



Л.Т. Раевская  
В.А. Калентьев

# **ИНТЕРАКТИВНЫЕ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

Екатеринбург  
2016

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра технической механики и оборудования ЦБП

Л.Т. Раевская  
В.А. Калентьев

# **ИНТЕРАКТИВНЫЕ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

Учебно-методическая разработка  
для изучения теоретического курса  
и подготовки к практическим занятиям для обучающихся  
по дисциплине «Теоретическая механика» направлений  
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»,  
15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»,  
23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы»,  
23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»,  
35.03.02 «Технология лесозаготовительных  
и деревоперерабатывающих производств»  
очной и заочной форм обучения

Екатеринбург  
2016

Печатается по рекомендации методической комиссии ИЛБиДС.  
Протокол № 2 от 15 октября 2015 г.

Рецензент – Э.Ф. Герц, директор института лесопромышленного бизнеса и дорожного строительства Уральского государственного лесотехнического университета, д-р техн. наук, профессор.

Редактор Е.Л. Михайлова  
Оператор компьютерной верстки Е.А. Газеева

---

Подписано в печать 14.06.16		План. резерв
Плоская печать	Формат 60×84 1/16	Тираж 10 экз.
Заказ № 179	Печ. л. 1,63	Цена руб. коп.

---

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ  
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

## ВВЕДЕНИЕ

Реформирование экономики породило существенный спрос на специалистов, умеющих действовать в ситуациях неопределённости, высокой степени риска, специалистов, умеющих анализировать и принимать решения. В вузах началось массовое обновление преподаваемых дисциплин и курсов. Менеджмент, маркетинг, политология, социология стали заполнять образовательный процесс, неся за собой расширение числа интерактивных методов обучения.

Перемены, происходящие в образовании, многими аналитиками были охарактеризованы как переход от классического к постклассическому образованию. Этот переход проявился в смене целей и ценностей образования.

Классическое образование	Постклассическое образование
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Массовость</li> <li>• Стабильность</li> <li>• Традиционализм</li> <li>• Завершённость</li> <li>• Нормативность</li> <li>• Цель</li> <li>• Результат – знания</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Индивидуальность</li> <li>• Неустойчивость</li> <li>• Инновации</li> <li>• Непрерывность</li> <li>• Творчество и неповторимость</li> <li>• Самоцель</li> <li>• Результат – компетентность, самостоятельность</li> </ul>

Развитие компетенций должно осуществляться при обязательном использовании в образовательном процессе активных методов обучения. Приобретение компетенций основано на деятельности. Чтобы научиться работать, нужно работать. Чтобы научиться общению, нужно общаться. Чтобы научиться использовать информацию, нужно работать с этой информацией. Приобретение компетенций зависит от активности обучающихся. Правильно организовать эту активность – задача современного преподавателя. Для преподавателя недостаточно быть компетентным только в своей области и передавать определенную сумму знаний обучающимся. И хотя новые взгляды на обучение не принимаются многими педагогами, нельзя игнорировать данные исследований, подтверждающих, что использование активных подходов является наиболее эффективным путем обучения. Известно, что обучающиеся легче вникают, понимают и запоминают материал, который они изучали посредством активного вовлечения в учебный процесс. Поэтому основные методические инновации связаны сегодня с применением именно активных методов обучения. В процессе обучения необходимо обращать внимание в первую очередь на те методы, при которых слушатели идентифицируют себя с учебным материалом, включаются в изучаемую ситуацию, побуждаются к активным действиям, переживают состояние успеха и соответственно мотивируют свое поведение. Всем этим требованиям в наибольшей степени отвечают интерактивные методы обучения.

В данной учебно-методической разработке, кроме обзора по интерактивным методам обучения и краткого изложения теоретического материала по теоретической механике, приведены задания для самостоятельной работы обучающихся в малых группах. Можно предлагать несколько заданий каждой группе, можно ограничиться одним заданием. Важно, чтобы группа нашла правильный вариант ответа, выступила с обоснованием правильности найденного результата, получила обратную связь от других групп.

### **1. ИНТЕРАКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ**

Обучение на основе интерактивных и активных методов позволяет решить задачу формирования как общих, так и профессиональных компетенций. Доля занятий, проводимых в интерактивных формах, определяется исходя из требований ФГОС к результатам освоения дисциплины (уметь, знать) и формируемым компетенциям, содержанием конкретной дисциплины, особенностью контингента обучающихся и готовностью преподавателя.

В образовании сложились, утвердились и получили широкое распространение три формы взаимодействия преподавателя и обучающихся: пассивные методы, активные методы, интерактивные методы.

Пассивный метод – это форма взаимодействия преподавателя и обучающегося, при которой преподаватель является основным действующим лицом и управляющим ходом занятия, а обучающиеся выступают в роли пассивных слушателей. Обратную связь преподаватель получает посредством опросов, самостоятельных, контрольных работ, тестов и т. д. С точки зрения современных педагогических технологий и эффективности усвоения студентами учебного материала пассивный метод мало эффективен, но, несмотря на это, он имеет и некоторые плюсы. Это относительно легкая подготовка к занятию со стороны преподавателя и возможность преподнести сравнительно большее количество учебного материала в ограниченных временных рамках занятия.

Под активными методами обучения понимаются такие способы организации учебного процесса, которые обеспечивают включение обучающихся в активное взаимодействие и общение с преподавателем в процессе их познавательной деятельности. Если пассивные методы предполагали авторитарный стиль взаимодействия, то активные больше предполагают демократический стиль.

Иногда между активными и интерактивными методами ставят знак равенства, однако, несмотря на общность, они имеют различия.

Интерактивные методы можно рассматривать как наиболее современную форму активных методов. В отличие от активных методов интерактивные ориентированы на более широкое взаимодействие обучающихся не только с преподавателем, но и друг с другом и на доминирование активности

обучающихся в процессе обучения. Место преподавателя на интерактивных занятиях сводится к направлению деятельности обучающихся на достижение целей занятия. Интерактивное обучение – это прежде всего диалоговое обучение. Применение тех или иных методов не должно быть самоцелью. Следует отметить, что большинство активных и интерактивных методов обучения имеет многофункциональное значение в учебном процессе. Интерактивные формы обучения способствуют пробуждению у обучающихся интереса к дисциплине, будущей профессиональной деятельности; эффективному усвоению учебного материала; самостоятельному поиску обучающимися путей и вариантов решения поставленной учебной задачи (выбор одного из предложенных вариантов или нахождение собственного варианта и обоснование решения); формированию умения организовывать собственную деятельность; формированию у обучающихся собственного мнения и отношения; установлению взаимодействия между обучающимися, обучению работать в команде, проявлять терпимость к любой точке зрения, уважать право каждого на свободу слова; формированию жизненных и профессиональных навыков.

Формы интерактивного обучения:

- творческие задания;
- работа в малых группах;
- обучающие игры (ролевые игры, имитации, деловые игры и образовательные игры);
- использование общественных ресурсов (приглашение специалиста, экскурсии);
- внеаудиторные методы обучения (социальные проекты, соревнования, радио и газеты, фильмы, спектакли, выставки, представления).

Среди современных технологий и методов обучения в последнее время особое место в профессиональном образовании занимает обучение кейс-методом. Он ориентирован на самостоятельную и групповую деятельность обучающихся, в которой приобретаются коммуникативные умения. При решении общей проблемы на занятиях общетехнических дисциплин полезным оказывается сотрудничество, которое позволяет всем студентам полностью осмыслить и усвоить учебный материал, дополнительную информацию, а главное, научиться работать совместно и самостоятельно.

