УРАЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

Л.Т. Раевская
Н.И. Чащин
Е.В. Потапова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. КИНЕМАТИКА. ДИНАМИКА (ЧАСТЬ 2)

Екатеринбург
2012

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

Л.Т. Раевская
Н.И. Чащин
Е.В. Потапова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. КИНЕМАТИКА. ДИНАМИКА (часть 2)

Методические указания
для самостоятельного выполнения расчетно-графических работ
(для изучения теоретического курса, практических и лабораторных занятий)
студентами очной и заочной форм обучения направлений
270800.62 «Строительство», 250400.62 «Технология лесозаготовительных и деревообрабатывающих производств», 190600.62 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»,
151000.62 «Технологические машины и оборудование»,
220700.62 «Управление в технических системах»
по дисциплине «Теоретическая механика»

Екатеринбург
2012

Печатается по рекомендации методической комиссии лесоинженерного факультета.
Протокол № 1 от 07.09.2011 г.

Рецензент В.А. Калентьев, канд. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой высшей математики и теоретической механики ЕВАКУ (военный институт)

Редактор К.В. Корнева
Компьютерная верстка Е.В. Карпова

Подписано в печать 14.03.2012 Поз. № 19
Плоская печать Формат 60х84 1/16 Тираж 200 экз.
Заказ № 029 Печ. л. 1,86 Цена 10 руб. 16 коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одной из ведущих дисциплин высшей технической школы является теоретическая механика – наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел. Законы теоретической механики лежат в основе фундаментальных, прикладных и специальных наук.

Теоретическая механика включает в себя три основных раздела: статика, кинематика и динамика.

Кинематика – раздел теоретической механики, в котором изучают геометрические свойства движения тел без учета их масс и действующих на них сил.

Динамика – это основной завершающий раздел теоретической механики, изучающий движение материальных точек и тел с учетом сил, вызывающих это движение.

В общем курсе теоретической механики изучают механику материальной точки, механику твердого тела и механику системы материальных точек. Роль и значение теоретической механики состоит в том, что ее законы и методы позволяют изучить ряд важных явлений в окружающем мире.

В пособии рассматриваются основные теоретические вопросы разделов механики, а также дано подробное решение наиболее важных задач из контрольных работ по кинематике и динамике, при этом следует уделить особое внимание тем задачам, которые будут предложены студентам на экзамене.

По каждому разделу теоретической механики представлены контрольные задания для расчетно-графических работ, которые могут выполняться на практических занятиях или выдаваться как домашние задания, а также могут быть использованы в качестве контрольных заданий для заочного обучения.

Выбор задач осуществляется по вариантам. Для очного обучения вариант указывается преподавателем, а для заочного он определяется по двум последним цифрам личного шифра.

Пособие содержит по 30 вариантов заданий на каждую из 4-х тем кинематики и задачу по динамике, охватывающую при решении ее различными способами 4 темы.

Цель методического пособия – способствование закреплению теоретического материала программы и приобретению студентами твердых навыков решения задач по теоретической механике.

КИНЕМАТИКА

1. Основные понятия и определения

В задачах данного раздела необходимо определить координаты, скорость, ускорение точки в любой назначенный момент времени при различных способах задания движения. Из всех способов задания движения точки наибольшее распространение получили координатный и естественный способы.

Рассмотрим координатный способ задания движения точки. Положение в пространстве движущейся точки определяется тремя координатами в декартовой системе координат. Эти координаты задаются как функции времени:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t).$$

Скорость точки представляет собой вектор, характеризующий быстроту и направление движения точки в данный момент времени.

При задании движения точки уравнениями проекции скорости на оси декартовых координат равны:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\ V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y};\ V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Модуль скорости

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Характеристикой быстроты изменения скорости является ускорение a. При задании движения точки уравнениями проекции ускорения на координатные оси

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x};\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y};\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Далее рассмотрим естественный способ задания движения точки.

Считается, что движение точки задано естественным способом, если указаны ее траектория и закон изменения криволинейной координаты $s = s(t)$. Модуль скорости точки определяется по формуле:

$$V = \left|\frac{ds}{dt}\right| = |\dot{s}|.$$

Вектор скорости V направлен по касательной к траектории.

Ускорение точки определяется как векторная сумма касательного и нормального ускорений точки:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

Модуль касательного ускорения определяется по формуле:

$$a_\tau = \left|\frac{dV}{dt}\right| = \left|\frac{d^2 s}{dt^2}\right| = |\ddot{s}|.$$

Модуль нормального ускорения определяется по формуле:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны траектории в данной точке.

Вектор нормального ускорения a_n всегда направлен по главной нормали в сторону центра кривизны траектории.

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ .$$

По виду и характеру движения определяются разные кинематические меры движения (табл. 1).

Таблица 1

Кинематические меры движения

Кинематическая мера движения	Характер движения	Вид движения	
		Поступательное	Вращательное
Перемещение	Равномерное	$S = Vt$	$\varphi = \omega t$
	Неравномерное	$S = f(t)$	$\varphi = f(t)$
	Равнопеременное	$S = S_0 + V_0 t + at^2/2$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$
Скорость	Равномерное	$V = S / t$=const	$V = R\omega$
	Неравномерное	$V = dS / dt$	
	Равнопеременное	$V = V_0 + at$	
Скорость угловая	Равномерное	$\omega = 0$	$\omega = \varphi / t$ =const
	Неравномерное		$\omega = d\varphi / dt$
	Равнопеременное		$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$; $\omega = \pi n / 30$
Касательное ускорение	Неравномерное	$a_\tau = dV / dt$	$a_\tau = R\varepsilon$
	Равнопеременное	$a_\tau = (V - V_0) / t$	
Ускорение нормальное	Неравномерное	$a_n = V^2 / \rho$	$a_n = \omega^2 R$
	Равнопеременное		
Полное ускорение	Неравномерное	$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$	$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$
	Равнопеременное		
Ускорение угловое	Неравномерное	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = d\omega / dt$
	Равнопеременное		$\varepsilon = (\omega - \omega_0) / t$

Исследование движения точек фигуры при *плоскопараллельном движении:*

1. Для определения *мгновенного центра скоростей* достаточно знать направление скоростей двух любых точек фигуры, мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, опущенных из этих точек к их скоростям.

2. *Скорости точек плоской фигуры* пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей:

$$V_A/PA = V_B/PB,$$

где P – мгновенный центр скоростей,
A и B – любые точки плоской фигуры.

При *сложном движении* абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей, α – угол между векторами относительной и переносной скоростей.

$$\bar{V}_{\text{аб}} = \bar{V}_{om} + \bar{V}_{\text{пер}}$$

При сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений. *Кориолисово ускорение* равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости и относительной скорости точки: $\bar{a}_{\text{кор}} = 2[\bar{\omega} \times \bar{V}_{om}]$. Направлен вектор перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы переносной угловой скорости и относительной скорости точки в сторону поворота вектора переносной угловой скорости к вектору относительной скорости против хода часовой стрелки.

2. Кинематика точки

2.1. Пример выполнения расчетно-графической работы

Пример 1

1. *Исходные данные.* По заданным уравнениям движения точки M

$$x = 2 \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right), \qquad y = -3 \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 4$$

(где x, y – в см)

установить вид ее траектории и для момента времени $t_1 = 1$ с. Найти положение точки на траектории, ее скорость, ускорение.

2. *Решение.*

Определяем вид траектории. Исключая время t из уравнений движения, найдем вид траектории точки M в координатной форме.

Так как время t входит в аргументы тригонометрических функций синуса и косинуса, то, используя формулу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, получим:

$$\left.\begin{aligned} sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) &= \frac{x}{2} \\ cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) &= \frac{4-y}{3} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right) + cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{4-y}{3}\right)^2 \longrightarrow$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{4-y}{3}\right)^2 = 1$$ – уравнение эллипса.

Траекторией движения точки M является эллипс (рис. 1). Центр эллипса имеет координаты $X_C = 0$, $Y_C = 4$, полуоси эллипса – $a = 2$ см, $b = 3$.

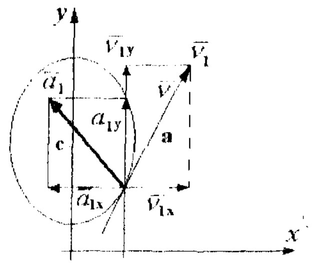


Рис. 1. Траектория движения точки M (эллипс)

Определяем положение точки на траектории при $t_1 = 1$ с. Подставляя время $t_1 = 1$ с в 34, получим (см):

$$x_1 = 2 \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot 1}{3}\right) = 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}73,$$

$$y_1 = -3 \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{3}\right) + 4 = -3 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4 = -3 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 2{,}5.$$

Точку с координатами x_1, y_1 обозначим на траектории через M_1.

Скорость $\bar{V}$ точки M определим через ее проекции на координатные оси.

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2}, \bar{V} = V_X \bar{\imath} + V_Y \bar{\jmath},$$

где

$$V_X = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[2sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)\right] = 2cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{3},$$

$$V_Y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-3cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 4\right] = 3sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{3}.$$

Тогда V, см / с :

$$V = \frac{\pi}{3}\sqrt{4 \cdot cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 9 \cdot sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}.$$

Так как величина скорости v зависит от времени t, то движение точки неравномерно (см / с).

