Федеральное агентство по образованию РФ
Уральский государственный лесотехнический университет

Кафедра Сопротивления материалов и теоретической механики

В. А. Калентьев
В. М. Калинин
Л. Т. Раевская
Н. И. Чащин

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

Методические указания
по выполнению расчетно-графических работ
с вариантами заданий.
Для студентов очной и заочной формы обучения
направлений 150400, 270200, 220300 «Технологические машины и оборудование», «Транспортное строительство», «Автоматизированные технологии и производства» специальностей 150405, 270205, 220301
Дисциплина — теоретическая механика.

Екатеринбург
2005

Печатается по рекомендации методической комиссии лесоинженерного факультета.
Протокол № от 2004 г.

Редактор
Компьютерная верстка Наумов М. В.

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16	Поз.	
Плоская печать	Печ. л.	Тираж	экз.
Заказ №		Цена	руб. коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

Введение

Произвольная пространственная система сил является наиболее сложной темой в разделе «Статика», в которой изучается равновесие тел под действием системы сил, как угодно расположенных в пространстве. Теоретические основы темы хорошо изложены в учебной литературе. Но практика показывает, что студенты испытывают серьёзные затруднения при решении практических задач на эту тему, особенно при нахождении моментов сил относительно осей.

Задачей настоящего методического указания является оказание помощи студентам при самостоятельном изучении темы «Произвольная пространственная система сил», а также в приобретении практических навыков решения задач.

В предлагаемой работе изложены также наиболее важные особенности методики применения теоретических положений к решению задач.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПРИЗВОЛЬНУЮ ПРОСТРАНСТВЕННУЮ СИСТЕМУ СИЛ

Прежде чем приступить к решению задач на произвольную пространственную систему сил, необходимо твердо знать, как находится проекция силы на плоскость и ось, а также момент силы относительно оси. При нахождении проекции силы на ось в случае пространственной системы сил часто приходится применять двойное проецирование. Пусть необходимо найти проекцию силы **F** на ось X (рис. 1). Для этого вначале спроецируйте силу на плоскость OXY, в которой находится ось X, и найдите проекцию силы на плоскость:

$$F_{xy} = F\cos\alpha \tag{1}$$

Затем спроецируйте полученную проекцию на ось X и получите проекцию силы на ось:

$$F_x = F_{xy}\cos\beta = F\cos\alpha\cos\beta. \tag{2}$$

Аналогично находится проекция силы на ось Y:

$$F_y = F_{xy}\sin\beta = F\cos\alpha\sin\beta. \tag{3}$$

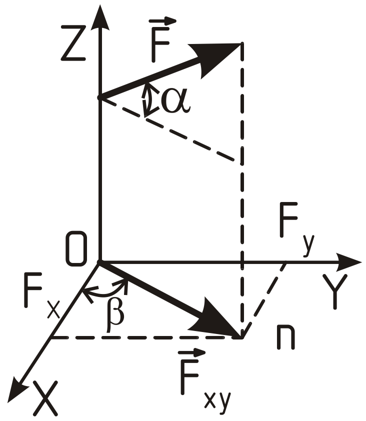


Рис. 1.

Теперь рассмотрим, как определяется момент силы относительно оси. Пусть имеется тело, которое может вращаться вокруг оси Z (рис. 2, очертания тела, как не имеющие значения для вывода, на чертеже не изображены). На тело действует сила **F**, приложенная к точке А тела. Необходимо найти момент силы относительно оси Z. Для нахождения момента силы относительно оси придерживайтесь следующего порядка:

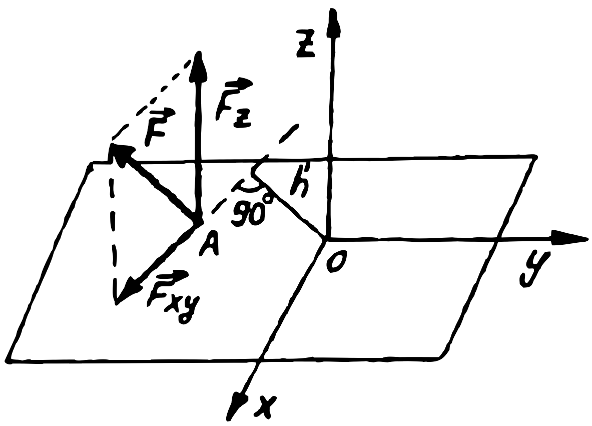


Рис. 2.

Проведите через точку А плоскость XY, перпендикулярную оси вращения Z, которая пересекается с плоскостью XY в точке О.

Разложите силу **F** на две составляющие: $\mathbf{F_z}$, параллельную оси Z, и $\mathbf{F_{xy}}$, лежащую в плоскости XY и являющуюся одновременно проекцией силы **F** на эту плоскость.

Составляющая $\mathbf{F_z}$ не может повернуть тело вокруг оси. Она только стремится сдвинуть тело вдоль оси Z. Отсюда следует, что всё вращательное движение, создаваемое силой **F** вокруг оси Z, будет одинаково с вращательным действием, создаваемым её составляющей $\mathbf{F_{xy}}$ по отношению к оси Z или точке О.

Опустите из точки пересечения оси Z с плоскостью XY (рис. 2) перпендикуляр на линию действия составляющей $\mathbf{F_{xy}}$ и найдите плечо h силы F_{xy} относительно точки O.

Вычислите произведение $F_{xy}\cdot h$.

Определите знак момента силы $\mathbf{F_{xy}}$ относительно точки O.

В теоретической механике условились считать момент силы относительно оси положительным, если с положительного конца оси поворот, совершаемый составляющей $\mathbf{F_{xy}}$ этой силы $\mathbf{F}$, виден происходящим против хода часовой стрелки и отрицательным, если по ходу часовой стрелки. Момент силы относительно оси является алгебраической величиной, а не векторной, и записывается в виде

$$M_z(\mathbf{F}) = M_0(\mathbf{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h \qquad (4)$$

Обратите внимание на то, что из определения моментов силы относительно данной оси Z можно сделать следующие выводы:

1. Момент силы **F** относительно данной оси Z не изменится при переносе точки А приложения этой силы вдоль линии её действия, так как при этом не изменяется ни проекция F_{xy} силы **F** на плоскость, ни плечо h.

2. Момент силы **F** относительно данной оси Z равен нулю в тех случаях, когда линия действия этой силы и ось Z находятся в одной плоскости. При этом возможны следующие частные случаи: а) линия действия силы **F** пересекает ось Z ($h = 0$); б) сила **F** параллельна оси Z ($F_{xy} = 0$).

3. Если сила **F** перпендикулярна к оси Z, то модуль её момента относительно этой оси равен произведению модуля силы на кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью.

Следует также учесть, что при решении задач на произвольную пространственную систему сил, для нахождения момента силы, которая не параллельна ни одной из осей, эту силу удобнее всего разложить на составляющие, направленные вдоль осей координат, и, согласно теореме Вариньона, найти момент каждой составляющей относительно оси. Число составляющих сил равно числу проекций силы на оси координат.

При решении задач на произвольную пространственную систему сил пользуются следующими уравнениями равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\mathbf{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_y(\mathbf{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_z(\mathbf{F}_i) = 0. \qquad (5)$$

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из трех любым образом выбранных координатных осей равнялась нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов относительно каждой из этих осей так же равнялась нулю.

Уравнения (5) называются условиями равновесия произвольной пространственной системы сил в аналитической форме. Пользуясь уравнениями равновесия (5) произвольной пространственной системы сил, можно найти уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил и пространственной системы сходящихся сил.

Пусть на твердое тело действует пространственная система параллельных сил (рис. 3). В связи с тем, что выбор координатных осей произволен, можно выбрать координатные оси так, чтобы ось Z была параллельна силам. Тогда проекции каждой силы на оси X и Y и их моменты относительно оси Z будут равны нулю. Следовательно, уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \ \sum_{i=1}^{n} M_z(\mathbf{F}_i) = 0$$

удовлетворяются независимо от того, находится ли данная система сил в равновесии или нет, поэтому они перестают быть условиями равновесия. Поэтому система уравнений (5) даст только три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0; \ \sum_{i=1}^{n} M_x(\mathbf{F}_i) = 0; \ \sum_{i=1}^{n} M_y(\mathbf{F}_i) = 0. \qquad (6)$$

Для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на ось, параллельную этим силам, равнялась нулю и чтобы алгебраическая сумма их моментов относительно каждой из двух осей, перпендикулярных к этим силам также равнялась нулю.