Процесс обучения с использованием кейс-метода представляет собой имитацию реального события, сочетающую в себе достаточно адекватное отражение реальной действительности, небольшие материальные и временные затраты и вариативность обучения.

Сущность данного метода состоит в том, что учебный материал подается студентам виде проблем (кейсов), а знания приобретаются в результате активной и творческой работы: самостоятельного осуществления целеполагания, сбора необходимой информации, ее анализа с разных точек зрения, выдвижения гипотезы, выводов, заключения, самоконтроля процесса получения знаний и его результатов.

Будучи интерактивным методом обучения, он завоевывает позитивное отношение со стороны студентов, которые видят в нем возможность проявить инициативу, почувствовать самостоятельность в освоении теоретических положений и овладении практическими навыками. Не менее важно и то, что анализ ситуаций довольно сильно воздействует на профессионализацию студентов, способствует их взрослению, формирует интерес и позитивную мотивацию к учебе.

Метод кейс-стади – это не просто методическое нововведение, распространение метода напрямую связано с изменениями в современной ситуации в образовании. Можно сказать, что метод направлен не столько на освоение конкретных знаний или умений, сколько на развитие общего интеллектуального и коммуникативного потенциала студента и преподавателя.

В настоящее время этот метод чрезвычайно широко распространён, особенно при обучении экономике, управлению, а также в бизнес-образовании. Использование кейс-метода теперь не ограничивается только обучением, очень активно метод кейс-стади используется как исследовательская методика. Так, например, в 2003 г. в Томске была начата реализация исследовательской программы «Исследование феноменов и тенденций перехода к открытому образовательному пространству», в рамках которой метод кейс-стади был использован как исследовательский метод. Первый этап реализации программы завершился выходом сборника кейсов «Изменения в образовательных учреждениях: опыт исследования методом кейс-стади» под редакцией Г.Н. Прозументовой [1].

Важной особенностью метода кейс-стади является его эффективная сочетаемость с различными методами обучения. В таблице представлены возможности интеграции разных методов при организации работы с кейсом.

Метод, интегрированный в кейс-метод	Характеристики его роли в кейс-методе
Моделирование	Построение модели ситуации
Системный анализ	Системное представление и анализ ситуации
Мысленный эксперимент	Способ получения знания о ситуации посредством ее мысленного преобразования
Методы описания	Создание описания ситуации
Проблемный метод	Представление проблемы, лежащей в основе ситуации
Метод классификации	Создание упорядоченных перечней свойств, сторон, составляющих ситуации
Игровые методы	Представление вариантов поведения героев ситуации
«Мозговая атака»	Генерирование идей относительно ситуации
Дискуссия	Обмен взглядами по поводу проблемы и пути ее решения

Как видно из таблицы, разные методы организации образовательного процесса могут быть успешно интегрированы в кейс-метод.

## 2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

### 2.1. Связи и их реакции

На все тела механической системы воздействуют *связи*, т.е. «ограничения, налагаемые на положения и скорости точек механической системы, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах» [2, 3].

Связи в механических системах осуществляются с помощью контактирующих поверхностей или гибких элементов.

Из всего многообразия связей в заданиях, предложенных в настоящем пособии, встречаются лишь несколько видов:

1) гладкий цилиндрический шарнир  $A$ , соединяющий тело  $1$  со стойкой  $3$  (рис. 1, а) или два тела  $1$  и  $2$ , соединенных между собой (рис. 1, б);

2) гладкая опорная поверхность (плоская  $2$ , выпуклая  $3$  или вогнутая  $4$ , рис. 1, в), с которой тело  $1$  контактирует в одной точке  $C_v$  (мгновенный центр скоростей); опорная поверхность может быть неподвижной или подвижной;

3) связь, реализуемая парой сопряженных зубчатых колес  $1$  и  $2$  внешнего (рис. 1, г) или внутреннего (рис. 1, д) зацеплений, контактирующих друг с другом в полюсе зацепления  $P$ ; оси колес  $O_1$  и  $O_2$  могут быть как неподвижными, так и подвижными;

4) гибкая связь  $3$  (рис. 1, е), представленная нерастяжимыми нитью, тросом, веревкой, канатом и т.д.

Понятие *гладкий* предполагает, что в связях отсутствуют силы трения.

Все законы механики (законы Галилея-Ньютона) справедливы только для свободных тел. Поэтому необходимо все тела механической системы освободить от связей и заменить их *реакциями связей*, под которыми понимают «силы, действующие на материальные тела механической системы со стороны материальных тел, осуществляющих связи, наложенные на эту систему» [2, 3].

Поскольку реакция суть сила, она, как и всякая сила, характеризуется тремя параметрами: величиной или модулем, направлением и точкой приложения. В зависимости от вида связи часть из этих параметров заранее известна.

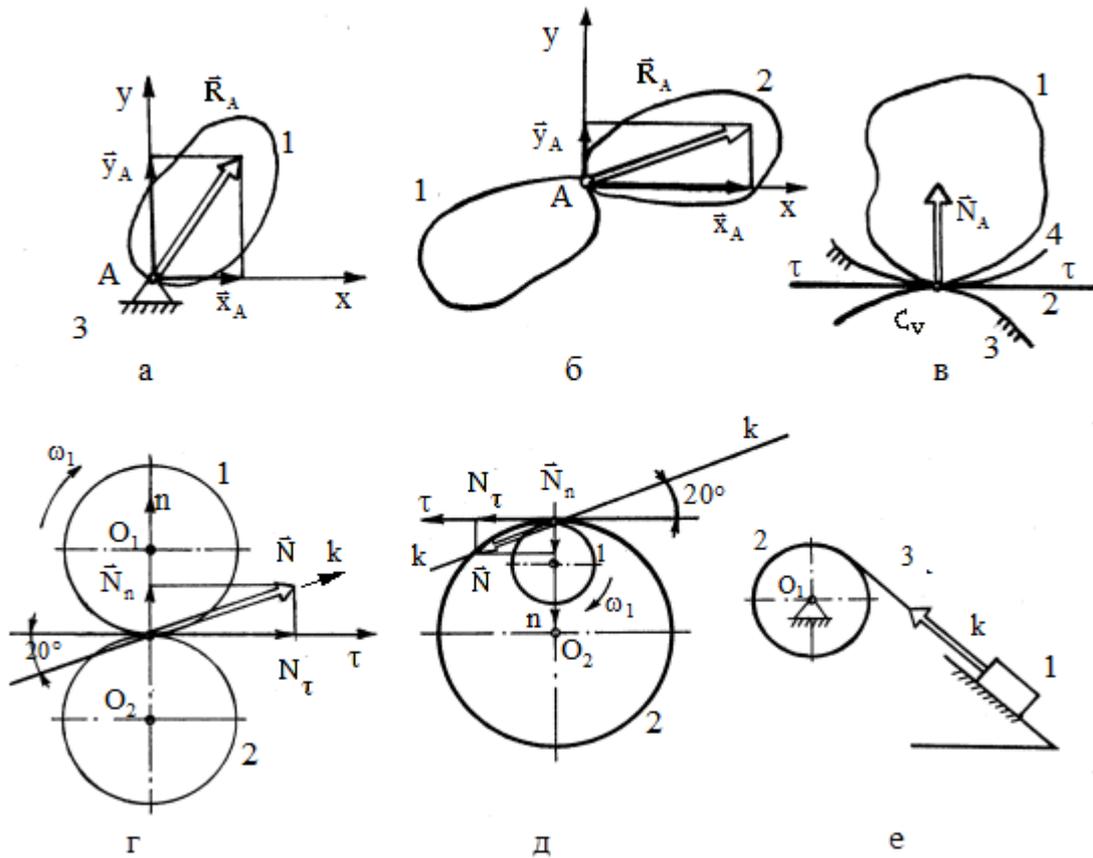


Рис. 1. Связи и их реакции. Реакции показаны для тела 1; для тела 2 реакции направлены в противоположную сторону

Для гладкого цилиндрического шарнира (см. рис. 1, а, б) известна точка приложения реакции  $\vec{R}_A$ , совпадающая с геометрическим центром шарнира А. Неизвестны величина и направление реакции. Ее разлагают на две составляющие  $\vec{X}_A$  и  $\vec{Y}_A$ , направленные вдоль координатных осей X и Y. При этом  $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$ .

