УДК 630.674.6.02 – 674.09

А.А. Еремеев, О.А. Федотова, Е.Г. Бобыкина,
А.А. Сафонов, К.В. Ивачева,
В.В. Терентьев, В.В. Чамеев
(A.A. Eremeev, O.A. Fedotova, E.G. Bobykina,
A.A. Safonov, K.V. Ivacheva,
V.V. Terentiev, V.V. Chameev)
(Уральский государственный лесотехнический университет)

Сафонов Александр Александрович родился в 1989 г. В 2006 г. поступил в Уральский государственный лесотехнический университет на лесоинженерный факультет, специальность «Лесоинженерное дело». В настоящее время является студентом 5-го курса.

Ивачева Ксения Валерьевна родилась в 1987 г. В 2006 г. поступила в Уральский государственный лесотехнический университет на лесоинженерный факультет, специальность «Лесоинженерное дело». В настоящее время является студенткой 5-го курса.

ВЕРОЯТНОСТНО–СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПЕРАЦИИ ПИЛЕНИЯ КРУГЛЫХ ЛЕСОМАТЕРИАЛОВ ДЛЯ СТАНКОВ ПРОХОДНОГО ТИПА

(PROBABILITY – STATISTICAL MODEL OF OPERATION SAWING OF ROUND TIMBER FOR TOOLS OF THE TYPE THROUGH PASSAGE)

Представлены данные исследования технологической операции раскроя бревен на станках проходного типа, в условиях техногородка УГЛТУ и произведена обработка этих данных.

The given researches of technological operation sawn logs on machine tools of type through passage, in conditions techno-small town USFEU are presented, and their processing is made.

Лесопромышленное производство больше, чем другие отрасли, подвержено воздействию природных факторов, носящих случайный характер. К математическим наукам, изучающим эти факторы, следует отнести теорию вероятностей и математическую статистику. Центральное место в этих науках занимает изучение случайной величины.

Случайная величина полностью характеризуется типом вероятностного теоретического распределения, средним арифметическим и средним квадратическим отклонениями и учитывает все факторы, вместе воздействующие на процесс.

Длительность цикла (основная составляющая для расчета производительности) лесосечных машин, оборудования нижних лесных складов, лесообрабатывающих станков, транспортных средств является случайной величиной.

Для вероятностного описания случайной величины необходимо выполнять следующие этапы: провести статистические наблюдения за случайной величиной; ранжировать значения случайной величины; провести группировку значений случайной величины по интервалам; определить основные статистики эмпирического распределения и удалить сомнительные крайние значения вариационного ряда; построить варианты группировок и гистограмм случайной величины; выбрать закон вероятностного распределения случайной величины; определить числовые характеристики статистического распределения и оценить их; провести анализ функции распределения случайной величины.

Проведение наблюдений за случайной величиной

При выборе числа наблюдений следует также иметь в виду, что минимальный объем выборки при проверке ее на сходимость с гипотетическим теоретическим вероятностным распределением по критерию $P(\chi^2)$ должен составлять не менее 100 (некоторые исследователи считают, что хватит и 50 [1]).

В табл. 1 приведены значения x_i случайной величины X – длительность распиловки несортированных по диаметру бревен на лесопильной раме Р63-4Б в лесопильном цехе п. Северка. Значения выписаны из журнала наблюдений. Хронометраж проводился в июле 2010 г. при следующих параметрах: средний диаметр бревен 35,4 см, средняя длина 608 см, постав 25-25-50-150-50-25-25.

Ранжирование значений случайной величины

Для статистической обработки экспериментных данных значения x_i случайной величины X целесообразно ранжировать по форме табл. 2, разработанной в УЛТИ (УГЛТУ) [2]. Такая форма таблицы удобна для быстрой группировки значений случайной величины по интервалам.