Если мы имеем пространственную систему сходящихся сил, то начало осей координат можно поместить в точке пересечения линий действия сил. Тогда равенства

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\mathbf{F}_i) = 0; \ \sum_{i=1}^{n} M_y(\mathbf{F}_i) = 0; \ \sum_{i=1}^{n} M_z(\mathbf{F}_i) = 0$$

удовлетворяются независимо от того, что находится ли данная система сил в равновесии или нет, а потому перестает быть условием равновесия. Поэтому система (5) даст и здесь только три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0. \qquad (7)$$

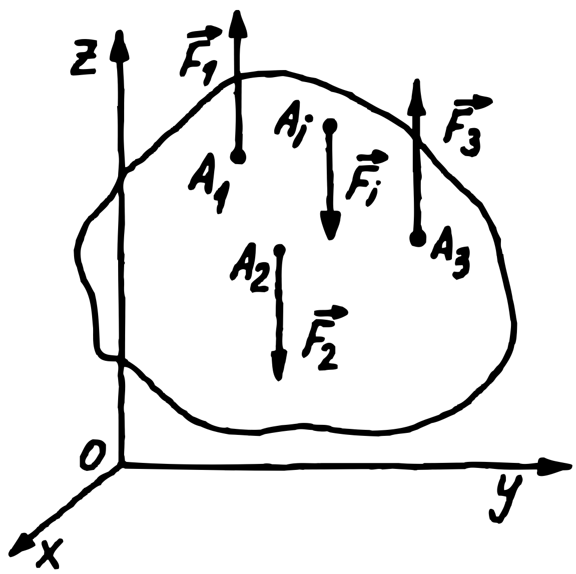


Рис. 3.

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из трех произвольным образом выбранных координатных осей.

При решении задач на произвольную пространственную систему сил придерживайтесь следующего порядка:

Выберите тело, равновесие которого должно быть рассмотрено в данной задаче.

Освободите это тело от связей и изобразите все действующие на тело активные силы и реакции отброшенных связей.

Выберите оси координат и составьте уравнения равновесия.

Вычислите неизвестные величины.

Оси координат можно выбирать произвольно. Полученные уравнения равновесия будут решаться проще, если оси координат направлять по возможности параллельно неизвестным реакциям связи, а начало координат помещать там, где пересекаются линии действий большинства неизвестных связей.

Пример. Однородная плита весом G крепится в точке A с помощью шарового шарнира, в точке B — с помощью цилиндрического шарнира и поддерживается в горизонтальном положении канатом CE. В точке D на плиту действует сила P. Определить реакции в точках B, A, а также натяжение каната CE (рис. 4).

Решение. Освободите плиту от связей, изобразите все действующие силы и выберите оси координат (рис.5).

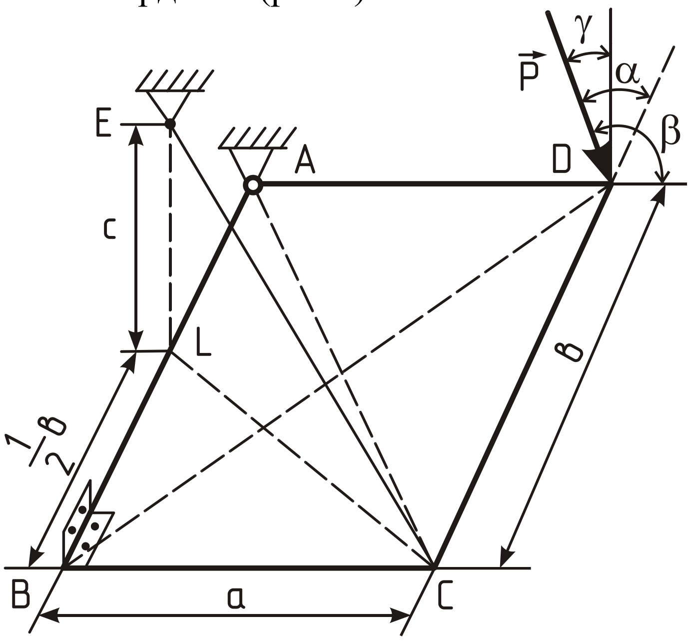


Рис. 4.

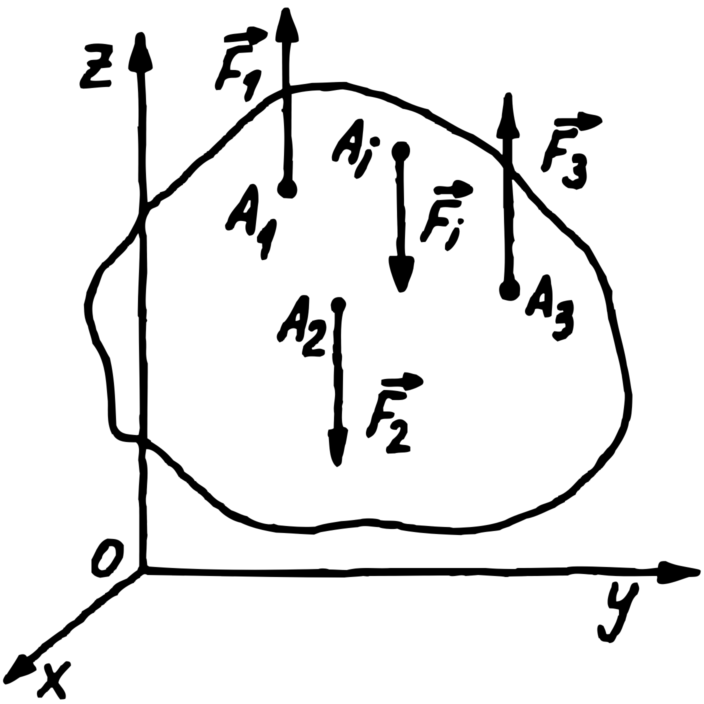


Рис. 5.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad X_A + P\cos\alpha - T\cos\varphi\sin\psi = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad Y_A + Y_B - P\cos\beta - T\cos\varphi\cos\psi = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad Z_A + Z_B + T\sin\varphi - P\cos\gamma - G = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\mathbf{F}_i) = 0; \qquad aT\sin\varphi - aP\cos\gamma - G\frac{a}{2} = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\mathbf{F}_i) = 0; \qquad G\frac{b}{2} - bT\sin\varphi - Z_B b = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\mathbf{F}_i) = 0;$$

$$Y_B b - aP\cos\alpha + aT\cos\varphi\sin\psi - bT\cos\varphi\sin\psi = 0,$$

где тригонометрические функции вычисляются по следующим соотношениям:

$$\cos\varphi = \frac{CL}{CE} = \frac{\sqrt{a^2 + (b/2)^2}}{\sqrt{a^2 + (b/2)^2 + c^2}}; \qquad \sin\varphi = \frac{EL}{CE};$$

$$\cos\psi = \frac{BC}{CL}; \qquad \sin\psi = \frac{BL}{CL}.$$

Неизвестные реакции связей получаются их четвертого уравнения:

$$T = \frac{P\cos\gamma + \frac{G}{2}}{\sin\varphi}.$$

Из пятого уравнения получается соотношение для реакции Z_B:

$$Z_B = \frac{G}{2} - T\sin\varphi.$$

Из шестого уравнения реакция Y_B получается в виде

$$Y_B = \frac{1}{b}\left(aP\cos\alpha + bT\cos\varphi\cos\psi - aT\cos\varphi\sin\psi\right).$$

Из первого, второго и третьего уравнений для реакций шарового шарнира реакции X_A, Y_A, Z_A получаем следующие соотношения:

$$X_A = T\cos\varphi\sin\psi - P\cos\alpha;$$
$$Y_A = P\cos\beta + T\cos\varphi\cos\psi - Y_B;$$
$$Z_A = P\cos\gamma + G - T\sin\varphi - Z_B.$$

Задание. Определить реакции опор твердого тела. Найти реакции опор конструкции. Схемы конструкций показаны на рис. 6–13. Необходимые для расчета исходные данные приведены в таблице.

Задание

Определить реакции опор твердого тела. Найти реакции опор конструкции.

Схемы конструкций показаны на рис. 6–13. Необходимые для расчета исходные данные приведены в таблицах.

