УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

А.Ю. Шаров
С.А. Чудинов

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОЕКТИРОВАНИИ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ

Екатеринбург
2016

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра транспорта и дорожного строительства

А.Ю. Шаров
С.А. Чудинов

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОЕКТИРОВАНИИ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ

Учебно-методическое пособие
для обучающихся направления 08.03.01 «Строительство»
очной и заочной форм обучения

Екатеринбург
2016

Печатается по рекомендации методической комиссии ИЛБиДС. Протокол № 2 от 07 октября 2015 г.

Рецензент: И.Н. Кручинин, канд. техн. наук, доцент кафедры Т и ДС.

Редактор Е.Л. Михайлова
Оператор компьютерной верстки Т.В. Упорова

Подписано в печать 29.09.16		Поз. 51
Плоская печать	Формат 60х84 1/16	Тираж 10 экз.
Заказ № 184	Печ. л. 2,32	Цена руб. коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей при проектировании, строительстве и эксплуатации автомобильных дорог и транспортных сооружений в целом является снижение себестоимости дорожного строительства.

Решение данной задачи возможно лишь на основе обоснованных рациональных проектных решений и глубокого технико-экономического анализа производства, разумной эксплуатации транспортных сооружений. В соответствии с этим для обоснования проектных решений, для совершенствования планирования и управления строительством должны широко внедряться экономико-математические методы. Поиск и реализация оптимальных решений в любой народнохозяйственной области представляет главное содержание конкретной экономической работы.

В учебно-методическом пособии представлены варианты заданий и примеры выполнения практических работ в области применения современных экономико-математических методов к поиску оптимальных решений в области дорожного строительства на стадии проработки проектных решений.

1. РАСЧЕТ ЗАТОРА ПЕРЕД ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫМ ПЕРЕЕЗДОМ

Железнодорожный переезд – это пересечение дороги с железнодорожными путями на одном уровне и наиболее опасное пересечение на пути водителя. Столкновения на переезде поезда и транспортного средства не идет ни в какое сравнение с дорожно-транспортными происшествиями на перекрестках по тяжести последствий: как правило, они заканчиваются смертельными исходами участников дорожного движения. Повышенная опасность железнодорожных переездов связана с большой скоростью поездов, их массой, которая достигает 2–3 тыс. т, и, как следствие этого, длинным тормозным путем. Скорость движения поезда превышает 100 км/ч, при этом тормозной путь поезда – более 1 км, т.е. машинист абсолютно лишен возможности предотвратить столкновение [1].

Для предотвращения опасности возникновения ДТП необходимо знать, возможно или нет образование затора перед железнодорожным переездом.

Задача

1. Установить на основе наблюдений за интенсивностью движения, подчиняется ли она закону Пуассона.
2. Найти средний интервал движения автомобилей.
3. Определить размер очереди перед железнодорожным переездом в одном уровне при известной длительности запрещающего сигнала светофора и сделать выводы.

Исходные данные взять в соответствии с индивидуальным шифром (табл. 1.1, 1.2).

Таблица 1.1

Интенсивность движения, авт/мин (принимать по 4-й цифре шифра)

Значение для варианта																			
0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
Ni	fi	Ni	fi	Ni	fi	Ni	fi	Ni	fi	Ni	fi	Ni	fi	Ni	fi	Ni	fi	Ni	fi
0	1	1	1	0	14	0	5	0	2	0	7	0	3	1	3	0	1	1	2
1	2	2	3	1	27	1	15	1	7	1	23	1	10	2	8	1	5	2	5
2	6	3	7	2	27	2	22	2	15	2	26	2	18	3	14	2	11	3	9
3	11	4	11	3	18	3	23	3	20	3	20	3	22	4	18	3	17	4	13
4	16	5	15	4	9	4	17	4	20	4	12	4	19	5	18	4	19	5	16
5	17	6	16	5	4	5	10	5	16	5	7	5	13	6	15	5	17	6	16
6	16	7	15	6	1	6	5	6	10	6	3	6	8	7	10	6	13	7	14
7	12	8	12	7	0	7	2	7	6	7	2	7	4	8	7	7	8	8	10
8	9	9	9	8	0	8	1	8	3	8	0	8	2	9	4	8	5	9	7
9	5	10	6	9	0	9	0	9	1			9	1	10	2	9	3	10	4
10	3	11	3											11	1	10	1	11	2
11	2	12	2															12	1
																		13	1

Примечание. N_i – количество автомобилей, проезжающих через сечение дороги за 1 мин; f_i – число наблюдений.

Таблица 1.2

Средняя длительность запрещающего сигнала светофора на железнодорожном переезде t_0, мин (принимать по 5-й цифре шифра)

Длительность запрещающего сигнала светофора на железнодорожном переезде для вариантов (t_0)									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,1	2,2	2,8	2,4	2,5	2,6	2,7	2,3	2,9	3,0

Пример

Исходные данные: наблюдения за интенсивностью движения.

N_i	f_i
0	5
1	15
2	22
3	23
4	17
5	10
6	5
7	2
8	1
9	0

Средняя длительность запрещающего сигнала светофора на железнодорожном переезде t_0 = 2,3 мин.

Решение

1. Число наблюдений $\sum f_i = 7 + 23 + 26 + \ldots + 0 = 100$.

Поскольку число наблюдений составило 100, величины f_n выражают фактически установленные вероятности прохождения n автомобилей за 1 мин, выраженные в процентах.

2. Среднее число наступления событий $a = \lambda t$ вычисляется как

$$a = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i \,, \qquad (1.1)$$

где n_i – вероятность появления события (N_i);

p_i – число независимых испытаний (f_i);

100 – общее число наблюдений.

$$a = 0\ \frac{5}{100} + 1\ \frac{15}{100} + 2\ \frac{22}{100} + ... + 9\ \frac{0}{100} = 2,5.$$

3. Находим закон распределения случайной величины, предполагая его пуассоновским [2]. Для этого определяем вероятности появления n автомобилей за интервал времени t = 1 при $a = \lambda t$ = 2,5.

N_i	f_i	P_i
0	5	8,2
1	15	20,5
2	22	25,7
3	23	21,4
4	17	13,4
5	10	6,7
6	5	2,8
7	2	1,0
8	1	0,3
9	0	0,1

Воспользуемся формулой пуассоновского распределения:

$$P_i(n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\ e^{-\lambda t}, \tag{1.2}$$

где $n!$ – эн факториал, произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно (пример: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$).

Пример: $P_5(5) = \frac{(2,5)^5}{120} \cdot 2,7183^{-2,5} = 0,0668$, так как среднее число наступления событий a взято в процентах от общего числа, то $P_5(5) = 0,0668 \cdot 100 \approx 6,7$. Значение $P_i(\mathrm{n})$ можно принимать по таблице распределения Пуассона.

Проведенный анализ показывает относительное соответствие экспериментальных данных пуассоновскому распределению.

4. Средний интервал времени (в секундах) между автомобилями при пуассоновском распределении (при вероятности прохождения n автомобилей за 1 мин) определяется по зависимости [3]

$$t_n = \frac{1}{\lambda / t}, \tag{1.3}$$

$$t_n = \frac{1}{2,5/60} = \frac{1}{0,0417} = 24 \text{ с.}$$

5. Размер очереди автомобилей перед железнодорожным переездом (при вероятности прохождения n автомобилей за 1 мин) определяется исходя из среднего интервала времени между автомобилями и среднего времени закрытия переезда по зависимости [3]

$$N = \frac{t_o}{t_n}, \tag{1.4}$$

$$N = \frac{2,3 \cdot 60}{24} = 5,75 \approx 6 \text{ авт.}$$

Вывод: при средней длительности запрещающего сигнала светофора на железнодорожном переезде t_o = 2,3 с размер очереди составит шесть автомобилей, что не является затором и не осложняет условия движения по дороге при смешанном транспортном потоке.

2. ОЦЕНКА БЕЗОПАСНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФАКТИЧЕСКОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ АВТОМОБИЛЕЙ НА УЧАСТКЕ ДОРОГИ

Скорость движения является важнейшим показателем дорожного движения, так как характеризует его целевую функцию. В практике организации движения принято характеризовать скорость движения транспортных средств мгновенными ее значениями V_a, зафиксированными в отдельных типичных точках дороги.

Скорость транспортного средства в пределах его тяговых возможностей в современном дорожном движении определяет водитель, являющийся управляющим звеном в системе автомобиль – водитель – дорога (АВД). Водитель постоянно стремится выбрать наиболее целесообразный режим скорости исходя из двух главных критериев:

1) минимально возможной затраты времени;
2) обеспечения безопасности движения.

В каждом случае на принятие решения оказывает влияние характеристика водителя: квалификация, психофизиологическое состояние, цель движения.

Максимальная скорость (V_{max}) современных автомобилей колеблется в широких пределах в зависимости от их типа [1]. Она (примерно) составляет: 200 км/ч для легковых автомобилей большого и среднего класса; 150 – для легковых автомобилей малого класса; 100 – для грузовых автомобилей средней грузоподъемности; 85 – для грузовых автомобилей большой грузоподъемности и 75 км/ч – для тяжелых автопоездов [4].

На прямолинейных и горизонтальных участках благоустроенных дорог ожидаемый диапазон мгновенных скоростей для различных типов современных автомобилей при их свободном движении составляет от 60 до 160 км/ч.

Однако реальные дорожные условия вносят существенные поправки в фактический диапазон наблюдаемых скоростей движения. В связи с этим фактический диапазон мгновенных скоростей свободного движения автомобилей на горизонтальных участках магистральных улиц и дорог нашей страны составляет от 50 до 120 км/ч (эти цифры не относятся к дорогам, не имеющим надлежащего покрытия или с разрушенным покрытием).

Существенное влияние на скорость движения оказывают те элементы дорожных условий, которые связаны с особенностями психофизиологического восприятия водителя и уверенностью управления. Здесь вновь необходимо подчеркнуть неразрывность элементов системы АВД автомобиль – водитель – дорога и решающее влияние водителей на характеристики современного дорожного движения [4].

На основе скорости движения автомобилей по участку автомобильной дороги (табл. 2.1) необходимо найти фактическую максимальную скорость на обследуемом участке при доверительной вероятности t (табл. 2.2) и расчетной скорости $v_{расч}$, а также коэффициент безопасности для данного участка.