При $t_1 = 1$ с

$$V_i = \frac{\pi}{3}\sqrt{4 \cdot cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 9 \cdot sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)} = \frac{\pi}{3}\sqrt{4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} \approx 2{,}32;$$

$$V_{ix} = 2 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \approx 1{,}05 \frac{\text{см}}{\text{сек}} > 0;$$

$$V_{iy} = 3 \cdot sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \approx 2{,}72 \frac{\text{см}}{\text{сек}} > 0.$$

Построим вектор скорости точки M_1:

$$\bar{V}_1 = V_{1X}\bar{\imath} + V_{1Y}\bar{\jmath} \text{ или } \bar{V}_1 = 1{,}05 \cdot \bar{\imath} + 2{,}72 \cdot \bar{\jmath}.$$

В точке M_1 параллельно осям x, y, в выбранном масштабе, откладываем

$$V_{1X} = 1{,}05 > 0,\ V_{1Y} = 2{,}72 > 0.$$

Вектор $\bar{V}$ – диагональ прямоугольника, построенного на V_{1X} и V_{1Y}, как на сторонах.

Пример 2

1. *Исходные данные.*

Даны уравнения движения точки M в плоскости XY:

$x = 4t^2 + 2, y = 2t$, (где x, y – в сантиметрах, t – в секундах).

Найти уравнение траектории точки M для момента времени $t_1 = 1$ с, найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны в соответствующей точке.

2. *Решение.*

Из второго уравнения, подставляя значение t в первое уравнение, получим уравнение траектории $X = Y^2 + 2$ – уравнение параболы (рис. 2).

Заметим, что траекторией движения является только верхняя ветвь параболы, т.к. время $t>0$.

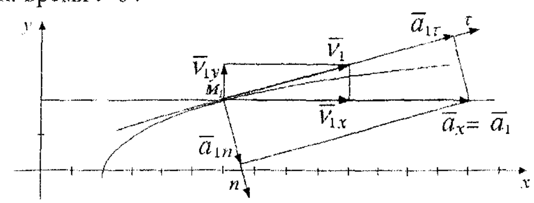


Рис. 2. Траектория движения точки

Полагая время $t_1 = 1$ с., найдем координаты, определяющие положение точки на траектории в этот момент времени (см).

$$x_1 = x(t = 1c) = 4 + 2 = 6$$

$$y_1 = y(t = 1c) = 2$$

Точку с координатами $x_1 = 6$, $y_1 = 2$ на траектории обозначим M_1.

Величину скорости точки M найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2},$$

где $V_X = (4t^2 + 2)' = 8t$ см/с, $V_Y = (2t)' = 2$ см/с.

Тогда, поскольку величина скорости зависит от времени t, движение точки неравномерное.

В момент времени $t_1 = 1$ с: $V_{1X} = 8$, $V_{1Y} = 2$, $V_1 = 8{,}2$ см/с.

Выберем масштаб и построим вектор скорости в положении M_1 по составляющим V_{1X} и V_{1Y}:

$$\bar{V}_1 = V_{1X}\bar{\imath} + V_{1Y}\bar{\jmath}.$$

Модуль ускорения точки M определяем аналогично (см / с^2):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

где

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(8 \cdot t) = 8,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(2) = 0.$$

Полное ускорение $a = a_x = 8$ (см / с^2) является постоянным во все время движения точки.

Выберем масштаб, построим вектор ускорения:

$$\bar{a}_1 = \bar{a} = \bar{a}_x, \bar{a}_1 = 8 \cdot \bar{\imath}.$$

Разложим полное ускорение на составляющие вдоль этих осей:

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_{1n} + \bar{a}_{1\tau},$$

где $\bar{a}_{1\tau}$ – касательное ускорение точки M;

$\bar{a}_{1n}$ – нормальное ускорение точки M.

Из рисунка 2 видно, что $a_{1n} \approx 2$, $a_{1\tau} \approx 8$ см $/c^2$.

Касательное ускорение определяется по формуле $a_\tau = dV/dt$.

Если $dV/dt > 0$ – движение ускоренное,

если $dV/dt < 0$ – движение замедленное.

Найдем a_τ:

$$a_\tau = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{64^2 + 4}\right) = \frac{1 \cdot 64 \cdot 2t}{2 \cdot \sqrt{64 \cdot t^2 + 4}} = \frac{64 \cdot t}{\sqrt{64 \cdot t^2 + 4}}.$$

Т.к. время $t > 0$, $a_\tau > 0$, следовательно, движение точки M ускоренное.

$$a_{1\tau} = \frac{64}{\sqrt{64 + 4}} = \frac{64}{8{,}2} \approx 7{,}8 \ (\approx 8 \text{ см/с}^2),$$

что соответствует значению на рисунке 2.

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. В случае криволинейного движения, оно всегда существует и определяется по формуле:

$$a_n = V^2/\rho,$$

где ρ – радиус кривизны траектории в соответствующей точке. Т.к. радиус кривизны параболы в точке M_1 неизвестен, то величину нормального ускорения можно определить следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2};$$

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2} = \sqrt{64 - 60{,}84} \approx 1{,}8 \ (\approx 2 \text{ см}/c^2),$$

что соответствует значению на рисунке 2.

Радиус кривизны параболы (см) в точке M_1 найдем из выражения

$$\rho_1 = V_1^2/a_{1n} = 68/1{,}8 = 37{,}8.$$

3. Ответ. Точка M совершает криволинейное ускоренное движение, т.к. вектор касательного ускорения во все время движения совпадает с направлением вектора скорости.

2.2. Варианты заданий

Точка M движется в плоскости XOY согласно уравнениям: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Определить траекторию движения точки для заданного момента времени t, найти положение точки на траектории, ее скорость и ускорение и показать их на рисунке, а также определить радиус кривизны траектории в данной точке, используя данные таблицы 2.

Таблица 2

Исходные данные для расчета

№ вар.	X, см	Y, см	t, с	№ вар.	X, см	Y, см	t, с
1	$4t^2 + 3t + 7$	$8t^2 + 6t + 1$	2	16	$t^2 + 4t + 3$	$t^2 + 8t + 1$	2
2	$3t^2 + 6t + 2$	$3t$	1	17	$-t - 1$	$-2/(t + 1)$	1
3	$3\cos(\pi t/3)$	$5\sin(\pi t/3)$	3	18	t^2	$3t - 2$	2
4	$3/(t+1)$	$3t+3$	1	19	$2\sin(\pi t/8) + 2$	$2\cos(\pi t/8) - 1$	2
5	$2\sin(\pi t/3) + 1$	$3\cos(\pi t/3)$	2	20	$2t^3 + 3$	$6t^3 + 12$	1
6	$3t^2 + 2t + 5$	$9t^2 + 6t + 11$	1	21	$-3/(t + 1)$	$-3t - 3$	2
7	$2t^2 + 6t + 2$	$2t$	2	22	$t^4 + 1$	$t^4 - 2$	2
8	$t^2 - 4t + 1$	$t + 1$	1	23	$3\cos(t)$	$3\sin(t)$	$\pi/6$
9	$-4/(t + 1)$	$-2t - 2$	0	24	$10/(5t + 1)$	$2{,}5t$	1
10	$2t^2 + 4$	$3t + 1$	2	25	$2\cos(\pi t/6)$	$3\sin(\pi t/6) + 3$	2
11	$3\sin(\pi t/4) + 2$	$4\cos(\pi t/4) - 1$	1	26	$3\cos(\pi t/3) + 2$	$3\sin(\pi t/3) - 2$	1
12	$7t + 1$	$-8/(7t + 1)$	1/7	27	$3t^2 + 3t + 3$	$8t^2 + 8t + 5$	1
13	$3\cos(\pi t/6) + 1$	$2\sin(\pi t/6) - 2$	3	28	$t^2 + 6t + 2$	$2t$	1
14	$4t + 5$	$5t^2 + 1$	1	29	$5/(t+1)$	$5t+5$	2
15	$4\cos(\pi t/4)$	$4\sin(\pi t/4) - 2$	1	30	$2\cos(\pi t/3)$	$3\sin(\pi t/3) + 2$	2

3. Простейшие виды движения твердого тела

3.1. Пример выполнения расчетно-графической работы

1. *Исходные данные.*

Определить скорость и ускорение точки M, а также скорость и ускорение груза 1 в заданный момент времени (рис. 3).

Дано: $x(t) = 7t^2$, $R_2 = 25$ *см*, $r_2 = 15$ *см*, $R_3 = 20$ *см*, $r_3 = 10$ *см*, $t_1 = 1$ *с*.

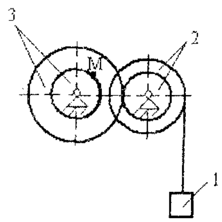


Рис. 3. Система тел

2. *Решение.*

$V_1 = x'(t) = 14t$; $a_1 = 14$ м/с^2

$V_1(t_1) = 14$ м/с

$V_M = V_1\, r_2\, r_3 / R_2\, R_3$; $V_M = 4{,}2t$;

$V_M(t_1) = 4{,}2$ м/с

$a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

$a_\tau = V_M' = 4{,}2$ м/с^2; $a_n = V_M^2 / r_3 = 1{,}76$ м/с^2

$a_M = 4{,}55$ м/с^2

Полученные в ходе решения данные представлены в виде таблицы (табл. 3).

Таблица 3

Результаты решения задачи

V_1, м/с	a_1, м/с^2	V_M, м/с	a_M, м/с^2
14	14	4,2	4,55

3.2. Варианты заданий

Для приведенных схем механизмов по известным характеристикам движения определить и показать на рисунке скорость и ускорение точки

M, а также скорость и ускорение груза 1 в заданный момент времени. Исходные данные приведены в таблицах 4 и 5.

Обозначения: V_1 – скорость тела 1, a_1 – ускорение тела 1, $x(t)$ – уравнение движения тела 1, $\varphi_3(t)$ – уравнение движения тела 3, R_2, r_2, R_3, r_3 – радиусы шестерен, шкивов и барабанов.