Таблица 3

Исходные данные

Вариант	силы, кН			размеры, см				
	Q	**T**	**G**	**a**	**b**	**c**	**R**	**r**
1	2	—	20	20	30	10	15	5
2	4	—	2	20	10	30	10	10
3	20	—	18	400	400	450	—	—
4	3	—	2	30	20	40	15	10
5	5	—	3	30	40	20	20	15
6	1	4	2	40	30	20	20	10
7	—	3	1	30	10	5	18	6
8	4	6	3	20	40	15	20	10
9	5	—	3	20	13	10	30	40
10	1	4	2	30	40	20	20	10
11	—	2	1	20	30	15	15	10
12	4	—	1	25	20	8	15	10
13	10	—	5	40	30	20	25	15
14	—	2	1	30	90	20	30	10
15	3	—	2	60	20	40	20	5
16	4	—	2	50	20	—	—	—
17	2	—	1	15	10	20	20	5
18	6	—	2	60	40	60	—	—
19	—	8	2	20	30	40	20	15
20	4	—	—	60	40	20	—	—
21	2	—	—	40	60	30	—	—
22	—	—	5	20	50	30	—	—
23	—	—	4	40	30	50	—	—
24	5	—	2	—	—	—	—	—
25	—	—	3	50	50	60	—	—
26	—	—	1	20	60	40	—	—
27	10	—	—	50	30	50	—	—
28	35	—	32	400	200	200	—	—
29	—	4	3	15	20	15	15	10
30	3	—	—	40	40	10	—	—

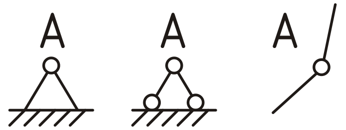
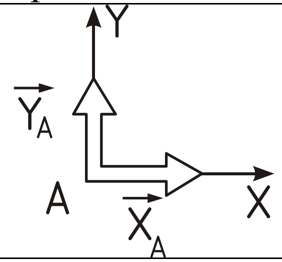
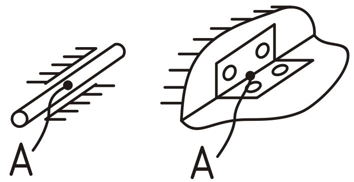
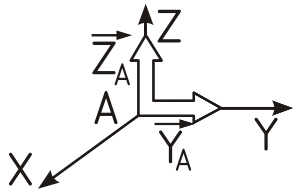
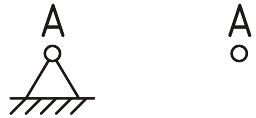
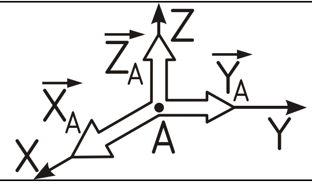
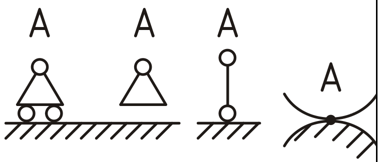
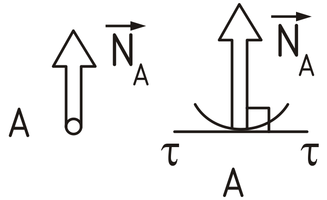
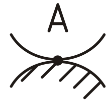
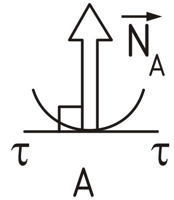
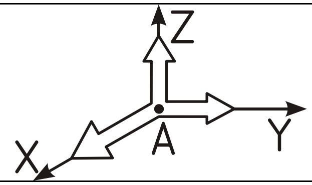
Таблица 2

Варианты заданий

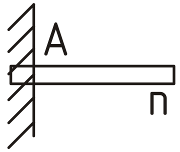
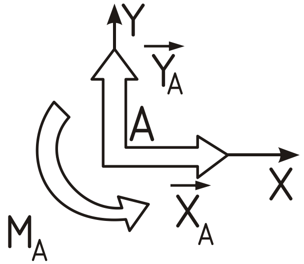
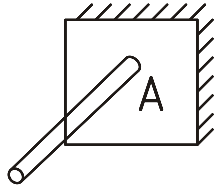
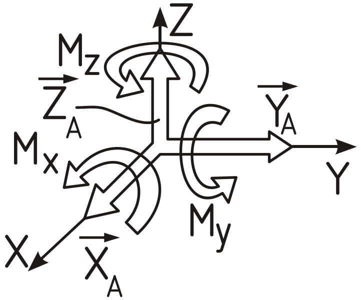
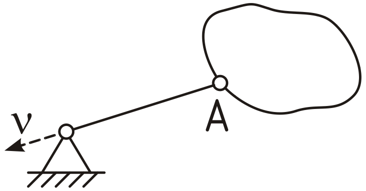
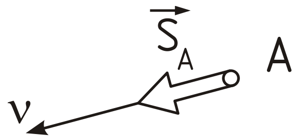
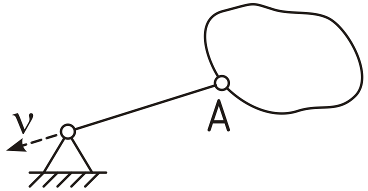
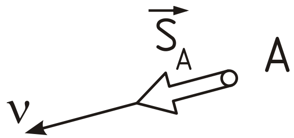
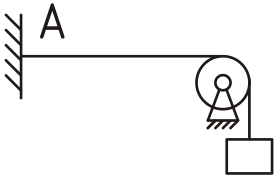
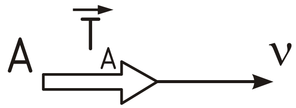
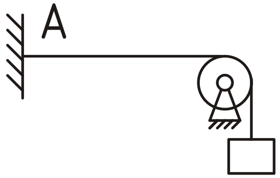
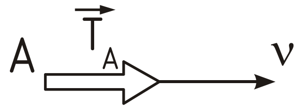
Вариант	Задания
1	1.1; 1.2; 1.4; 1.5; 1.9; 1.12; 1.13; 1.15; 1.17
2	2.1; 2.2; 2.4; 2.5; 2.9; 2.12; 2.13; 2.15; 2.17
3	3.3; 3.18; 3.28
4	4.1; 4.2; 4.4; 4.5; 4.9; 4.12; 4.13; 4.15; 4.17
5	5.1; 5.2; 5.4; 5.5; 5.9; 5.12; 5.13; 5.15; 5.17
6	6.6; 6.8; 6.10
7	7.7; 7.11; 7.14; 7.19; 7.29
8	8.6; 8.8; 8.10
9	9.1; 9.2; 9.4; 9.5; 9.9; 9.12; 9.13; 9.15; 9.17
10	10.6; 10.8; 10.10
11	11.7; 11.11 11.14 11.19 11.29
12	12.1 12.2; 12.4; 12.5; 12.9; 12.12; 12.13; 12.15; 12.17
13	13.1; 13.2; 13.4; 13.5; 13.9; 13.12; 13.13; 13.15; 13.17
14	14.7; 14.11; 14.14; 14.19; 14.29
15	15.1; 15.2; 15.4; 15.5; 15.9; 15.12; 15.13; 15.15; 15.17
16	16.16
17	17.1; 17.2; 17.4; 17.5; 17.9; 17.12; 17.13; 17.15; 17.17
18	18.3; 18.18; 18.28
19	19.7; 19.11; 19.14; 19.19; 19.29
20	20.20; 20.21; 20.27; 20.30
21	21.20; 21.21; 21.27; 21.30
22	22.22; 22.23; 22.25; 22.26
23	23.22; 23.23; 23.25; 23.36
24	24.24
25	25.22; 25.23; 25.25; 25.26
26	26.22; 26.23; 26.25; 26.26
27	27.20; 27.21; 27.27; 27.30
28	28.3; 28.18; 28.28
29	29.7; 29.11; 29.14; 29.19; 29.29
30	30.20; 30.21; 30.27; 30.30

Приложение

Связи и их реакции в плоских и пространственных системах

Название связи	Плоская система		Пространственная система	
	условное обозначение связи	составляющие реакции связи	условное обозначение связи	составляющие реакции связи
Гладкий цилиндрический шарнир (шарнирно-неподвижная опора*)				
Гладкий сферический шарнир				
Гладкая опорная поверхность (шарнирно-подвижная опора**)				
Гладкий подпятник				

Приложение
(окончание)

