

51  
1778

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

Т.Е. Воронцова  
Н.Л. Воронцова  
П.В. Михалева  
Л.А. Партина  
С.С. Рублева  
Н.В. Шукшина

Программа и методические указания по курсу  
высшей математики для студентов заочного  
факультета Лесотехнического Университете

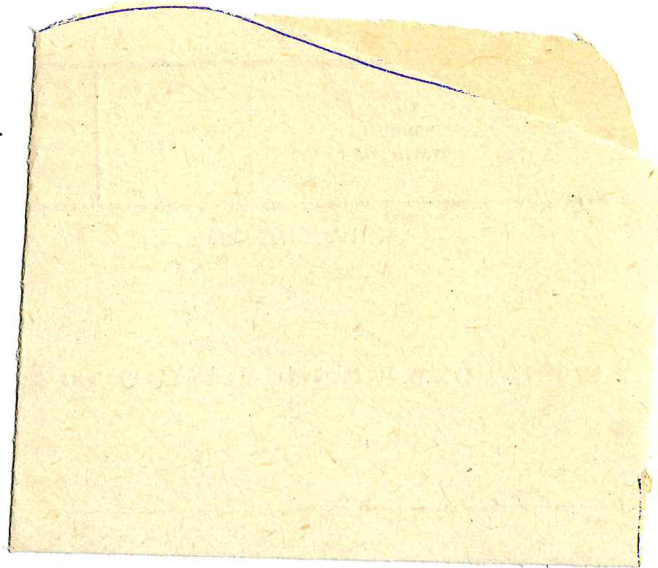
Вариант 10

Екатеринбург 2006



Печатается по рекомендации методической комиссии ФЭУ  
 Протокол №3 от 10.05.06

Рецензент доц. Панов В.Г.



Редактор Т.В. Давлятова  
 Оператор О.А. Казанцева

Подписано в печать 10.06.06	Переиздание
Плоская печать	Тираж 60
Заказ № 311/320	Цена 4 руб.
Формат 60x84 1/16	
Печ.л. 1,16	

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ  
 Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

### I АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1. Декартова система координат. Действительные числа. Координаты точки на прямой, на плоскости и в пространстве. Полярные координаты. Преобразования координат.

2. Прямая. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Нормальный вектор прямой. Общее уравнение прямой. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Уравнение пучка прямых. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Расстояние от точки до прямой.

3. Кривые второго порядка. Эллипс. Вывод канонического уравнения. Исследование формы эллипса по его каноническому уравнению. Окружность – частный случай эллипса. Эксцентриситет эллипса. Гипербола. Вывод канонического уравнения. Исследование формы гиперболы по ее каноническому уравнению. Асимптоты гиперболы. Построение гиперболы. Эксцентриситет. Парабола. Вывод канонических уравнений параболы.

4. Уравнения кривых второго порядка, оси симметрии которых параллельны осям координат (парабола, эллипс, гипербола). Уравнение равнобочной гиперболы. Уравнение равнобочной гиперболы, асимптотами которой служат оси координат. График дробно – линейной функции.

### II ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1. Определители второго и третьего порядка и их свойства. Определители высших порядков.

2. Векторные, скалярные величины. Действия над векторами. Коллинеарные вектора. Единичный вектор. Проекция вектора на ось. Свойства проекций. Линейная зависимость векторов. Базис. Прямоугольный декартов базис. Вектор, заданный координатами начала и конца. Длина вектора. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Направляющие косинусы вектора.

3. Скалярное произведение двух векторов. Свойства. Скалярное произведение векторов, заданных координатами. Угол между двумя векторами. Условие параллельности и перпендикулярности векторов.

4. Векторное произведение двух векторов. Свойства. Векторное произведение векторов, заданных координатами.

5. Смешанное произведение трех векторов. Геометрический смысл. Свойства. Условие компланарности трех векторов.

### III АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Плоскость. Нормальный вектор плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через точку. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости

в отрезках. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Угловые соотношения для плоскостей (угол между плоскостями, условие параллельности и перпендикулярности плоскостей). Расстояние от точки до плоскости.

2. Прямая линия в пространстве. Каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Параметрические уравнения прямой. Общие уравнения прямой. Переход от общих уравнений прямой к каноническим. Угловые соотношения между прямыми (угол между прямыми, условие параллельности и перпендикулярности прямых).