Для гладкой опорной поверхности (см. рис. 1, в) известны точка приложения реакции  $\vec{N}_A$ , совпадающая с точкой  $C_V$  контакта тела с опорной поверхностью, и ее направление, нормальное к касательной  $\tau$ - $\tau$ , проведенной через точку  $C_V$ . Неизвестна величина реакции.

Для пары зубчатых колес (см. рис. 1, г, д) известны точка приложения реакции  $N$ , совпадающая с полюсом зацепления  $P$ , и ее направление, нормальное к профилям зубьев сопряженных колес, совпадающее с линией зацепления  $k$ - $k$ . Неизвестна величина реакции. Реакцию принято разлагать на две составляющие  $\vec{N}_\tau$  и  $\vec{N}_n$ , при этом  $\vec{N} = \vec{N}_\tau + \vec{N}_n$  и  $N_k = 0,36N_\tau$ ,  $N_n = 0,34N$ ,  $N_\tau = 0,94N$ .

Для гибкой связи (см. рис. 1, е) известны точка  $K$  приложения реакции  $\vec{T}$ , совпадающая с точкой сопряжения связи с соответствующим телом, и направление реакции – вдоль связи. Неизвестна величина реакции.

Принято различать следующие классы связей:

- 1) геометрические и дифференциальные;
- 2) стационарные и нестационарные;
- 3) голономные и неголономные;
- 4) удерживающие и недерживающие.

Аналитически связь в общем случае может быть задана в виде следующего уравнения связи:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t) = 0,$$

где  $x_k, y_k, z_k$  – координаты точек тел механической системы;

$\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k$  – скорости этих точек;

$t$  – время.

*Геометрическими* называют связи, уравнения которых содержат только координаты точек тел механической системы и, может быть, время.

*Дифференциальными* называют связи, уравнения которых, кроме координат точек тел механической системы, содержат еще первые производные от этих координат по времени и, может быть, время.

*Стационарными* называют связи, в уравнения которых время явно не входит.

*Нестационарными* называют связи, в уравнения которых явно входит время.

*Голономными* называют геометрические и дифференциальные связи, уравнения которых могут быть проинтегрированы.

*Неголономными* называют геометрические и дифференциальные связи, уравнения которых не могут быть проинтегрированы.

*Удерживающими* называют связи, при наличии которых для любого возможного перемещения точки тела механической системы противоположные перемещения также возможны. Аналитически эти связи выражаются равенствами вида  $f(x, y, z) = 0$ .

*Неудерживающими* называют связи, при которых точки тел механической системы имеют возможность перемещений, противоположные которым не являются возможными. Аналитически эти связи выражаются неравенством вида  $f(x, y, z, t) \geq 0$ .

Все теоретические положения и задачи предлагаемого учебного пособия относятся к механическим стационарным голономным удерживающим связям.

Наконец, будем различать связи внешние и внутренние. *Внешними* будем называть связи, наложенные на тела системы со стороны стойки (неподвижного звена), *внутренними* – реализованные между двумя или более телами рассматриваемой системы.

## 2.2. Кинематика твердого тела

Из всех видов движения твердого тела в задачах динамики, предложенных в настоящем пособии, встречаются только три: поступательное, вращательное и плоскопараллельное.

Основными кинематическими характеристиками этих видов движения являются:

- 1) скорость и ускорение точек тела;
- 2) угловая скорость и угловое ускорение тела.

*Поступательным* называют такое «движение тела, при котором прямая, соединяющая две любые точки этого тела, перемещается, оставаясь параллельной самой себе» [2, 3].

Согласно теореме, определяющей свойства поступательного движения, все точки тела при этом виде движения описывают одинаковые траектории и имеют в каждый данный момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Из этой теоремы следуют два важных свойства поступательного движения: во-первых, оно сводится к движению точки и, во-вторых, такое движение может быть прямолинейным или криволинейным.

В дальнейшем будем рассматривать только встречающееся в задачах учебного пособия *прямолинейное поступательное движение тела*.

При прямолинейном поступательном движении тела (рис. 2) его скорость  $\vec{v}$  и ускорение  $\vec{a}$  направлены вдоль линии движения (траектории). Скорость  $\vec{v}$  всегда направлена в сторону движения, ускорение  $\vec{a}$  – в сторону движения (ускоренное движение, рис. 2, а) или в противоположную сторону (замедленное движение, рис. 2, б).



Рис. 2. Направление скорости  $\vec{v}$  и ускорения  $\vec{a}$  тела при поступательном ускоренном (а) и замедленном (б) движениях

*Вращательным* называют такое «движение тела, при котором все точки, лежащие на некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными в рассматриваемой системе отсчета» [2, 3]. Эту прямую называют осью вращения. В плоскости, перпендикулярной оси вращения, эта прямая вырождается в точку  $O$ , вокруг которой происходит вращение тела в плоскости симметрии (рис. 3).

Кинематическими характеристиками вращательного движения тела является угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  ( $\varphi$  – угол поворота).

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} ; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} .$$

Если  $\omega$  и  $\varepsilon$  сонаправлены (рис. 3, а), тело вращается ускоренно, если противоположны (рис. 3, б) – замедленно.

Скорость любой точки  $A$  тела равна по модулю ( $h$  – радиус вращения)

$$v = \omega h$$

и направлена перпендикулярно  $OA$  в сторону угловой скорости.

Ускорение  $\vec{a}$  этой точки равно геометрической сумме касательного  $\vec{a}_\tau$  и нормального  $\vec{a}_n$  ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau ,$$

при этом  $a_n = \omega^2 h$ ,  $a_\tau = \varepsilon h$ . Нормальное ускорение направлено всегда к оси вращения, а касательное – перпендикулярно  $OA$  в сторону углового ускорения.



Рис. 3. Скорость и ускорение точки тела при вращательном ускоренном (а) и замедленном (б) движениях

*Плоскопараллельным (плоским)* называют такое «движение тела, при котором все его точки движутся в плоскости, неподвижной в рассматриваемой системе отсчета» [2, 3].

Изучение плоскопараллельного движения сводится к изучению движения неизменяемой плоской фигуры в неподвижной плоскости, совпадающей с плоскостью симметрии этой фигуры.

Плоскопараллельное движение распадается на две более простых формы движения: поступательное и вращательное.

Поступательное движение происходит так же, как движение произвольно выбранной точки в плоскости симметрии фигуры. Эту точку называют *полюсом* и в общем случае обозначают буквой  $P$ . За полюс принимают ту точку тела, скорость и (или) ускорение которой известно по модулю и направлению. Движение полюса может быть прямолинейным или криволинейным.

Вращательное движение происходит вокруг полюса и подчиняется всем закономерностям, рассмотренным выше.