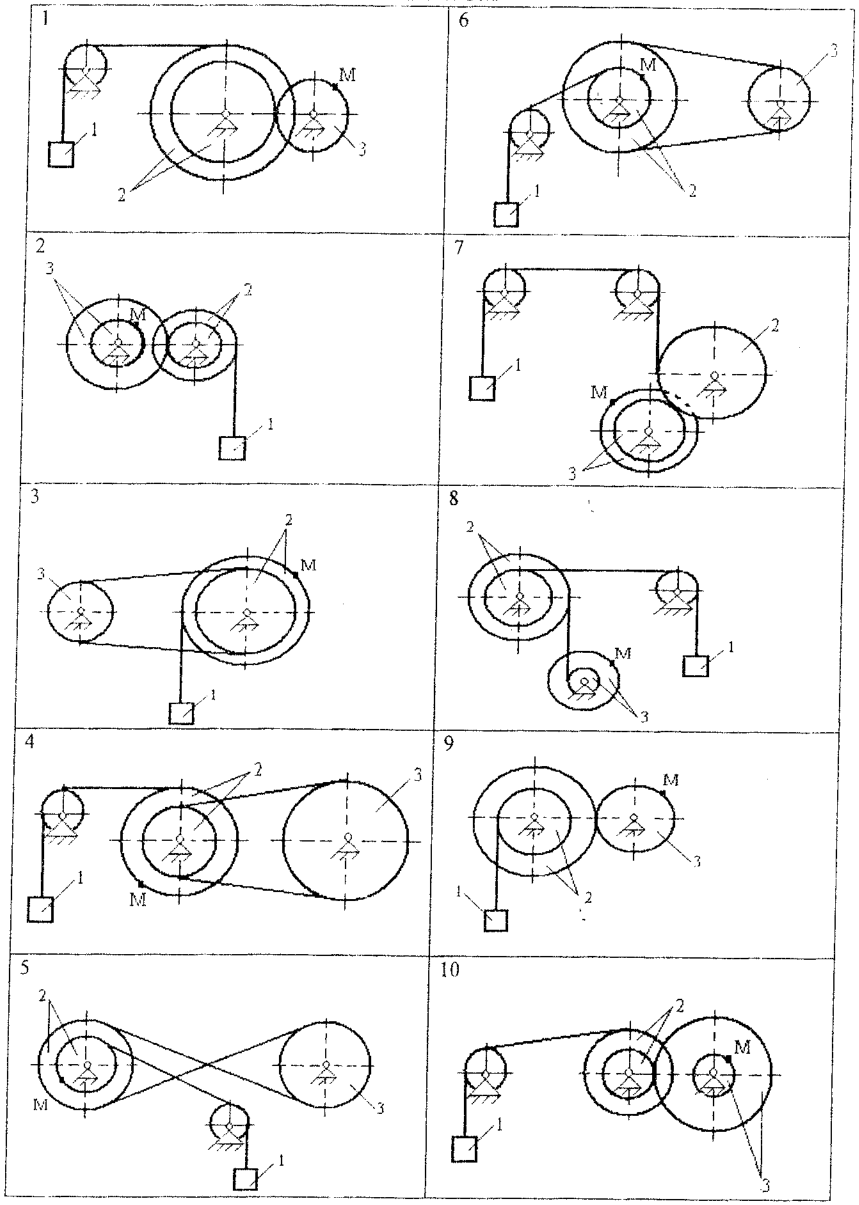
Таблица 4

Исходные данные для расчета

№ вар.	Характеристики движения	Радиусы, см				Время, с
		R_2	r_2	R_3	r_3	
1	V_1=0,5 м/с, a_1= -0,7 м/с^2	60	45	36	-	-
2	$x(t)=5t^2$ м	20	10	30	10	0,5
3	$\varphi_3(t)=0{,}5t^3-2t^2$ рад	20	15	10	-	2
4	$\varphi_3(t)=t-2e^{0.5t}$ рад	30	20	40	-	1
5	$\varphi_3(t)=t^3-7t$ рад	15	10	15	-	2
6	$\varphi_3(t)=3t^2+5$ рад	40	20	100	-	0,25
7	V_1=0,25 м/с, a_1=0,6м/с^2	80	-	60	45	-
8	$x(t)=42t-0{,}6t^3$ м	40	30	30	15	5
9	V_1=-0,5 м/с, a_1=1,0 м/с^2	100	60	75	-	-
10	$x(t)=22t-5t^2$ м	25	20	50	25	2
11	V_1=1,0 м/с, a_1=2,0 м/с^2	60	45	60	-	-
12	$x(t)=42t-5t^2$ м	30	15	40	20	4
13	V_1=-1,5 м/с, a_1=4,5 м/с^2	100	60	30	-	-
14	$\varphi_3(t)=5(1-\cos(\pi t/6))$ рад	20	15	15	-	1
15	V_1=0,4 м/с, a_1= 0,4 м/с^2	45	35	105	-	-
16	$\varphi_3(t)=4t-0{,}5t^2$ рад	15	10	15	-	3
17	V_1=0,6 м/с, a_1= -0,9 м/с^2	80	-	45	30	-
18	$\varphi_3(t)=8\sin(\pi t/3)$ рад	15	10	20	-	1
19	$x(t)=5t-0{,}5t^3$ м	32	16	32	16	2
20	V_1=0,8 м/с, a_1= 12,8 м/с^2	35	10	10	-	-
21	$x(t)=5t-15\sin(\pi t/6)$ м	40	18	40	18	2
22	$x(t)= 0{,}5(1-\cos(\pi t))$ м	40	20	40	15	1/6
23	$\varphi_3(t)=t^2-2e^t$ рад	15	10	20	-	0,5
24	V_1=-1,5 м/с, a_1=4,5 м/с^2	100	70	30	-	-
25	V_1=0,5 м/с, a_1= -0,9 м/с^2	60	45	37	-	-
26	$\varphi_3(t)=10t-2t^2$ рад	20	15	10	-	2
27	$\varphi_3(t)=5(1-\cos(\pi t/6))$ рад	25	15	15	-	1,5
28	V_1=0,25 м/с, a_1=0,7м/с^2	80	-	50	45	-
29	$\varphi_3(t)=0{,}5t^3-2t^2$ рад	20	15	10	-	1,5
30	$\varphi_3(t)=3t^2+5$ рад	40	20	80	-	0,35

