

**Ю. И. Литвинец**

**Обработка научных данных  
и моделирование в Microsoft Excel**

**Ю. И. Литвинец**

# **Обработка научных данных и моделирование в Microsoft Excel**

Методические указания к лабораторным занятиям  
для студентов инженерно-экологического факультета

Екатеринбург  
2009

## РАБОТА №1. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В лаборатории изучалось влияние количества связующего в древесностружечных плитах (ДСтП) на их физико-механические показатели – прочность при изгибе и разбухание после выдержки в воде 24 ч.

Количество связующего в ДСтП составляло 2; 4; 6; 8; 10%.

Для каждой из этих точек получено по 4 единичных значения показателей:

Количество связующего, %	Прочность при изгибе, МПа	Разбухание, %
2	5,8; 6,0; 4,5; 7,7	42,5; 37,5; 39,5; 41,4
4	7,4; 9,4; 6,2; 5,3	26,0; 28,0; 25,0; 24,0
6	13,6; 17,8; 16,4; 18,4	18,7; 19,5; 20,0; 23,0
8	18,5; 22,0; 17,4; 20,0	18,7; 18,0; 15,4; 16,6
10	25,2; 28,1; 30,3; 27,8	17,0; 17,8; 14,5; 15,7

Необходимо рассчитать статистические показатели результатов испытаний (среднее значение, дисперсию, стандартное отклонение) и представить результаты в табличном виде. Построить график зависимости прочности при изгибе и разбухания от количества связующего.

### РЕШЕНИЕ

1. Откройте новую книгу MS Excel, установите параметры страницы (формат А4 с альбомной ориентацией, стандартные поля) и сохраните как книгу с именем **Обработка эксперимента**.
2. Лист 1 переименуйте в **Таблица данных** (для этого щелкните правой кнопкой мышки на имени листа Лист 1 и в контекстном меню выберите пункт **Переименовать**).
3. На рабочем листе **Таблица данных** создайте таблицу, форма которой показана ниже.

Форма таблицы для обработки результатов испытаний

Кол-во связующего, %	Прочность при изгибе					Разбухание, %								
	Единичные значения				Статистические показатели			Единичные значения				Статистические показатели		
					Среднее значение прочности, МПа	Дисперсия	Стандартное отклонение					Среднее значение разбухания, МПа	Дисперсия	Стандартное отклонение

4. Заполните таблицу результатами испытаний.
5. В соответствующие ячейки первой строки (количество связующего 2%) введите формулы расчета статистических функций:
  - выделите ячейку, в которой будет вычисляться статистический показатель (например, со средним значением);
  - на ленте щелкните **Формулы**, затем кнопку  $f_x$  **Вставить функцию**; можно также щелкнуть кнопку  $f_x$  **Вставить функцию** в строке формул;
  - в открывшемся меню выберите нужную функцию из категории **Статистические функции**;
  - аргументы функции укажите путем выделения в таблице диапазона ячеек, содержащих единичные значения для количества связующего 2%;
  - щелкните по кнопке **ОК** для окончания вставки функции.

6. После вставки функций в первую строку скопируйте формулы в нижние строки, получив таким образом полностью заполненную таблицу. Отформатируйте таблицу (шрифт Times New Roman, размер 11, все по центру; число десятичных знаков статистических показателей такое же, как и единичных результатов).