*Определение скоростей точек тела, совершающего плоскопараллельное движение.* В общем случае скорость точки  $A$  тела, совершающего плоскопараллельное движение, геометрически складывается из скорости какой-либо другой точки  $P$  тела, принимаемой за полюс в поступательном движении, и скорости точки  $A$  во вращательном движении вместе с телом вокруг этого полюса (рис. 4).

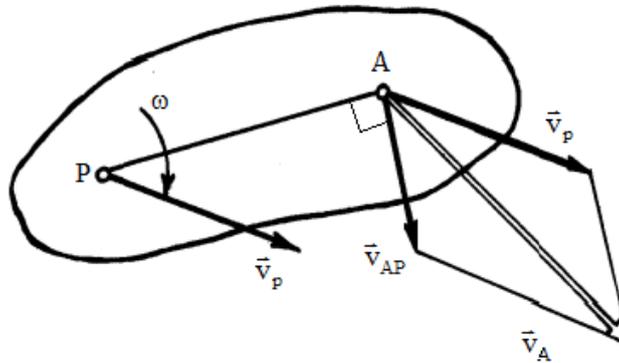


Рис. 4. Определение скорости точки тела при плоскопараллельном движении (общий случай)

Из сказанного следует, что  $\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{AP}$ , а  $v_{AP} = \omega AP$ , при этом  $\vec{v}_{AP} \perp AP$  и направлена в сторону  $\omega$ .

В основе второго способа определения скоростей точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, лежит понятие о так называемом *мгновенном центре скоростей (МЦС)*. Оказывается, что при плоскопараллельном движении всегда существует одна такая «точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю» [2, 3]. Эту точку называют мгновенным центром скоростей и обозначают символом  $C_v$ . Следовательно, по определению  $v_{C_v} = 0$ . В общем случае мгновенный центр скоростей лежит в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных к векторам  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$  скоростей двух точек  $A$  и  $B$  тела (рис. 5).

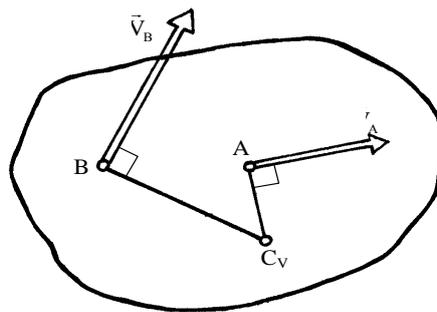


Рис. 5. К определению положения мгновенного центра скоростей (общий случай)

Приведем данные о некоторых частных случаях определения положения мгновенного центра скоростей.

1. Если одно тело катится по поверхности другого тела (неподвижного в данной системе отсчета) без скольжения, то МЦС находится в точке контакта  $C_V$  (рис. 6, а).

2. Если скорости двух точек  $A$  и  $B$  тела параллельны ( $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$ ) и перпендикулярны прямой  $AB$  ( $\vec{V}_A \perp AB, \vec{V}_B \perp AB$ ), то МЦС лежит в точке пересечения прямой, проведенной через концы векторов скоростей  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$  с прямой  $AB$  или с ее продолжением (рис. 6, б, в).

3. Если скорости двух точек  $A$  и  $B$  тела параллельны ( $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$ ), равны ( $\vec{V}_A = \vec{V}_B$ ), то МЦС лежит в бесконечности и тело совершает мгновенное поступательное движение (рис. 6, г).

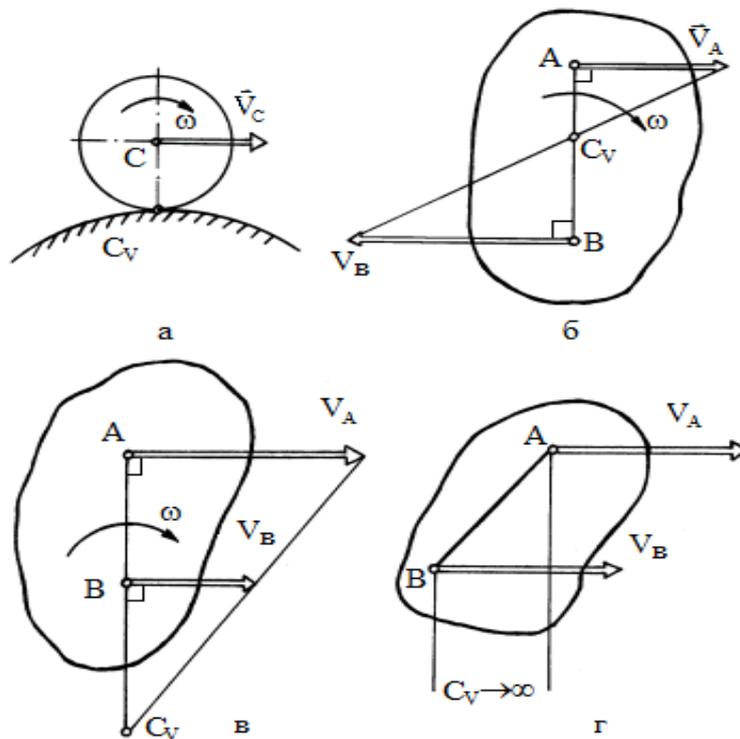


Рис. 6. К определению положения мгновенного центра скоростей (частные случаи)

Важно помнить, что относительно мгновенного центра скоростей тело совершает *вращательное движение*. Угловую скорость в этом случае рассчитывают по следующим зависимостям.

Схема	Рис. 7	Рис. 8,а	Рис. 8, б	Рис. 8, в	Рис. 8,г
Угловая скорость	$\omega = \frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V}$	$\omega = \frac{V_C}{CC_V}$	$\omega = \frac{V_A + V_B}{AB}$	$\omega = \frac{V_A - V_B}{AB}$	$\omega = 0$

*Определение ускорений точек тела, совершающего плоскопараллельное движение.* В общем случае ускорение точки  $A$  тела, совершающего движение, геометрически складывается из ускорения какой-либо другой точки  $P$  тела, принимаемой за полюс в поступательном движении, и ускорения точки  $A$  во вращательном движении вместе с телом вокруг этого полюса. Возможны два случая.

Полюс, как точка, совершает прямолинейное движение (рис. 7, а).

$$\vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}_{AP}^n + \vec{a}_{AP}^\tau.$$

Полюс совершает криволинейное движение (рис. 7, б). Тогда  $\vec{a}_A = \vec{a}_P^n + \vec{a}_P^\tau + \vec{a}_{AP}^n + \vec{a}_{AP}^\tau$ . В последнем выражении скалярные величины определяются соотношениями

$$a_P^n = \frac{V_P^2}{\rho}; \quad a_P^\tau = \frac{dV_P}{dt} = \frac{d^2 S_P}{dt^2}; \quad a_{AP}^n = \omega^2 AP; \quad a_{AP}^\tau = \varepsilon AP,$$

где  $V_P$  – численная величина скорости полюса;  
 $S_P$  – криволинейная (дуговая) координата полюса;  
 $\rho$  – радиус кривизны траектории  $\alpha$ - $\alpha$ .