Таблица 1

Значения x_i случайной величины X – длительность распиловки бревен на лесопильной раме

Значения x_i, с									
166	155	184	168	225	240	175	215	164	158
171	176	158	156	212	177	176	220	204	198
285	242	185	160	132	201	141	149	146	183
149	145	154	143	161	150	169	172	205	182
144	200	245	141	215	151	187	162	227	188
146	184	161	178	170	220	171	174	154	218
159	212	180	135	158	144	178	139	153	292
166	159	199	163	146	151	296	167	146	187
154	197	145	190	183	184	180	167	178	216
288	224	232	205	215	150	143	247	265	165
175	187	191	298	174	148	128	172	144	192
182	131	135	181	270	252	174	174	215	182
186	158	181	217	157	168	259	139	140	179
189	227	184	186	279	286	165	199	202	133
225	180	174	169	166	176	187	140	143	178
176	161	205	174	165	288	179	187	136	210
200	159	170	191	277	250	253	233	199	155
163	167	235	195	151	177	178	161	147	157
167	262	179	205	249	204	147	195	161	159
260	272	237	192	168	165	145	120	201	181
225	145	247	242	215	186	165	141	278	171
155	247	235	168	174	236	155	180	143	161
174	161	160	151	185	185	150	211	139	149
211	163	177	165	151	151	246	206	166	171
140	181	269	285	214	172	203	182	156	131
241	216	155	154	203	236	201	169	143	173
180	144	184	141	192	232	195	155	167	199
132	195	122	141	180	204	133	191	165	150
184	205	174	177	228	181	188	222	147	166
200	139	163	209	201	166	145	151	165	174
177	198	215	158	160	187				
Объем выборки $n = 306$; $x_{\min} = 120$ c; $x_{\max} = 298$ c									

Таблица 2

Вариационный ряд значений x_i случайной величины X – длительность распиловки бревен на лесопильной раме

Интервал	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290
0	•		•••	••• •	••	••	••• •••		••	•	••		•	•	•	•		
1		••	••• ••	••• ••• •	••• ••• •	••• •	••• ••• •••	•••	•••	••			•					
2	•	••			•	•••	••• ••	•••	•	••	•	••	••	•	•	•		•
3		••	••• ••	•	••• •	•	•••		•			•		•				
4			••• •	•••	••• •	••• ••• ••• •	••• •••		•••	•								
5		••	••• ••	••• •••	••• ••• •	••	•••	••• •	••• ••	••• ••• •	•••	•	•		•		••	
6		•	••• •	•	••• •••	••• •	••• •		•	••		••	•				•	•
7			•••	••	••• ••	••• ••	••• •••	•		•	••	•	•••			•		
8	•		•	••• ••	••• •	••• ••	•	••		•	•					•	••	•
9		••• •	•••	••• ••	•••	•••	•	••• •	•				•	•	•	•		

Группировка значений случайной величины по интервалам

При большом числе наблюдений значения случайной величины группируют по интервалам (разрядам) и представляют графически в виде гистограммы. Количество интервалов определяется по формуле Стерджесса Г.А.

$$K = 1 + 3{,}322 \lg n = 1 + 3{,}322 \lg 306 = 9{,}26 \approx 9,$$

где n – объем выборки.

Величина интервала (шаг)

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{K} = \frac{298 - 120}{9} = 19{,}8 \approx 20\,c,$$

где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – максимальное и минимальное значения случайной величины.

Таблица 3

Группировка значений x_i случайной величины X
(длительность распиловки бревен на лесопильной раме) по интервалам

№ интервала	Интервал (разряд), с	Середина интервала, с	Частота n_i
1	120-140	130	16
2	140-160	150	67
3	160-180	170	82
4	180-200	190	59
5	200-220	210	35
6	220-240	230	16
7	240-260	250	14
8	260-280	270	9
9	280-300	290	8
Шаг: 20			$\sum 306$

Определение основных статистик эмпирического распределения

Выборочное среднее по сгруппированным данным

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k}{n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i x_i}{n} = \frac{56560}{306} = 184 \quad c,$$

где n_i – частота;

$n = \sum n_i$ – объем выборки.

Наряду со средним значением, которое указывает центр распределения, крайне важно знать степень рассеяния различных значений случайной величины около среднего значения. Наилучшими статистиками, характеризующими рассеяние, является выборочная дисперсия $\sigma_x^2 = \mu_2^*,\ c^2$, и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_x = \pm\sqrt{\mu_2^*},\ c$, или

$$\sigma_x = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n}} = \pm \sqrt{\frac{417041{,}83}{306}} = \pm 36 \quad c,$$

где μ_2^* – второй центральный момент в единицах измерения.

Безразмерной величиной, характеризующей меру изменчивости вариационного ряда, является коэффициент вариации:

$$V = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} 100\% = \frac{36}{184} 100\% = 19 \ \% .$$

Коэффициент вариации показывает, насколько велико рассеяние по сравнению со средним значением случайной величины.