## Построение графика

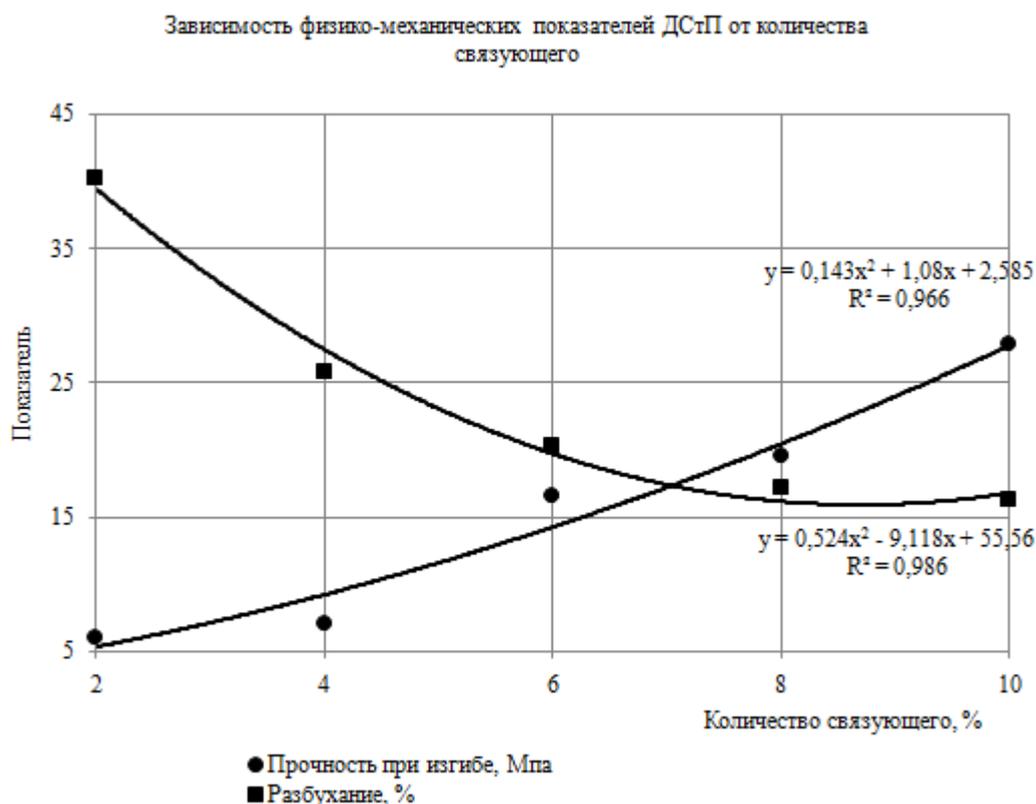
1. Выделите любую ячейку за пределами таблицы.
2. На ленте щелкните вкладку **Вставка**
3. В группе **Диаграммы** раскройте тип диаграммы **Точечная** и выберите **Точечная с маркерами**.
4. Щелкните по открывшемуся окну диаграммы правой кнопкой мыши, в контекстном меню щелкните **Выбрать данные**.
5. В окне **Элементы легенды** (ряды) щелкните **Добавить**.
6. Перейдите в поле **Имя** (щелкнуть мышкой внутри поля), и щелкните по ячейке таблицы, в которой содержится имя ряда (очевидно, это ячейка, в которой содержится текст **Прочность при изгибе, МПа**. Имя ряда можно также набрать с клавиатуры).
7. Перейдите в поле **Значения X** и выделите в таблице весь диапазон ячеек, содержащих значения количества связующего (от 2% до 10%).
8. Перейдите в поле **Значения Y**, удалите в этом поле все, кроме знака = (если он отсутствует, введите с клавиатуры). Затем аналогично п. 7 введите в поле адрес диапазона ячеек таблицы, содержащих средние значения прочности при изгибе. На образце графика должны появиться соответствующие точки. Нажмите **ОК**.
9. Аналогично п. 5-8 добавьте на график точки ряда **Разбухание, %**.
10. Переместите диаграмму ниже таблицы, установите нужный размер.
11. Отредактируйте полученный график в черно-белом исполнении.

Для редактирования выделите окно диаграммы и на ленте щелкните вкладку **Макет** (редактировать любой элемент диаграммы можно, щелкнув по нему правой кнопкой мыши и выбирая в контекстном меню формат этого элемента).

Выбирая соответствующие группы и вкладки, отредактируйте элементы диаграммы следующим образом:

- шрифт Times New Roman 12 п.
- цена делений шкал: по оси X – 2, минимальное значение 2, максимальное 10; по оси Y -10,0, минимальное значение 5, максимальное – 45).