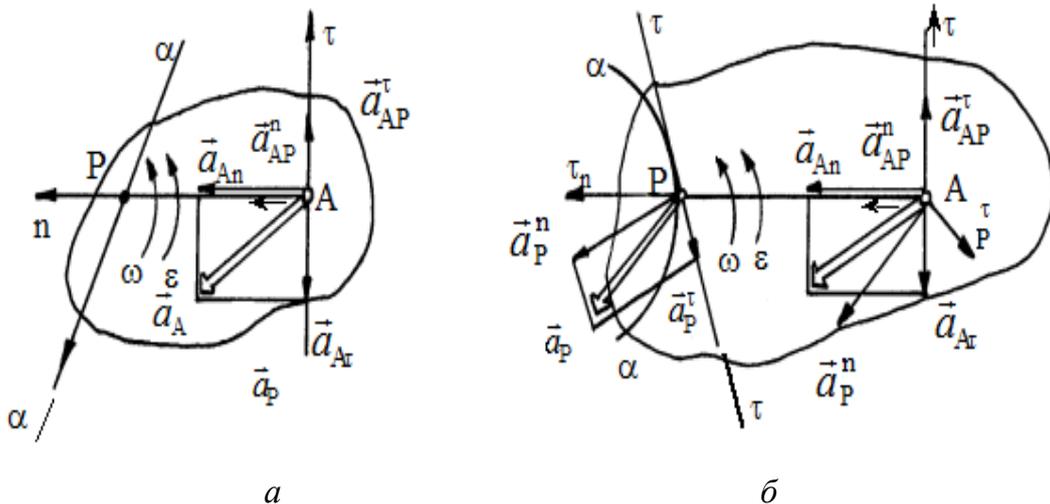


Рис. 7. Определение ускорения точки тела при плоскопараллельном движении;  $\alpha$ - $\alpha$  – траектория полюса

Полное ускорение точки  $A$  находят по его проекции на оси  $n$  и  $\tau$ :

$$a_A = \sqrt{a_{An}^2 + a_{A\tau}^2}.$$

### 2.3. Динамика

При решении задач динамики имеют дело с тремя категориями сил: активными, реакциями связей и силами инерции. При этом активные силы и реакции связей являются силами, реально существующими в природе и характеризующими собой «меру механического воздействия одного материального тела на другое» [2-5]. Силы инерции, иногда говорят *даламберовы силы инерции*, реально в природе не существуют, так как они не отвечают основному понятию силы. Эти силы – условные или фиктивные – вводят в расчет лишь для того, чтобы задачу динамики свести к задаче статики.

Согласно [2] к активным силам могут быть отнесены сила тяжести, массовые, поверхностные и диссипативные силы, а также упругая сила. В рамках настоящей работы необходимо дать только понятие силы тяжести. Силой тяжести называют «силу, действующую на тело (материальную точку), находящееся вблизи земной поверхности, равную произведению массы тела (точки) на ускорение его свободного падения в вакууме» [2, 3].

Эту силу принимают равной  $\vec{P} = m\vec{g}$ .

В реальной жизни все связи являются шероховатыми. А это означает, что на поверхностях контактирующих тел, образующих связь, будут возникать трение скольжения или трение качения [3], приводящие к появлению силы трения скольжения и момента трения качения.

*Трением скольжения* называют «трение движения, при котором скорости тел в точке касания различны по значению (величине) и (или) направлению». *Трением качения* называют «трение движения, при котором скорости соприкасающихся тел одинаковы по значению (величине) и направлению по крайней мере в одной точке зоны контакта». Рассмотрим реакции шероховатой поверхности для двух наиболее часто встречающихся случаев.

*Реакция связи при поступательном движении тела* сводится к нормальной реакции  $\vec{N}$  и силе трения скольжения  $\vec{F}_{TP}$  (рис. 8, а), предельное значение которой определяется зависимостью  $F_{TP} = fN$ , где  $f$  – коэффициент трения скольжения.

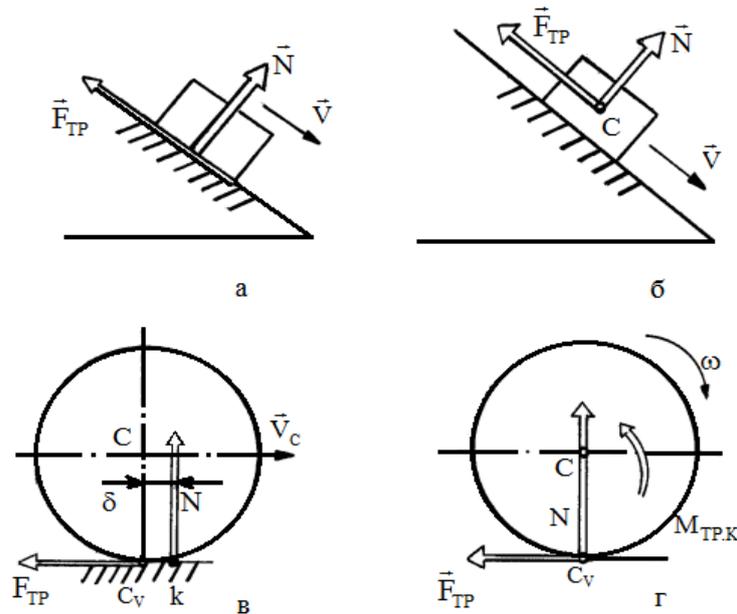


Рис. 8. Реакция шероховатой поверхности

Сила трения  $\vec{F}_{TP}$  направлена в сторону, противоположную скорости  $\vec{V}$ . Сила трения действует по поверхности соприкосновения (см. рис. 8, а). Однако, поскольку поступательное движение тела эквивалентно движению материальной точки, на расчетных схемах силу трения  $\vec{F}_{TP}$  так же, как нормальную реакцию  $\vec{N}$ , очень часто условно совмещают с центром масс  $C$  тела (рис. 8, б). Последнее особо важно при расчете динамики на основе теоремы об изменении момента количества движения.

*Реакция связи при качении цилиндрического тела (колеса)* может быть представлена в двух вариантах.

Первый вариант (рис. 8, в). Реакция связи сводится к нормальной силе  $\vec{N}$ , смещенной по скорости  $\vec{V}_C$  на величину  $\delta$  и приложенной в точке  $K$ , и к силе трения  $\vec{F}_{TP}$ , направленной по касательной к колесу в точке  $C_V$ . Направление силы трения зависит от режима движения колеса. Она может быть направлена как по скорости  $\vec{V}_C$ , так и против нее. На расчетной схеме можно показать любое направление. Действительное направление определяется в результате расчета по знаку  $F_{TP}$ : если направление на схеме было выбрано правильно, сила трения получится со знаком плюс, если ошибочно – со знаком минус.

Величину смещения  $\delta$  называют *коэффициентом трения качения*. В отличие от коэффициента трения скольжения  $f$  он является величиной размерной и измеряется в единицах длины.

Второй вариант (рис. 8, г). Реакция связи сводится к нормальной силе  $\vec{N}$ , приложенной в мгновенном центре скоростей  $C_V$ , к силе трения  $\vec{F}_{TP}$ , относительно которой справедливы все положения, сформулированные

в первом варианте, и к моменту трения качения  $M_{\text{тр.к}}$ , равному  $M_{\text{тр.к}} = \delta N$ , направленному против угловой скорости колеса.

*Силой инерции* материальной точки называют «величину, равную произведению массы материальной точки на ее ускорение и направленную противоположно этому ускорению» [2, 3].

Применительно к твердому телу, которое рассматривают как совокупность материальных точек, принято различать главный вектор и главный момент сил инерции [2-5].