Таблица 2.1

Скорость движения автомобилей по участку автомобильной дороги при расчетной скорости движения для данного участка дороги (принимать по 4-й цифре шифра)

Значения для варианта									
0		1		2		3		4	
v, км/ч	*N*, авт.	*v*, км/ч	*N*, авт.	*v*, км/ч	*N*, авт.	*v*, км/ч	*N*, авт.	*v*, км/ч	*N*, авт.
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
44	1	48	0	52	1	56	1	60	1
45	2	49	1	53	1	57	0	61	2
46	1	50	2	54	2	58	1	62	4
47	1	51	2	55	2	59	1	63	6
48	3	52	3	56	3	60	4	64	10
49	3	53	2	57	3	61	3	65	15
50	2	54	4	58	4	62	2	66	23
51	5	55	6	59	5	63	5	67	25
52	6	526	6	60	6	64	6	68	30
53	6	57	8	61	5	65	7	69	32
54	9	58	10	62	7	66	9	70	38
55	8	59	11	63	10	67	8	71	50
56	12	60	14	64	12	68	11	72	56
57	20	61	19	65	20	69	19	73	72
58	28	62	28	66	30	70	25	74	94
59	68	63	70	67	71	71	60	75	111
60	71	64	75	68	80	72	65	76	115
61	80	65	82	69	89	73	70	77	112
62	91	66	90	70	97	74	78	78	107
63	102	67	99	71	104	75	90	79	100
64	110	68	105	72	112	76	91	80	86
65	105	69	100	73	110	77	89	81	71
66	100	70	98	74	100	78	86	82	52
67	97	71	94	75	98	79	80	83	29
68	95	72	85	76	97	80	64	84	12
69	94	73	80	77	80	81	60	85	7
70	70	74	70	78	69	82	45	86	10
71	45	75	47	79	44	83	16	87	6
72	30	76	25	80	28	84	10	88	6
73	15	77	10	81	13	85	5	89	5
74	10	78	8	82	7	86	6	90	6
75	8	79	6	83	5	87	2	91	3
76	8	80	6	84	2	88	1	92	2
77	7	81	7	85	3	89	0	93	0
78	5	82	5	86	1	90	1	94	1
79	4	83	4	87	1	91	1	95	1
81	3	85	2	89	1	93	0	97	0
82	1	86	1	90	0	94	1	98	0
83	1	87	0	91	1	95	0	99	1
$v_{расч}$ = 60		$v_{расч}$ = 60		$v_{расч}$ = 60		$v_{расч}$ = 80		$v_{расч}$ = 80	

Окончание табл. 2.1

Значения для варианта									
5		6		7		8		9	
v, км/ч	*N*, авт.	*v*, км/ч	*N*, авт.	*v*, км/ч	*N*, авт.	*v*, км/ч	*N*, авт.	*v*, км/ч	*N*, авт.
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
64	1	68	1	72	1	76	1	80	1
65	0	69	1	73	0	77	2	81	2
66	0	70	2	74	1	78	2	82	3
67	1	71	1	75	1	79	1	83	2
68	1	72	2	76	3	80	3	84	3
69	3	73	3	77	5	81	3	85	3
70	1	74	3	78	12	82	2	86	2
71	7	75	5	79	19	83	5	87	4
72	6	76	7	80	33	84	6	88	5
73	9	77	7	81	45	85	6	89	6
74	11	78	6	82	69	86	9	90	10
75	16	79	8	83	80	87	8	91	21
76	19	80	14	84	99	88	12	92	38
77	20	81	22	85	111	89	20	93	44
78	30	82	29	86	112	90	28	94	57
79	67	83	66	87	120	91	68	95	70
80	72	84	71	88	127	92	71	96	95
81	83	85	81	89	140	93	80	97	100
82	95	86	95	90	135	94	91	98	109
83	102	87	102	91	124	95	102	99	107
84	111	88	112	92	98	96	110	100	108
85	104	89	115	93	74	97	119	101	105
86	100	90	116	94	66	98	125	102	99
87	96	91	100	95	48	99	124	103	84
88	80	92	92	96	29	100	120	104	51
89	75	93	74	97	22	101	115	105	33
90	61	94	50	98	11	102	110	106	14
91	45	95	24	99	15	103	109	107	9
92	20	96	13	100	14	104	101	108	5
93	12	97	11	101	10	105	90	109	3
94	10	98	8	102	10	106	74	110	2
95	8	99	8	103	8	107	31	111	0
96	6	100	6	104	5	108	9	112	2
97	7	101	7	105	6	109	5	113	1
98	5	102	5	106	3	110	1	114	1
99	2	103	4	107	2	111	0	115	0
100	4	104	0	108	1	112	2	116	1
101	2	105	3	109	0	113	1	117	0
102	1	106	1	110	1	114	0	118	0
103	0	107	2	111	1	115	0	119	1
$v_{расч}$ = 80		$v_{расч}$ = 80		$v_{расч}$ = 100		$v_{расч}$ = 100		$v_{расч}$ = 100	

Примечание. v – скорость автомобилей, км/ч; N – количество автомобилей, проехавших с данной скоростью по участку дороги; $v_{расч}$ – расчетная скорость движения для данного участка дороги, км/ч.

Таблица 2.2

Доверительная вероятность *t* при расчетной скорости движения (принимать по 5-й цифре шифра)

Показатели	Значения для варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v_{расч}$	60			80				100		
t	1,035	1,037	1,039	1,0411,0431	1,043	1,045	1,047	1,049	1,050	1,035

На основе анализа исходных данных необходимо:

1) написать закон распределения скорости движения;

2) найти математическое ожидание скорости движения (среднюю скорость свободного движения) и коэффициента безопасности для данного распределения;

3) найти отклонения скорости движения;

4) оценить дисперсию скоростей движения и вычислить среднее квадратическое отклонение;

5) определить фактическую максимальную скорость на данном участке.

Пример

Исходные данные:

v, км/ч	N, авт.	v, км/ч	N, авт.	v, км/ч	N, авт.	v, км/ч	N, авт.	v, км/ч	N, авт.
48	0	56	6	64	75	72	85	80	6
49	1	57	8	65	82	73	80	81	7
50	2	58	10	66	90	74	70	82	5
51	2	59	11	67	99	75	47	83	4
52	3	60	14	68	105	76	25	84	1
53	2	61	19	69	100	77	10	85	2
54	4	62	28	70	98	78	8	86	1
55	6	63	70	71	94	79	6	87	0

$v_{расч} = 60$; $t = 1{,}039$.

Решение

1. Вероятность появления одной из скоростей движения определяется по зависимости

$$p_i = \frac{n_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i}, \qquad (2.1)$$

где n_i – число автомобилей, движущихся с m-й скоростью на данном участке дороги.

$$p_{63} = \frac{70}{1286} = 0,54432.$$

Результаты расчета представлены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Результаты расчета появления одной из скоростей движения

v, км/ч	N, авт.	p_i	v, км/ч	N, авт.	p_i
48	0	0	68	105	0,081 649
49	1	0,000 778	69	100	0,077 76
50	2	0,001 555	70	98	0,076 205
51	2	0,001 555	71	94	0,073 095
52	3	0,002 333	72	85	0,066 096
53	2	0,001 555	73	80	0,062 208
54	4	0,003 11	74	70	0,054 432
55	6	0,004 666	75	47	0,036 547
56	6	0,004 666	76	25	0,019 44
57	8	0,006 221	77	10	0,007 776
58	10	0,007 776	78	8	0,006 221
59	11	0,008 554	79	6	0,004 666
60	14	0,010 886	80	6	0,004 666
62	28	0,021 773	82	5	0,003 888
63	70	0,054 432	83	4	0,003 11
64	75	0,058 32	84	1	0,000 778
65	82	0,063 764	85	2	0,001 555
66	90	0,069 984	86	1	0,000 778
67	99	0,076 983	87	0	0
–			Сумма	1286	1,00

2. Математическое ожидание скорости движения (средняя скорость свободного движения, км/ч) определяется по зависимости

$$p_i = M(v) = \sum_{i=1}^{m} v_i \; p_i, \tag{2.2}$$

$$p_i = 48 \cdot 0 + 49 \cdot 0,000778 + ... + 86 \cdot 0,000778 + 87 \cdot 0 = 68,479.$$

Коэффициент безопасности для данного распределения определяется по зависимости

$$K_{без} = M(v)/v_{расч}, \tag{2.3}$$

$$K_{без} = 68,479/60 = 1,14.$$

3. Отклонение скорости движения, определяемое как $v_i - M_{(v)}$ (48 – 60,479 = –20,479), представлено в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Значения отклонения скорости движения

v, км/ч	N, авт.	$V_i - M_{(v)}$	v, км/ч	N, авт.	$v_i - M_{(v)}$
48	0	-20,479	52	3	-16,479
49	1	-19,479	53	2	-15,479
50	2	-18,479	54	4	-14,479
51	2	-17,479	55	6	-13,479
56	6	-12,479	72	85	3,520 995
57	8	-11,479	73	80	4,520 995
58	10	-10,479	74	70	5,520 995
59	11	-9,479	75	47	6,520 995
60	14	-8,479	76	25	7,520 995
61	19	-7,479	77	10	8,520 995
62	28	-6,479	78	8	9,520 995
63	70	-5,479	79	6	10,521
64	75	4,479	80	6	11,521
65	82	-3,479	81	7	12,521
66	90	-2,479	82	5	13,521
67	99	-1,479	83	4	14,521
68	105	-0,479	84	1	15,521
69	100	0,520 995	85	2	16,521
70	98	1,520 995	86	1	17,521
71	94	2,520 995	87	0	18,521

4. Дисперсия скоростей движения (км/ч) определяется по зависимости

$$D(v) = M\left[v_i - M(v)\right]^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\left(v_i - M(v)\right)^2\ p_i\right),, \tag{2.4}$$

$$D(v) = \sum_{i=1}^{m}(-20,479)^2\ 0 + (-19,479)^2\ 0,000778 + \ldots + (17,521)^2\ 0,000778 + (18,521)^2\ 0 = 26,09.$$

Среднее квадратическое отклонение (км/ч) определяется по зависимости

$$\sigma(v) = \sqrt{D(v)}, \tag{2.5}$$

$$\sigma = \sqrt{26,09} = 5,11\,.$$

5. Фактическая максимальная скорость движения на данном участке определяется по зависимости:

$$v_{ф.\max} = v_o + t\sigma(v), \tag{2.6}$$

$$v_{ф.\max} = 68,479 + 1,039 \cdot 5,11 = 73,8 \text{ км/ч}.$$

Вывод: максимальная скорость движения на участке дороги составляет 73,8 км/ч, что на 18,7 % превышает расчетную скорость движения (60 км/ч). С точки зрения административной ответственности данная скорость находится в допустимых пределах (превышение скорости от 0 до 20 км/ч), однако в зависимости от дорожных условий и психофизиологических особенностей водителя может привести к возникновению конфликтных ситуаций и увеличению вероятности возникновения ДТП.

3. ВЕРОЯТНОСТЬ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ ПРИ ПРЕВЫШЕНИИ РАСЧЕТНОЙ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА УЧАСТКЕ ДОРОГИ

Расчетная скорость – это наибольшая возможная (по условиям устойчивости и безопасности) скорость движения одиночного автомобиля при нормальных условиях погоды и сцепления шин автомобилей с поверхностью проезжей части. На наиболее неблагоприятных участках трассы сцепление шин должно соответствовать предельно допустимым значениям [5].