Остальные параметры выполните как на рисунке.



## Электронный архив УГЛТУ

1. Проведите линии тренда с наилучшей достоверностью аппроксимации, параметры линии тренда выведите на диаграмму (щелчок правой кнопкой мыши на любой точке ряда, в контекстном меню – **Добавить линию тренда** и т.д.).

### Задание для самостоятельной работы

Изучалось влияние антипирена на прочность пластика при изгибе.

Изменяемые величины:

$b$  - ширина образца, мм;

$h$  - толщина образца, мм;

$P$  – разрушающее усилие, кгс.

Расстояние между опорами постоянное,  $l = 120$  мм.

По результатам измерений прочность пластика при изгибе ( $\sigma_u$ , МПа) с точностью 0,1 МПа рассчитывалась по формуле

$$\sigma_u = \frac{9,81 \cdot 1,5Pl}{bh^2}$$

Результаты измерений:

Количество антипирена, %	$P$ , кгс	$B$ , мм	$H$ , мм
0	456	52,4	22,1
1	300	52,3	22
3	189	52,5	22,2
5	155	52,2	22,3
7	124	52,4	22,1

Задание

1. Представить данные в виде таблицы Excel с вычислением  $\sigma_u$  с указанной точностью.
2. По табличным данным построить график зависимости прочности при изгибе от количества антипирена.

## РАБОТА №2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКТОРОВ

При математическом моделировании процессов, сопровождающихся химическими превращениями, важное значение имеет учет их механизма и гидродинамики движения потока в реакторе.

В качестве примера математических моделей химических процессов ниже будут проанализированы модели реакторов простейших типов - идеального смешения и идеального вытеснения, в которых осуществляются сложные химические реакции при постоянной температуре. Математическое моделирование реакторов заключается в расчете значений концентраций реагентов и величин потоков на выходе аппарата и получение его статических характеристик. Математическое описание химических превращений с помощью систем стехиометрических и кинетических уравнений подробно изучаются в ряде учебных дисциплин и имеют достаточно простое математическое описание, основанное на фундаментальных физико-химических законах. Поэтому основное внимание в данной главе будет уделено методам решения уравнений математического описания в программе Excel, рассматриваемых на конкретных примерах.

#### ПРИМЕР 2.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАКТОРА ИДЕАЛЬНОГО СМЕШЕНИЯ

Для реакции типа  $A \rightarrow P \rightarrow S$  требуется найти состав смеси на выходе, а также определить время пребывания, при котором концентрация вещества  $P$  будет иметь максимальное значение.

Идеализованная схема реактора идеального смешения для данной реакции представлена рис. 2.1. Условия физической реализуемости этой модели выполняются, если во всем потоке или на рассматриваемом его участке происходит полное (идеальное) смешение частиц потока. В таком случае любое изменение концентрации вещества на входе потока мгновенно распределяется по всему объему аппарата.

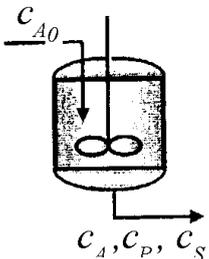


Рис. 2.1

#### Математическая модель и ее анализ

Для каждого реагента запишем уравнение материального баланса движущегося потока, гидродинамическая структура которого близка к представлениям, связанным с идеальным смешением:

$$\begin{aligned} v \cdot C_{A_0} - v \cdot C_A + v \cdot \omega_A &= 0 \\ v \cdot C_{P_0} - v \cdot C_P + v \cdot \omega_P &= 0 \\ v \cdot C_{S_0} - v \cdot C_S + v \cdot \omega_S &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $v$  - расход реагента,  $м^3/ч$ ;  $C_i$  - концентрация реагента  $кмоль/м^3$ ;  $\omega_i$  - скорость химической реакции по  $i$ -му реагенту  $кмоль/(м^3 \cdot ч)$ .