*Главный вектор сил инерции*  $\vec{\Phi}_C$  равен произведению массы тела  $m$  на ускорение его центра масс  $\vec{a}_C$ , приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную этому ускорению:

$$\vec{\Phi}_C = -m\vec{a}_C; \quad \Phi_C = ma_C.$$

*Главный момент пар сил инерции* относительно центра масс тела  $M_C^\Phi$  равен произведению момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс  $J_C$ , на угловое ускорение тела  $\vec{\varepsilon}$  и направлен в сторону, противоположную этому ускорению:

$$\vec{M}_C^\Phi = -J_C\vec{\varepsilon}; \quad M_C^\Phi = J_C\varepsilon.$$

Для плоской задачи этот момент лежит в плоскости симметрии тела и, следовательно, является величиной скалярной.

В задачах динамики рассчитывают модули главного вектора  $\Phi_C$  и главного момента  $M_C^\Phi$ , а направление их показывают на расчетной схеме противоположно соответствующим ускорениям (рис. 9).

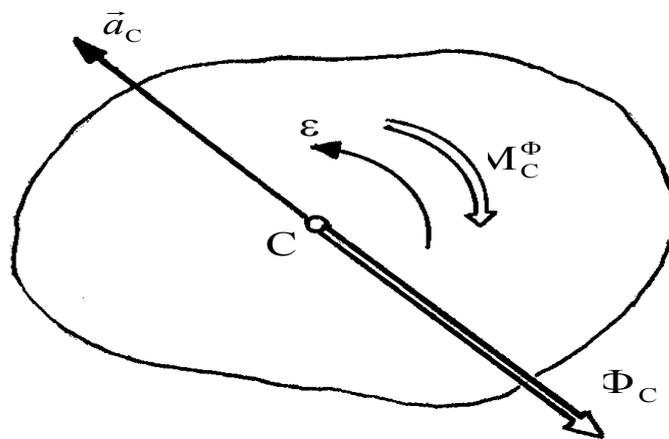


Рис. 9. Главный вектор и главный момент сил инерции

Все силы инерции приводятся к главному вектору или главному моменту в зависимости от характера движения тела.

При поступательном движении все силы инерции приводятся только к главному вектору сил инерции  $\vec{F}_C$ . При вращательном движении все силы инерции приводятся только к главному моменту пар сил инерции  $M_C^\Phi$ , а главный вектор равен нулю:  $\vec{F}_C = 0$ .

При плоскопараллельном движении все силы инерции приводятся к главному вектору сил инерции  $\vec{F}_C$  и главному моменту пар сил инерции  $M_C^\Phi$ .

Основными динамическими характеристиками движения являются кинетическая энергия и количество движения [2-5]. Иногда вместо количества движения рассматривают его момент [2, 3], относя его также к одной из основных динамических характеристик движения. Кинетическая энергия тела зависит от характера его движения. Кинетическая энергия тела при поступательном движении  $T_{\text{пост}}$  равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс:

$$T_{\text{пост}} = \frac{1}{2} m v_C^2.$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении  $T_{\text{вр}}$  равна половине произведения момента инерции тела относительно оси его вращения  $z$  на квадрат его угловой скорости:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} J_z \omega^2.$$

Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении  $T_{\text{пл}}$  равна сумме кинетических энергий поступательного движения тела со скоростью центра масс и вращательного движения вокруг центра масс:

$$T_{\text{пл}} = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2.$$

Кинетическая энергия твердого тела при плоскопараллельном движении может быть определена так же, как кинетическая энергия тела при вращательном движении вокруг мгновенного центра скоростей:

$$T_{\text{пл}} = \frac{1}{2} J_{Cv} \omega^2.$$

Кинетическая энергия является всегда сугубо положительной величиной; она измеряется в джоулях (Дж).

Количеством движения материальной точки называют векторную меру механического движения точки, равную произведению массы материальной точки на ее скорость (рис. 10).

Количество движения точки, как всякая векторная величина, может быть показано графически. Вектор  $\vec{q}$  направлен так же, как вектор скорости  $\vec{v}$ , т.е. по касательной  $\tau - \tau$  к траектории  $\alpha - \alpha$  в сторону движения.

Количество движения тела характеризует только поступательную часть движения (при плоскопараллельном движении) или само поступательное движение. Остановимся лишь на последнем. Количеством движения при поступательном движении  $\vec{Q}$  называют векторную величину, равную произведению массы тела на скорость его центра масс:

$$\vec{Q} = m\vec{v}_c.$$

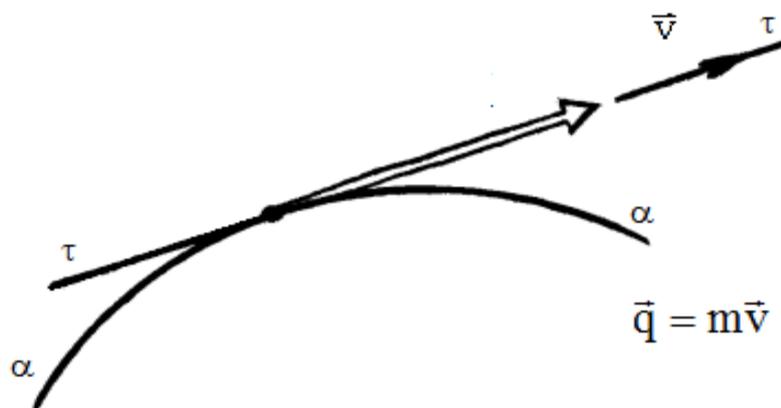


Рис. 10. Вектор количества движения точки

Измеряется количество движения в  $\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}$ ; особого наименования эта единица не имеет.

Моментом количества движения материальной точки относительно центра  $O$  (кинетическим моментом точки относительно центра)  $\vec{L}_0$  называют векторную величину, равную векторному произведению радиус-вектора материальной точки  $\vec{r}$ , проведенного из этого центра, на количество движения  $m\vec{v}$  [2-3] (рис. 11).

В соответствии с этим определением  $\vec{L}_0 = \vec{r}m\vec{v}$ .

Моментом количества движения точки относительно оси  $L_Z$  называют скалярную «величину, равную проекции на эту ось момента количества движения точки относительно любого выбранного на данной оси центра» [2-3].

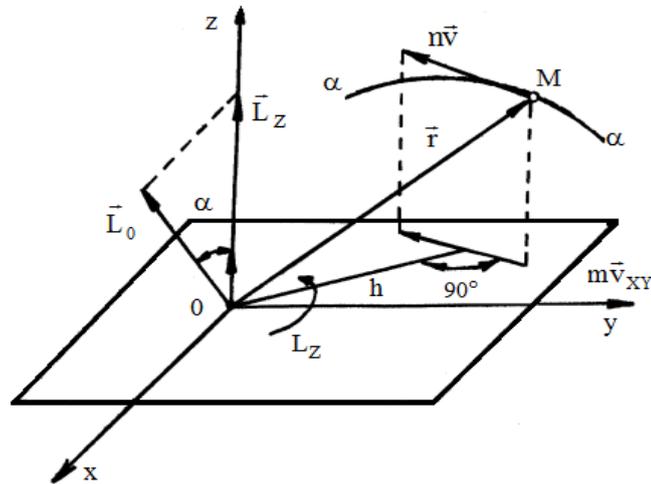


Рис. 11. Момент количества движения точки относительно центра  $\vec{L}_0$  и оси  $L_Z$

$$\vec{L}_Z = L_Z \vec{k}; \quad L_Z = L_0 \cos \alpha,$$

где  $\vec{k}$  – единичный вектор;  $L_Z$  – момент количества движений относительно оси  $z$  (если ось  $z$  проходит через центр масс, то  $L_Z$  обозначают символом  $L_C$ , а если через мгновенный центр скоростей –  $L_{Cv}$ ). Тогда  $L_Z = mv_{xy}h$ , или, опуская индексы  $xy$  при скорости, окончательно получим выражение для определения момента количества движения точки относительно оси:  $L_Z = mvh$ . Момент количества движения есть мера вращательного движения тела.