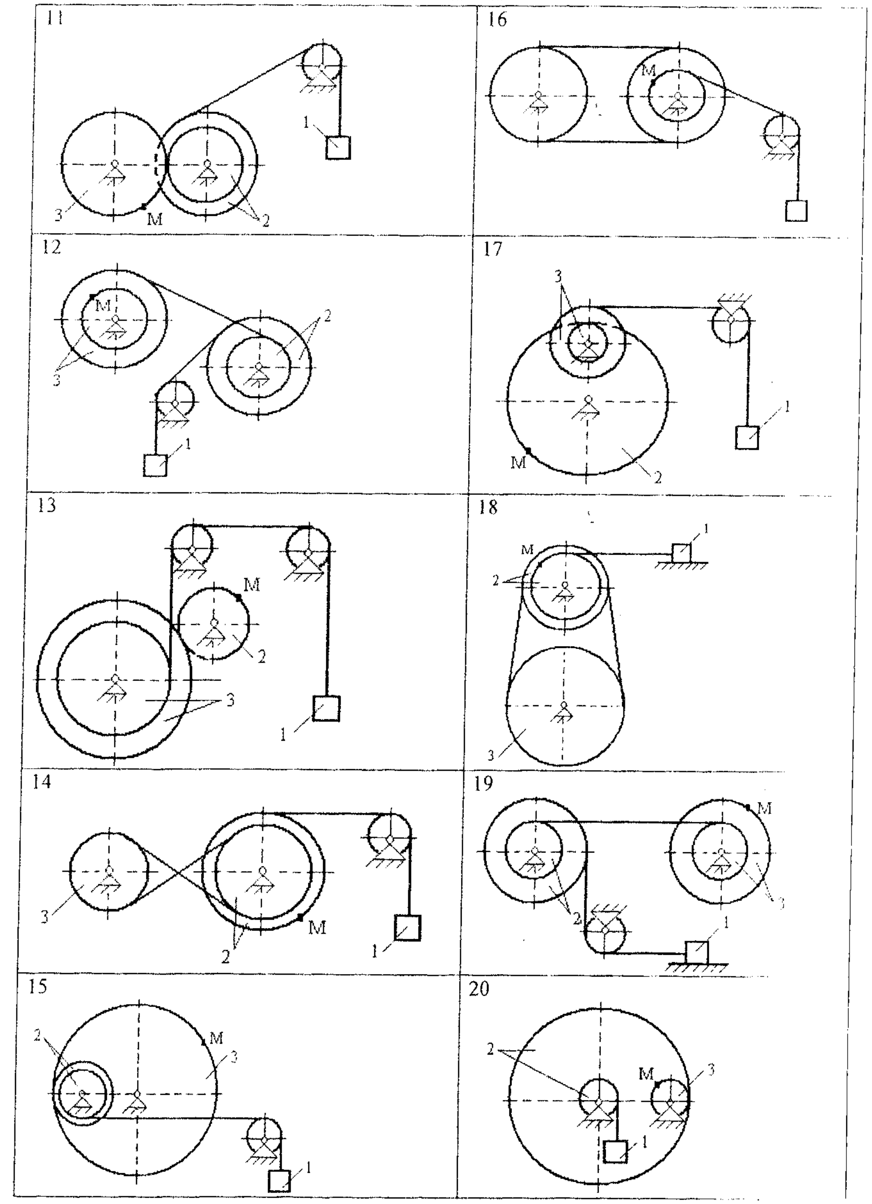
Таблица 5

Схемы тел



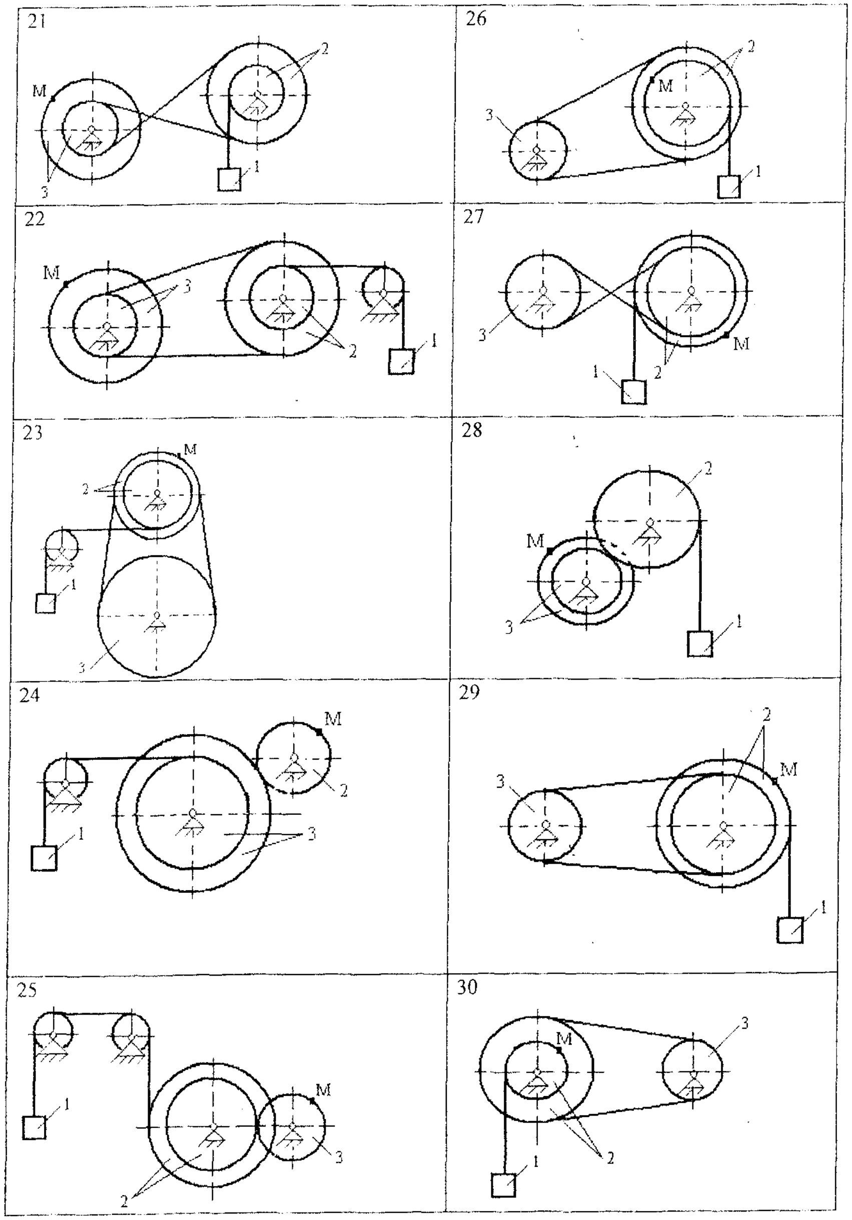
Продолжение табл. 5

Схемы тел



Окончание табл. 5

Схемы тел



4. Плоскопараллельное движение твердого тела

4.1. Пример выполнения расчетно-графической работы

1. *Исходные данные.* Определить V_A, V_B, a_A, a_B, ω_{AB}.
Дано: OA = 25, AB = 25 см, ω_{OA} = 2 рад/с, ε_{OA} = 4 рад/с^2 (рис. 4).

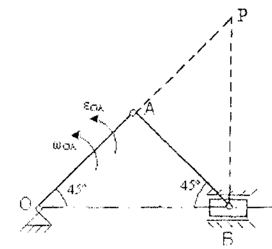


Рис. 4. Кривошипно-шатунный механизм

2. *Решение.*
$V_A = \omega_{OA}\, OA$; V_A = 50 см/с; $a_A = OA\sqrt{\omega_{OA}^4 + \varepsilon_{OA}^2}$; a_A = 140 см/с^2. Для нахождения V_B необходимо найти положение мгновенного центра скоростей (точку P) и воспользоваться $V_B = V_A BP/AP$; $\omega_{AB} = V_A/AP$. Для вычисления ускорения точки B необходимо воспользоваться теоремой о сложении ускорений, взяв точку A в качестве полюса.

4.2. Варианты заданий

Для представленных на схемах механизмов определить V_A, V_B, a_A, a_B, ω_{AB}, используя данные таблиц 6 и 7.

Таблица 6

Исходные данные для расчета

№ вар.	Размеры, см		ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	№ вар.	Размеры, см		ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
	OA	*AB*				*OA*	*AB*		
1	30	50	3	6	16	30	60	3	5
2	25	60	4	7	17	35	65	3	6
3	40	60	2	4	18	40	70	4	8
4	30	60	1	8	19	25	65	2	5
5	50	50	2	6	20	30	75	2	6
6	40	40	3	7	21	40	50	3	7
7	30	50	2	5	22	30	40	2	5
8	40	70	3	5	23	50	50	3	5
9	30	50	4	8	24	40	60	2	6
10	40	80	2	7	25	30	60	3	7
11	20	55	3	7	26	50	60	2	4

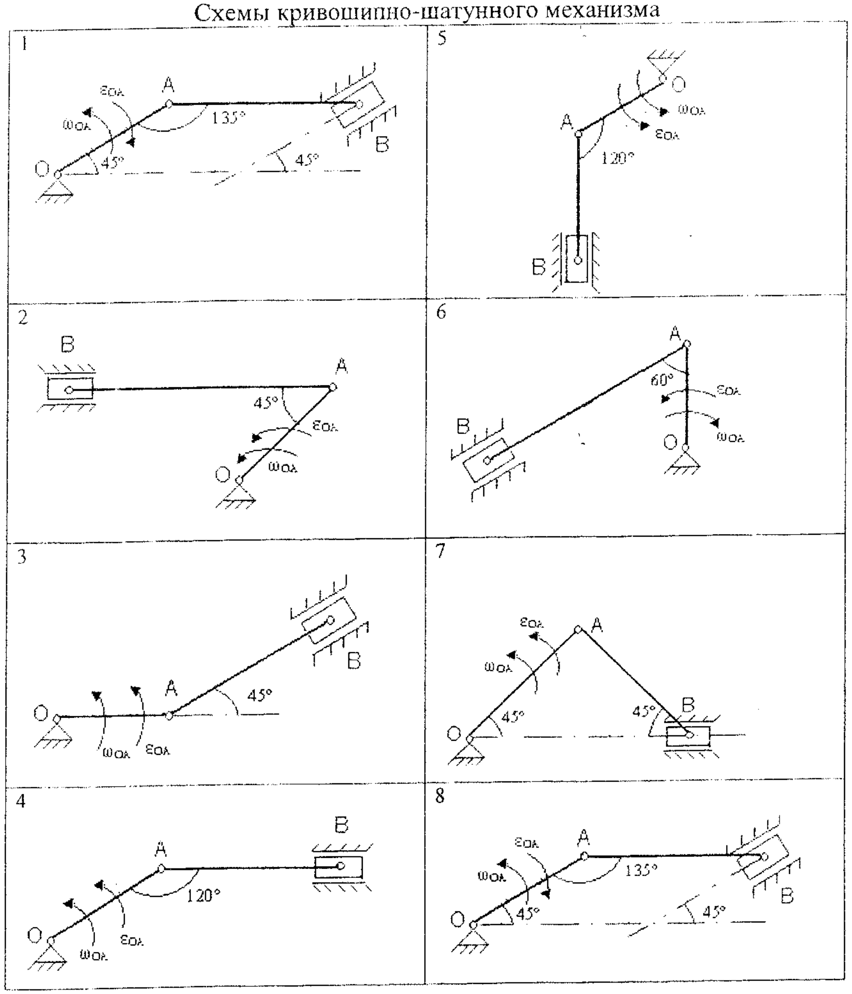
Окончание табл. 6

Исходные данные для расчета

№ вар	Размеры, см		ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	№ вар.	Размеры, см		Размеры, см	ε_{OA}, рад/с^2
	OA	*OA*					*OA*		
12	40	50	3	5	27	50	55	4	7
13	30	50	2	7	28	40	50	2	5
14	50	60	4	7	29	30	50	3	7
15	30	70	5	8	30	40	60	3	7