3. Угловые соотношения между прямой и плоскостью (угол между прямой и плоскостью, условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости). Точка пересечения прямой и плоскости. Пучок плоскостей.

4. Поверхности второго порядка. Сферические поверхности. Цилиндрические поверхности. Поверхности вращения. Гиперboloиды, Параболоиды. Конические поверхности.

#### IV ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1. Абсолютная величина числа. Свойства абсолютной величины суммы и разности. Интервалы числовой оси. Окрестность точки. Функция. Область определения, область значений. Элементарные функции. Явная, неявная, сложная, четная, нечетная функции. Поведение функции в интервале (возрастание, убывание, монотонность). Ограниченная функция в точке, в интервале.

2. Предел функции непрерывного аргумента. Понятие о бесконечно больших и бесконечно малых величинах. Свойства бесконечно малых. Основные теоремы о пределах. Раскрытие неопределенностей вида  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ ,

$1^{\infty}, \infty - \infty$ . Признаки существования предела. Предел  $\frac{\sin x}{x}$  при  $x \rightarrow 0$ .

Последовательность. Число  $\epsilon$ . Предел  $(1 + \frac{1}{n})^n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Сравнение бесконечно малых функций.

3. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва. Теорема о непрерывных функциях. Классификация точек разрыва. Непрерывность функции в интервале. Свойства функции, непрерывной в замкнутом интервале. Обратные функции. Приращение функции. Второе определение непрерывности в точке.

#### V ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Задача о скорости движения. Понятие производной. Механический смысл производной. Производная степени. Частное значение производной.

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали. Теоремы о дифференцируемых функциях. Производная сложной функции. Производные обратных тригонометрических функций. Производные показательной и логарифмической функций. Производная степенно – показательной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование неявных функций.

2. Дифференциал. Дифференциал независимой переменной. Геометрический смысл дифференциала. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Теорема об инвариантности формы дифференциала. Производные и дифференциал высших порядков.

3. Параметрическое задание кривой. Окружность, эллипс, циклоида. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Производная второго порядка.

4. Основные теоремы дифференциального исчисления. Теорема Ферма, Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коши. Их геометрический смысл.

5. Векторная функция скалярного аргумента и ее производная. Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой.

#### VI ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЮ ГРАФИКОВ

Необходимый и достаточный признаки возрастания и убывания функции в интервале. Точки экстремума. Необходимый и достаточный признаки существования экстремума. Второй достаточный признак существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции в интервале. Выпуклость, вогнутость кривой. Точки перегиба. Достаточное условие выпуклости и вогнутости. Необходимое и достаточное условие существования точек перегиба. Асимптоты кривой (вертикальные, наклонные). Полная схема исследования функции с построением графика.

#### VII НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Первообразная, ее свойства. Понятие неопределенного интеграла, его геометрический смысл. Основные свойства. Таблица интегралов. Интегрирование по частям и методом замены переменной. Интегрирование рациональных дробей с квадратным трехчленом в знаменателе. Интегрирование простейших рациональных дробей (корни знаменателя действительные, некоторые из них кратные; корни знаменателя комплексно – сопряженные). Метод неопределенных коэффициентов. Интегрирование некоторых тригонометрических функций: 1)  $\sin^m x \cdot \cos^n x$ , где  $m$  и  $n$  – четные положительные, 2)  $\sin^m x \cdot \cos^n x$ , где хотя бы одна из степеней нечетная положительная, 3)

## VIII ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Задача о площади криволинейной трапеции, понятие определенного интеграла. Основные свойства. Теоремы о “среднем”, об оценке определенного интеграла. Определенный интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Приближенное вычисление определенных интегралов методом трапеций, парабол (метод Симпсона). Вычисление площадей фигур в декартовых координатах и параметрически. Вычисление площадей фигур в полярных координатах. Объем тела вращения. Длина дуги кривой, заданной в декартовой системе координат и параметрически. Дифференциал дуги. Простейшие физические задачи. Несобственные интегралы с бесконечными границами и от разрывных функций. Их вычисление.