Для характеристики действия силы при некотором перемещении точки ее приложения вводится понятие работы.

*Элементарной работой силы* называют «скалярную меру действия силы, равную скалярному произведению силы на элементарное перемещение точки ее приложения» [2].

Напомним, что скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей на косинус угла между ними. Так как сила  $\vec{F}$  и элементарное перемещение  $d\vec{s}$  суть векторные величины (рис. 12, а), то согласно данному определению элементарная работа равна:

$$dA = Fds \cos \alpha = F_r ds.$$

Если к телу приложена пара сил, то элементарная работа пары будет равна произведению момента пары на элементарный угол поворота  $d\varphi$  (рис. 12, б):

$$dA = M(\vec{F}, \vec{F}') d\varphi.$$

Момент пары чаще обозначают круговой стрелкой с символом  $M$  (рис. 12, в), тогда

$$dA = Md\varphi.$$

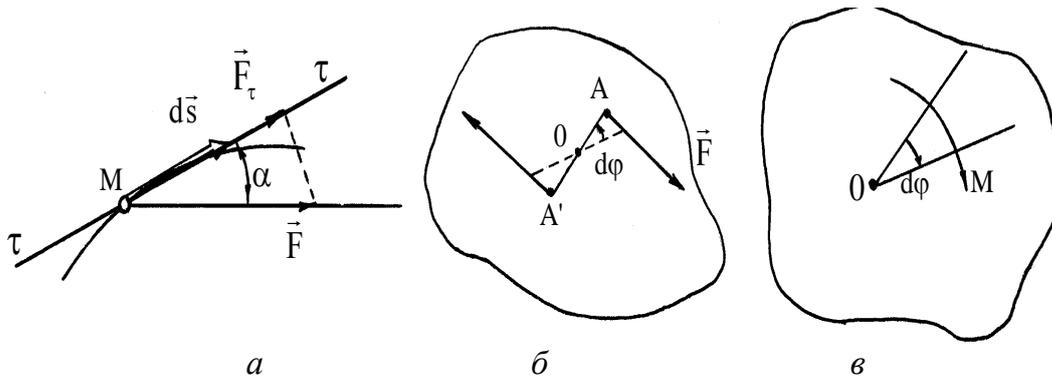


Рис. 12. К определению элементарной работы силы и пары сил

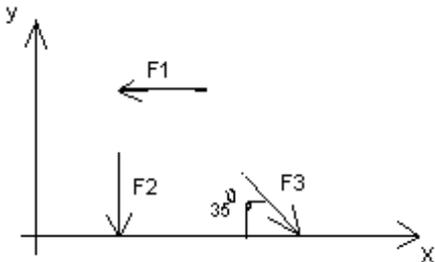
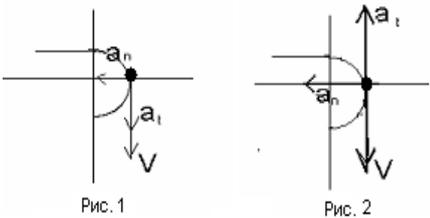
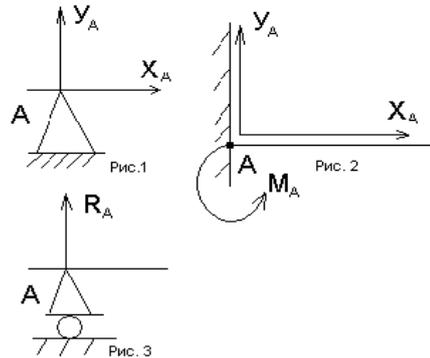
Элементарная работа может быть любого знака. Если  $\vec{F}_\tau$  и  $d\vec{s}$  или  $M$  и  $d\phi$  сонаправлены, то работа положительная, если противоположно направлены – отрицательная. В частном случае при  $\vec{F} \perp d\vec{s}$  имеем  $dA = 0$ .

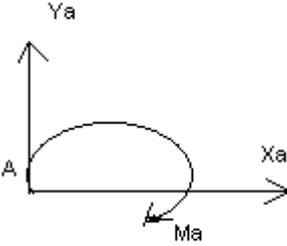
### 3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ В МАЛЫХ ГРУППАХ В РАМКАХ ИНТЕРАКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ

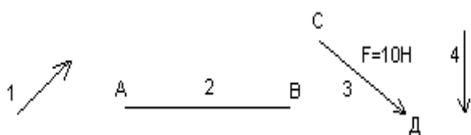
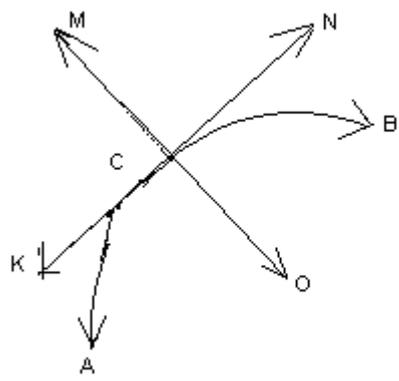
Задания, выдаваемые малым группам в рамках интерактивного обучения, состоят из двух блоков. В первом блоке студентам необходимо найти правильный ответ, обосновать его и выступить с краткой презентацией результата. Во втором блоке надо закончить предложение или вставить пропущенное слово. Этот блок проверяет знание формулировок и основных понятий теоретической механики.

Блок А. Выберите правильный ответ.

№ п/п	Задание (вопрос)	
1.	<p>Установите соответствие между рисунками и выражениями для расчета проекции силы на ось ОУ</p>	<p><u>Силы</u></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>F_1</math></li> <li>2. <math>F_2</math></li> <li>3. <math>F_3</math></li> </ol> <p><u>Проекции</u></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>А. 0</li> <li>Б. <math>-F</math></li> <li>В. <math>-F \sin 45^\circ</math></li> <li>Г. <math>F \cos 45^\circ</math></li> </ol>