Основная задача данной работы – определить близость теоретического распределения к нормальному (используя данные расчетной работы 2), если нормальным можно считать распределение, имеющее следующие характеристики: асимметрия $|A_S| < a$; эксцесс $|E_к| < e$.

Задача

1. Проанализировать исходные данные. Написать закон распределения отклонения скорости движения.
2. Найти центральные моменты 3-го и 4-го порядка для теоретического распределения скорости движения.
3. Определить величины асимметрии и эксцесса и сделать заключение о нормальности теоретического распределения.
4. Построить графики плотности теоретического и нормального распределения, используя исходные данные и функцию плотности нормального распределения.
5. Определить границы интервала превышения расчетной скорости движения и вероятность попадания случайной величины (скорости движения) в этот интервал (использовать функцию Лапласа Ф(x)).

Недостающие данные принять по табл. 3.1.

Таблица 3.1

Значения показателя *a* (принимать по 4-й цифре шифра) и *e* (принимать по 5-й цифре шифра)

Показатель	Значения для варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	0,80	0,82	0,84	0,86	0,88	0,90	0,91	0,95	0,97	1,0
e	1,8	1,82	1,84	1,86	1,88	1,90	1,91	1,95	1,97	2,0

Функция Лапласа (табл. 3.2) определяется по следующей зависимости:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz, \qquad (3.1)$$

Таблица 3.2

Значения функции Лапласа

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
0,00	0,0000	0,43	0,1664	0,86	0,3051	1,29	0,4015	1,72	0,4573	2,30	0,4893
0,01	0,0040	0,44	0,1700	0,87	0,3078	1,30	0,4032	1,73	0,4582	2,32	0,4898
0,02	0,0080	0,45	0,1736	0,88	0,3106	1,31	0,4049	1,74	0,4591	2,34	0,4904
0,03	0,0120	0,46	0,1772	0,89	0,3133	1,32	0,4066	1,75	0,4599	2,36	0,4909
0,04	0,0160	0,47	0,1808	0,90	0,3159	1,33	0,4082	1,76	0,4608	2,38	0,4913
0,05	0,1990	0,48	0,1844	0,91	0,3186	1,34	0,4099	1,77	0,4616	2,40	0,4918
0,06	0,0239	0,49	0,1879	0,92	0,3212	1,35	0,4115	1,78	0,4625	2,42	0,4922
0,07	0,0279	0,50	0,1915	0,93	0,3238	1,36	0,4131	1,79	0,4633	2,44	0,4927
0,08	0,0319	0,51	0,1950	0,94	0,3264	1,37	0,4147	1,80	0,4641	2,46	0,4931
0,09	0,0359	0,52	0,1985	0,95	0,3289	1,38	0,4162	1,81	0,4649	2,48	0,4934
0,10	0,0398	0,53	0,2019	0,96	0,3315	1,39	0,4177	1,82	0,4656	2,50	0,4938
0,11	0,0438	043	0,2054	0,97	0,3340	1,40	0,4192	1,83	0,4664	2,52	0,4941
0,12	0,0478	0,55	0,9800	0,98	0,3365	1,41	0,4207	1,84	0,4671	2,54	0,4945
0,13	0,1517	0,56	0,2123	0,99	0,3389	1,42	0,4222	1,85	0,4678	2,56	0,4948
0,14	0,0557	0,57	0,2157	1,00	0,3413	1,43	0,4236	1,86	0,4686	2,58	0,4951
0,15	0,0596	0,58	0,2190	1,01	0,3438	1,44	0,4251	1,87	0,4693	2,60	0,4953
0,16	0,0636	0,59	0,2224	1,02	0,3461	1,45	0,4265	1,88	0,4699	2,62	0,4956
0,17	0,0675	0,60	0,2257	1,03	0,3485	1,46	0,4279	1,89	0,4706	2,64	0,4959
0,18	0,0714	0,61	0,2291	1,04	0,3508	1,47	0,4292	1,90	0,4713	2,66	0,4961
0,19	0,0753	0,62	0,2324	1,05	0,3531	1,48	0,4306	1,91	0,4719	2,68	0,4963
0,20	0,0793	0,63	0,2357	1,06	0,3554	1,49	0,4319	1,92	0,4726	2,70	0,4965
0,21	0,0832	0,64	0,2389	1,07	0,3577	1,50	0,4332	1,93	0,4732	2,72	0,4967
0,22	0,0871	0,65	0,2422	1,08	0,3599	1,51	0,4345	1,94	0,4738	2,74	0,4969
0,23	0,0910	0,66	0,2454	1,09	0,3621	1,52	0,4357	1,95	0,4744	2,76	0,4971
0,24	0,0948	0,67	0,2486	1,10	0,3643	1,53	0,4370	1,96	0,4750	2,78	0,4973
0,26	0,1026	0,69	0,2549	1,12	0,3686	1,55	0,4394	1,98	0,4761	2,82	0,4976
0,27	0,1064	0,70	0,2580	1,13	0,3708	1,56	0,4406	1,99	0,4767	2,84	0,4977
0,28	0,1103	0,71	0,2611	1,14	0,3729	1,57	0,4418	2,00	0,4772	2,86	0,4979
0,29	0,1141	0,72	0,2642	1,15	0,3749	1,58	0,4429	2,02	0,4783	2,88	0,4980
0,30	0,1179	0,73	0,2673	1,16	0,3770	1,59	0,4441	2,04	0,4793	2,90	0,4981
0,31	0,1217	0,74	0,2703	1,17	0,3790	1,60	0,4452	2,06	0,4803	2,92	0,4982
0,32	0,1255	0,75	0,2734	1,18	0,3810	1,61	0,4463	2,08	0,4812	2,94	0,4981
0,33	0,1293	0,76	0,2764	1,19	0,3830	1,62	0,4474	2,10	0,4821	2,96	0,4985
0,34	0,1331	0,77	0,2794	1,20	0,3849	1,63	0,4484	2,12	0,4830	2,98	0,4986
0,35	0,1368	0,78	0,2823	1,21	0,3869	1,64	0,4495	2,14	0,4838	3,00	0,49865
0,36	0,1406	0,79	0,2852	1,22	0,3883	1,65	0,4505	2,16	0,4846	3,20	0,49931
0,37	0,1443	0,80	0,2881	1,23	0,3907	1,66	0,4515	2,18	0,4854	3,40	0,49966
0,38	0,1480	0,81	0,2910	1,24	0,3925	1,67	0,4525	2,20	0,4861	3,60	0,499841
0,39	0,1517	0,82	0,2939	1,25	0,3944	1,68	0,4535	2,22	0,4868	3,80	0,499928
0,40	0,1554	0,83	0,2967	1,26	0,3962	1,69	0,4545	2,24	0,4875	4,00	0,499968
0,41	0,1591	0,84	0,2995	1,27	0,3980	1,70	0,4554	2,26	0,4881	4,50	0,499997
0,42	0,1628	0,85	0,3023	1,28	0,3997	1,71	0,4564	2,28	0,4887	5,00	0,499997

Пример

Исходные данные:

v, км/ч	N, авт.	v, км/ч	N, авт.	v, км/ч	N, авт.	v, км/ч	N, авт.	v, км/ч	N, авт.
48	0	56	6	64	75	72	85	80	6
49	1	57	8	65	82	73	80	81	7
50	2	58	10	66	90	74	70	82	5
51	2	59	11	67	99	75	47	83	4
52	3	60	14	68	105	76	25	84	1
53	2	61	19	69	100	77	10	85	2
54	4	62	28	70	98	78	8	86	1
55	6	63	70	71	94	79	6	87	0

$v_{расч}$ = 60 км/ч; a = 0,80; e = 1,8.

Решение

1. Используя данные расчетной работы 2: $a = M(v) = 68{,}48$ км/ч, $\sigma = \sigma(v) = 5{,}11$ км/ч, напишем законы распределения отклонения.

v_i	n_i	p_i	$v_i \cdot p_i$	$v_i - M(v)$	$P_i \cdot (v_i - M(v))^2$	$P_i \cdot (v_i - M(v))^4$	$P_i \cdot (v_i - M(v))^3$
48	0	0,000 00	0,0000	-20,48	0,0000	0,0000	0,0000
49	1	0,000 78	0,0381	-19,48	0,2950	111,9505	-5,7472
50	2	0,001 56	0,0778	-18,48	0,5311	181,3441	-9,8135
51	2	0,001 56	0,0793	-17,48	0,4751	145,1630	-8,3050
52	3	0,002 33	0,1213	-16,48	0,6335	172,0300	-10,4393
53	2	0,001 56	0,0824	-15,48	0,3726	89,2814	-5,7679
54	4	0,003 11	0,1680	-14,48	0,6521	136,7017	-9,4414
55	6	0,004 67	0,2566	-13,48	0,8477	154,0074	-11,4257
56	6	0,004 67	0,2613	-12,48	9,0667	113,1436	-9,0667
57	8	0,006 22	0,3546	-11,48	0,8197	108,0105	-9,4094
58	10	0,007 78	0,4510	-10,48	0,8539	93,7647	-8,9479
59	11	0,008 55	0,5047	-9,48	0,7686	69,0562	-7,2852
60	14	0,010 89	0,6532	-8,48	0,7827	56,2687	-6,6362
61	19	0,014 77	0,9012	-7,48	0,8264	46,2262	-6,1808
62	28	0,021 77	1,3499	-6,48	0,9140	38,3663	-5,9216
63	70	0,054 43	3,4292	-5,48	1,6340	49,0528	-8,9529
64	75	0,058 32	3,7325	4,48	1,1700	23,4718	-5,2404
65	82	0,063 76	4,1446	-3,48	0,7718	9,3410	-2,6850
66	90	0,069 98	4,6190	-2,48	0,4301	2,6431	-1,0662
67	99	0,076 98	5,1579	-1,48	0,1684	0,3684	-0,2491
68	105	0,081 65	5,5521	-0,48	0,0187	0,0043	-0,0090
69	100	0,077 76	5,3655	0,52	0,0211	0,0057	0,0110
70	98	0,076 21	5,3344	1,52	0,1763	0,4078	0,2681
71	94	0,073 09	5,1897	2,52	0,4645	2,9524	1,1711