На входе в реактор нет продуктов реакции, т.е.  $C_{P_0} = 0$ ,  $C_{S_0} = 0$ . Скорости образования реагентов описываются следующими кинетическими уравнениями:

$$\omega_A = -k_1 \cdot C_A$$

$$\omega_P = k_1 \cdot C_A - k_2 C_P \quad (2.2)$$

$$\omega_S = k_2 \cdot C_P$$

С учетом этого можно записать систему уравнений 2.1 иначе:

$$v \cdot C_{A_0} - v \cdot C_A + V \cdot k_1 \cdot C_A = 0 \quad (2.3)$$

$$-v \cdot C_P - V \cdot (k_1 \cdot C_A - k_2 \cdot C_P) = 0$$

$$-v \cdot C_S + V \cdot k_2 C_S = 0$$

С учетом переменной  $\tau = V/v$ , которая называется временем пребывания, можно упростить запись системы уравнений (2.3):

$$C_{A_0} - C_A - \tau \cdot k_1 \cdot C_A = 0$$

$$-C_P + \tau \cdot k_1 \cdot C_A - \tau \cdot k_2 \cdot C_P = 0 \quad (2.4)$$

$$-C_S + \tau \cdot k_2 C_P = 0$$

Если записать систему уравнений (2.4) относительно определяемых переменных, то мы получим математическую модель реактора идеального смешения для данной реакции:

$$C_A = \frac{C_{A_0}}{1 + k_1 \cdot \tau}$$

$$C_P = \frac{C_{A_0} \cdot k_1 \cdot \tau}{(1 + k_1 \cdot \tau)(1 + k_2 \cdot \tau)} \quad (2.5)$$

$$C_S = \frac{C_{A_0} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \tau^2}{(1 + k_1 \cdot \tau)(1 + k_2 \cdot \tau)}$$

Функция  $C_p(\tau)$  имеет максимум. Величину  $\tau_{opt}$ , соответствующую максимальному значению концентрации  $C_p$ , можно найти аналитически.

Дифференцированием второго уравнения системы (4.5) по  $\tau$  находим оптимальные условия проведения реакции.

$$\frac{\partial C_P}{\partial \tau} = \frac{C_{A_0} \cdot k_1 \cdot [(1 + k_1 \cdot \tau) \cdot (1 + k_2 \cdot \tau)] - [k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot \tau) + k_2 \cdot (1 + k_1 \cdot \tau)] \cdot C_{A_0} \cdot k_1 \cdot \tau}{[(1 + k_1 \cdot \tau) \cdot (1 + k_2 \cdot \tau)]^2} = 0$$

$$\frac{\partial C_P}{\partial \tau} = C_{A_0} \cdot k_1 \frac{1 - \tau^2 \cdot k_1 \cdot k_2}{[(1 + k_1 \cdot \tau) \cdot (1 + k_2 \cdot \tau)]^2} = 0$$

$$1 - \tau^2 \cdot k_1 \cdot k_2 = 0 \quad (2.6)$$

$$\tau_{opt} = \frac{1}{\sqrt{k_1 \cdot k_2}}$$

Таким образом, моделирование реактора идеального смешения сводится к расчету концентраций на выходе реактора по формулам (2.5). Максимальную концентрацию вещества **P** можно найти по аналитической формуле (2.6) или пользоваться численный метод поиска экстремума функции  $C_p$ .

Для расчета концентраций при различных температурах система уравнений математического описания должна быть дополнена уравнениями Аррениуса:

$$k_1 = k_{10} \cdot e^{-E_1/(RT)}$$

$$k_2 = k_{20} \cdot e^{-E_2/(RT)}$$
(2.7)

где  $R$ - универсальная газовая постоянная, Дж/(моль К);  $E$  - энергия активации, Дж/моль.

## Задание для самостоятельной работы

1. Выполните расчеты реактора идеального смешения по вышеприведенным формулам (2.5-2.7). Исходные данные для расчетов приведены на листе MS Excel на следующей странице.

