y) = 60$

2) Вычислим предельную производительность труда и предельную фондоотдачу при способе А.

$$\frac{d}{dy} f(x,y) = 3.333 \qquad \frac{d}{dx} f(x,y) = 7.5$$

3) Вычислим среднюю производительность труда и среднюю фондоотдачу при способе А.

$$\frac{f(x,y)}{y} = 6.667$$

Задание

Провести исследование производственной функции и выполнить вычисления по своему варианту.

Лабораторная работа №5

Возможности замещения ресурсов

Возьмем производственную функцию с двумя ресурсами:

$$y := (x_1)^{a} \cdot (x_2)^{1-a},\ 0 < a < 1. \tag{1}$$

Функции такого типа часто используются при описании народного хозяйства или его структурных единиц. В таких производственных функциях величина y имеет смысл конечной продукции народного хозяйства, x_1 - общего количества основных фондов, x_2- общего количества трудовых ресурсов в стране.

Функция (19) удовлетворяет всем предположениям предыдущего раздела, причем для нее δ= 1. Поэтому можно построить функцию $\varphi(x)$, которая в данном случае будет показывать объем продукции на 1 трудящегося и имеет вид:

$$\phi(\chi) := \chi^{a},$$

где χ- отношение количества основных фондов к численности трудящихся, т. е. фондовооруженность.

График функции $\phi(\chi)$совпадает в этом случае с графиком производственной функции с одним ресурсом. Возможность взаимного замещения ресурсов означает, что одно и то же количество продукта y может быть произведено различных сочетаниях ресурсов. Совокупность таких сочетаний ресурсов, т.е. точек в пространстве ресурсов, при котором может быть произведено определенное количество продукции y, называется **изоквантой** и обозначается:

$$Q(y_0) = \{x: f(x) = y_0\}. \tag{2}$$

Свойства изоквант:

- изокванты не пересекаются друг с другом;
- изокванта $Q(yo)$ разбивает неотрицательный ортант пространства ресурсов на 2 множества: в одном из которых $y < y_o$, в другом $y > y_o$, причем граница между этими множествами проходит по изокванте $Q(yo)$;
- большему выпуску продукции соответствует изокванта, более удаленная от начала координат;
- изокванты не имеют общих точек с осями координат.

Функция $x_2(x_1)$, имеющая смысл количества трудовых ресурсов, необходимых для получения заданного конечного продукта в зависимости от использующегося объема основных фондов, является монотонно убывающей функцией. При $\partial f/\partial x_2 > 0$ вдоль изокванты выполняется соотношение:

$$\gamma := \frac{d}{dx_1} x_2 = \frac{\left(\frac{d}{dx_1} f\right)}{\left(\frac{d}{dx_2} f\right)} \tag{3}$$

Из третьего предположения получается, что $\gamma \le 0$, а при строгой положительности предельных эффективностей ресурсов $\gamma < 0$. Величину γ принято называть **предельной нормой замещения** одного ресурса другим. Она показывает, сколько второго ресурса может быть высвобождено при увеличении затрат первого ресурса, если выпуск продукции остается неизменным.

Линии $\gamma(x_1, x_2) := \gamma_0$ называют **изоклиналями** производственных функций с двумя ресурсами. Предельная норма замещения a совпадает по величине с тангенсом угла ***φ*.** Для функции (1) изоклинали имеют вид:

$$x_2 := -\gamma_0 \cdot \frac{1-a}{a} \cdot x_1$$

Для количественной характеристики скорости изменения предельной нормы замещения вдоль изокванты используется понятие **эластичности замещения ресурсов** $\sigma(x_1, x_2)$:

$$\sigma(x_1, x_2) := \frac{\gamma}{\frac{x_2}{x_1}} \cdot \frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\gamma} \qquad (4)$$

Эластичность замещения ресурсов имеет следующий экономический смысл – она приближенно показывает, на сколько процентов должно измениться отношение ресурсов при движении вдоль изокванты, чтобы при этом предельна норма замещения ***y*** изменилась на 1%.