Окончание таблицы

v_i	n_i	p_i	$v_i \cdot p_i$	$v_i - M(v)$	$P_i \cdot (v_i - M(v))^2$	$P_i \cdot (v_i - M(v))^4$	$P_i \cdot (v_i - M(v))^3$
72	85	0,066 10	4,7589	3,52	0,8194	10,1587	2,8852
73	80	0,062 21	4,5412	4,52	1,2715	25,9887	5,7485
74	70	0,054 43	4,0280	5,52	1,6592	50,5739	9,1603
75	47	0,036 55	2,7411	6,52	1,5541	66,0865	10,1344
76	25	0,019 44	1,4774	7,52	1,0996	62,2014	8,2704
77	10	0,007 78	0,5988	8,52	0,5646	40,9940	4,8109
78	8	0,006 22	0,4852	9,52	0,5639	51,1185	5,3690
79	6	0,004 67	0,3686	10,52	0,5164	57,1660	5,4335
80	6	0,004 67	0,3733	11,52	0,6193	82,1997	7,1348
81	7	0,005 44	0,4409	12,52	0,8534	133,7866	10,6850
82	5	0,003 89	0,3188	13,52	0,7108	129,9462	9,6107
83	4	0,003 11	0,2582	14,52	0,6559	138,2944	9,5238
84	1	0,000 78	0,0653	15,52	0,1873	45,1271	2,9075
85	2	0,001 56	0,1322	16,52	0,4245	115,8601	7,0129
86	1	0,000 78	0,0669	17,52	0,2387	73,2815	4,1825
87	0	0,000 00	0,0000	18,52	0,0000	0,0000	0,0000

Зная, что $\sum N_i = 1286$; p_i = $M(v)$ = 68,48; $D(v)$ = 26,09; $v_{расч}$ = 60; σ = 5,11, найдем центральные моменты 3-го и 4-го порядка по формулам

$$\mu_3 = M\left[((x - M(x))^3\right] = \sum P_i \left(v_i - M(v)\right)^3, \tag{3.2}$$

$$\mu_3 = -28,27.$$

$$\mu_4 = M\left[((x - M(x))^4\right] = \sum P_i \left(v_i - M(v)\right)^4, \tag{3.3}$$

$$\mu_4 = 2686,35.$$

Далее определяем величины асимметрии и эксцесса по формулам

$$A_x = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \tag{3.4}$$

$$A_x = \frac{-28,27}{5,11^3} = -0,21.$$

$$E_x = \left(\frac{\mu_4}{\sigma^4}\right) - 3, \tag{3.5}$$

$$E_x = \left(\frac{2686,35}{5,11^4}\right) - 3 = 0,94.$$

Поскольку асимметрия $|A_S|$ = 0,21 < a = 0,8 и эксцесс $|E_к|$ = 0,95 < e = = 1,8, распределение можно считать нормальным.

2. Имея значение скорости движения автомобилей по участку автомобильной дороги v_i и среднее квадратическое отклонение σ, построим

график плотности теоретического распределения, используя уравнение плотности нормального распределения

$$p_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(v_i - v_0)^2/(2\cdot\sigma)^2}, \qquad (3.6)$$

для v_i = 70, $p_{(70)} = \dfrac{2,7183^{-(70-68,48)^2/(2\cdot 5,11)^2}}{5,11\sqrt{2\cdot 3,1416}} = 0,0764.$

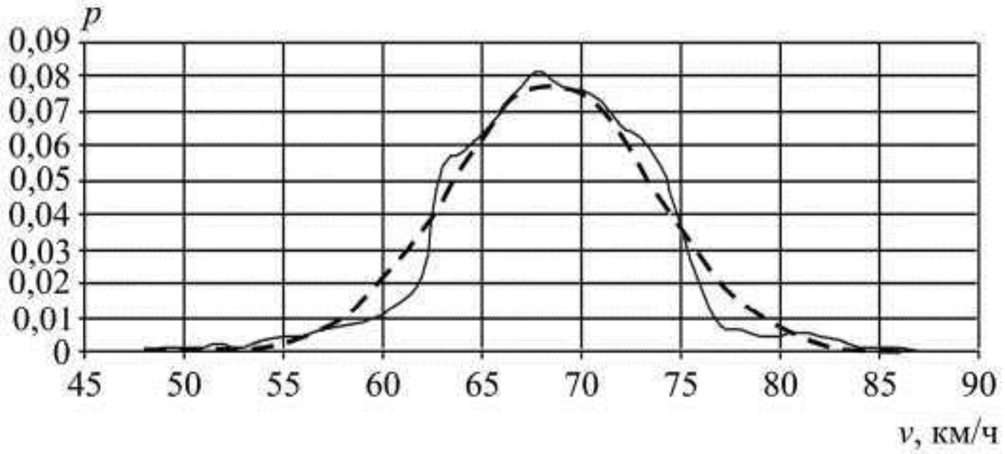

Рис. 3.1. График плотности: - - - нормального распределения;
—— теоретического распределения

3. Определяем границы интервала превышения расчетной скорости движения. Расчетная скорость движения 60 км/ч, максимальная зафиксированная – 86 км/ч, следовательно, границы интервала a = 60, β = 86.

4. Находим вероятность попадания случайной величины (скорости движения) в этот интервал по формуле

$$P(\alpha < v < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (3.7)$$

$$P\left(60 < v < 86\right) = \Phi\left(\frac{86 - 68,48}{5,11}\right) - \Phi\left(\frac{60 - 68,48}{5,11}\right) = \Phi\ (3,43) + \Phi\ (1,66)\ .$$

Подставляя значения из табл. 3.2 (значения функции Лапласа), получим (в долях единиц): 0,4997 + 0,4515 = 0, 9512, или 95,12 %.

Вывод: на обследуемом участке автомобильной дороги 95,12 % участников дорожного движения превышают расчетную скорость движения, что может привести к возникновению конфликтных ситуаций и увеличению числа дорожно-транспортных происшествий. Следовательно, данный участок дороги является небезопасным с позиции обеспечения безопасности дорожного движения и требует повышенного внимания сотрудников ГИБДД.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРНОГО КОРИДОРА ВАРЬИРОВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА СЦЕПЛЕНИЯ НА УЧАСТКЕ ДОРОГИ ПРИ ОЦЕНКЕ СОСТОЯНИЯ ПОКРЫТИЯ

Устойчивость и управляемость автомобиля, его тяговые свойства и тормозные характеристики в значительной степени определяются сцеплением шины с дорогой [1].

Коэффициент сцепления шины с дорогой оценивается в продольном (в плоскости вращения колеса) и боковом (поперечном) направлениях.

В продольном направлении коэффициент сцепления определяется как отношение максимальной тяговой (или тормозной) силы, при которой наступает буксование (юз) колеса, к радиальной нагрузке на шину.

Величина коэффициента сцепления в основном определяется конструкцией шины и типом рисунка протектора, составом протекторных резин, а также характером, качеством и состоянием дорожного покрытия.

Влияние типа рисунка протектора на величину коэффициента сцепления на дорогах с сухим твердым покрытием (асфальт, бетон) менее значительно, чем с влажным. На влажном же покрытии характер рисунка протектора имеет большое значение. Это объясняется тем, что при движении автомобиля по твердой мокрой дороге между элементами рисунка протектора и дорогой появляется пленка воды. Если элементы рисунка протектора имеют сравнительно небольшие размеры и рассечены щелевидными (дренажными) прорезями, то даже при высокой скорости качения вода выдавливается из-под выступов протектора в стороны и дренажные щели. Благодаря этому коэффициент сцепления повышается. В том случае, когда вода не успевает выдавливаться из-под шашек протектора, между элементами рисунка и полотном дороги остается тонкая пленка воды, которая резко снижает коэффициент сцепления. При этом значительно ухудшается управляемость и устойчивость автомобиля, появляется опасность заноса.

Существенно снижается коэффициент сцепления при качении шин по дорогам, покрытым тонким слоем грязи, а также на заснеженных дорогах и в гололед.

В начальной стадии эксплуатации дороги коэффициент φ сцепления на всем протяжении автомагистрали при измерениях со скоростью V = 60 км/ч на мокрых покрытиях должен быть $\varphi \geq 0{,}45$, а на участках со сложными условиями движения (переходно-скоростные полосы, рампы пересечений в разных уровнях, участки разделения и слияния потоков) – $\varphi \geq 0{,}5$. При этом снижение коэффициента сцепления с увеличением скорости с 60 до 80 км/ч не должно превышать 0,05 на основном протяжении автомобильной дороги и 0,10 на участках со сложными условиями движения. Коэффициенты сцепления в процессе эксплуатации автомобильной дороги (включая покрытия остановочных полос) должны быть $\varphi \geq 0{,}4$ при измерениях на скорости V = 60 км/ч и мокром покрытии. Вне зависимости от числа полос движения и средних скоростей транспортных потоков сцепные качества покрытия в поперечном профиле должны быть одинаковыми [1]. Сцепные качества покрытий в основном определяются шероховатостью, которая должна обеспечивать высокие коэффициенты сцепления φ в продолжение всего срока службы покрытия, быстрый сток воды с проезжей части, минимальные изменения коэффициента φ сцепления по сезонам года, по ширине проезжей части, наименьший износ протектора шин и оптимальный уровень шума. Этому комплексу требований в наибольшей степени удовлетворяют покрытия, имеющие среднюю высоту выступов ≥ 1,5 мм.

Задача

По результатам независимых испытаний коэффициента сцепления покрытия на автомобильной дороге определить характерный для данной автомобильной дороги коридор варьирования коэффициента сцепления (при функции доверительной вероятности t = 1), если получено следующее статистическое распределение (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Статистическое распределение
(при функции доверительной вероятности t = 1)

№ п/п	Протяженность участка, м	Коэффициент сцепления	№ п/п	Протяженность участка, м	Коэффициент сцепления
1	16 872	0,40	12	3804	0,28
2	1958	0,39	13	4115	0,27
3	1771	0,38	14	13 316	0,26
4	1758	0,37	15	15 336	0,25
5	272	0,35	16	17 255	0,24
6	1444	0,34	17	5608	0,23
7	2807	0,33	18	1441	0,22
8	11751	0,32	19	276	0,21
9	14 074	0,31	20	311	0,2
10	29 136	0,30	21	331	0,18
11	10 021	0,29	22	298	0,17

Измерение коэффициента сцепления не производилось на участках ремонта покрытия. Последовательность участков ремонта (табл. 4.2) определить согласно 4-й цифре шифра.

Таблица 4.2

Последовательность участков ремонта

Последовательность ремонтируемых участков	Номер ремонтируемого участка для варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2
2	5	6	7	5	6	7	5	6	7	5
3	11	12	13	11	12	13	11	12	13	11
4	17	18	19	17	18	19	17	18	19	17
5	20	21	22	20	21	22	20	21	22	20

Задание

1. На основе анализа исходных данных (табл. 4.3) исключить из выборки участки ремонта и оценить объем выборки.

2. Определить выборочную среднюю.

3. Определить величину выборочной дисперсии и стандарта.

4. Определить коридор варьирования случайной величины.

5. Построить полигон относительных частот.