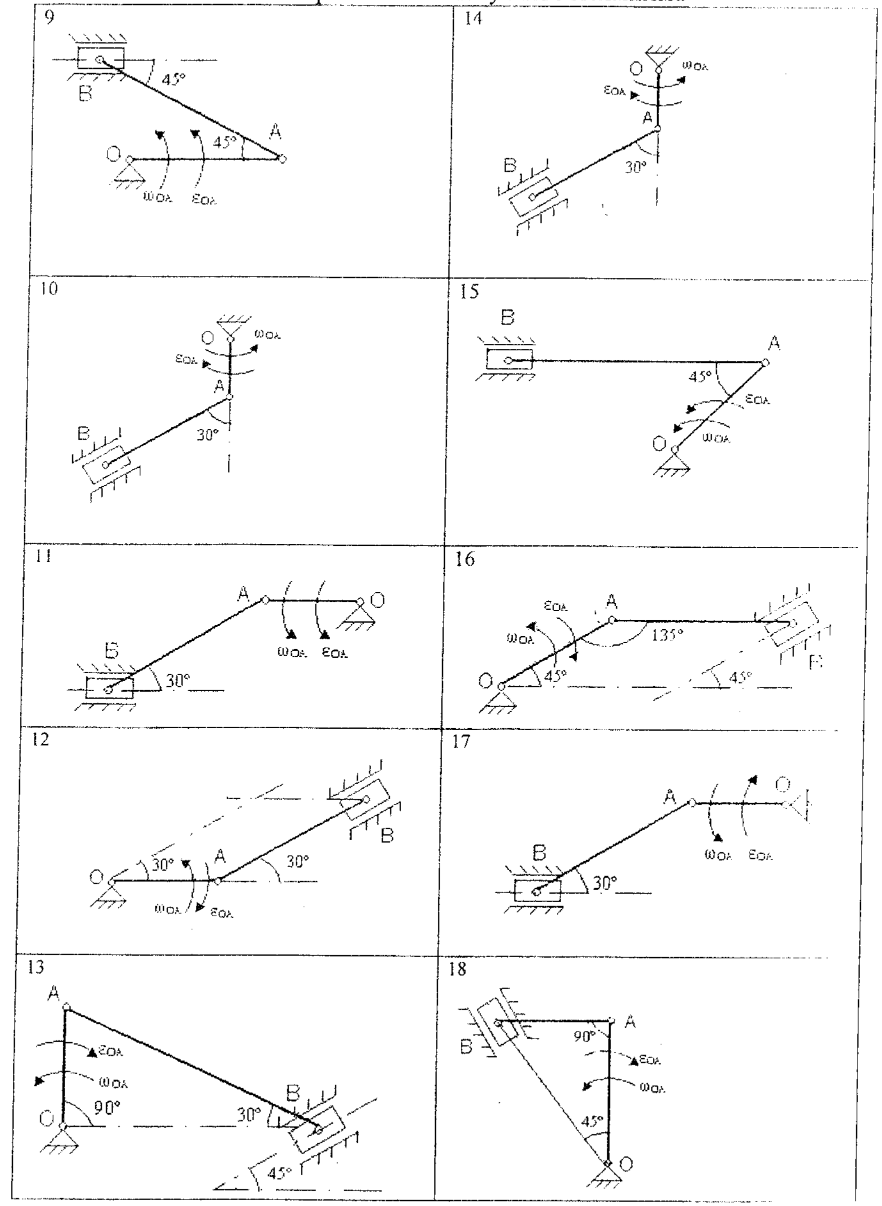
Таблица 7

Схемы кривошипно-шатунного механизма



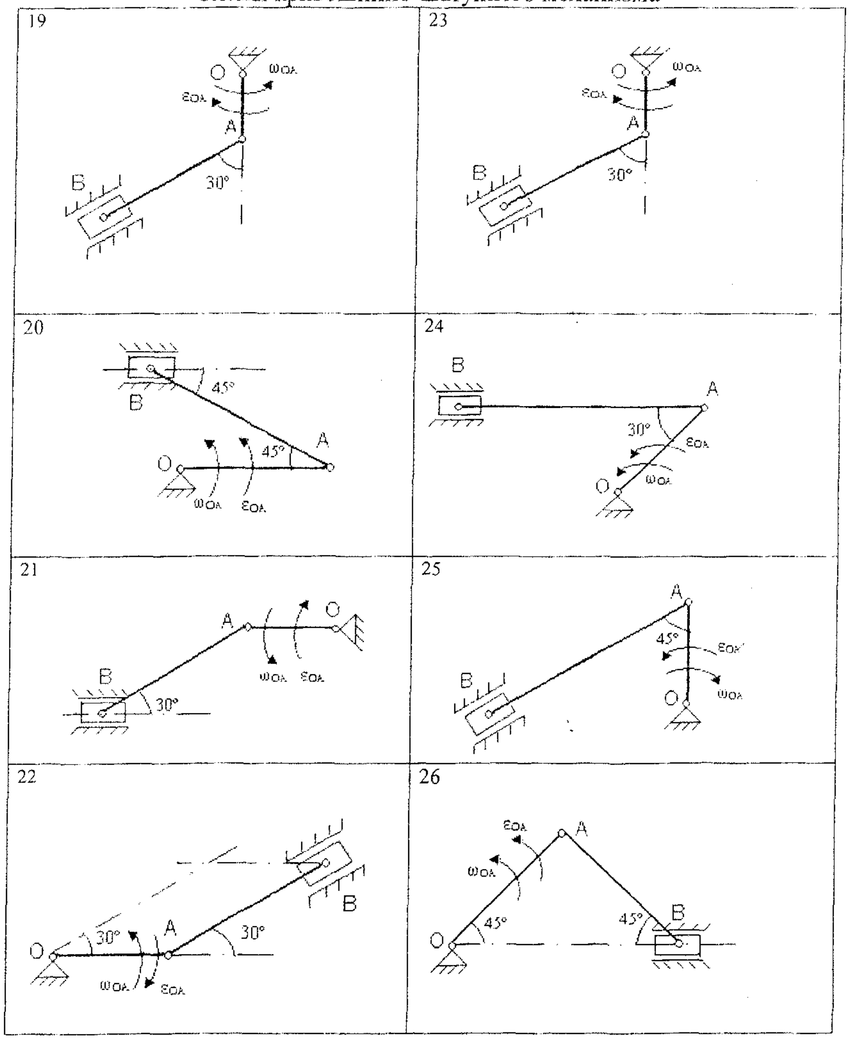
Продолжение табл. 7

Схемы кривошипно-шатунного механизма



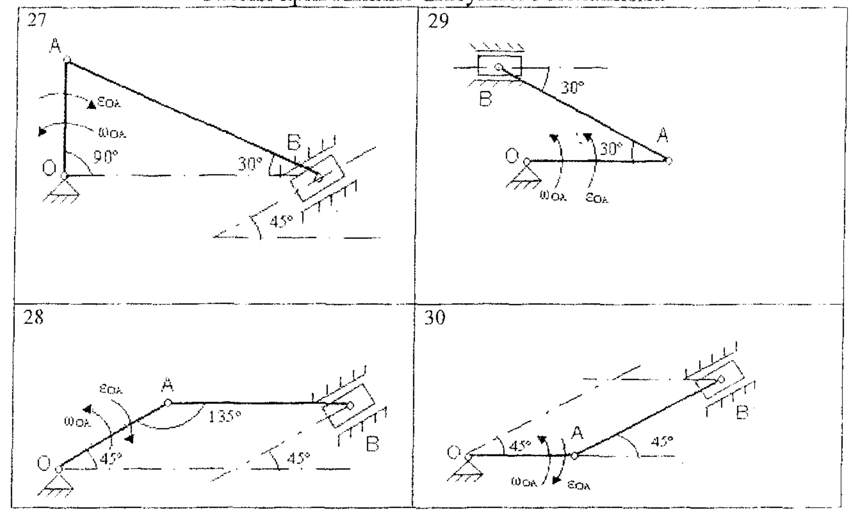
Продолжение табл. 7

Схемы кривошипно-шатунного механизма



Окончание табл. 7

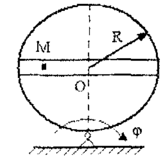
Схемы кривошипно-шатунного механизма



5. Сложное движение точки

5.1. Пример выполнения расчетно-графической работы

1. *Исходные данные* (рис. 5). $OM(t) = t^2 + t$; $\varphi(t) = t^2 - t$; $R = 4$ м, $t = 1$ с.



Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в указанный момент времени.

Рис. 5. Схема механизма

2. *Решение.* Определяем первоначально положение точки в заданный момент времени $OM = 2$ м. Для нахождения абсолютной скорости необходимо найти относительную и переносную скорости: V_{om}, $OM(t)' = 2t+1 = 3$ м/с; $V_{пер} = \omega OM = \varphi(t)' OM = (2t-1)\, OM = 2$ м/с.

$$V_{абс} = \sqrt{V_{om}^2 + V_{пер}^2 - 2V_{om}\, V_{om} \cos\beta}.$$

Угол β – угол между вектором относительной скорости и вектором переносной скорости.
$\cos\beta = OM\,/\sqrt{R^2 + OM^2} = 2/\sqrt{20} = 0{,}48$ Тогда $V_{абс}$=7,23 м/с.
Абсолютное ускорение находим согласно теореме Кориолиса.

5.2. Варианты заданий

В приведенных схемах рассматривается движение точки M в желобе вращающегося тела. По заданным уравнениям относительного движения $OM(t)$, переносного движения $\varphi(t)$ и геометрическим размерам определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в указанный момент времени, используя данные из таблиц 8 и 9.