## IX ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Определение. Область определения функции. График функции двух переменных. Предел функции в точке. Непрерывность функции в точке. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Частное и полное приращение функции. Частные производные функции нескольких переменных. Геометрический смысл частной производной. Полный дифференциал. Приложение полного дифференциала к приближенным вычислениям. Производные высших порядков. Дифференцирование сложных, неявных функций. Инвариантность формы полного дифференциала.

2. Скалярное поле. Градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению.

3. Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных.

Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Теорема существования. Геометрический смысл двойного интеграла. Тройной интеграл. Вычисление двойного и тройного интеграла путем сведения их к повторным интегралам. Вычисление объемов с помощью двойного и тройного интегралов. Вычисление площадей плоских фигур с помощью двойного интеграла в декартовой и полярной системах координат. Приложения двойного и тройного интегралов. Задача о массе. Статистические моменты, центр тяжести. Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла, криволинейные интегралы по длине дуги и координатам, их свойства и вычисление. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Отыскание функции по ее полному дифференциалу.

## XI РЯДЫ

Числовые ряды. Необходимое условие сходимости, основные свойства, действия со сходящимися рядами. Достаточное условие расходимости ряда. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости таких рядов: сравнения, Даламбера, Коши, интегральный. Ряды с произвольными членами. Абсолютная и неабсолютная сходимость знакопеременных рядов. Признак Лейбница. Теоремы об оценке остатка. Степенные ряды. Интервал сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов. Степенной ряд, как ряд Тейлора. Примеры разложения элементарных функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.

## XII ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения I порядка. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения I порядка: однородные, линейные. Уравнения в полных дифференциалах. Приближенное решение дифференциальных уравнений методом Эйлера.

2. Дифференциальные уравнения II порядка. Теорема Коши. Уравнения II порядка, допускающие понижение порядка (3 типа). Дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные дифференциальные однородные уравнения II порядка. Теорема о структуре общего решения. Линейные неоднородные уравнения II порядка. Теорема об общем решении. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами. Отыскание частного решения методом неопределенных коэффициентов и общего решения. Геометрические и механические приложения.

### XIII КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Понятие и представление комплексных чисел. Действия над комплексными числами.
2. Функция комплексного переменного. Основные понятия. Предел и непрерывность функции. Основные элементарные функции комплексного переменного. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Эйлера-Даламбера.
3. Аналитическая функция. Дифференциал. Интегрирование функций комплексного переменного.
4. Ряды в комплексной плоскости. Числовые ряды. Степенные ряды. Ряд Тейлора.
5. Ряды Фурье.

### XIV ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1. Предмет теории вероятностей. Событие. Испытание. Виды событий. Виды случайных событий. Классическое определение вероятности. Свойства вероятностей. Вероятность противоположного события.
2. Сумма нескольких событий. Произведение нескольких событий. Зависимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Теорема сложения вероятностей.
3. Полная группа событий. Теорема о сумме вероятностей событий, образующих полную группу. Вероятность наступления хотя бы одного из данных событий.
4. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Интегральная теорема Лапласа. Интеграл вероятности.
6. Статистическое определение вероятности. Относительная частота.
7. Случайные величины. Закон распределения случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Биноминальный закон распределения дискретной случайной величины. Закон распределения Пуассона дискретной случайной величины.
8. Сумма и произведение двух случайных величин. Числовые характеристики дискретных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.
9. Функция распределения случайной величины. Ее свойства. Плотность распределения случайной величины. Ее свойства.
10. Нахождение функции распределения по плотности распределения. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.
11. Равномерный и случайный законы распределения непрерывной случайной величины. Кривая Гаусса.

12. Функция распределения нормально распределенной случайной величины. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.

13. Предмет математической статистики. Определение неизвестной функции распределения. Гистограмма. Определение неизвестных параметров распределения.
14. Элементы теории корреляции. Корреляционная зависимость двух случайных величин. Коэффициент корреляции. Функции и линии регрессии.
15. Анализ линейной корреляции по опытным данным.

### XV ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Определители 2-го порядка. Определители 3-го порядка. Свойства определителей. Вычисление определителей произвольного порядка. Решение систем линейных уравнений с помощью определителей (формулы Крамера).
2. Понятие о линейных пространствах. Матрицы и многомерные векторы и действия над ними (линейные). Скалярное произведение векторов. Ортогональность. Умножение матриц. Экономическая интерпретация многомерных векторов и матриц. Использование их в плановых расчетах. Балансовая модель.
3. Решение и исследование систем линейных уравнений методом Жордана (или Гаусса). Обращение матриц.
4. Линейная зависимость векторов. Базис и ранг системы векторов. Разложение вектора по базису. Геометрическая трактовка систем линейных уравнений. Условия совместности системы линейных уравнений.