Оценка близости эмпирического распределения к нормальному распределению

Наибольшей популярностью в теории вероятностей и математической статистике пользуется нормальное распределение.

Эмпирические кривые распределения почти всегда в большей или меньшей степени отличаются от нормального распределения. Для количественной оценки степени отклонения служат показатели асимметрии и эксцесса. У нормального распределения асимметрия A и эксцесс E равны нулю.

$$A = \frac{\mu_3^*}{\sigma_x^3};\ E = \frac{\mu_4^*}{\sigma_x^4} - 3;\ A = \frac{47318{,}569}{36{,}521^3} = 0{,}97;\ E = \frac{6359797{,}129}{36{,}521^4} - 3 = 0{,}57,$$

где μ_3^* и μ_4^* - центральные моменты в единицах измерения 3-го и 4-го порядков.

Среднюю ошибку показателя асимметрии вычисляют по формуле $m_a = \pm\sqrt{\frac{6}{n}} = \pm\sqrt{\frac{6}{304}} = \pm 0{,}14$. Среднюю ошибку показателя эксцесса находят по формуле $m_e = \pm\sqrt{\frac{24}{n}}$ или $m_e = \pm 2 \cdot m_a \ = \pm\sqrt{\frac{24}{304}} = \pm 0{,}28$, где n - объем выборки.

Зная величины A, m_a, E и m_e, можно судить о близости эмпирической кривой распределения к соответствующей ей кривой нормального распределения. Если $\frac{A}{m_a}$ и $\frac{E}{m_e}$ меньше трех, то A и E эмпирической кривой существенного значения не имеют и можно считать, что вариационный ряд подчиняется нормальному закону.

$$\frac{A}{m_a} = \frac{0{,}97}{0{,}14} = 6{,}93;\ \frac{E}{m_e} = \frac{0{,}57}{0{,}28} = 2{,}04$$

Основные статистики эмпирического распределения, приведенного в табл. 3, получены с использованием программы «ПИРСОН» и введены в табл. 4.

Таблица 4

Основные статистики эмпирического распределения и оценка близости его к нормальному распределению

Статистическая характеристика	Обозначение	Значение
1-й начальный момент	$\bar{x}$	183,898
2-й начальный момент		35152,283
3-й начальный момент		7002319,951
4-й начальный момент		1455499151,645
2-й центральный момент	μ_2^*	1333,799
3-й центральный момент	μ_3^*	47318,569
4-й центральный момент	μ_4^*	6359797,129
Выборочное среднее	$\bar{x}$	183,898
Среднеквадратическое отклонение	σ_x	±36,521
Выборочный коэффициент вариации	V	0,198
Асимметрия	A	0,971
Эксцесс	E	0,575
Средняя ошибка показателя асимметрии	m_a	0,14
Средняя ошибка показателя эксцесса	m_e	0,28
$\frac{A}{m_a}$		6,93
$\frac{E}{m_e}$		2,04

Эмпирическое распределение случайной величины X (длительность цикла распиловки бревен на лесопильной раме) имеет положительную асимметрию и положительный эксцесс. Но отношение $\frac{A}{m_a}$ больше трех, что указывает на то, что на длительность цикла лесопильной рамы оказывает влияние какой-то производственный фактор, доминирующий над совокупностью остальных. О принадлежности эмпирического распределения к теоретическому нормальному следует говорить с некоторой степенью сомнения.

Варианты группировок и гистограммы для случайной величины

Если случайная величина не подчиняется нормальному распределению, то необходимо определить вид теоретического распределения, которое не противоречит физической сущности и экспериментальным данным.

Для исключения влияния величины интервала и начала первого интервала на распределение случайной величины рекомендуется построить несколько вариантов гистограммы с различными значениями K и x_{min} с дальнейшей проверкой этих вариантов на критерии согласия.

Количество интервалов K обычно принимают не менее 7 и не более 20. При использовании критерия Пирсона количество данных в каждом интервале должно быть не менее 5. Если число наблюдений в различных интервалах мало, то такие интервалы объединяют [3].

С учетом изложенного в табл. 5 приведено 2 варианта группировок значений x_i случайной величины X по интервалам, а на рисунке даны их графические изображения (число вариантов может быть и больше).