Как и в случае эластичности выпуска по ресурсу, эластичность замещения ресурсов также может быть представлена в более удобной форме:

$$\sigma(x_1, x_2) := \frac{d\left(\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right)}{d(\ln(-\gamma))}$$

Для производственной функции (1), учитывая соотношение

$$\ln(-\gamma) := \ln\left(\frac{a}{1-a}\right) + \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$ получаем:

$$\sigma(x_1, x_2) := \frac{d\left(\ln(-\gamma) - \ln\left(\frac{a}{1-a}\right)\right)}{d(\ln(-\gamma))} = 1$$

Все изложенные понятия, относящиеся к анализу замещения ресурсов в производственных функциях с двумя ресурсами, могут быть обобщены и на случай произвольного числа ресурсов.

Задание к лабораторной работе №5

Задача

Производственный процесс описывается с помощью степенной производственной функции типа (СПФ): $f(x, y) = a \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta}$, где x – капитал, y – труд. Пусть A – способ производства, при котором x = K, y = L.

Требуется:

1) Провести исследование ПФ.
2) Построить на общем графике три различных изокванты для заданного объема производства и три изоклинали под углом 22.5˚, 45˚и 67.5˚;
3) Вычислить объем производства при способе A;
4) Вычислить предельную производительность труда и предельную фондоотдачу при способе A;
5) Вычислить среднюю производительность труда и среднюю фондоотдачу при способе A;

Пример решения задачи

Исследование ПФ проводить так же, как в предыдущей лабораторной работе, нужно только добавить вычисления в аналитическом виде предельной нормы замещения одного ресурса другим и эластичность замещения ресурсов. Последние три пункта задания выполнять тоже, как в предыдущей лабораторной работе.

А вот построение изоквант и изоклиналей рассмотрим поподробнее.

Задаем формулу для производственной функции:

$$f(x,y) := 10\cdot x^{0.5}\cdot y^{0.5}$$

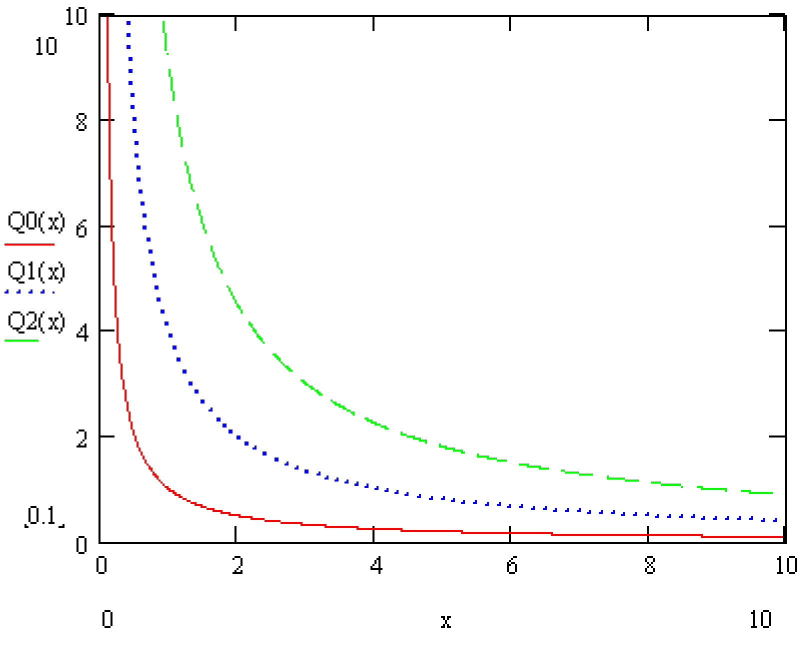
Для построения изоквант нужно приравнять к заданным значениям уравнение производственной функции и выразить переменную ***y*** через ***x*.** После этого построить графики.