Пример

Исходные данные:

№ п/п	Протяженность участка, м	Коэффициент сцепления		№ п/п	Протяженность участка, м	Коэффициент сцепления
1	16 872	0,40		12	3804	0,28
2	1958	0,39		13	4115	0,27
3	***1771***	***0,38***		14	13 316	0,26
4	1758	0,37		15	15 336	0,25
5	272	0,35		16	17 255	0,24
6	1444	0,34		17	5608	0,23
7	***2807***	***0,33***		***18***	***1441***	***0,22***
8	11751	0,32		19	276	0,21
9	14 074	0,31		20	311	0,2
10	29 136	0,30		21	331	0,18
11	***10 021***	***0,29***		***22***	***298***	***0,17***

Ремонт производился на участках № 3, 7,11, 18 и 22.

Решение

1. Объем выборки определяется суммой частот (для каждого метра): n = 137617 м.

2. Поскольку варианты повторяются на определенном протяжении дороги, определяем: выборочную среднюю (формула (4.1)); величину выборочной дисперсии (формула (4.2)) и стандарт среднего квадратического отклонения (формула (4.3)) [3]:

$$\overline{\varphi_в} = \frac{\left(\varphi_1 l_1 + \varphi_2 l_2 + ... + \varphi_i l_i\right)}{L}, \tag{4.1}$$

где φ_i – коэффициент сцепления на i-м участке;

l_i – длина данного участка, м;

L – общая протяженность исследуемых участков, м.

$$\overline{\varphi_в} = \frac{\left(0,4 \cdot 16872 + 0,39 \cdot 1958 + ... + 0,17 \cdot 298\right)}{153955} = 0,2983.$$

$$D_в = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} l_i \left(\phi_i - \overline{\phi_в}\right)^2\right)}{L}, \tag{4.2}$$

$$D_в = \frac{\left(16872\,(0,4-0,2983)^2+1958\,(0,39-0,2983)^2+\ldots+298\,(0,17-0,2983)^2\right)}{15395} = 0,0026,$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}\,, \qquad (4.3)$$

$$\sigma_в = \sqrt{0,0026} = 0,0510.$$

3. Границы коридора варьирования коэффициента сцепления определяем по зависимостям

$$\phi_{\max} = \overline{\phi_в} + t\sigma_в, \qquad (4.4)$$

$$\phi_{\min} = \overline{\phi_в} - t\sigma_в, \qquad (4.5)$$

$$\varphi_{\max} = 0,2983 + 0,0510 = 0,3493,\quad \varphi_{\min} = 0,2983 - 0,0510 = 0,2473.$$

4. Определяем относительные частоты статистического распределения.

№ п/п	Протяженность участка	Коэффициент сцепления	$W_i = l_i/L$
1	16 872	0,40	0,109591
2	1958	0,39	0,012718
3			
4	1758	0,37	0,011419
5	272	0,35	0,001767
6	1444	0,34	0,009379
7			
8	11751	0,32	0,076328
9	14074	0,31	0,091416
10	29136	0,30	0,211698
11			
12	3804	0,28	0,024709
13	4115	0,27	0,026729
14	13 316	0,26	0,086493
…….	………	……..	……………

5. На основании относительных частот статистического распределения строим полигон частот (рис. 4.1).

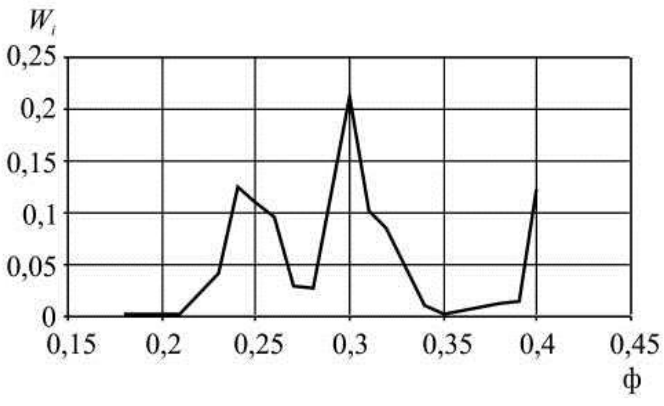

Рис. 4.1. График статистического распределения частот (полигон частот)

На основании графика статистического распределения частот (полигона частот) средний коэффициент сцепления на рассматриваемых участках равен 0,3, что соответствует асфальтобетону грязному (см. табл. 4.3).

Таблица 4.3

Значения коэффициента сцепления в зависимости от состояния и вида дорожного покрытия

Вид дорожного покрытия	Состояние покрытия	Коэффициент сцепления φ
Асфальт, бетон	Сухой Мокрый Грязный	0,7–0,8 0,5–0,6 0,25–0,45
Булыжник, брусчатка	Сухие Мокрые	0,6–0,7 0,4–0,5
Грунтовая дорога	Сухая Мокрая Грязная	0,5–0,6 0,2–0,4 0,15–0,30
Песок	Влажный Сухой	0,4–0,5 0,2–0,3
Асфальт, бетон	Обледенелые	0,09–0,10
Укатанный снег	Обледенелый	0,12–0,15
	Без ледяной корки	0,22–0,25
	Обледенелый, после россыпи песка	0,17–0,26
	Без ледяной корки, после россыпи песка	0,30–0,38

Вывод: на данном участке дороги необходимо провести работы по очистке покрытия от загрязнения с использованием подметально-уборочных и поливомоечных машин.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ АБЗ МЕТОДОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Асфальтобетон – это искусственный строительный материал, полученный в результате уплотнения рационально подобранной и специально приготовленной смеси (асфальтобетонной смеси) минерального материала (щебня, песка, минерального порошка) и битума.

Смесь асфальтобетонная состоит из оптимально подобранных:

– минеральных материалов: щебня (либо гравия), песка (природного или дробленого) с тонкодисперсным минеральным материалом (либо без него);

– органического вяжущего материала: битума (раньше также использовался деготь, но был запрещен к применению в черте города, а позже и вовсе исключен из производства).

Составляющие асфальтобетонной смеси перемешиваются в нагретом состоянии.

Асфальтобетонный завод (АБЗ) – это производственное предприятие (комплекс машин, зданий и сооружений), предназначенное для изготовления асфальтобетонных и битумоминеральных смесей, используемых при строительстве и ремонте асфальтового покрытия. На АБЗ осуществляются следующие технологические операции: прием и хранение материалов для приготовления асфальтобетонной смеси; дробление (при необходимости) и сортировка щебня и песка; дозировка и подача в бункер материалов (а для минеральных материалов нагрев и сушка); складирование, хранение (кратковременное) и отгрузка готовой продукции.

В качестве примера рассмотрим АБЗ, который может производить два типа асфальтобетонной смеси: крупнозернистый и мелкозернистый, располагая для их приготовления ограниченными ресурсами: щебнем 5–20 (a_1), щебнем 20–40 (a_2), песком (a_3), минеральным порошком (a_4) и битумом (a_5), а также оборудованием (a_6). Производительность оборудования определяется его эффективностью (машино-часами работы смесительной установки).

Для приготовления 1 т асфальтобетонной смеси требуется определенный объем материалов (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Исходные данные для приготовления 1 т асфальтобетонной смеси

Смесь	Щебень 5–20, т	Щебень 20–40, т	Песок, т	МП, т	Битум, т	$Н_{вр}$
Мелкозернистая	0,6	–	0,3	0,1	0,08	0,03
Крупнозернистая	0,5	0,2	0,3	–	0,07	0,02

Прибыль от реализации 1 т смеси составляет для мелкозернистой 2000 руб., для крупнозернистой – 1500 руб.

Требуется определить, какое количество смеси каждого вида должен производить АБЗ, чтобы достичь максимальной прибыли.

Недостающие исходные данные для расчета принимать по 5-й цифре шифра (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Исходные данные для расчета

Показатель	Значение показателей для цифры шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_1	18000	18200	18400	18600	18200	19000	19300	19600	19900	20200
a_2	2000	2250	250	2750	3000	3100	3200	3300	3400	3500
a_3	8700	8800	8900	9000	9100	9200	9300	9400	9500	9600
a_4	700	900	1100	1300	1500	1700	1900	2100	2300	2500
a_5	1250	1300	1350	1400	1450	1500	1550	1600	1650	1700
a_6	800	850	900	950	1000	1050	1100	1150	1200	1250

Задача

1. Проанализировать исходные данные и составить таблицу затрат ресурсов на приготовление смесей.

2. Составить систему неравенств-ограничений. Найти уравнение целевой функции (Z).

3. В системе координат (x_1, x_2) построить область допустимых решений системы неравенств, линию уровня, вектор направления и опорную линию.

4. Определить точку или линию максимума целевой функции.

5. Найти координаты этой точки и максимум целевой функции.

Пример

Рассмотрим геометрическое решение задачи на примере предприятия, которое может производить два вида изделий *A* и *B,* располагая ограниченными ресурсами: чугуном и сталью в количествах 350 и 392 кг соответственно и оборудованием в количестве 408 станко-часов (табл. 5.3).

Таблица 5.3

Объем ресурсов и затраты на одно изделие

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Затраты на одно изделие	
		A	*B*
Чугун	350 кг	14	5
Сталь	392 кг	14	8
Оборудование	408 станко–часов	6	12
Прибыль в руб.	–	10	5

Искомые неизвестные x_1 и x_2 обозначают число изделий *A* и *B*, которые должно производить предприятие:

$$\begin{cases} 14x_1 + 5x_2 \le 350; \\ 14x_1 + 8x_2 \le 392; \\ 6x_1 + 12x_2 \le 408. \end{cases} \tag{5.1}$$

Необходимо найти такое решение, для которого функция $Z = 10x_1 + 5x_2$ достигает наибольшего значения.

Построим область допустимых решений (рис. 5.1), соответствующую системе неравенств (5.1). Для этого, заменив каждое из неравенств равенством, получим следующие выражения:

$$14x_1 + 5x_2 = 350 \text{ (первая прямая);}$$
$$14x_1 + 8x_2 = 392 \text{ (вторая прямая);}$$
$$6x_1 + 12x_2 = 408 \text{ (третья прямая).}$$

Строим граничную линию, учитывая, что $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. В результате получаем заштрихованную часть плоскости, образующую многоугольник решений *OABCD* (см. рис. 5.1).

После получения многоугольника решений строим линию уровня $10x_1 + 5x_2 = 0$ и вектор (10; 5), которые взаимно перпендикулярны. Нетрудно показать, что вектор дает направление наибольшего возрастания линейной функции.