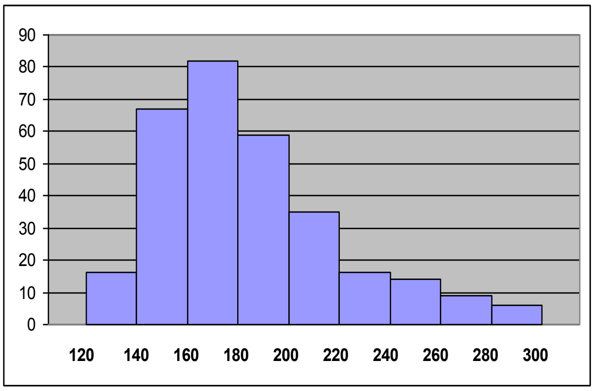
Варианты гистограмм для случайной величины

Таблица 5

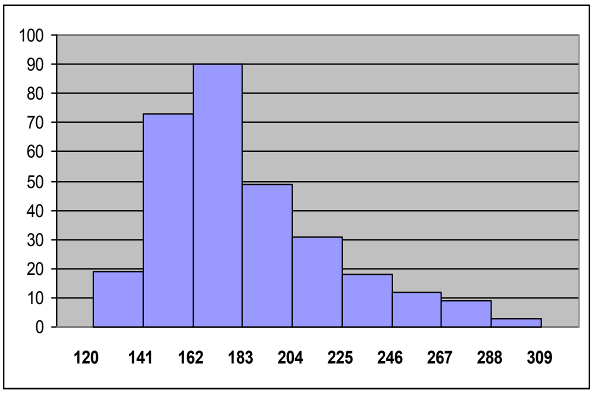
Группировка значений x_i случайной величины X (длительность цикла распиловки бревен на лесопильной раме) по интервалам

№ интервала	Вариант А			Вариант Б		
	Интервал, с	C_i	n_i	Интервал, с	C_i	n_i
1	120-140	130	16	120-141	130,5	19
2	140-160	150	67	141-162	151,5	73
3	160-180	170	82	162-183	172,5	90
4	180-200	190	59	183-204	193,5	49
5	200-220	210	35	204-225	214,5	31
6	220-240	230	16	225-246	235,5	18
7	240-260	250	14	246-267	256,5	12
8	260-280	270	9	267-288	277,5	9
9	280-300	290	6	288-309	298,5	3
Шаг: 20			$\sum 304$	Шаг: 21		$\sum 304$

А



Б



Гистограммы для длительностей интервалов времени распиловки бревен на лесопильной раме для вариантов А и Б

Выбор закона распределения случайной величины

В лесозаготовительных процессах чаще могут встречаться следующие основные виды распределения случайной величины: показательное (экспоненциальное), нормальное, логарифмически нормальное, гамма, эрланговское и ряд других [1].

Если найден закон и параметры случайной величины, то она перестает быть неизвестной. Для анализа статистическое (эмпирическое) распределение необходимо заменить теоретическим. Проверка того, не противоречит ли предполагаемое распределение опытным данным, решается с помощью критерия согласия. Наиболее часто применяется критерий согласия Пирсона.

Критерий χ^2 Пирсона дает возможность оценить степень согласованности предполагаемого теоретического с эмпирическим распределением. Один из способов оценки сходимости – нахождение вероятности $P(\chi^2)$.

При исследовании технологических процессов обычно считают, что если $P(\chi^2)$ не меньше 0,1, то гипотетическое распределение хорошо согласуется с опытными данными (по другим источникам граничным значением берется 0,05 [3]).

Таблица 6

Степень близости эмпирического распределения случайной величины X (длительности распиловки бревен на лесопильной раме) к теоретическим вероятностным распределениям

Вариант группировки	Значения χ^2 и $P(\chi^2)$ при проверке на сходимость теоретического вероятностного распределения							
	нормальное		логнормальное		гамма		экспоненциальное	
	χ^2	$P(\chi^2)$, %	χ^2	$P(\chi^2)$, %	χ^2	$P(\chi^2)$, %	χ^2	$P(\chi^2)$, %
А	77,821	0,0	20,885	0,2	11,58	7,2	114,718	0,1
Б	62,713	0,0	15,544	1,6	8,271	21,9	115,318	0,1

Как видно из табл. 6, наилучшим образом статистическое распределение случайной величины описывается теоретической кривой гамма-распределения.