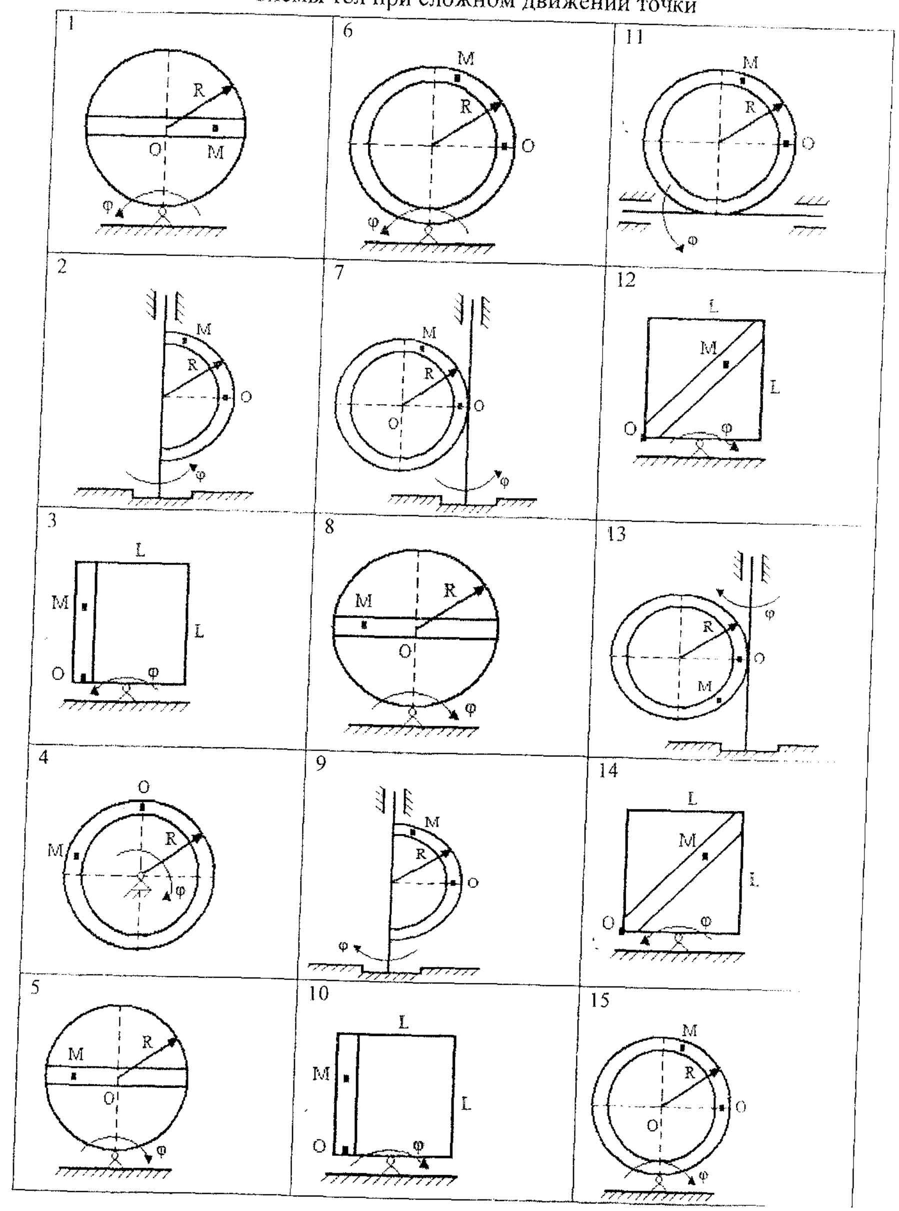
Таблица 8

Исходные данные для расчета

№ вар.	$OM(t)$, м	$\varphi(t)$, рад	R или L, м	t, с	№ вар.	$OM(t)$, м	$\varphi(t)$, рад	R или L, м	t, с
1	t^2-t	0,5t^2+t	20	1	16	t^2+t	t^2-t	6	2
2	5π(t^2-3)	3t^2-8t	20	2	17	5πt^2	t^2+t	20	2
3	t^3-4t	0,5t^2	6	2	18	t^2-t	4t-t^2	5	1
4	10πt^2	4t^2-2t	20	1	19	7π(2t^2-t)	t^2+t	10	1
5	2t^2+2t	0,5t^2	4	1	20	15π(t^2-t)	6t-4t^2	30	4
6	5π(2t^2+t)	2t^2	15	1	21	8πt^2	2t^2-t	20	1
7	10πt^2	2t^2-t	20	1	22	3t^2-t	t^2+3t	2	2
8	3t^2-t	t^2+3t	2	1	23	3π(t^2-2)	2(t^2-t)	20	1
9	5π(t^2-2)	2(t^2-t)	20	1	24	8t^2-2t	4t^2	2	1
10	8t^2-2t	4t^2	2	0,5	25	5π(2t^2+t)	2t^2	15	2
11	15π(t^2-t)	6t-4t^2	30	2	26	5π(t^2-3)	3t^2-8t	20	1
12	t^2+t-1	t^2-t	6	1	27	t^3-4t	0,5t^2	8	2
13	5πt^2	t^2+t	20	1	28	10πt^2	4t^2-2t	20	3
14	t^2-t	4t-t^2	4	1	29	2t^2+2t	0,5t^2	6	1
15	5π(2t^2-t)	t^2+t	10	1	30	t^2-t	0,5t^2+t	20	2

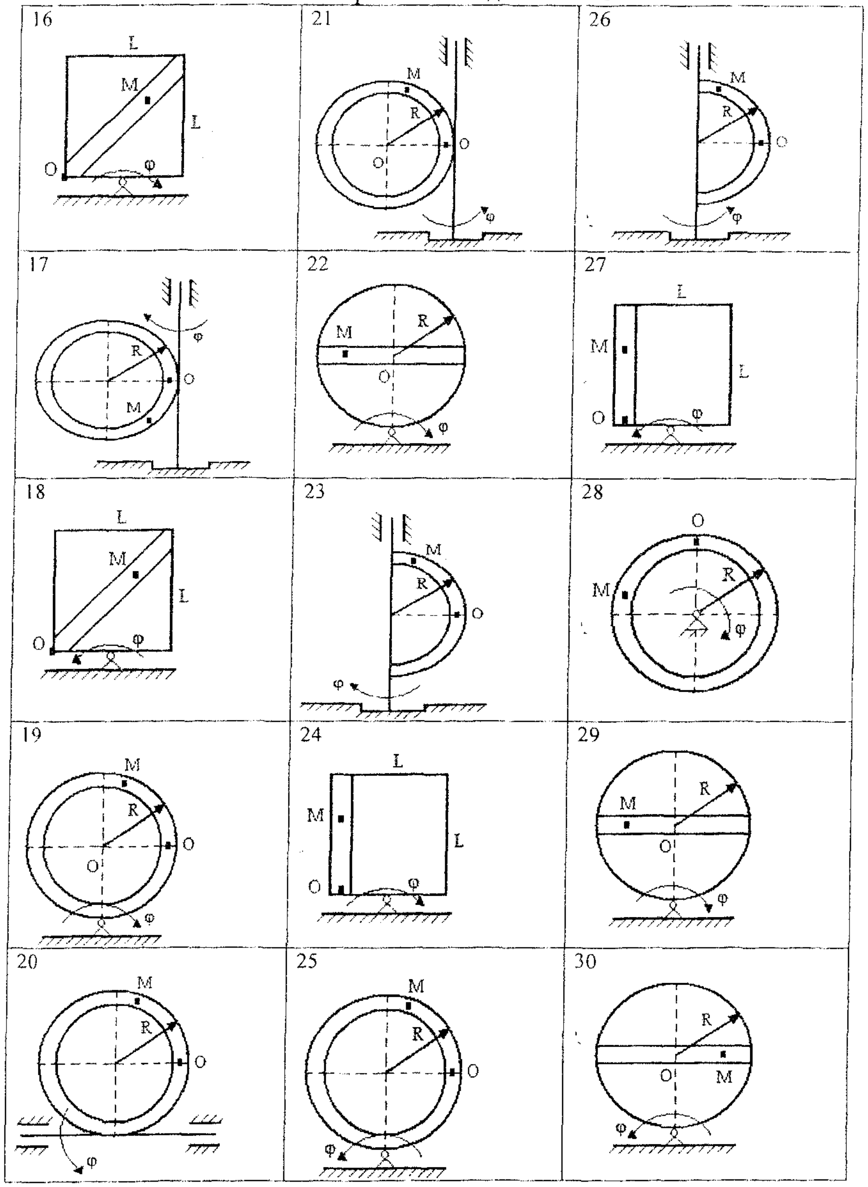
Таблица 9

Схемы тел при сложном движении точки



Окончание таблицы 9

Схемы тел при сложном движении точки



ДИНАМИКА

1. Основные понятия и определения

Общие теоремы динамики приведены в таблице 10, зависимость кинетической энергии тела от характера движения показана в таблице 11, а момент инерции однородных тел описан в таблице 12.

Таблица 10

Общие теоремы динамики

Теорема об изменении количества движения	$m\bar{V}_1 - m\bar{V}_0 = \sum \bar{F}t$
Теорема об изменении кинетической энергии	$mV_1^2/2 - mV_0^2/2 = \sum A_i = FS$

Таблица 11

Зависимость кинетической энергии тела от характера его движения

Поступательное движение	$T = ½mV_c^2$, V_c – скорость центра масс
Вращательное движение	$T = ½J_z\omega^2$, J_z – момент инерции тела относительно оси вращения
Плоскопараллельное движение	$T = ½mV_c^2 + ½J_z\omega^2$

Таблица 12

Момент инерции однородных тел

Тело	Параметры тела	Ось	Момент инерции
Стержень	L – длина, m – масса	Ось A перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$J_A = 1/3mL^2$
Тонкое круглое кольцо	R – радиус, m – масса	Ось C перпендикулярна плоскости кольца и проходит через его центр	$J_C = mR^2$
Круглая пластина или цилиндр	R – радиус, m – масса	Ось C перпендикулярна плоскости пластины и проходит через его центр	$J_C = 1/2mR^2$
Сплошная прямоугольная пластина	m – масса, A и B – стороны	Ось X вдоль стороны длиной A, ось Y – вдоль стороны длиной B	$J_X = 1/3mB^2$ $J_Y = 1/3mA^2$

Принцип Даламбера. Основой для построения теоретической механики служат законы Ньютона. Однако на основе законов Ньютона можно получить некоторые другие общие законы, позволяющие составить уравнения, описывающие движение механической системы. Такие законы получили название принципов аналитической механики. Одним из них является принцип Даламбера.