### XVI ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Линейные оптимизационные задачи. Постановка задачи линейного программирования. Терминология. Геометрия линейного программирования.
2. Общая задача линейного программирования и ее решение симплекс-методом.
3. Транспортная задача. Постановка и математическая модель закрытой транспортной задачи. Существование оптимального плана. Составление исходного базисного (опорного) плана. Условие оптимальности плана транспортной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1998.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2002.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2001.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2001.
5. Горелова Т.В., Кацко И.А. Теория вероятностей и математическая статистика. – Ростов-на-Дону: ЕНИКС, 2002.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 2003. - Ч.1, 2.
7. Калихман И.М., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1979.
8. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. – М.: Юнити, 1999.
9. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Высшая школа, 2000.
10. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.П., Волощенко А.В. Математическое программирование. – М.: Высшая математика, 1980.
11. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1996.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. – М.: Наука, 1985, -Т. 1-3.
13. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис пресс, 2004. –Ч.1, 2
14. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2001.
15. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1987. – Ч.1,2.
16. Шолохович Ф.А. Высшая математика в кратком изложении. Екатеринбург, УрГУ, 1997.

ВАРИАНТ 10

Задача 1

Даны координаты вершин пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ :  $A_1(6;8;2)$ ,  $A_2(5;4;7)$ ,  $A_3(2;4;7)$ ,  $A_4(7;3;7)$ . Найти: 1) угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_3$ ; 2) уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$ ; 3) площадь грани  $A_1A_2A_3$ ; 4) проекцию вектора  $\overline{A_1A_3}$  на вектор  $\overline{A_1A_2}$ ; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой, проходящей через вершину  $A_4$ , перпендикулярно плоскости, проходящей через точки  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ; 7) длину высоты, опущенной из вершины  $A_4$  на плоскость  $A_1A_2A_3$ .

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Задача 2

Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок, отсекаемый на оси  $Ox$  параболой  $y = 3 - 2x - x^2$ .

Задача 3

Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы в вершинах эллипса  $9x^2 + 25y^2 = 225$ .

Задача 4

Написать уравнение прямой, проходящей через центр окружности  $x^2 + y^2 + 8x - 10y = 0$ , перпендикулярно прямой  $2x + y - 1 = 0$ .

ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Задача 5

Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x-1)(5x^3+3)}{x^3+2x^2-x+6}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2-5x-63}{x^3-7x^2+x-7}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2-x-4}{\sqrt{5x+6}-\sqrt{x+2}}; \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2+1}{3x^2+x} \right)^{x^2+1} \end{aligned}$$

**Задача 6**

Используя понятия пределов слева и справа, исследовать на непрерывность функцию, заданную несколькими аналитическими выражениями. Построить график функции.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

ПРОИЗВОДНЫЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

**Задача 7**

Найти производные  $y' = \frac{dy}{dx}$  следующих функций:

а)  $y = \frac{3}{\sqrt[3]{4x^2 - 1}} - \sqrt{2x + 3}$ ;      г)  $y = x \cdot \arcsin \frac{2x + 1}{3}$ ;

б)  $y = \sin^2 3x \cdot \ln \cos x$ ;      д)  $(x + y)^2 = (x - 2y)^3$ ;

в)  $y = \frac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 3}$ ;      е)  $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x}$ .

**Задача 8**

Найти производную  $\frac{dy}{dx}$  параметрически заданной функции:

$$\begin{cases} x = t + \ln \cos t \\ y = t - \ln \sin t. \end{cases}$$

**Задача 9**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = \frac{x + 6}{x^2 + 13}$  на отрезке  $[-5; 5]$ .

**Задача 10**

Исследовать функции методами дифференциального исчисления и на основании результатов исследования построить их графики:

а)  $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ ;      б)  $y = x^2 \cdot \ln x$ .