Плотность функции гамма-распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{a! \cdot \beta^{a+1}} x^a e^{\frac{-x}{\beta}}, 0 < x \le \infty \quad \text{или} \quad f(x) = \frac{1}{\Gamma_{\frac{x}{\beta}}(a+1)\beta^{a+1}} x^a e^{\frac{-x}{\beta}},$$

где $\beta > 0$ – параметр масштаба;

$a > 1$ – параметр формы.

Числовые характеристики статистического распределения и их оценка

По данным программы «ПИРСОН» статистические характеристики (для варианта группировки Б) имеют следующие значения:

выборочное среднее $\bar{x}$ = 183,9 *с*

выборочное среднеквадратическое отклонение σ_x = 36,5 *с*;

выборочный коэффициент вариации $V = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{36{,}5}{183{,}9} = 0{,}199$.

Основные ошибки статистических показателей:

основная ошибка среднего значения $m_x = \pm\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \pm\frac{36{,}5}{\sqrt{306}} = \pm 2{,}088$;

основная шибка среднего квадратического отклонения

$$m_\sigma = \pm\frac{m_x}{\sqrt{2n}} = \pm\frac{2{,}088}{\sqrt{2\cdot 306}} = \pm 0{,}084$$

Основные ошибки указывают пределы, внутри которых с вероятностью 0,683 находится неизвестное значение параметра.

Показатель точности исследования среднего значения

$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{m_x}{\bar{x}}\cdot 100\% = \frac{2{,}088}{183{,}9}\cdot 100\% = 1{,}14\%$

Показатель точности исследования среднего квадратического отклонения $\varepsilon_\sigma = \frac{m_\sigma}{\sigma_x}100\% = \frac{0{,}084}{36{,}5}100\% = 0{,}23\%$.

В технологических расчетах 5 % показатель точности исследования считается достаточным. Среднеквадратическое отклонение определено с гораздо большей точностью, среднее значение меньше, но не намного.

Доверительные границы для среднего значения

$$\bar{x} \pm t\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm 1{,}96\frac{36{,}5}{\sqrt{306}} = \bar{x} \pm 4{,}09 \quad c, \text{ где } t = 1{,}96$$

(для вероятности $P = 0{,}95$ и величины допустимой ошибки $\varepsilon = 0{,}05$).

Доверительные границы для среднего квадратического отклонения

$$\sigma_x(1 \pm q),$$

где q – табличная величина, определяемая по n (числу наблюдений) и P. Для $P = 0{,}95$ и $n = 306$ $q = 0{,}089$.

Таким образом, математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение находятся с вероятностью 0,683 в диапазонах

$$179{,}808 \le \bar{x} \le 187{,}968 \quad c; \quad 33{,}271 \le \sigma_x \le 39{,}771 \quad c.$$

Аналогичные результаты получены для длительности пиления на четырехпильном станке 2ЦД-26. При среднем диаметре круглых лесоматериалов 18,6 см, средней длине бревен 299,9 см, поставе 20-110-20 средняя длительность распиловки бревен составляет 26,9 с, среднее квадратическое отклонение 1,7 с, тип теоретического вероятностного распределения – гамма. Сходимость эмпирического распределения с теоретическим по критерию Пирсона $P(\chi^2)=0,233$.

Выводы

1. Проведенные исследования технологической операции раскроя бревен на станках проходного типа в условиях техногородка УГЛТУ показали возможность их математического описания вероятностными теоретическими распределениями.
2. Длительность пиления бревен на проходных станках не противоречит гамма-распределению.
3. Полученные математические модели операции пиления на станках проходного типа найдут применение для исследования технологических потоков как аналитическими, так и имитационными методами.
4. Изложенный подход обработки значений случайной величины приемлем и для других параметров технологического процесса (размерно-качественных параметров сырья и готовой продукции, элементов цикла и т.д.)

Библиографический список

1. Редькин А.К. Основы моделирования и оптимизации процессов лесозаготовок: учебник для вузов. М.: Лесн. пром-сть, 1988. 256 с.
2. Исследование и разработка математической модели транспортно-переместительных операций в тарных цехах: отчет о НИР/УЛТИ № 44/73; Руководитель Н.В. Лившиц; исполн. В.В. Обвинцев, В.В. Чамеев и др.; № ГР 73021740; Инв. № Б388743. Свердловск, 1974. 73 с.
3. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. М.: Наука, 1971. 576 с.