Пусть заданы объемы производства:

$f0 := 1($ $\qquad$ $f1 := 2($ $\qquad$ $f2 := 3($

Тогда получатся следующие уравнения изоквант:

$$Q0(x) := \left(\frac{f0}{10\cdot x^{0.5}}\right)^{\frac{1}{0.5}} \qquad Q0(x) \rightarrow \frac{1}{x^{1.000000000000000000(}} \qquad \text{и т.д.}$$



Для построения изоклиналей нужно приравнять уравнение предельной нормы замещения ресурса ***y*** ресурсом ***x*** к тангенсу заданных значений угла наклона изоклиналей и выразить переменную ***y*** через ***x*.** После этого построить графики.

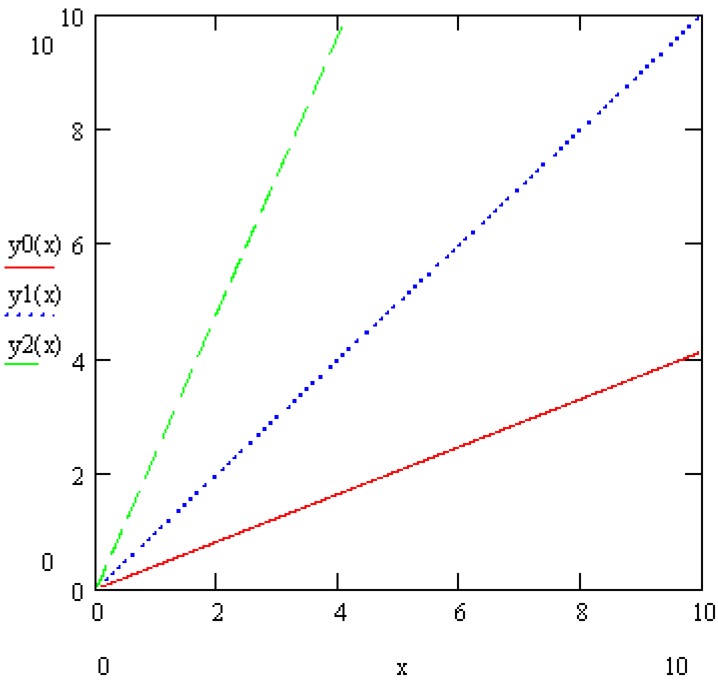
Предельная норма замещения выражается формулой:

$$\gamma(x,y) := \frac{\frac{d}{dx}f(x,y)}{\frac{d}{dy}f(x,y)} \qquad \gamma(x,y) \rightarrow \frac{1.00000000000000000000}{x^{1.0}}\cdot y^{1.0}$$

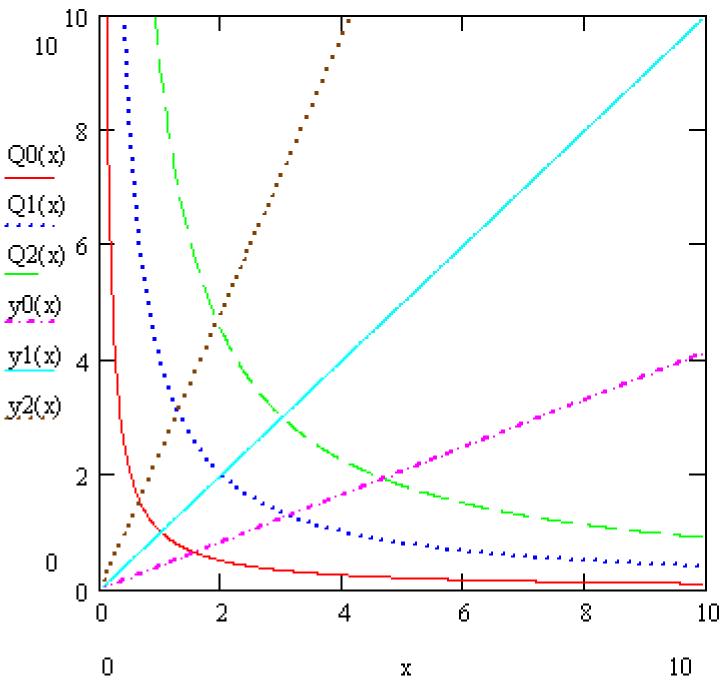
$\gamma 0 := \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ $\gamma 1 := \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\gamma 2 := \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

Тогда получатся следующие уравнения изоклиналей:

$y0(x) := \gamma 0 \cdot x$ $y0(x) \rightarrow \left(2^{\frac{1}{2}} - 1\right) \cdot x$ и т.д.