<p>2.</p>	<p>Установите соответствие между рисунками и выражениями для расчета проекции силы на ось OX</p> 	<table border="0"> <tr> <td><u>Силы</u></td> <td><u>Проекция сил</u></td> </tr> <tr> <td>1. F1</td> <td>А. 0</td> </tr> <tr> <td>2. F2</td> <td>Б. -F</td> </tr> <tr> <td>3. F3</td> <td>В. <math>-F \sin 35^\circ</math></td> </tr> <tr> <td></td> <td>Г. <math>-F \cos 35^\circ</math></td> </tr> </table>	<u>Силы</u>	<u>Проекция сил</u>	1. F1	А. 0	2. F2	Б. -F	3. F3	В. $-F \sin 35^\circ$		Г. $-F \cos 35^\circ$
<u>Силы</u>	<u>Проекция сил</u>											
1. F1	А. 0											
2. F2	Б. -F											
3. F3	В. $-F \sin 35^\circ$											
	Г. $-F \cos 35^\circ$											
<p>3.</p>	<p>Установите соответствие между рисунками и видами движения точки</p> 	<table border="0"> <tr> <td><u>Рис.</u></td> <td><u>Виды движения</u></td> </tr> <tr> <td>1. Рис. 1</td> <td>А. Равномерное</td> </tr> <tr> <td>2. Рис. 2</td> <td>Б. Равноускоренное</td> </tr> <tr> <td>3. Рис. 3</td> <td>В. Равнозамедленное</td> </tr> </table>	<u>Рис.</u>	<u>Виды движения</u>	1. Рис. 1	А. Равномерное	2. Рис. 2	Б. Равноускоренное	3. Рис. 3	В. Равнозамедленное		
<u>Рис.</u>	<u>Виды движения</u>											
1. Рис. 1	А. Равномерное											
2. Рис. 2	Б. Равноускоренное											
3. Рис. 3	В. Равнозамедленное											
<p>4.</p>	<p>Установите соответствие между рисунком и определением</p> 	<table border="0"> <tr> <td><u>Рис.</u></td> <td><u>Определение</u></td> </tr> <tr> <td>1. Рис. 1</td> <td>А. Жесткая заделка</td> </tr> <tr> <td>2. Рис. 2</td> <td>Б. Неподвижная опора</td> </tr> <tr> <td>3. Рис. 3</td> <td>В. Подвижная опора</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Г. Вид опоры не определен</td> </tr> </table>	<u>Рис.</u>	<u>Определение</u>	1. Рис. 1	А. Жесткая заделка	2. Рис. 2	Б. Неподвижная опора	3. Рис. 3	В. Подвижная опора		Г. Вид опоры не определен
<u>Рис.</u>	<u>Определение</u>											
1. Рис. 1	А. Жесткая заделка											
2. Рис. 2	Б. Неподвижная опора											
3. Рис. 3	В. Подвижная опора											
	Г. Вид опоры не определен											
<p>5.</p>	<p>Укажите, какое движение является простейшим</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Молекулярное</li> <li>2. Механическое</li> <li>3. Движение электронов</li> <li>4. Отсутствие движения</li> </ol>										
<p>6.</p>	<p>Укажите, какое действие производят силы на реальные тела</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Силы, изменяющие форму и размеры реального тела</li> <li>2. Силы, изменяющие движение реального тела</li> </ol>										

		<p>3. Силы, изменяющие характер движения и деформирующие реальные тела</p> <p>4. Действие не наблюдается</p>
7.	Укажите, признаки уравновешивающей силы	<p>1. Сила, производящая такое же действие, как данная система сил</p> <p>2. Сила, равная по величине равнодействующей и направленная в противоположную сторону</p> <p>3. Признаков действий нет</p>
8.	Укажите, к чему приложена реакция опоры	<p>1. К самой опоре</p> <p>2. К опирающему телу</p> <p>3. Реакция отсутствует</p>
9.	Укажите, какую систему образуют две силы, линии действия которых перекрещиваются	<p>1. Плоскую систему сил</p> <p>2. Пространственную систему сил</p> <p>3. Сходящуюся систему сил</p> <p>4. Система отсутствует</p>
10.	Укажите, чем можно уравновесить пару сил	<p>1. Одной силой</p> <p>2. Парой сил</p> <p>3. Одной силой и одной парой сил</p>
11.	Укажите, что надо знать чтобы определить эффект действия пары сил	<p>1. Величину силы и плечо пары сил</p> <p>2. Произведение величины силы на плечо</p> <p>3. Величину момента пары и направление</p> <p>4. Плечо пары</p>
12.	<p>Укажите опору, которой соответствуют составляющие реакции опоры балки</p> 	<p>1. Шарнирно-неподвижная</p> <p>2. Шарнирно-подвижная</p> <p>3. Жесткая заделка</p>
13.	Укажите, какую характеристику движения поездов можно определить на карте железнодорожных линий	<p>1. Траекторию движения</p> <p>2. Расстояние между поездами</p> <p>3. Путь, пройденный поездом</p> <p>4. Характеристику движения нельзя определить</p>

<p>14.</p>	<p>Укажите, какое изображение вектора содержит все элементы, характеризующие силу:</p> 	<p>1. Рис. 1 2. Рис. 2 3. Рис. 3 4. Рис. 4</p>
<p>15.</p>	<p>Точка движется из А в В по траектории, указанной на рисунке. Укажите направление скорости точки</p> 	<p>1. Скорость направлена по СК 2. Скорость направлена по СМ 3. Скорость направлена по СN 4. Скорость направлена по СО</p>
<p>16.</p>	<p>Укажите, как взаимно расположены равнодействующая и уравновешенная силы</p>	<p>1. Они направлены в одну сторону 2. Они направлены по одной прямой в противоположные стороны 3. Их взаимное расположение может быть произвольным 4. Они пересекаются в одной точке</p>
<p>17.</p>	<p>Укажите, почему силы действия и противодействия не могут взаимно уравновешиваться</p>	<p>1. Эти силы не равны по модулю 2. Они не направлены по одной прямой 3. Они не направлены в противоположные стороны 4. Они принадлежат разным телам</p>
<p>18.</p>	<p>Выбрать выражение для расчета проекции силы F5 на ось Oх</p>	<p>1. <math>-F5 \cos 30^\circ</math> 2. <math>F5 \cos 60^\circ</math> 3. <math>-F5 \cos 60^\circ</math> 4. <math>F5 \sin 120^\circ</math></p>

<p>19.</p>	<p>Тело находится в равновесии.  <math>m_1 = 15 \text{ Нм}</math>; <math>m_2 = 8 \text{ Нм}</math>;  <math>m_3 = 12 \text{ Нм}</math>; <math>m_4 = ?</math>          Определить величину момента пары <math>m_4</math></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 14 Нм</li> <li>2. 19 Нм</li> <li>3. 11 Нм</li> <li>4. 15 Нм</li> </ol>
<p>20.</p>	<p>Укажите, что можно сказать о плоской системе сил, если при приведении ее к некоторому центру главный вектор и главный момент оказались равными нулю</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Система не уравновешена</li> <li>2. Система заменена равнодействующей</li> <li>3. Система заменена главным вектором</li> <li>4. Система уравновешена</li> </ol>
<p>21.</p>	<p>Чем отличается главный вектор системы от равнодействующей той же системы сил</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Величиной</li> <li>2. Направлением</li> <li>3. Величиной и направлением</li> <li>4. Точкой приложения</li> </ol>
<p>22.</p>	<p>Сколько неизвестных величин можно найти, используя уравнения равновесия пространственной системы сходящихся сил?</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 6</li> <li>2. 2</li> <li>3. 3</li> <li>4. 4</li> </ol>

Блок Б. Вставьте пропущенные слова.

№ п/п	Задание (вопрос)
23.	Плечо пары – кратчайшее ..., взятое по перпендикуляру к линиям действия сил.
24.	Условие равновесия системы пар моментов состоит в том, что алгебраическая сумма моментов пар равняется ... .
25.	Сила инерции точки равна по величине произведению массы точки на ее ускорение и направлена в сторону, противоположную ... .
26.	Работа силы на прямолинейном перемещении равна произведению ... на величину перемещения и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения.
27.	При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси траектории всех точек, не лежащих на оси вращения, представляют собой ... .
28.	Работа пары сил равна произведению ... на угол поворота, выраженный в радианах.
29.	Мощность при вращательном движении тела равна произведению вращающего момента на ... .

### Библиографический список

1. Изменения в образовательных учреждениях: опыт исследования методом кейс-стади / под ред Г.Н. Прокументовой. – Томск, 2003.
2. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. – 20-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
3. Попов М.В. Теоретическая механика. Краткий курс: учебник для втузов. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
4. Динамика механических систем с одной степенью свободы: учеб. пособие / Д.Т. Анкудинов, В.А. Калентьев, Л.Т. Раевская, В.И. Ефимова. – Екатеринбург: УГЛТА, 1999. – 120 с.
5. Калентьев В.А. Динамика: учеб. пособие. – Екатеринбург: ЕВАКУ(ВИ), 2008. – 164 с.