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ И ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

**Задача 11**

Найти неопределённые интегралы:

а)  $\int \frac{e^x + e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx$ ;      б)  $\int (3x + 4) \cdot \sin x dx$ ;      в)  $\int \frac{3x^2 + 8x - 3}{(x+1)^2 \cdot (x-3)} dx$ ;

г)  $\int \frac{(2+x)}{\sqrt[4]{(2+x)^5 - \sqrt{2+x}}} dx$ ;      д)  $\int \cos^4 x dx$ ;      е)  $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$ .

**Задача 12**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = 2^x$ ,  $y = 2x - x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$

**Задача 13**

Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций  $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ ,  $x + y = 2$ .

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Задача 14**

Проверить, удовлетворяет ли функция  $z = 2 \cos^2(y - \frac{x}{2})$  равенству  $2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ .

**Задача 15**

Исследовать функцию на экстремум:  $z = 2x^3 + 2y^3 - 30xy + 10$ .

**Задача 16**

Найти градиент и производную по направлению вектора  $a = (-5; 0; 12)$  функции  $u = x^y - z^3$  в точке  $M(1; 2; -1)$ .

**Задача 17**

Найти формулу вида  $y = ax + b$  методом наименьших квадратов по данным опыта:

x	1	2	3	4	5
y	-6,3	-2,2	-2,1	6,4	10,5

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ****Задача 18**

Найти решение дифференциального уравнения  $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(\sqrt{2}) = 1$ .

**Задача 19**

Найти общее решение дифференциального уравнения  $xy' + 3y(\ln \frac{y}{x} - 1) = 0$ .

**Задача 20**

Найти решение дифференциального уравнения  $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ ,  $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$ .

**Задача 21**

Найти общее решение дифференциального уравнения  $2y'' + 7y' + 3y = e^{-3x} \cdot (9 - 10x)$ .

**Задача 22**

Найти решение дифференциального уравнения  $y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 0$ .

**Задача 23**

Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями  $x + y + z = 4$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

**Задача 24**

Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:  $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$ . Сделать чертёж области интегрирования.

**Задача 25**

Вычислить  $\iint_D y \ln x dx dy$ , если  $D: xy = 1$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 2$ .

**Задача 26**

Вычислить криволинейный интеграл  
а)  $\int_{AB} xy dx + (y - x) dy$ , где  $AB$  дуга кривой  $y = x^3$ , заключенная между точками  $A(0; 0)$  и  $B(1; 1)$ .  
б)  $\int_L \frac{ds}{x - y}$ , где  $L$ -отрезок прямой  $y = x - 4$ , заключенный между точками  $A(0; -4)$  и  $B(4; 0)$ .

**Задача 27**

Найти первообразную функцию  $u(x, y)$  по ее полному дифференциалу

$$du = (e^{-x} - \frac{2}{x^3 y}) dx + (\sin 3y - \frac{1}{x^2 y^2}) dy.$$

**РЯДЫ****Задача 28**

Исследовать на сходимость числовой ряд с помощью достаточных признаков сходимости  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ .



**Задача 29**

Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость на концах интервала:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ .

**Задача 30**

Вычислить определённый интеграл  $\int_0^{0,5} x \cdot \ln(1+x) dx$  с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд.

**КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

**Задача 31**

Действия с комплексными числами.

а) Выполнить действия, ответ записать в тригонометрической форме:

1)  $z_1 = (1 - i\sqrt{3})^2$ ;    2)  $z_2 = \sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}}$ ;    3)  $z_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$ .

б) Решить уравнение, ответ записать в показательной форме:

$$\frac{4-i}{3+2i} \cdot z + \frac{3+4i}{i} = 0.$$

**Задача 32**

Вычислить значение функции комплексного переменного  $\omega = \operatorname{arctg} z$  в точке  $z_0 = 1 + 2i$ , ответ записать в алгебраической форме.

**Задача 33**

Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции  $\omega = z^4$ .

**Задача 34**

Используя интеграл Коши, вычислить:  $\oint_L \frac{z^3 + iz^2 - 6}{(z - 2i + 1)^2} dz$ , где

$L: |z - i| = 2$ .

**Задача 35**

Исследовать на сходимость числовой ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n \cdot (1+i)^n}{2^n}$ .

**Задача 36**

Построить область сходимости степенного ряда функции комплексного переменного:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n \cdot \sqrt{n}}{(-3+4i)^n}$ .