Объединим построенные изокванты и изоклинали на общем графике:



Лабораторная работа №6

Некоторые виды функций выпуска

Степенные производственные функции

Степенная производственная функция с n ресурсами имеет следующий общий вид

$$y := a\cdot\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{a_i} := a\cdot(x_1)^{a_1}\cdot(x_2)^{a_2}\cdot\ ..\cdot(x_n)^{a_n}. \qquad (1)$$

где y - объем продукции, который является скалярной величиной; a, a_1, a_2,... a_n - положительные параметры. Обычно предполагается, что $a_i < 1$ для всех $i = 1,\ldots,n$

Степенную производственную функцию (1) часто представляют в более удобном логарифмическом виде, эквивалентном (1) при $x_i > 0$ ($i = 1,\ldots,n$):

$$ln(y) := ln(a) + \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\cdot ln(x_i)\right)$$

Производственные функции с постоянной эластичностью замещения ресурсов [1]

Они имеют следующий общий вид

$$y := b\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left[\beta_i\cdot(x_i)^{-\rho}\right]\right]^{\frac{-\delta}{\rho}}, \qquad (2)$$

где параметры $b, \delta, \rho, \beta_1, \ .., \beta_n$ положительны. Функцию можно представить в более удобной форме, эквивалентной исходной При $x_i > 0$:

$$ln(y) := ln(b) - \frac{\delta}{\rho}\cdot ln\left[\sum_{i=1}^{n}\left[\beta_i\cdot(x_i)^{-\rho}\right]\right]$$

Кроме того, функцию (2) иногда записывают в форме, удобной для запоминания (при $\delta = 1$; $b = 1$):

$$y := \sum_{i=1}^{n}\left[\beta_i\cdot(x_i)^{-\rho}\right]$$

Производственные функции с постоянными пропорциями

Рассмотрим, что произойдет с производственной ПЕЗ-функцией в том случае, когда параметр ρ стремится к своему другому пределу, т. е. $\rho \to \infty$.

Очевидно, что, согласно (15), в этом случае $\rho \to 0$, т. е. эластичность замещения также стремится к своему другому крайнему значению.

---

[1] ПЕЗ-функция

Построим функцию

$$f_0(x) := \lim_{\rho \to \infty} \left[f_\sigma(x) \right]$$

где $f_\sigma(x)$ - (7) . $f_0(x)$ - искомая функция, где индекс 0 - подчеркивает равенство нулю ее эластичности замещения.

При **δ = 1** для случая двух производственных ресурсов, т. е. $\boldsymbol{x = (x_1, x_2)}$

$$f_0(x_1, x_2) := \lim_{\rho \to \infty} \left[b \cdot \left[\beta_1 \cdot (x_1)^{-\rho} + \beta_2 \cdot (x_2)^{-\rho} \right]^{\frac{-1}{\rho}} \right]$$

После преобразования получим: при $x_1 \geq x_2$, $f_0(x_1, x_2) := b \cdot x_2$;

при $x_1 \leq x_2$, $f_0(x_1, x_2) := b \cdot x_1$.

В целом функция $\boldsymbol{f_0(x_1,x_2)}$ может быть представлена в виде:

$$f_0(x_1, x_2) := b \cdot min(x_1, x_2) . \tag{16}$$

Кроме перечисленных функций выпуска, существуют и другие функции. Наиболее распространенными являются линейная функция, функции Аллена, функции с линейной эластичностью замены факторов, функция Солоу, ограниченная функция CES, многорежимная функция, функция линейного программирования.