Пусть мы имеем систему, состоящих из n материальных точек. Выделим какую-нибудь из точек системы с массой m_k. Под действием приложенных к ней внешних и внутренних сил $\bar{F}_k^{в}$ и $\bar{F}_k^{i}$ (в которые входят и активные силы, и реакции связи) точка получает по отношению к инерциальным системам отсчета некоторое ускорение $\bar{a}_k$.

Тогда оказывается, что движение точки обладает следующим общим свойством: если в каждый момент времени к фактически действующим на точку силам $\bar{F}_k^{в}$и $\bar{F}_k^{i}$ прибавить силу инерции ,$\bar{F}_k^{u}$ то полученная система сил будет уравновешенной, т.е.:

$$\bar{F}_k^{в} + \bar{F}_k^{i} + \bar{F}_k^{u} = 0.$$

Это выражение отображает принцип Даламбера для одной материальной точки. Нетрудно убедиться, что оно эквивалентно второму закону Ньютона и наоборот. В самом деле, второй закон Ньютона для рассматриваемой точки дает $m_k\bar{a}_k = \bar{F}_k^{в} + \bar{F}_k^{i}$. Перенесем здесь член $m_k\bar{a}_k$ в правую часть равенства и придем к последнему соотношению.

Принцип Даламбера для системы: *если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме фактически действующих на ней внешних и внутренних сил, приложить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии, и к ней можно будет применять все уравнения статики.*

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их моментов относительно любого центра O равны нулю, причём по принципу отвердевания это справедливо для сил, действующих не только на твёрдое тело, но и на любую изменяемую систему. Тогда на основании принципа Даламбера верна приведенная ниже система.

$$\left.\begin{aligned} &\sum\left(\overline{F_k^{в}} + \overline{F_k^{i}} + \overline{F_k^{u}}\right) = 0 \\ &\sum\left[\overline{m}_0\left(\overline{F_k^{в}}\right) + m_0\left(\overline{F_k^{u}}\right)\right] = 0 \end{aligned}\right\}$$

2. Динамика механических систем с одной степенью свободы

2.1. План выполнения расчетно-графической работы

Задачу, представленную в пункте 2.2, необходимо решать по следующему плану:

1. Найти ускорение тела 1, используя теорему об изменении кинетической энергии.
$$T - T_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^i.$$
2. Найти ускорение тела 1, используя принцип Даламбера.
3. Найти ускорение тела 1, используя общее уравнение динамики.
4. Найденные ускорения, при правильном решении должны совпадать, возможна небольшая погрешность.

2.2. Варианты заданий

Механическая система под действием силы тяжести приходит в движение из состояния покоя. Начальное положение системы показано на схемах (табл. 14). Учитывая трение скольжения тела 1 и сопротивление качению тела 3, определить ускорение тела 1 в тот момент времени, когда пройденный им путь станет равным S. Задачу необходимо решить тремя способами: используя теорему об изменении кинетической энергии, используя принцип Даламбера и используя общее уравнение динамики (с помощью данных из таблицы 13 и 14).

Таблица 13

Исходные данные для расчета

№	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_2	i_3	α	β	f	δ,	S,
вар.	кг				см				град			см	см
1	M	m	$1/9m$	m	-	-	-	-	45	-	0,10	-	2
2	M	$1/4m$	$1/4m$	$1/5m$	-	-	-	-	60	-	0,10	-	3
3	M	$1/2m$	$1/3m$	-	-	30	-	20	30	45	0,22	0,20	2
4	M	$1/3m$	$1/4m$	-	-	21	-	15	30	60	0,20	0,10	2
5	M	$1/4m$	m	$1/9m$	-	-	-	-	60	-	0,10	-	2
6	M	$4m$	$1/5m$	$4/3m$	-	-	-	-	60	-	0,10	-	2
7	M	$1/3m$	$1/4m$	$1/9m$	-	-	-	-	45	-	0,20	-	2,5
8	M	$1/3m$	$1/9m$	-	-	24	-	18	30	45	0,15	0,24	3
9	M	$2m$	m	$0,5m$	-	15	-	10	45	60	0,12	0,10	1,5
10	M	$3m$	m	-	-	28	-	-	30	45	0,10	0,28	1,5
11	M	$1/3m$	$1/9m$	$1/5m$	-	-	-	-	45	-	0,15	-	4
12	M	$5m$	$4m$	-	-	40	-	-	30	60	0,26	0,15	3
13	M	$4m$	$1/5m$	$4/5m$	-	-	-	-	60	-	0,20	-	2,5
14	M	$1/2m$	$1/4m$	$1/3m$	-	-	-	-	60	-	0,10	-	3
15	M	$4m$	$3m$	-	-	45	-	-	60	60	0,10	0,25	2

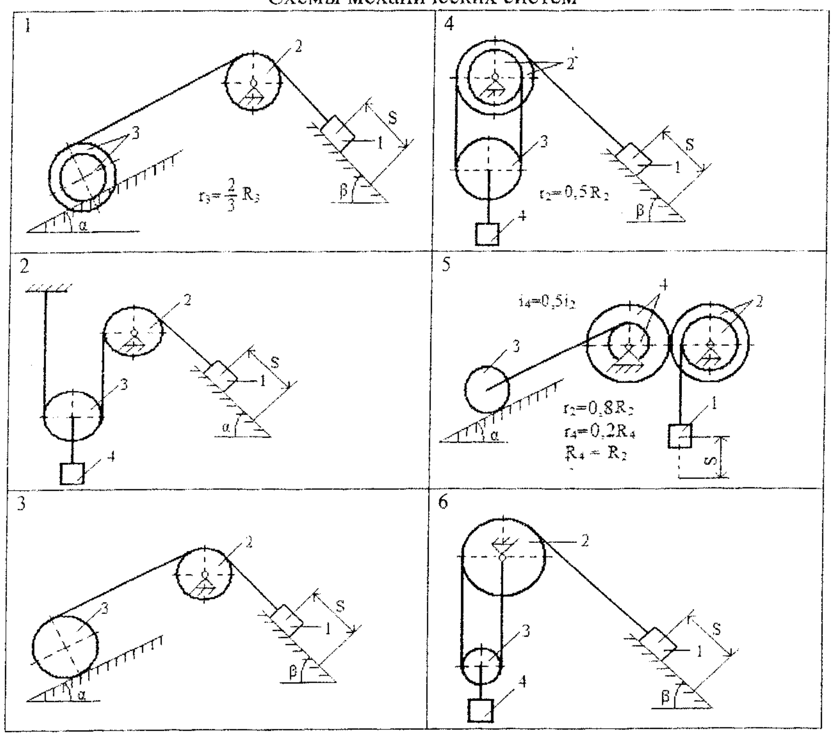
Окончание табл. 13

Исходные данные для расчета

№	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_2	i_3	α	β	f	δ,	S,
вар.	кг				см				град			см	см
16	m	$1/4m$	$1/8m$	m	-	35	-	-	30	45	0,20	0,20	2
17	m	$1/2m$	$1/4m$	-	-	30	-	25	30	60	0,17	0,15	2,5
18	m	$1/3m$	$1/4m$	$1/8m$	-	-	-	-	60	-	0,25	-	3
19	m	$2m$	$2m$	-	16	25	14	-	30	-	-	0,20	2
20	m	$1/2m$	$1/3m$	-	-	30	-	-	45	30	0,15	0,20	1,75
21	m	$3m$	$2m$	-	-	40	-	-	60	45	0,10	0,20	2
22	m	$1/4m$	$1/5m$	m	-	30	-	-	45	45	0,25	0,20	2,5
23	m	$1/3m$	$1/5m$	-	-	20	-	15	45	60	0,20	0,10	3
24	m	$2m$	$3m$	-	15	25	17	-	30	-	-	0,25	3
25	m	$3m$	$1/5m$	$4/5m$	-	-	-	-	45	-	0,25	-	2
26	m	$1/2m$	$1/5m$	$1/3m$	-	-	-	-	60	-	0,15	-	2,5
27	m	$1/2m$	$1/3m$	-	-	30	-	20	30	60	0,15	0,20	2,5
28	m	$1/3m$	$1/4m$	$1/8m$	-	-	-	-	45	-	0,15	-	2
29	m	$2m$	$1,5m$	$0,5m$	-	20	-	10	45	60	0,2	0,10	1,5
30	m	$1/4m$	$1/4m$	$1/4m$	-	-	-	-	45	-	0,10	-	2