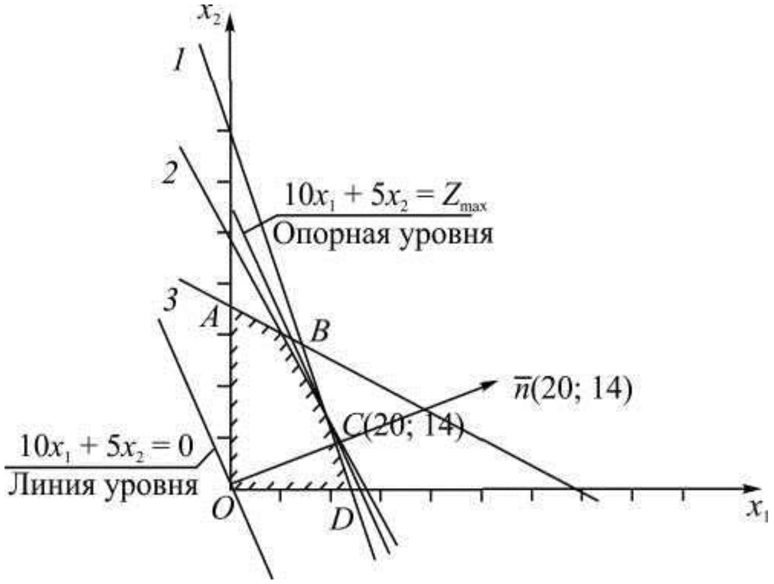

Рис. 5.1. Область допустимых решений для определения максимальной прибыли

Действительно,

$$Z_O = 10x_{1O} + 5x_{2O} = 10 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0;$$
$$Z_A = 10x_{1A} + 5x_{2A} = 10 \cdot 0 + 5 \cdot 34 = 170;$$
$$Z_D = 10x_{1D} + 5x_{2D} = 10 \cdot 25 + 5 \cdot 0 = 250 \text{ и т.д.}$$

Из всех линий уровня выбираем две, из которых одна проходит через точку *O* и дает минимальное значение функции *Z*, а другая проходит через точку *C*, и функция *Z* для нее принимает максимальное значение. Эти линии уровня называются опорными.

Точка *C* образована 1-й и 2-й прямыми. Следовательно, решая систему уравнений

$$\begin{cases} 14x_1 + 5x_2 = 350; \\ 14x_1 + 8x_2 = 392, \end{cases}$$

найдем координаты точки *C*:

$x_1 = 20$; $x_2 = 14$, при этом $Z_{\max} = 10 \cdot 20 + 5 \cdot 14 = 270$ руб.

Вывод: максимальная прибыль в 270 руб. будет получена, если предприятие произведет 20 изделий вида *A* и 14 изделий вида *B*.

6. ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАНСПОРТНЫХ РАСХОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Под названием транспортная задача объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Данные задачи относятся к задачам линейного программирования и могут быть решены известным симплексным методом. Однако обычная транспортная задача имеет большое число переменных и решение ее симплексным методом громоздко. С другой стороны, матрица системы ограничений транспортной задачи весьма своеобразна, поэтому для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить последовательность опорных решений, которая завершается оптимальным решением.

Рассмотрим решение транспортной задачи с позиции анализа условий движения по участку автомобильной дороги.

Дано: продольный профиль автомобильной дороги протяженностью $L = m + n$ (км) состоит из m выемок и n насыпей, каждая по 1 км. Геометрические объемы насыпей составляют H_1, H_2, …, H_n, выемок – B_1, B_2,…, B_n. Грунт требуется перевезти из выемок в насыпи (без учета коэффициента относительного уплотнения), причем затраты на все перевозки (м^3-км) должны быть минимальными. Затраты на перевозки C (руб.) грубо принимать равными половине среднего расстояния транспортировки грунта (км).

Необходимо найти минимальные транспортные расходы.

В случае открытой транспортной задачи предусмотреть карьер грунта на ПК 0+00 либо кавальер ($C = 0$).

Неизвестные данные принимать по пятой цифре шифра (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Недостающие исходные данные

Показатель	Значение цифры шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	3	4	5	3	4	5	3	4	5	3
n	3	4	5	3	4	5	3	4	5	3
H_1 (тыс. м^3)	21	25	32	35	43	45	54	55	66	65
H_2 (тыс. м^3)	25	31	35	42	45	53	55	64	65	75
H_3 (тыс. м^3)	32	35	43	45	54	55	65	65	76	75
H_4 (тыс. м^3)	35	42	465	53	55	64	65	75	75	86
H_5 (тыс. м^3)	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
B_1 (тыс. м^3)	15	23	25	34	325	45	45	56	55	67
B_2 (тыс. м^3)	23	25	34	325	45	45	56	55	67	65
B_3 (тыс. м^3)	25	33	35	44	45	55	55	66	65	77
B_4 (тыс. м^3)	34	35	435	435	56	55	67	65	78	75
B_5 (тыс. м^3)	35	44	45	55	55	66	65	77	75	88

Схема продольного профиля зависит от значений m и n: если $m \geq n$, то B_1, H_1, B_2, H_2, B_3, ….; если $m < n$, то H_1, B_2, H_2, B_2, H_3, ….

Задача

1. Проанализировать исходные данные. Проверить открытость/закрытость модели транспортной задачи.
2. Записать условие задачи в виде матрицы планирования.
3. Составить исходное опорное решение. Проверить правильность составления.
4. Проверить оптимальность полученного плана перевозок методом потенциалов.
5. При необходимости провести перепланировку исходного плана.
6. При необходимости повторить операции 4 и 5 до получения оптимального плана перевозок.
7. Определить минимальные транспортные расходы.

Пример

Исходные данные:

$n = 5$;	$m = 4$
u_1 (тыс. м^3) = 35	v_1 (тыс. м^3) = 25
u_2 (тыс. м^3) = 45	v_2 (тыс. м^3) = 35
u_3 (тыс. м^3) = 55	v_3 (тыс. м^3) = 45
u_4 (тыс. м^3) = 65	v_4 (тыс. м^3) = 55
u_5 (тыс. м^3) = 45	

Баланс земляных масс:

$\sum V_{выемок} = 35 + 45 + 55 + 65 + 45 = 245$ тыс. м^3;

$\sum V_{насыпей} = 25 + 35 + 45 + 55 = 160$ тыс. м^3.

Требуется разработка грунтового карьера мощностью 245 – 160 = = 85 тыс. м^3. Транспортная задача носит открытый характер.

Поскольку $m < n$, схема продольного профиля примет вид:

Карьер	u_1	v_2	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4	u_5
85	35	25	45	35	55	45	65	55	45

Составляем матрицу планирования и исходное опорное решение:

	u_1	–0,5	u_2	0,5	u_3	1,5	u_4	2,5	u_5	2,5	
v_1		0,5		0,5	7	1,5		2,5		3,5	25
0	$\Delta C =$	1,0	$\Delta C =$	0	25	0	$\Delta C =$	0	$\Delta C =$	1,0	
v_2		1,5		0,5	6	0,5	5	1,5		2,5	35
–1,0	$\Delta C =$	3,0	$\Delta C =$	1,0	25	0	10	0	$\Delta C =$	1,0	
v_3		2,5		1,5		0,5	4	0,5		1,5	45
–2,0	$\Delta C =$	5,0	$\Delta C =$	3,0	$\Delta C =$	1,0	45	0	$\Delta C =$	1,0	
v_4		3,5		2,5		1,5	3	0,5	2	0,5	55
–2,0	$\Delta C =$	6,0	$\Delta C =$	4,0	$\Delta C =$	2,0	10	0	45	0	
$v_{карьер}$	1	0,25	9	1,25	8	2,25		3,25		4,25	85
0,75	35	0	45	0	5	0	$\Delta C =$	0	$\Delta C =$	1,0	
	35		45		55		65		45		

Всего должно быть заполненных клеток: $N = n + m = 5 + 4 = 9$, заполнено – 9 ($u_1 = 1$; $u_2 = 1$; $u_3 = 3$; $u_4 = 3$; $u_5 = 1$).

Проверка правильности построения по горизонтали и вертикали:

$\Sigma = 25 = 25$;
$\Sigma = 25 + 10 = 35$;
$\Sigma = 45 = 45$;
$\Sigma = 10 + 45 = 55$;
$\Sigma = 35 + 45 + 5 = 85$;
$\Sigma = 35 = 35$;
$\Sigma = 45 = 45$;
$\Sigma = 25 + 25 + 5 = 55$;
$\Sigma = 10 + 45 + 10 = 65$;
$\Sigma = 45 = 45$ – сходятся.

Определение потенциалов на 1-м этапе (см. матрицу планирования).

Назначим $V_1 = 0$, тогда для остальных клеток:

– для занятых клеток $C_y – (U_i + V_j) = 0$;

– для свободных: $\Delta C = C_y – (U_i + V_j)$; если $\Delta C < 0$, то план не оптимальный.

Поскольку $\Delta C < 0$ отсутствуют, то план можно считать оптимальным и, следовательно, можно определить транспортные расходы.

Транспортные расходы:

$$Z_{\min} = 0{,}25\cdot 35 + 1{,}25\cdot 45 + 1{,}5\cdot 25 + 0{,}5\cdot 25 + 2{,}25\cdot 5 + 1{,}5\cdot 35 + 0{,}5\cdot 20 + 0{,}5\cdot 10 + \\ + 0{,}5\cdot 45 = 216{,}25.$$

В случае, если исходный план неоптимален ($\Delta C < 0$), матрица примет вид:

	u_1	–0,5	u_2	0,5	u_3	1,5	u_4	1,5	u_5	1,5	
v_1		0,5		0,5		1,5		2,5		3,5	25
0	ΔC =	1,0	ΔC =	0	25	0	ΔC =	1,0	ΔC =	2,0	
v_2		1,5		0,5		0,5		1,5		2,5	35
–1,0	ΔC =	2,0	ΔC =	0	ΔC =	–1,0	35	0	ΔC =	1,0	
v_3		2,5		1,5		0,5		0,5		1,5	45
–2,0	ΔC =	4,0	ΔC =	2,0	25	0	20	0	ΔC =	1,0	
v_4		3,5		2,5		1,5		0,5		0,5	55
–2,0	ΔC =	5,0	ΔC =	3,0	ΔC =	1,0	10	0	45	0	
$v_{карьер}$		0,25		1,25		2,25		3,25		4,25	85
0,75	35	0	45	0	5	0	ΔC =	1,0	ΔC =	2,0	
	35		45		55		65		45		

В этом случае необходимо оптимизировать исходное решение. Для этого выбираем контур, одной из вершин которого является клетка с наименьшей величиной ΔC.

+ 0	–	– 35
– 25	–	+ 20

25	–	10
0	–	45

Среди отрицательных вершин выбираем наименьшее значение (25), прибавляем его к положительным вершинам и отнимаем от отрицательных вершин. Получим новый контур перевозок с одной свободной вершиной и ненарушенным балансом перевозок.

Далее строим новый план перевозок.

Вывод: при оптимальном плане перевозок (см. матрицу планирования и исходное опорное решение) минимальные транспортные расходы будут достигнуты при перемещении 216,25 тыс.м^3.