Линейная функция:

$$y := a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2$$

У данной функции предельные производительности факторов постоянны, эластичность замены факторов - бесконечна. Функция может использоваться в тех случаях, когда вклад каждого ресурса независим, например: производственная система состоит из отдельных производственных единиц, каждая из которых использует свой собственный производственный ресурс, подходящий только для этого производства.

Функция Аллена :

$$y := a_0 \cdot x_1 \cdot x_2 - a_1 \cdot x_1 - a_2 \cdot x_2 .$$

Такая функция предназначена для описания производственных процессов, в которых чрезмерный рост любого из факторов оказывает отрицательное воздействие на объем выпуска. Обычно такая функция используется для описания мелкомасштабных систем с ограниченными возможностями переработки ресурсов.

Функция с линейной эластичностью замены факторов (функция LES):

$$y := (x_1)^{a_0} \cdot (a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2)^{a_3} .$$

Функция LES применяется для описания производственных процессов, у которых (в отличие от описываемых функцией CES) возможность замещения вовлекаемых факторов существенно зависит от их пропорций, причем при низком уровне отношений $\boldsymbol{x_1/x_2}$ близка к единице, а с ростом отношения $\boldsymbol{x_1/x_2}$ - неограниченно возрастает. Такая ситуация возможна, например, если рост ресурсов $\boldsymbol{x_1}$ связан с общим расширением производства, появлением множественных технологических процессов с широкими возможностями комбинирования.

Функция Солоу:

$$y := \left[a_1 \cdot (x_1)^{a_3} + a_2 \cdot (x_2)^{a_4}\right]^{a_5}.$$

Характеризуется тем, что величина процентного изменения предельной нормы замещения факторов, вызванного увеличением любого фактора на один процент, не зависит от начального уровня фактора. Эта функция может использоваться, когда влияние на объем выпуска увеличения каждого из факторов проявляется различным образом.

Ограниченная функция CES:

$$y := min\left[\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, \left[a_3 \cdot (x_1)^{a_5} + a_4 \cdot (x_2)^{a_5}\right]^{a_6}\right].$$

Функция предназначена для выражения двухрежимного производственного процесса, в котором один из режимов характеризуется отсутствием заменяемости факторов, другой - ненулевой постоянной величиной эластичности замены При этом переход от одного режима к другому осуществляется в зависимости от уровня, лимитирующего первый режим фактора.

Многорежимная функция:

$$y := \left[a_{11} \cdot (x_1)^{a_0} + a_{21} \cdot (x_2)^{a_0}\right]^{a_1} \cdot .... \left[a_{1n} \cdot (x_1)^{a_0} + a_{2n} \cdot (x_2)^{a_0}\right]^{a_n} \Bigg|.$$

Одна из наиболее общих форм производственных функций. Она используется при описании процессов, в которых уровень отдачи каждой новой единицы ресурса скачкообразно меняется в зависимости от соотношения факторов. Функцию целесообразно применять при наличии информации о числе режимов n и *о* ширине «переходной» области между режимами (чем выше a_0, тем более отчетливо выделяются режимы).

Функция линейного программирования:

$$y := min\left(\frac{x_1}{a_{11}}, \frac{x_2}{a_{12}}\right) + ... + min\left(\frac{x_1}{a_{k1}}, \frac{x_2}{a_{k2}}\right).$$

Функцию имеет смысл использовать в тех случаях, когда выпуск продукции является результатом одновременного функционирования k-фиксированных технологий, использующих одни и те же ресурсы.

Описание технического прогресса

При построении производственных функций научно-технический прогресс может быть учтен с помощью множителя $e^{\lambda t}$, где параметр λ, характеризует темп прироста выпуска под влиянием научно-технического прогресса:

$$y(t) := e^{\lambda t} \cdot f\left[x_1(t), x_2(t)\right], \quad t := 0, 1, ..., T.$$

Данная производственная функция является примером динамической производственной функции. Она включает нейтральный, то есть не материализованный в одном из факторов технический прогресс. Другим подходом является .выражение технического прогресса от прироста основных фондов в году t или от инвестиций в научные исследования, что эконометрически предпочтительней. В более сложных случаях технический прогресс может воздействовать непосредственно на производительность труда или капиталоотдачу:

$$y(t) := f(A(t)\cdot K, B(t)\cdot L),$$

где ***К***- основные фонды; ***L*** - трудовые ресурсы; ***A(t)*** и ***B(t)*** - заданные функции времени, причем ***A(t)*** описывает повышение эффективности использования основных фондов***;*** ***B(t)*** - трудовых ресурсов.