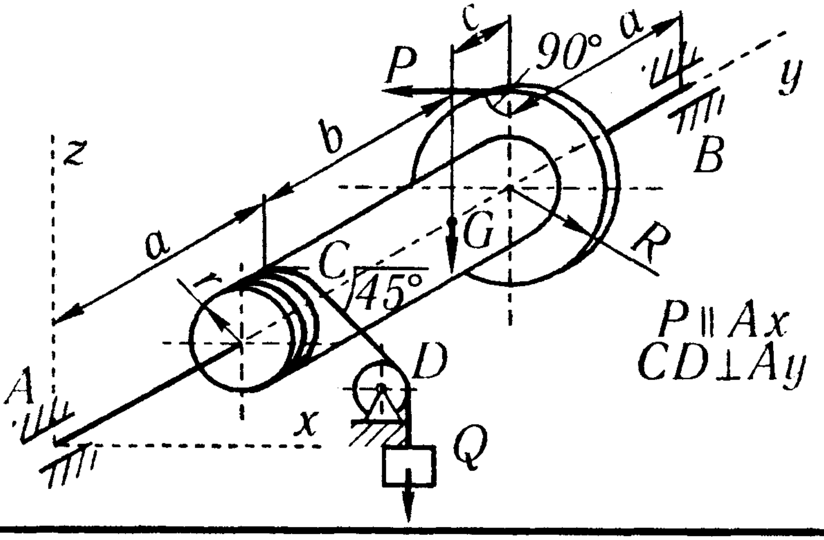
Название связи	Плоская система		Пространственная система	
	условное обозначение связи	составляющие реакции связи	условное обозначение связи	составляющие реакции связи
Жесткая заделка				
Невесомый прямолинейный тонкий стержень				
Гибкая связь				

* По терминологии курса «Сопротивление материалов» (для первых двух схем условного обозначения)

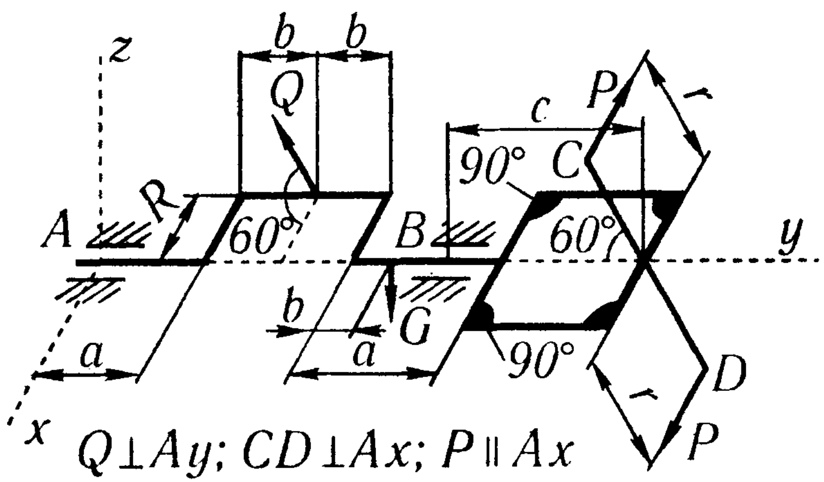
** По терминологии курса «Сопротивление материалов» (для первых двух схем условного обозначения)