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТРАНСПОРТНЫХ ПЕРЕВОЗОК РЕШЕНИЕМ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Способ решения сложных задач путем разбиения их на более простые подзадачи в теории управления и теории вычислительных систем называют динамическим программированием [5]. Данный метод применим к задачам с оптимальной подструктурой, выглядящим как набор перекрывающихся подзадач, сложность которых чуть меньше исходной. В этом случае время вычислений по сравнению с «наивными» методами можно значительно сократить.

Ключевая идея в динамическом программировании достаточно проста. Как правило, чтобы решить поставленную задачу, требуется решить отдельные части задачи (подзадачи), после чего объединить решения подзадач в одно общее решение. Часто многие из этих подзадач одинаковы. Подход динамического программирования состоит в том, чтобы решить каждую подзадачу только один раз, сократив тем самым количество вычислений. Это особенно полезно в случаях, когда число повторяющихся подзадач экспоненциально велико [6].

Существует два метода динамического программирования: сверху – простое запоминание результатов решения тех подзадач, которые могут повторно встретиться в дальнейшем, и снизу – переформулирование сложной задачи в виде рекурсивной (обращающийся в своем определении к самой себе) последовательности более простых подзадач [7].

В нашем случае мы имеем автомобильную дорогу, построенную к началу текущего десятилетия, т.е. данную дорогу можно отнести к новой.

Зависимость эффективности перевозок по данной дороге от времени ее использования, а также зависимость затрат на содержание и текущий ремонт покрытия при различном времени ее использования приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Зависимость затрат на содержание и текущий ремонт покрытия при различном времени его использования

Показатель	Время t, в течение которого эксплуатируется дорога, лет										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Эффективность перевозок $R(t)$ в стоимостном выражении	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
Ежегодные затраты $Z(t)$, связанные с содержанием и ремонтом дороги	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}

Неизвестные данные принимать по пятой цифре шифра (табл. 7.2).

Таблица 7.2

Недостающие исходные данные

Номер цифры	Показатель	Значение цифры шифра									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	r_0 (тыс. руб.)	150		149		148		148		147	
2	r_1 (тыс. руб.)	146		146		145		144		144	
3	r_2 (тыс. руб.)	143		142		142		141		140	
4	r_3 (тыс. руб.)	140		139		138		138		137	
5	r_4 (тыс. руб.)	136		136		135		135		134	
6	r_5 (тыс. руб.)	133		133		132		131		131	
1	r_6 (тыс. руб.)	130		129		129		128		127	
2	r_7 (тыс. руб.)	127		126		125		125		124	
3	r_8 (тыс. руб.)	123		123		122		121		121	
4	r_9 (тыс. руб.)	120		119		119		118		117	
5	r_{10} (тыс. руб.)	117		116		115		115		114	
6	z_{10} (тыс. руб.)	50	49		49		49		49		48
1	z_9 (тыс. руб.)	48	48		48		48		47		47
2	z_8 (тыс. руб.)	47	47		47		46		46		46
3	z_7 (тыс. руб.)	46	46		45		45		45		45
4	z_6 (тыс. руб.)	45	44		44		44		44		43
5	z_5 (тыс. руб.)	43	43		43		43		42		42
6	z_4 (тыс. руб.)	42	42		42		41		41		41
1	z_3 (тыс. руб.)	41	41		40		40		40		40
2	z_2 (тыс. руб.)	40	39		39		39		39		38
3	z_1 (тыс. руб.)	38	38		38		38		37		37
4	z_0 (тыс. руб.)	37	37		37		36		36		36
5	Z (тыс. руб.)	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50

Задача

1. Проанализировать исходные данные. Составить общую схему возможных состояний системы и управлений за 10 лет.

2. Последовательно от 10-го года к 1-му найти условно-оптимальное решение и соответствующие значения функции максимального дохода для каждого из состояний системы, используя уравнение Беллмана. Результаты свести в таблицу.

3. Проанализировать полученные результаты от 1-го к 10-му году и составить оптимальный план капитальных ремонтов покрытия автомобильной дороги на 10 лет. Результаты свести в таблицу.

4. Определить максимальную эффективность перевозок по данной автомобильной дороге.

Пример

Исходные данные:

r_0 (тыс. руб) = 150	z_0 (тыс. руб) = 37
r_1 (тыс. руб) = 146	z_1 (тыс. руб) = 38
r_2 (тыс. руб) = 142	z_2 (тыс. руб) = 39
r_3 (тыс. руб) = 138	z_3 (тыс. руб) = 41
r_4 (тыс. руб) = 135	z_4 (тыс. руб) = 41
r_5 (тыс. руб) = 131	z_5 (тыс. руб) = 43
r_6 (тыс. руб) = 130	z_6 (тыс. руб) = 44
r_7 (тыс. руб) = 126	z_7 (тыс. руб) = 45
r_8 (тыс. руб) = 123	z_8 (тыс. руб) = 47
r_9 (тыс. руб) = 119	z_9 (тыс. руб) = 48
r_{10} (тыс. руб) = 115	z_{10} (тыс. руб) = 49
	Z = 42

Составляем общую схему возможных состояний системы и управлений за 10 лет (рис. 7.1).

Составляем таблицу зависимости эффективности перевозок и затрат на ремонт и содержание от времени (табл. 7.3).

Таблица 7.3

Эффективность перевозок и ежегодные затраты в зависимости от времени, в течение которого эксплуатируется дорога

Показатель	Время t, в течение которого эксплуатируется дорога, лет										
	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Эффективность перевозок $R(t)$ в стоимостном выражении, тыс. руб.	150	146	142	138	135	131	130	126	123	119	115
Ежегодные затраты $Z(t)$, связанные с содержанием и ремонтом дороги, тыс. руб.	37	38	39	41	41	43	44	45	47	48	49

Поскольку к началу срока службы имеется новое покрытие (τ([1]) = 0), возраст покрытия к началу 10-го сезона может составлять 1, 2, …, 10 лет (см. рис. 7.1). Поэтому допустимые состояния системы на данный период таковы: $\tau_1^{(10)} = 1$, $\tau_2^{(10)} = 2$, …, $\tau_9^{(10)} = 9$. Для каждого из этих состояний найдем условно-оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_{10}(\tau^{(10)})$.

Из уравнения Беллмана и соотношения $F_{11}(\tau^{(11)}) = 0$ следует:

$$F_{10}(\tau^{(10)}) = \begin{cases} R\left(\tau^{(10)}\right) - Z\left(\tau^{(10)}\right) \\ R(0) - Z(0) - 110 \end{cases}, \tag{7.1}$$

Подставляя в полученную формулу вместо τ([10]) его значения и учитывая данные табл. 7.3, находим:

$$F_{10}(1) = \max \begin{Bmatrix} R(1) - Z(1) \\ R(0) - Z(0) - 42 \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 146 - 38 \\ 150 - 37 - 42 \end{Bmatrix} = 108 \text{ при } U = C;$$

$$F_{10}(2) = \max \begin{Bmatrix} R(2) - Z(2) \\ R(0) - Z(0) - 42 \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 142 - 39 \\ 150 - 37 - 42 \end{Bmatrix} = 103 \text{ при } U = C;$$

$$F_{10}(3) = \max \begin{Bmatrix} R(3) - Z(3) \\ R(0) - Z(0) - 42 \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 138 - 41 \\ 150 - 37 - 42 \end{Bmatrix} = 97 \text{ при } U = C;$$

$$F_{10}(4) = \max \begin{Bmatrix} R(4) - Z(4) \\ R(0) - Z(0) - 42 \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 135 - 41 \\ 150 - 37 - 42 \end{Bmatrix} = 94 \text{ при } U = C;$$

$$F_{10}(5) = \max \begin{Bmatrix} R(5) - Z(5) \\ R(0) - Z(0) - 42 \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 131 - 43 \\ 150 - 37 - 42 \end{Bmatrix} = 88 \text{ при } U = C;$$

$$F_{10}(6) = \max \begin{Bmatrix} R(6) - Z(6) \\ R(0) - Z(0) - 42 \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 130 - 44 \\ 150 - 37 - 42 \end{Bmatrix} = 86 \text{ при } U = C;$$