Задание к лабораторной работе №6

Провести исследование одной из ПФ по варианту, выданному преподавателем. Построить графики изоквант и изоклиналей. Сделать выводы об особенностях ПФ данного типа (тип функции определить самостоятельно).

Вариант 1

$f(x,y) := 150\cdot x + 120\cdot y$

Вариант 2

$f(x,y) := 120\cdot x\cdot y - 20\cdot x^2 - 15y^2$

Вариант 3

$f(x,y) := 370\cdot x\cdot y - 30\cdot x^2 - 45y^2$

Вариант 4

$f(x,y) := x^{0.5}\cdot(10x + 20y)^{0.3}$

Вариант 5

$f(x,y) := 100\cdot x^{0.7}\cdot(5x + 10y)^{0.3}$

Вариант 6

$f(x,y) := x^{0.6}\cdot(20x + 15y)^{0.4}$

Вариант 7

$f(x,y) := \left(10x^{0.2} + 20y^{0.4}\right)^{0.3}$

Вариант 8

$f(x,y) := \left(50x^{0.4} + 20y^{0.3}\right)^{0.4}$

Вариант 9

$f(x,y) := \left(100x^{0.5} + 50y^{0.4}\right)^{0.5}$

Вариант 10

$f(x,y) := 100\cdot x + 180\cdot y$

Вариант 11

$f(x,y) := 300\cdot x + 120\cdot y$

Вариант 12

$f(x,y) := 200\cdot x\cdot y - 20\cdot x^2 - 15\cdot y^2$

Вариант 13

$f(x,y) := \left(10x^{0.2} + 20y^{0.2}\right)^{0.3}\cdot\left(30x^{0.2} + 10y^{0.2}\right)^{0.5}$

Вариант 14

$f(x,y) := \left(20x^{0.3} + 30y^{0.3}\right)^{0.2}\cdot\left(40x^{0.3} + 20y^{0.3}\right)^{0.4}$

Вариант 15

$f(x,y) := \left(10x^{0.5} + 15y^{0.5}\right)^{0.3}\cdot\left(25x^{0.5} + 10y^{0.5}\right)^{0.2}$

Вариант 16

$f(x,y) := 150\cdot x + 240\cdot y$

Вариант 17

$f(x,y) := 480\cdot x\cdot y - 10\cdot x^2 - 25y^2$

Вариант 18

$f(x,y) := 170\cdot x\cdot y - 30\cdot x^2 - 15y^2$

Вариант 19

$f(x,y) := x^{0.4}\cdot(20x + 15y)^{0.6}$

Вариант 20

$f(x,y) := 200\cdot x^{0.4}\cdot(15x + 10y)^{0.5}$

Вариант 21

$f(x,y) := x^{0.4}\cdot(20x + 15y)^{0.3}$

Вариант 22

$f(x,y) := \left(30x^{0.3} + 20y^{0.4}\right)^{0.5}$

Вариант 23

$f(x,y) := \left(10x^{0.2} + 20y^{0.6}\right)^{0.4}$

Вариант 24

$f(x,y) := \left(60x^{0.5} + 45y^{0.3}\right)^{0.6}$

Вариант 25

$f(x,y) := 200\cdot x + 150\cdot y$

Вариант 26

$f(x,y) := 200\cdot x + 240\cdot y$

Вариант 27

$f(x,y) := 100\cdot x\cdot y - 50\cdot x^2 - 35\cdot y^2$

Вариант 28

$f(x,y) := \left(20x^{0.4} + 20y^{0.4}\right)^{0.4}\cdot\left(30x^{0.4} + 10y^{0.4}\right)^{0.5}$