Таблица 1

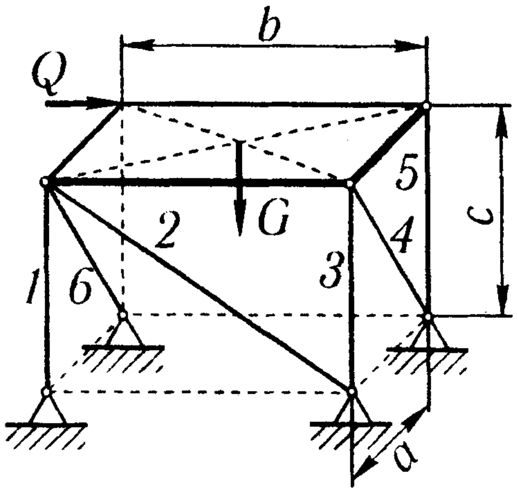
1



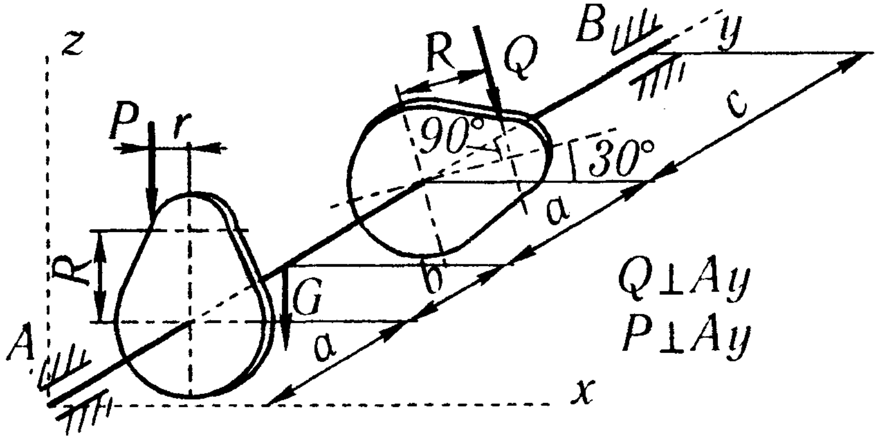
2



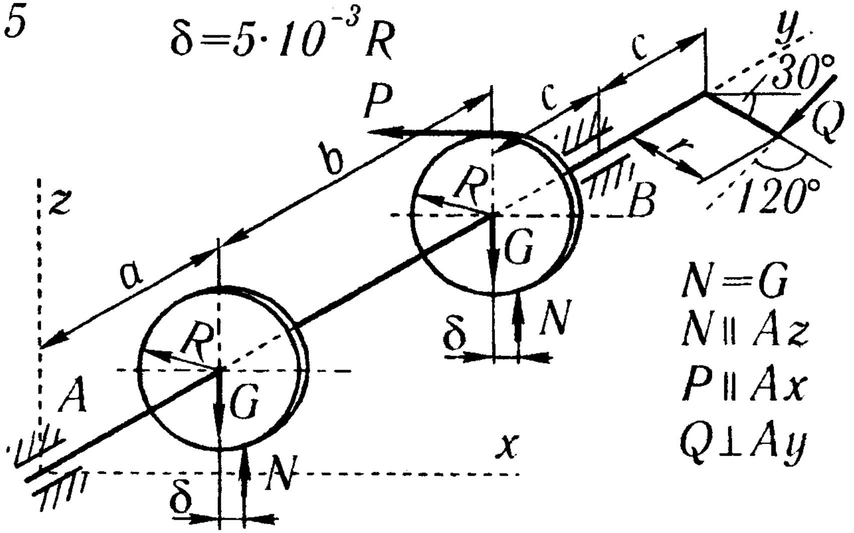
3



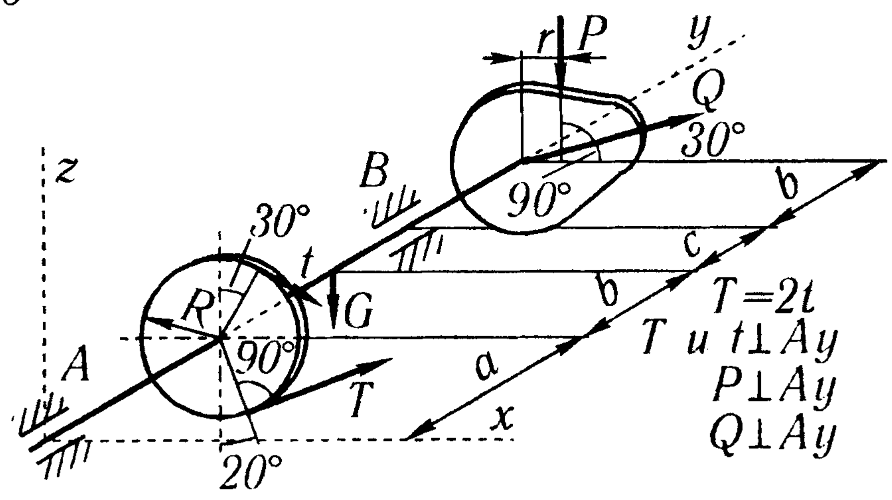
4



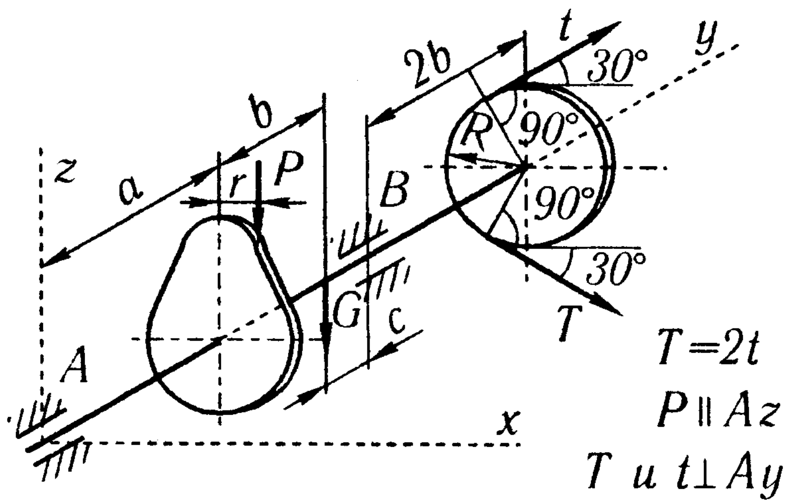
5


δ=5·10⁻³R
P
b
c
c
y
30°
Q
r
120°
z
R
B
G
a
N
δ
R
A
G
x
N
δ
N=G
N ∥ Az
P ∥ Ax
Q ⊥ Ay

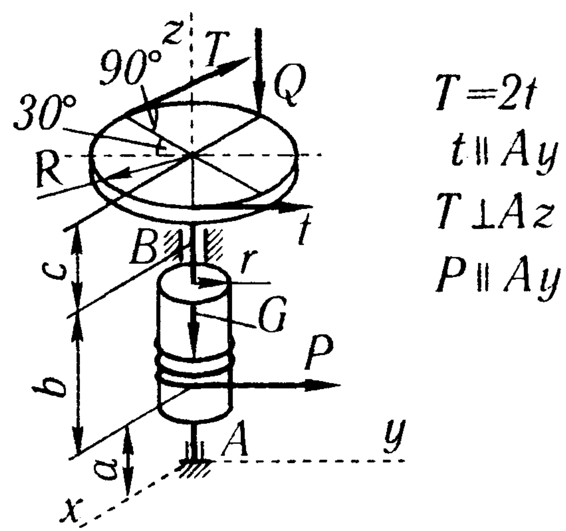
6


r
P
y
Q
30°
z
B
90°
b
30°
t
G
c
R
b
A
90°
a
T
x
20°
T=2t
T и t ⊥ Ay
P ⊥ Ay
Q ⊥ Ay

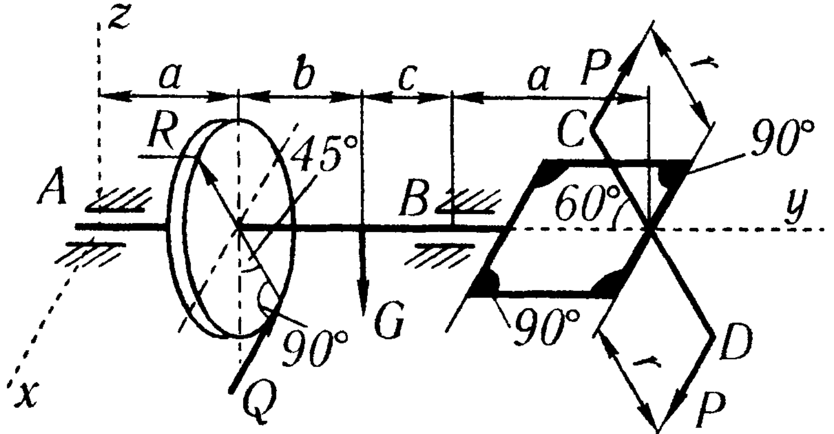
7


t
y
2b
30°
b
R
90°
z
a
r
P
B
90°
30°
G
c
T
A
x
T=2t
P ∥ Az
T и t ⊥ Ay

8

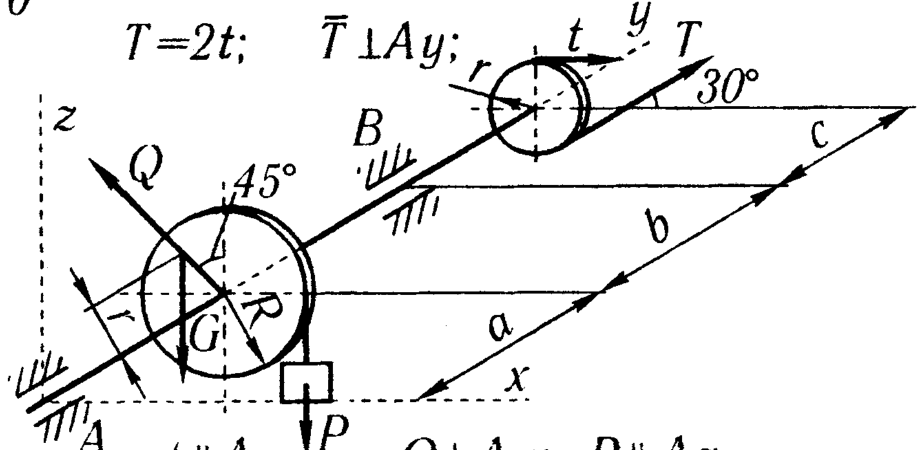

z
T
90°
Q
30°
R
t
B
r
c
G
P
b
A
y
a
x
T=2t
t ∥ Ay
T ⊥ Az
P ∥ Ay

9



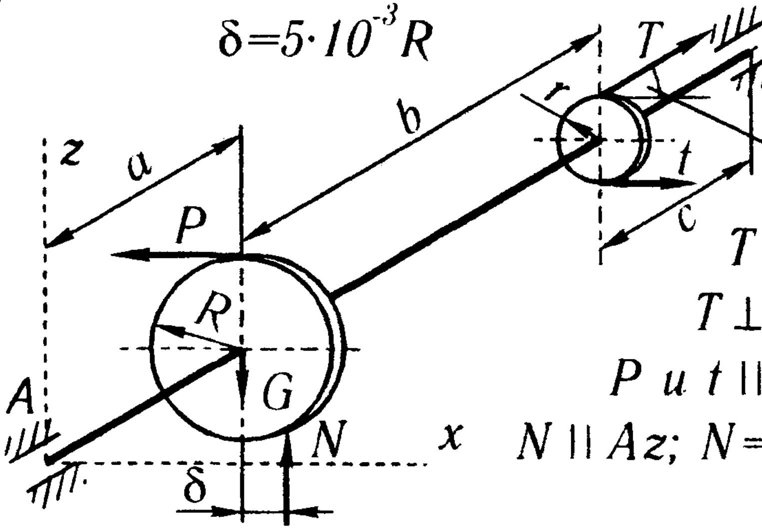
$Q \perp Ay$; $P \parallel Ax$; $CD \perp Ax$