**Задача 37**

Представить периодическую функцию, заданную на полупериоде  $[0, \pi]$ , рядом Фурье по синусам. Построить график функции.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

**Задача 38**

Теоремы сложения и умножения вероятностей

В ящике находится 60 стандартных и 40 нестандартных деталей. Найдите вероятность того, что из взятых наудачу двух деталей а) одна окажется стандартной, б) хотя бы одна окажется стандартной?

**Задача 39**

Повторные независимые испытания

Всхожесть семян составляет 80%. Какова вероятность того, что из 1000 посеянных взойдут а) от 650 до 760, б) более половины?

**Задача 40**

Закон распределения и числовые характеристики случайной величины

Случайная величина  $X$  задана плотностью распределения  $f(x)$ . Требуется:

- 1) найти функцию распределения  $F(x)$ ;
- 2) найти математическое ожидание и дисперсию  $X$ ;
- 3) построить графики  $F(x)$  и  $f(x)$ ;
- 4) вычислить  $P\left(|X| < \frac{3}{2}\right)$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2. \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

**Задача 41**  
Нормальный закон

Дальность полета снаряда распределена нормально с математическим ожиданием  $M(X) = m$  и средним квадратическим отклонением  $\sigma(X) = 80$  м. Какой процент выпускаемых снарядов даст перелет от 120 до 160 м?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**Задача 42**  
Выборочный метод

Для определения прочности маховика произведены его испытания на разрыв. Получены данные:

Предельная скорость вращения (об/мин)	2500	2610	2720	2830	2940	3050	3160	3270	3380
Количество	1	1	2	4	5	4	2	1	

Считая, что прочность маховика – нормальная случайная величина, найти интервал, в котором с вероятностью 0,99 заключена средняя предельная скорость вращения.

**Задача 43**  
Линейная корреляция

Количество попаданий пар значений случайных величин  $X$  и  $Y$  в соответствующие интервалы приведены в таблице. По этим данным найти выборочный коэффициент корреляции и выборочные уравнения прямых линий регрессии  $Y$  на  $X$  и  $X$  на  $Y$ .

$Y \setminus X$	0	5	10	15	20
1,0					
2,0	0	0	2	3	
3,0	0	1	3	0	
4,0	2	1	1	0	
5,0	5	2	0	0	

**Задача 44**

Решить систему линейных уравнений: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

**Задача 45**

Исследовать и, в случае совместности, решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 3. \end{cases}$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

**Задача 46**

Построить на плоскости область решений системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 59 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Геометрически найти наименьшее и наибольшее значения функции  $F = x_1 - 2x_2$  в этой области.

**Задача 47**

Симплекс-метод

В производстве двух видов продукции А и В принимают участие три предприятия. При этом на изготовление единицы изделия А первое предприятие тратит 6 часов, второе – 5 часов, третье – 3 часа. На изготовление единицы изделия В первое предприятие тратит 3 часа, второе – 10 часов, третье – 12 часов. На производство всех изделий первое предприятие может затратить не более 714 часов, второе – не более 910 часов, третье – не более 948 часов. От реализации единицы готовой продукции вида А прибыль составляет 3000 рублей, а вида В – 9000 рублей.

Определить план выпуска продукции видов А и В, при котором прибыль от реализации всей продукции была бы максимальной.

Составить математическую модель задачи. Решить задачу симплекс-методом и геометрически.

#### Задача 48

##### Транспортная задача

Имеются три пункта отправления однородного груза:  $A_1, A_2, A_3$  и пять пунктов назначения этого груза:  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$ . На пунктах  $A_1, A_2, A_3$  находится 300 т, 330 т, 370 т груза соответственно. В пункты  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  требуется доставить 190 т, 150 т, 240 т, 200 т, 220 т груза соответственно. Затраты на перевозку единицы груза от пунктов отправления к пунктам назначения заданы матрицей  $D = (d_{ij})$ , где  $d_{ij}$  - стоимость перевозки единицы груза от  $A_i$  к  $B_j$ :

$$D = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 16 & 8 & 4 \\ 21 & 10 & 8 & 15 & 23 \\ 19 & 10 & 4 & 9 & 17 \end{pmatrix}.$$

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками, чтобы суммарные затраты на перевозки были минимальными.