Вариант 29

$f(x,y) := \left(15x^{0.3} + 30y^{0.3}\right)^{0.5}\cdot\left(40x^{0.3} + 20y^{0.3}\right)^{0.2}$

Вариант 30

$f(x,y) := \left(25x^{0.2} + 15y^{0.2}\right)^{0.3}\cdot\left(25x^{0.2} + 10y^{0.2}\right)^{0.6}$

Лабораторная работа №7

Использование производственных функций в сравнительном экономическом анализе

Пример

Известны статистические данные за 6 лет работы предприятий **A** и **B.** Для них построены линейные производственные функции. Сравним работу двух предприятий.

<u>Дано:</u> YA - объем товарной продукции предприятия A
KA - основные фонды предприятия A
LA - численность персонала предприятия A
YB - объем товарной продукции предприятия B
KB - основные фонды предприятия B
LB - численность персонала предприятия B

Производственные функции для моделирования работы двух предприятий:

$$fA(x1, x2) := 1.033 \cdot x1 + 2.137 \cdot x2 \qquad fB(x1, x2) := 1.408 \cdot x1 + 1.1105 \cdot x2$$

$$ORIGIN := 1 \qquad N := 6 \qquad i := 1..N$$

<u>Статистические данные за 6 лет:</u>

$$YA := \begin{pmatrix} 9.8 \\ 10.6 \\ 12.2 \\ 12.4 \\ 13.8 \\ 16.4 \end{pmatrix} \quad KA := \begin{pmatrix} 4.6 \\ 5 \\ 6 \\ 6.2 \\ 6.8 \\ 8 \end{pmatrix} \quad LA := \begin{pmatrix} 2.4 \\ 2.6 \\ 2.8 \\ 2.8 \\ 3.2 \\ 3.8 \end{pmatrix} \quad YB := \begin{pmatrix} 19 \\ 20.6 \\ 21.4 \\ 22.4 \\ 24.2 \\ 26 \end{pmatrix} \quad KB := \begin{pmatrix} 8.6 \\ 9.2 \\ 9.8 \\ 10.2 \\ 10.8 \\ 11.6 \end{pmatrix} \quad LB := \begin{pmatrix} 6.4 \\ 6.8 \\ 6.8 \\ 7.4 \\ 8 \\ 8.6 \end{pmatrix}$$

<u>Сравним фондоотдачу предприятий:</u>

$$FOA_i := \frac{YA_i}{KA_i} \qquad FOB_i := \frac{YB_i}{KB_i}$$

$$FOA = \blacksquare \qquad FOB = \blacksquare$$

FOA_i

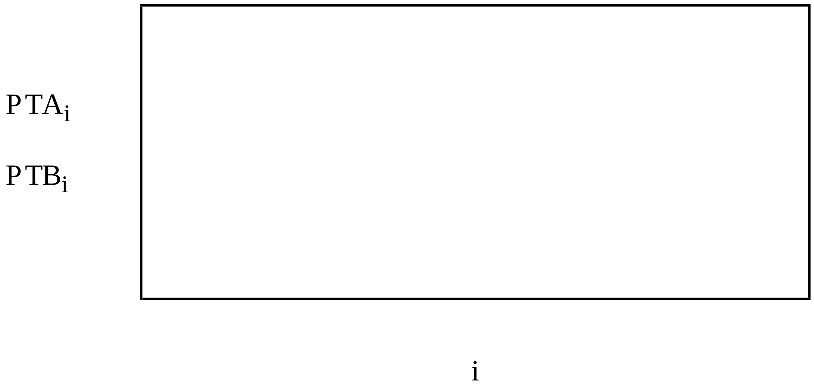
FOB_i

i

Сравним производительность труда предприятий предприятий:

$$PTA_i := \frac{YA_i}{LA_i} \qquad PTB_i := \frac{YB_i}{LB_i}$$

$PTA = ▮$ $\qquad$ $PTB = ▮$



Видно, что фондоотдача предприятия В выше фондоотдачи предприятия А. Производительность труда выше у предприятия А, чем у В. Какое предприятие более эффективно?