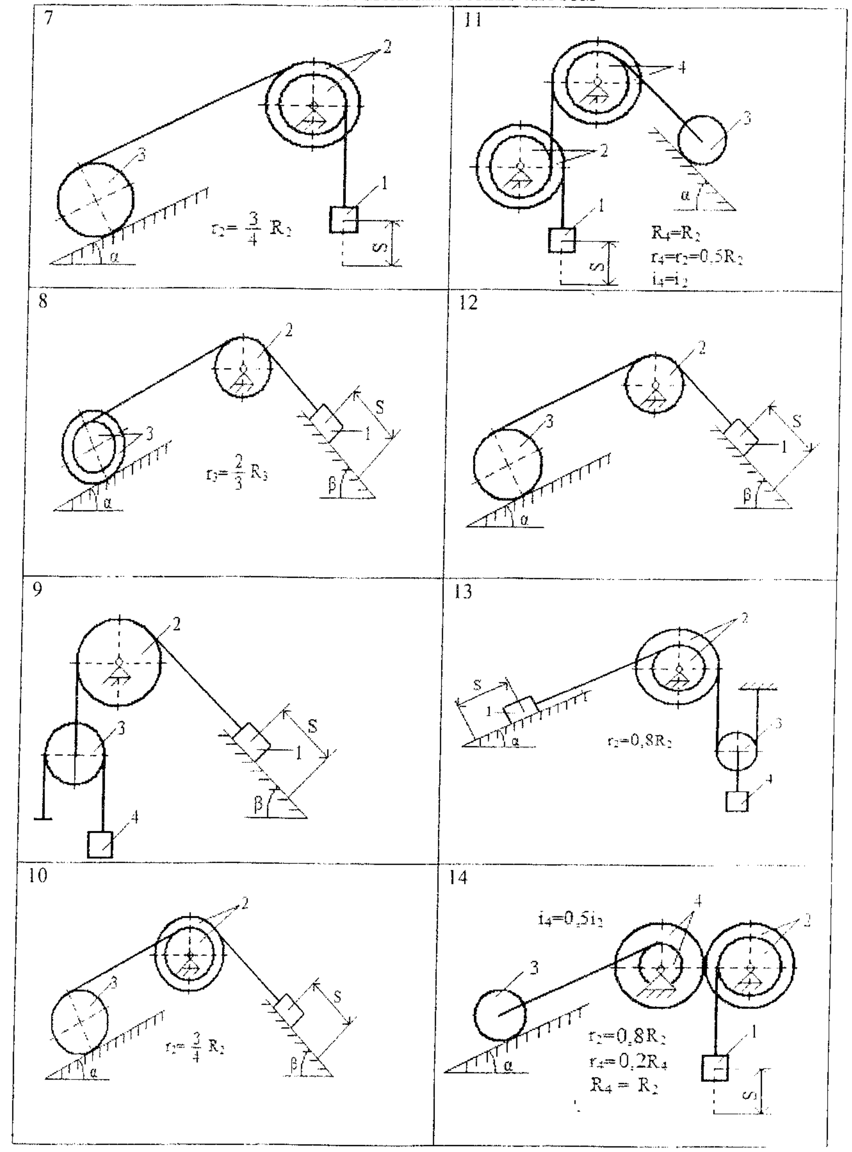
Таблица 14

Схемы механических систем



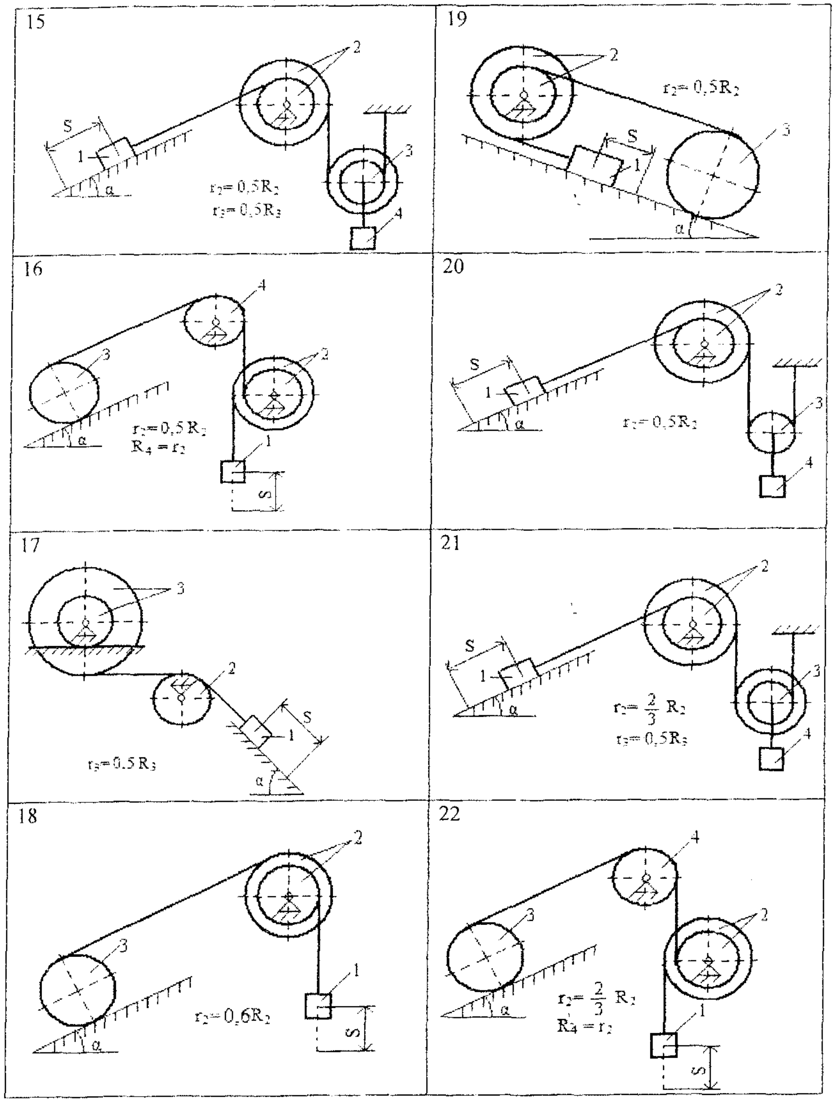
Продолжение табл. 14

Схемы механических систем



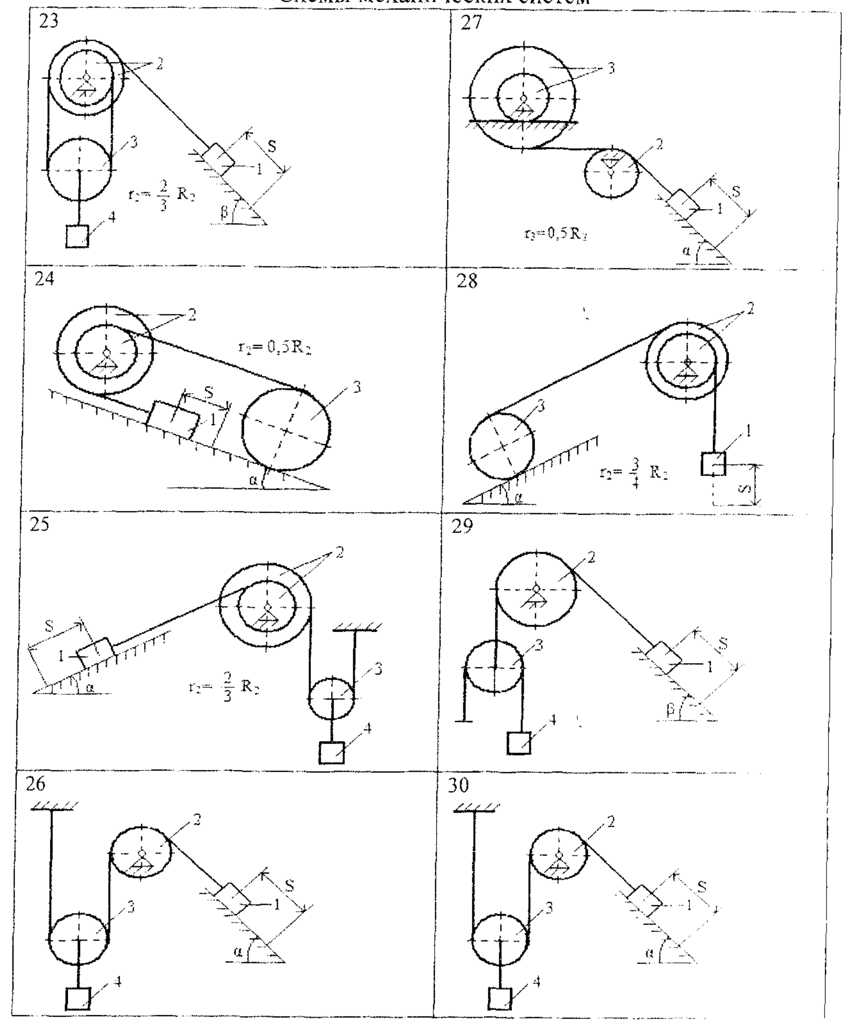
Продолжение табл. 14

Схемы механических систем



Окончание табл. 14

Схемы механических систем



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теоретическая механика. Терминология. Вып. 90. – М. : Наука, 1966. – 40 с.
2. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики : учебник [для вузов] / С.М. Тарг. – 14-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2004. – 416 с.
3. Попов, М.В. Теоретическая механика. Краткий курс : учебник [для вузов] / М.В. Попов. – М. : Наука, 1986. – 336 с.
4. Вебер, Г.Э. Лекции по теоретической механике : учеб. пособие / Г.Э. Вебер, С.А. Ляпцев. – Екатеринбург : УГГА, 1998. – 272 с.
5. Анкудинов, Д.Т. Динамика механических систем с одной степенью свободы : учеб. пособие / Д.Т. Анкудинов, В.А. Калентьев, Л.Т. Раевская [и др.]. – Екатеринбург : УГЛТУ, 1999. – 120 с.
6. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике : учебник [для вузов] / И.В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 447 с.
7. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики : учебник [для вузов] / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М. : Высш. шк., 1984. – Ч. 1. – 343 с.
8. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики : учебник [для вузов] / А.А. Яблонский. – М. ; Л. : Высш. шк., 1977. – Ч. 2. – 430 с.