10



$t \parallel Ax$; $Q \perp Ay$; $P \parallel Az$

11



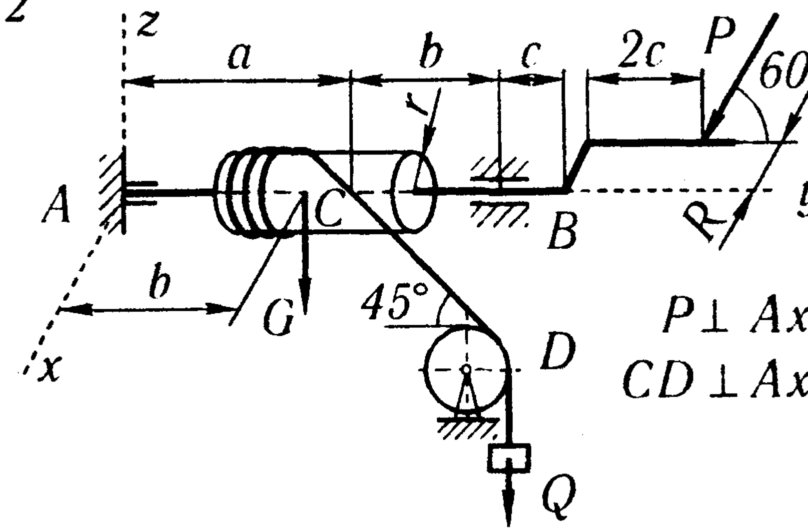
$T=2t$

$T \perp Ay$

P и $t \parallel Ax$

$N \parallel Az$; $N=2G$

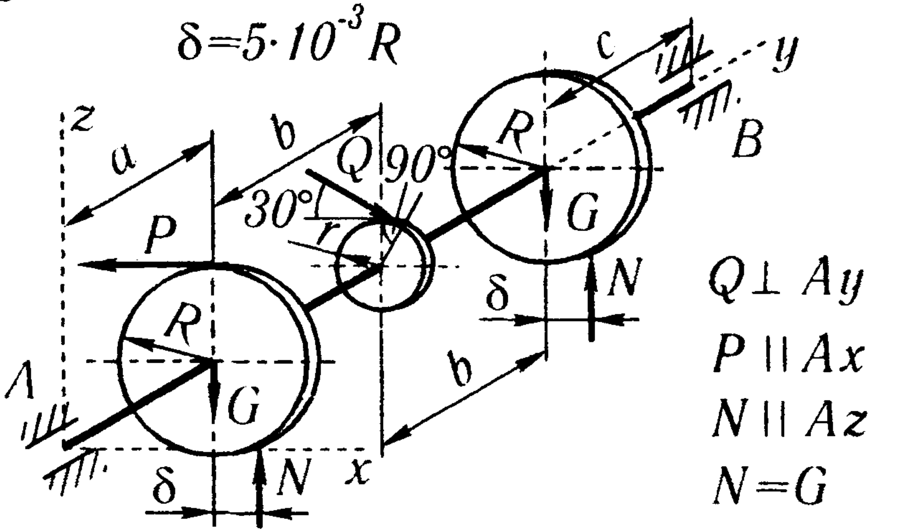
12



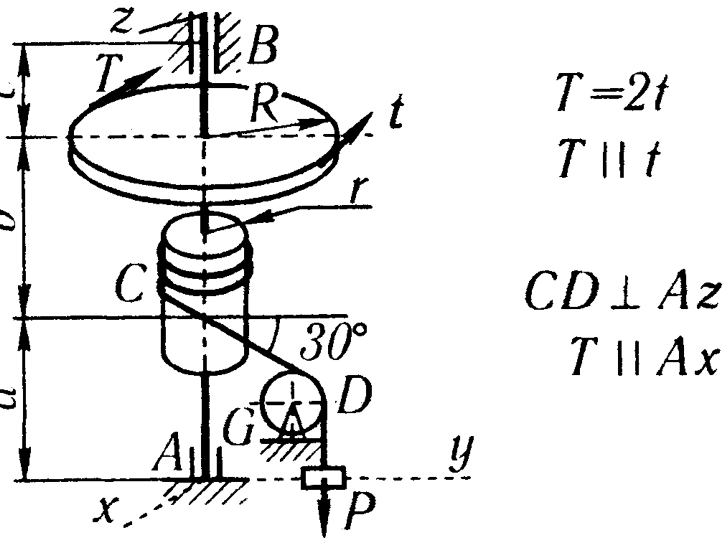
$P \perp Ax$

$CD \perp Ax$

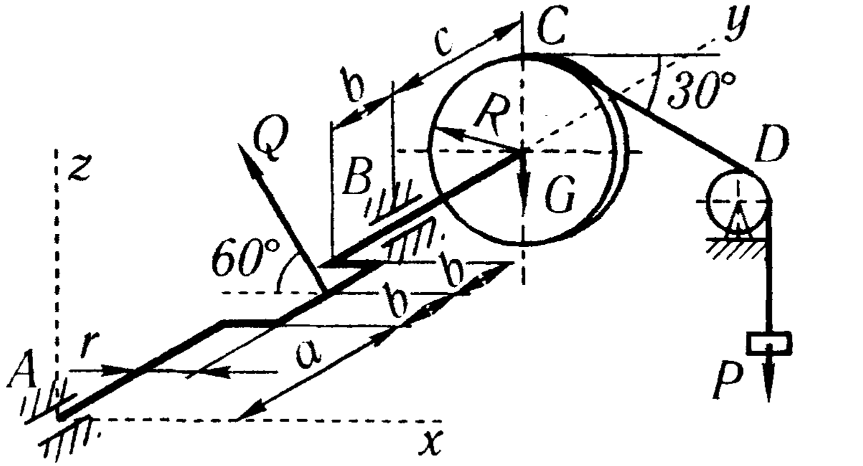
13


$\delta = 5 \cdot 10^{-3} R$
$Q \perp Ay$
$P \parallel Ax$
$N \parallel Az$
$N = G$