Посчитаем сравнительную экономию ресурсов:

$$E(x1, x2, y1, y2) := \frac{1}{2} \cdot \left(x1 \cdot \frac{y2}{y1} - x2 + x1 - x2 \cdot \frac{y1}{y2} \right)$$

Сравнительная экономия фондов:

$$EK_i := E\left(KA_i, KB_i, YA_i, YB_i\right)$$

$EK = ▮$

Сравнительная экономия труда:

$$EL_i := E\left(LA_i, LB_i, YA_i, YB_i\right)$$

$EL = ▮$

Видно, что сравнительная экономия фондов предприятия В лучше, чем у предпр
А. Сравнительная экономия труда выше у предприятия А, чем у В

Рассчитаем сравнительную эффективность совокупного использования ресурсов на
основе производственных функций:

$$Eff_i := \frac{1}{2}\cdot\left(fB\left(KA_i, LA_i\right) + YA_i - YB_i - fA\left(KB_i, LB_i\right)\right)$$

$$Eff =$$

Видно, что сравнительная эффективность совокупного использования ресурс
значительно меньше 0, т.е. предпритие А работало более эффективно, чем

Задание к лабораторной работе №7

Провести исследование результатов работы двух предприятий по варианту, выданному преподавателем. Сделать выводы об эффективности их работы.

Вариант 1

Объем товарной продукции Y	Основные фонды К	Численность персонала L
9,8	4,6	2,4
10,6	5	2,6
12,2	6	2,8
12,4	6,2	2,8
13,8	6,8	3,2
16,4	8	3,8

Аппроксимирующая функция:

y= 1,1967 **K** **+** 1,7846 **L**

Объем товарной продукции Y	Основные фонды К	Численность персонала L
19	8,6	6,4
20,6	9,2	6,8
21,4	9,8	6,8
22,4	10,2	7,4
24,2	10,8	8
26	11,6	8,6

Аппроксимирующая функция:

y= 1,4083 **K** **+** 1,1106 **L**

Вариант 2

Объем товарной продукции Y	Основные фонды К	Численность персонала L
9,8	4,6	2,4

Объем товарной продукции Y	Основные фонды К	Численность персонала L
19	8,6	6,4

10,6	5	2,6
12,2	5,4	2,8
12,4	5,8	2,8
13,8	6,2	3,2
16,4	6,6	3,8

Аппроксимирующая функция:

y= 0,1482 **K** **+** 4,001 **L**

20,6	9,2	6,8
21,4	9,8	6,8
22	10,4	7,4
24,2	11	8
25	11,6	8,6

Аппроксимирующая функция:

y= 1,6274 **K** **+** 0,7603 **L**

Вариант 3

Объем товарной продукции Y	Основные фонды K	Численность персонала L
19,8	4,6	1,8
20,6	5	2,6
22,2	6	2,8
22,4	6,7	2,8
23,8	7,8	3,2
26,4	8,9	4

Аппроксимирующая функция:

y= 1,7687 **K** **+** 3,6247 **L**

Объем товарной продукции Y	Основные фонды K	Численность персонала L
29	8,6	6,4
30,6	9,2	6,8
31,4	9,8	6,8
32,4	10,2	7,4
34,2	10,8	8
36	11,6	8,6

Аппроксимирующая функция:

y= 2,8799 **K** **+** 0,4478 **L**

Вариант 4

Объем товарной продукции Y	Основные фонды K	Численность персонала L
90	46	24
106	50	26
122	61	30
138	64	34
154	70	39
170	78	45

Аппроксимирующая функция:

y= 0,8905 **K** **+** 2,2847 **L**

Объем товарной продукции Y	Основные фонды K	Численность персонала L
190	86	64
206	92	68
214	98	79
228	110	88
245	131	98
256	145	110

Аппроксимирующая функция:

y= 0,5114 **K** **+** 1,9289 **L**