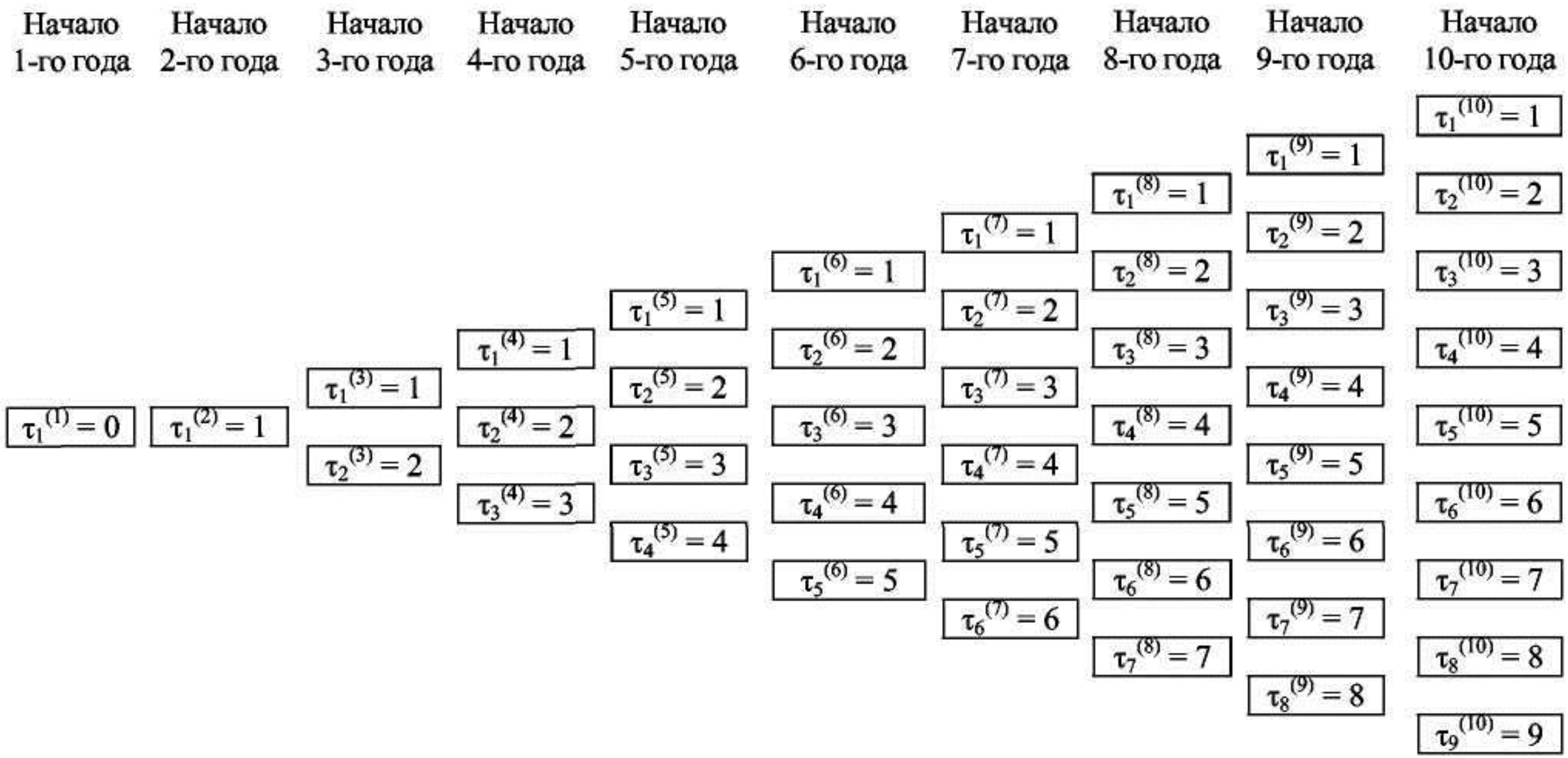

Рис. 7.1. Общая схема возможных состояний системы и управлений за 10 лет

$$F_{10}(7)=\max\begin{Bmatrix}R(7)-Z(7)\\R(0)-Z(0)-42\end{Bmatrix}=$$

$$=\max\begin{Bmatrix}126-45\\150-37-42\end{Bmatrix}=81\quad\text{при } U=C;$$

$$F_{10}(8)=\max\begin{Bmatrix}R(8)-Z(8)\\R(0)-Z(0)-42\end{Bmatrix}=$$

$$=\max\begin{Bmatrix}123-47\\150-37-42\end{Bmatrix}=76\quad\text{при } U=C;$$

$$F_{10}(9)=\max\begin{Bmatrix}R(9)-Z(9)\\R(0)-Z(0)-42\end{Bmatrix}=$$

$$=\max\begin{Bmatrix}119-48\\150-37-42\end{Bmatrix}=71\quad\text{при } U=C.$$

Полученные результаты вычислений сведем в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Результаты расчета

Начало 10-го сезона		
Возраст покрытия $\tau^{(10)}$, лет	Значения функции дохода $F(10)$, тыс. руб.	Условно-оптимальное решение
1	108	С
2	103	С
3	97	С
4	94	С
5	88	С
6	86	С
7	81	С
8	76	С
9	71	С* или З*

* С – сохранение покрытия; З – замена покрытия.

Рассмотрим теперь возможные состояния покрытия к началу 9-го сезона. Очевидно, что допустимыми состояниями являются $\tau_1^{(9)}=1$, $\tau_2^{(9)}=2$, …, $\tau_8^{(9)}=8$.

Для каждого из них определяем условно-оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_9(\tau^{(9)})$. Для этого используем данные табл. 7.3 и 7.4. Имеем:

$$F_9(1)=\max\begin{Bmatrix}R(1)-Z(1)+F_{10}(2)\\R(0)-Z(0)-42+F_{10}(1)\end{Bmatrix}=$$

$$=\max\begin{Bmatrix}146-38+103\\150-37-42+108\end{Bmatrix}=211\quad\text{при } U=C;$$

$$F_9(2) = \max \begin{Bmatrix} R(2) - Z(2) + F_{10}(3) \\ R(0) - Z(0) - 42 + F_{10}(1) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 142 - 39 + 97 \\ 150 - 37 - 42 + 108 \end{Bmatrix} = 200 \quad \text{при } U = C;$$

$$F_9(3) = \max \begin{Bmatrix} R(3) - Z(3) + F_{10}(4) \\ R(0) - Z(0) - 42 + F_{10}(1) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 138 - 41 + 94 \\ 150 - 37 - 42 + 108 \end{Bmatrix} = 191 \quad \text{при } U = C;$$

$$F_9(4) = \max \begin{Bmatrix} R(4) - Z(4) + F_{10}(5) \\ R(0) - Z(0) - 42 + F_{10}(1) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 135 - 41 + 88 \\ 150 - 37 - 42 + 108 \end{Bmatrix} = 182 \quad \text{при } U = C;$$

$$F_9(5) = \max \begin{Bmatrix} R(5) - Z(5) + F_{10}(6) \\ R(0) - Z(0) - 42 + F_{10}(1) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 131 - 43 + 86 \\ 150 - 37 - 42 + 108 \end{Bmatrix} = 179 \quad \text{при } U = З;$$

$$F_9(6) = \max \begin{Bmatrix} R(6) - Z(6) + F_{10}(7) \\ R(0) - Z(0) - 42 + F_{10}(1) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 130 - 44 + 81 \\ 150 - 37 - 42 + 108 \end{Bmatrix} = 179 \quad \text{при } U = З;$$

$$F_9(7) = \max \begin{Bmatrix} R(7) - Z(7) + F_{10}(8) \\ R(0) - Z(0) - 42 + F_{10}(1) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 126 - 45 + 76 \\ 150 - 37 - 42 + 108 \end{Bmatrix} = 179 \quad \text{при } U = З;$$

$$F_9(8) = \max \begin{Bmatrix} R(8) - Z(8) + F_{10}(9) \\ R(0) - Z(0) - 42 + F_{10}(1) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 123 - 47 + 71 \\ 150 - 37 - 42 + 108 \end{Bmatrix} = 179 \quad \text{при } U = З.$$

Полученные результаты вычислений сведем в табл. 7.5.

Таблица 7.5

Результаты расчета

Начало 9-го сезона		
Возраст покрытия $\tau^{(9)}$, лет	Значения функции дохода $F(9)$, тыс. руб.	Условно-оптимальное решение
1	211	С
2	200	С
3	191	С
4	182	С
5	179	З
6	179	З
7	179	З
8	179	З

* С – сохранение покрытия; З – замена покрытия.

Определим теперь условно-оптимальное решение для каждого из допустимых состояний покрытия к началу 8-го, 7-го и так далее до 2-го сезона пятилетки. По результатам расчетов получим данные, представленные в табл. 7.6–7.12 (вычисление для результатов расчета, представленных в табл. 7.6–7.12 опущены).

Таблица 7.6

Результаты расчета

Начало 8-го сезона		
Возраст покрытия $\tau^{(8)}$, лет	Значения функции дохода $F(8)$, тыс. руб.	Условно-оптимальное решение
1	308	С
2	294	С
3	282	З
4	282	З
5	282	З
6	282	З
7	282	З

* С – сохранение покрытия; З – замена покрытия.

Таблица 7.7

Результаты расчета

Начало 7-го сезона		
Возраст покрытия $\tau^{(7)}$, лет	Значения функции дохода $F(7)$, тыс. руб.	Условно-оптимальное решение
1	402	С
2	385	С
3	379	С или З
4	379	З
5	379	З
6	379	З

* С – сохранение покрытия; З – замена покрытия.

Таблица 7.8

Результаты расчета

Начало 6-го сезона		
Возраст покрытия $\tau^{(6)}$, лет	Значения функции дохода $F(6)$, тыс. руб.	Условно-оптимальное решение
1	493	С
2	482	С
3	476	С
4	473	С или З
5	473	З

* С – сохранение покрытия; З – замена покрытия.

Таблица 7.9

Результаты расчета

Начало 5-го сезона		
Возраст покрытия $\tau^{(5)}$, лет	Значения функции дохода $F(5)$, тыс. руб.	Условно-оптимальное решение
1	590	С
2	579	С
3	570	С
4	567	С

* С – сохранение покрытия; З – замена покрытия.

Таблица 7.10

Результаты расчета

Начало 4-го сезона		
Возраст покрытия $\tau^{(4)}$, лет	Значения функции дохода $F(4)$, тыс. руб.	Условно-оптимальное решение
1	687	С
2	673	С
3	664	С

* С – сохранение покрытия; З – замена покрытия.

Таблица 7.11

Результаты расчета

Начало 3-го сезона		
Возраст покрытия $\tau^{(3)}$, лет	Значения функции дохода $F(3)$, тыс. руб.	Условно-оптимальное решение
1	781	С
2	767	С

* С – сохранение покрытия; З – замена покрытия.

Таблица 7.12

Результаты расчета

Начало 2-го сезона		
Возраст покрытия $\tau^{(2)}$, лет	Значения функции дохода $F(2)$, тыс. руб.	Условно-оптимальное решение
1	875	С

* С – сохранение покрытия; З – замена покрытия.

Просматривая полученные результаты в обратном порядке, получим значения, представленные в табл. 7.13.

Таблица 7.13

Результаты расчета

Начало сезона	Таблица данных	Возраст покрытия	Управление
1	–	0	С
2	10	1	С
3	9	2	С
4	8	3	С
5	7	4	С
6	6	5	З
7	5	1	С
8	4	2	С
9	3	3	С
10	2	4	С

* С – сохранение покрытия; З – замена покрытия.

На основании анализа получается оптимальный план капитальных ремонтов автомобильной дороги, представленный в табл. 7.14.

Таблица 7.14

Оптимальный план капитальных ремонтов автомобильной дороги

	Сезоны									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Оптимальное решение	Сохранить	Сохранить	Сохранить	Сохранить	Заменить	Сохранить	Сохранить	Сохранить	Сохранить	Сохранить

Поскольку к началу пятилетки покрытие новое ($\tau^{(1)} = 0$),

$$F_1(0) = R(0) - Z(0) + F_2(l) = 150 - 37 + 875 = 988.$$

Вывод: максимальная эффективность транспортных перевозок за 10 лет составляет 988 тыс. руб.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ОДМ 218.4.005 – 2010. Рекомендации по обеспечению безопасности движения на автомобильных дорогах. – М.: Минтранс России, 2010.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов. – 9-е изд., стереотип. – М.: Высш. шк., 2004. – 404 с: ил.

3. Экономико-математические методы проектирования транспортных сооружений: метод. указ. / сост. С.С. Семенов. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2013. – 42 с.

4. Шаров А.Ю., Чижов А.А. Дорожные условия и безопасность движения: учеб. пособие. – Екатеринбург: Урал. гос. лесотехн. ун-т, 2014. – 240 с.

5. Мальцев Ю.А. Экономико-математические методы в транспортном строительстве: учеб. пособие. – М.: Изд-во ВТУ, 2006. – 245 с.

6. Шапкин А.С., Мазаева Н.П. Математические методы и модели исследования операций. – М.: Дашков и Ко, 2004. – 400 с.

7. Гаврилов Э.В., Гридчин А.М., Ряпухин В.Н. Системное проектирование автомобильных дорог: учеб. пособие. – М.; Белгород: Изд-во АСВ, 1998. – Ч. 1. – 198 с.