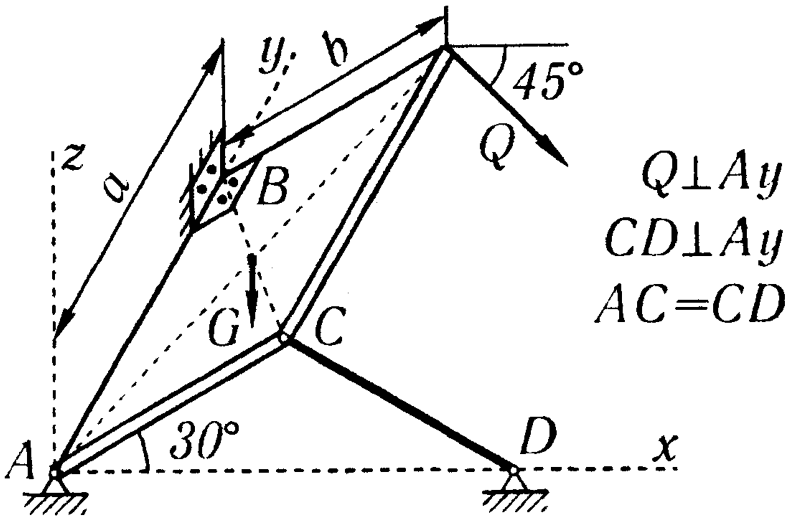
14


$T = 2t$
$T \parallel t$
$CD \perp Az$
$T \parallel Ax$

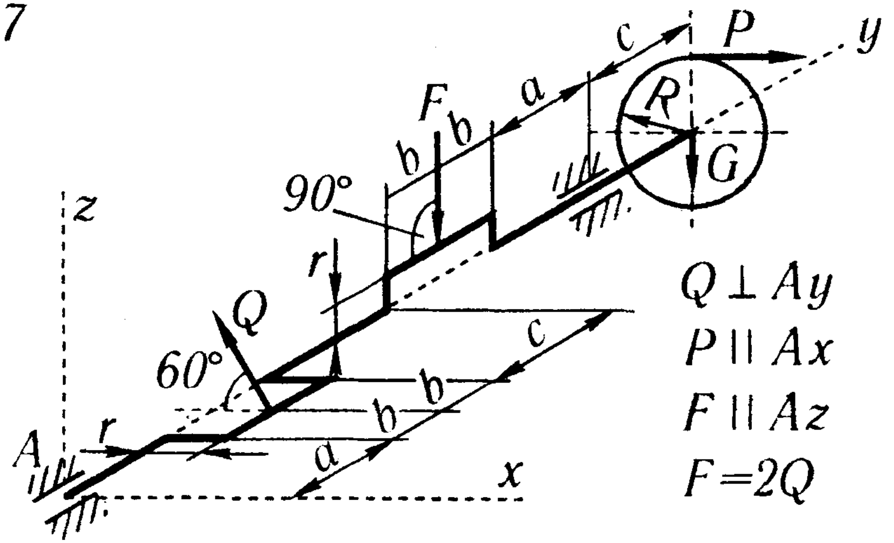
15



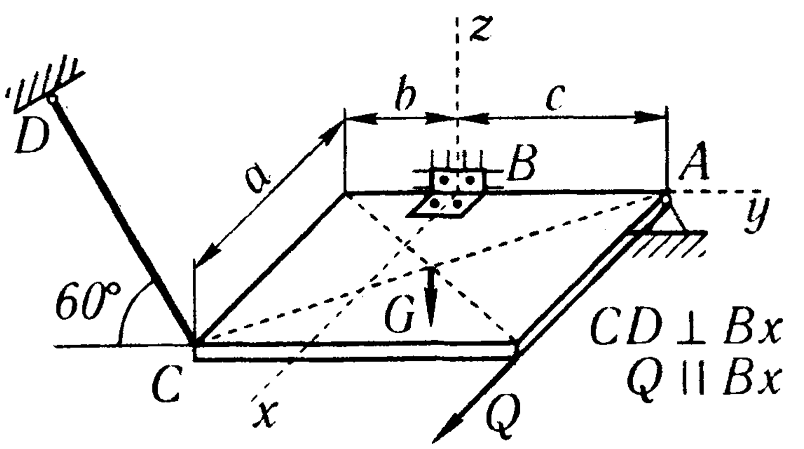
16


$Q \perp Ay$
$CD \perp Ay$
$AC = CD$

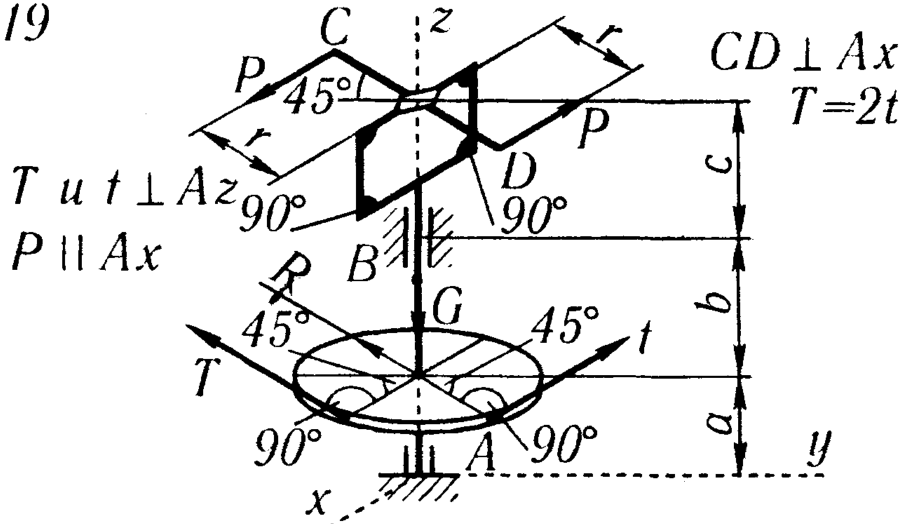
17


$Q \perp Ay$
$P \parallel Ax$
$F \parallel Az$
$F = 2Q$

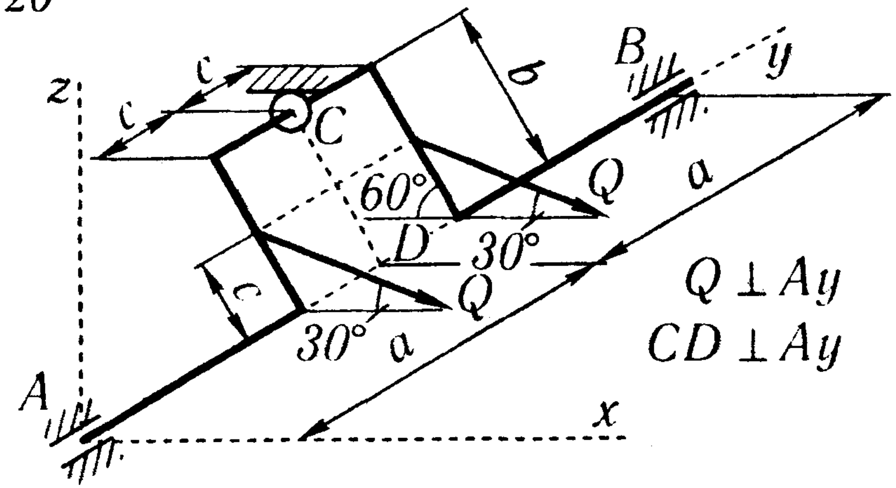
18


$CD \perp Bx$
$Q \parallel Bx$

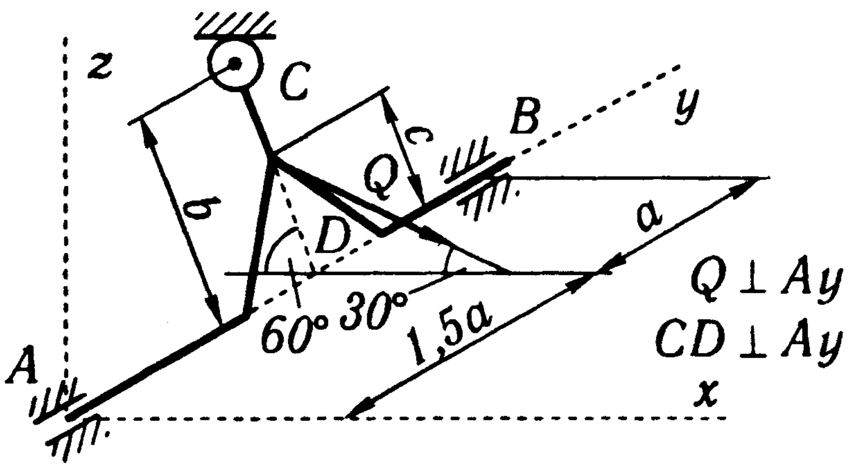
19


$CD \perp Ax$
$T = 2t$
T и $t \perp Az$
$P \parallel Ax$

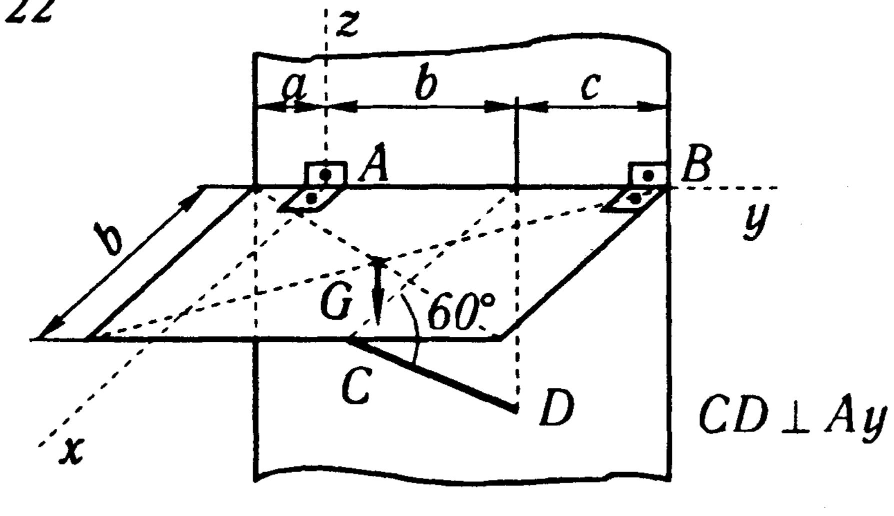
20


$Q \perp Ay$
$CD \perp Ay$

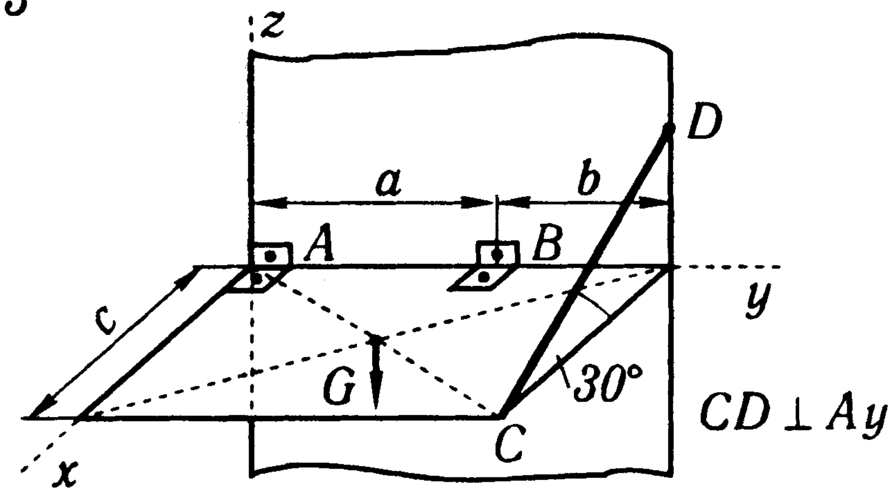
21


z
C
c
B
y
Q
b
D
a
60°
30°
1,5a
A
x
$Q \perp Ay$
$CD \perp Ay$

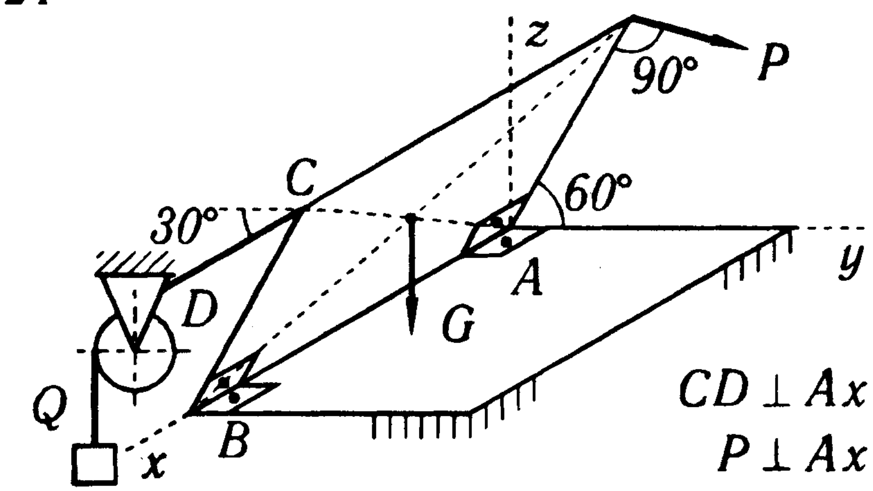
22


z
a
b
c
A
B
y
b
G
60°
C
D
x
$CD \perp Ay$

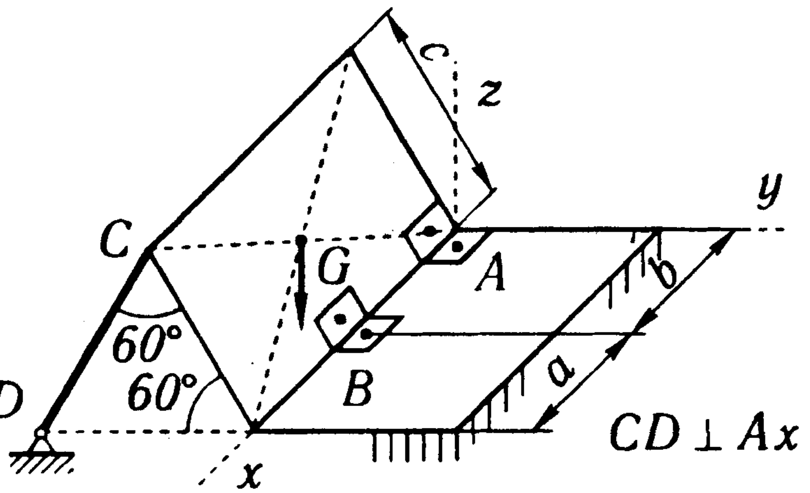
23


z
D
a
b
A
B
y
c
G
30°
C
x
$CD \perp Ay$

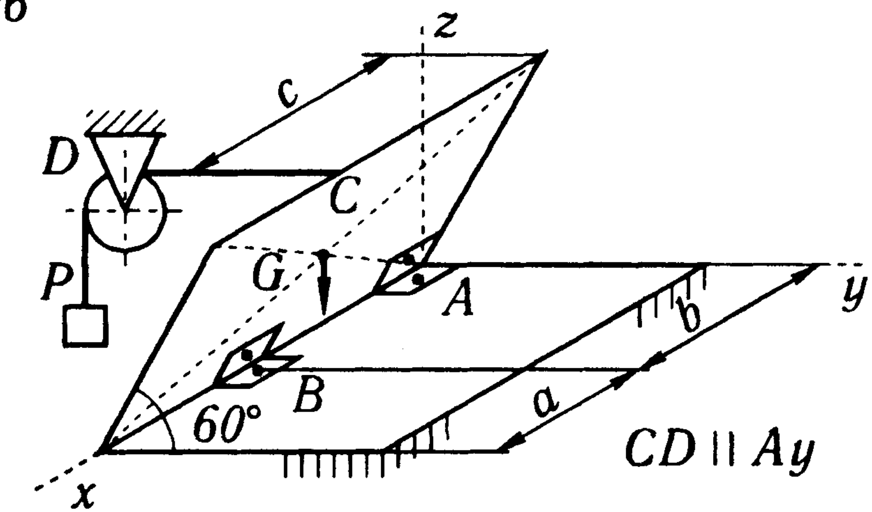
24


z
90°
P
C
60°
30°
A
y
D
G
Q
B
x
$CD \perp Ax$
$P \perp Ax$

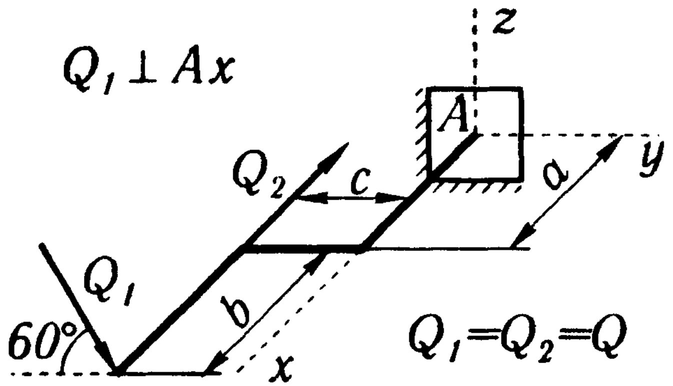
25


c
z
y
C
G
A
B
60°
60°
D
b
a
x
CD ⊥ Ax

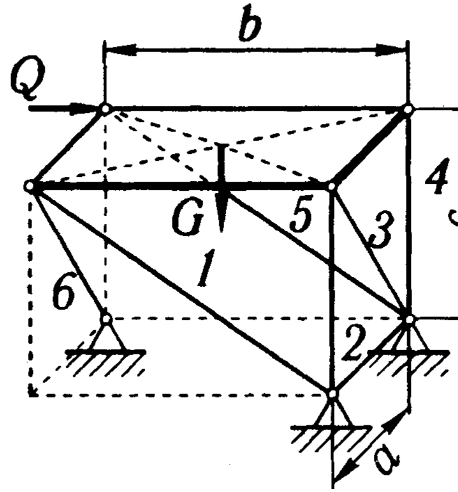
26


z
c
D
C
G
A
P
B
60°
b
a
y
x
CD || Ay

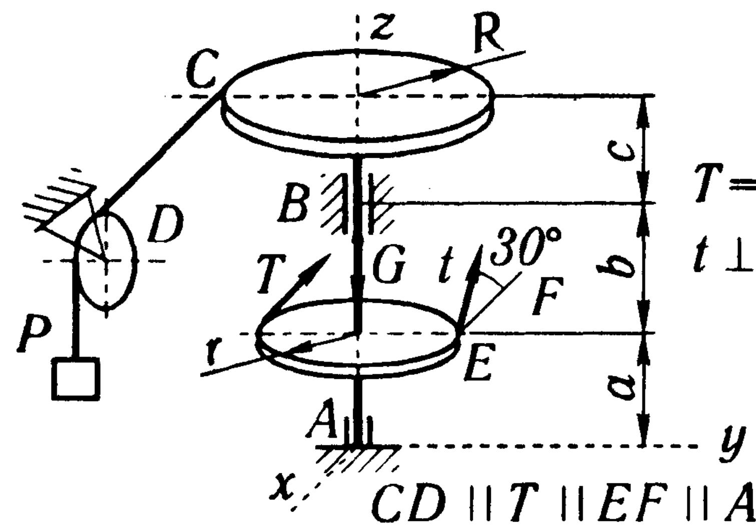
27


z
Q1 ⊥ Ax
A
y
Q2
c
a
Q1
60°
b
x
Q1=Q2=Q

28


b
Q
4
c
G
5
3
1
6
2
a

29

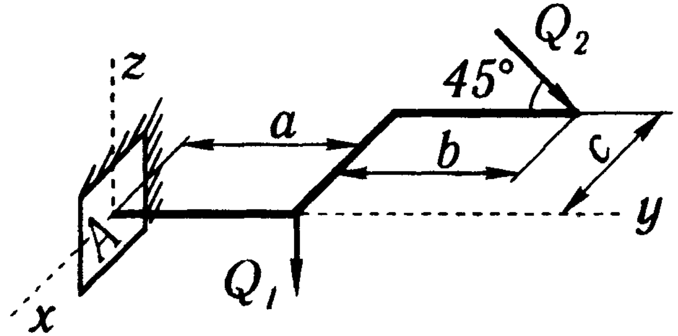


$T = 2t$

$t \perp Az$

$CD \parallel T \parallel EF \parallel Ax$

30



$Q_2 \perp Ax$

$Q_1 = Q_2 = Q$