2. Исследуйте влияние температуры реакции на константы скорости реакций и изменение концентрации вещества  $P$  при протекании реакции.

## Методические указания по выполнению задания

Лист MS Excel с расчетами для реактора идеального смешения приведен на следующей странице (рис. 2.2).

Рекомендации по моделированию реактора идеального смешения:

- Переименуйте Лист 1 в *Реактор идеального смешения*, установите параметры страницы (А4 книжная, поля: левое, правое – 1; верхнее, нижнее – 1,5) сохраните под именем *Моделирование реакторов*.
- В блок ячеек **A20:A25** введите параметры исследования – время пребывания  $\tau$ . В ячейки **B20:D20** введите соответствующие формулы (2.5), затем скопируйте этот диапазон в блок **B21:D25**. Константы скорости реакций рассчитываются в ячейках **B16:B17**. При вводе формул обратите внимание, ссылки на какие ячейки должны быть абсолютными. Если все выполнено правильно, вы получите значения, приведенные в таблице листа MS Excel на следующей странице (рис. 2.2).
- В ячейку **B30** введите формулу для вычисления времени оптимального пребывания, в ячейку **B31** – формулу (2.5) для расчета  $C_{p \max}$  при  $\tau_{opt}$ .

Численное решение задачи поиска экстремума функции  $C_p$  проводится в ячейках **B33:B34** с помощью надстройки **Поиск решения**.

Для запуска надстройки **Поиск решения** на ленте выберите **Данные** и в группе **Анализ** щелкните **Поиск решения**.

Если вы не видите в группе **Анализ** нужной надстройки, выполните настройку Excel: последовательно нажмите кнопку **Office** (левый верхний угол) – **Параметры Excel** – **Надстройки**.

В открывшемся окне щелкните внизу **Перейти**, отметьте нужные надстройки и нажмите **ОК**.

Окно диалога **Поиск решения** представлено на рис. 2.3.

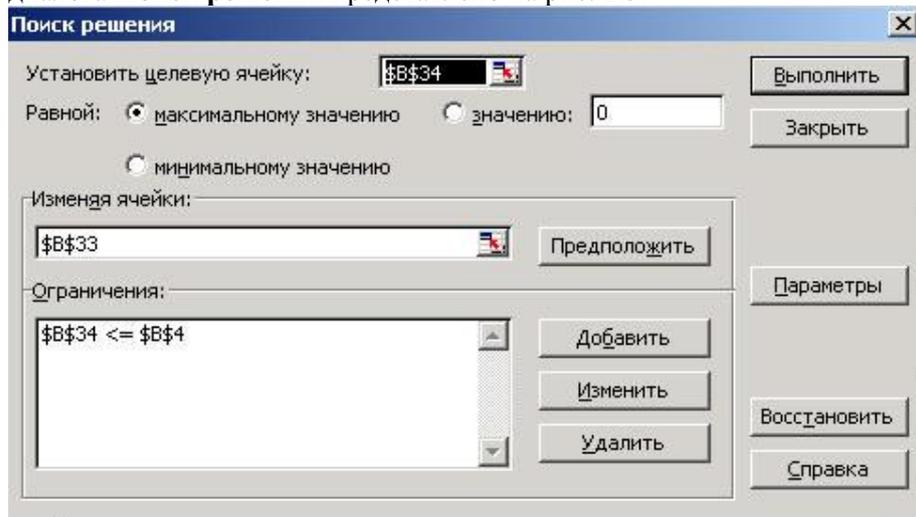


Рис. 2.3

Установлена опция поиска максимума функции  $C_p$  - ячейка **\$B\$34** (в нее необходимо ввести расчетную формулу (2.5)). Начальное приближение для переменной  $\tau$  в ячейке **B33** принято равное нулю. На определяемую переменную  $C_p$  наложено ограничение  $C_p \leq C_{A0}$ , отражающее физический смысл задачи.

Нажмите **Параметры** и введите данные в соответствии с рис. 2.4.

После заполнения данными щелкните **Выполнить**.

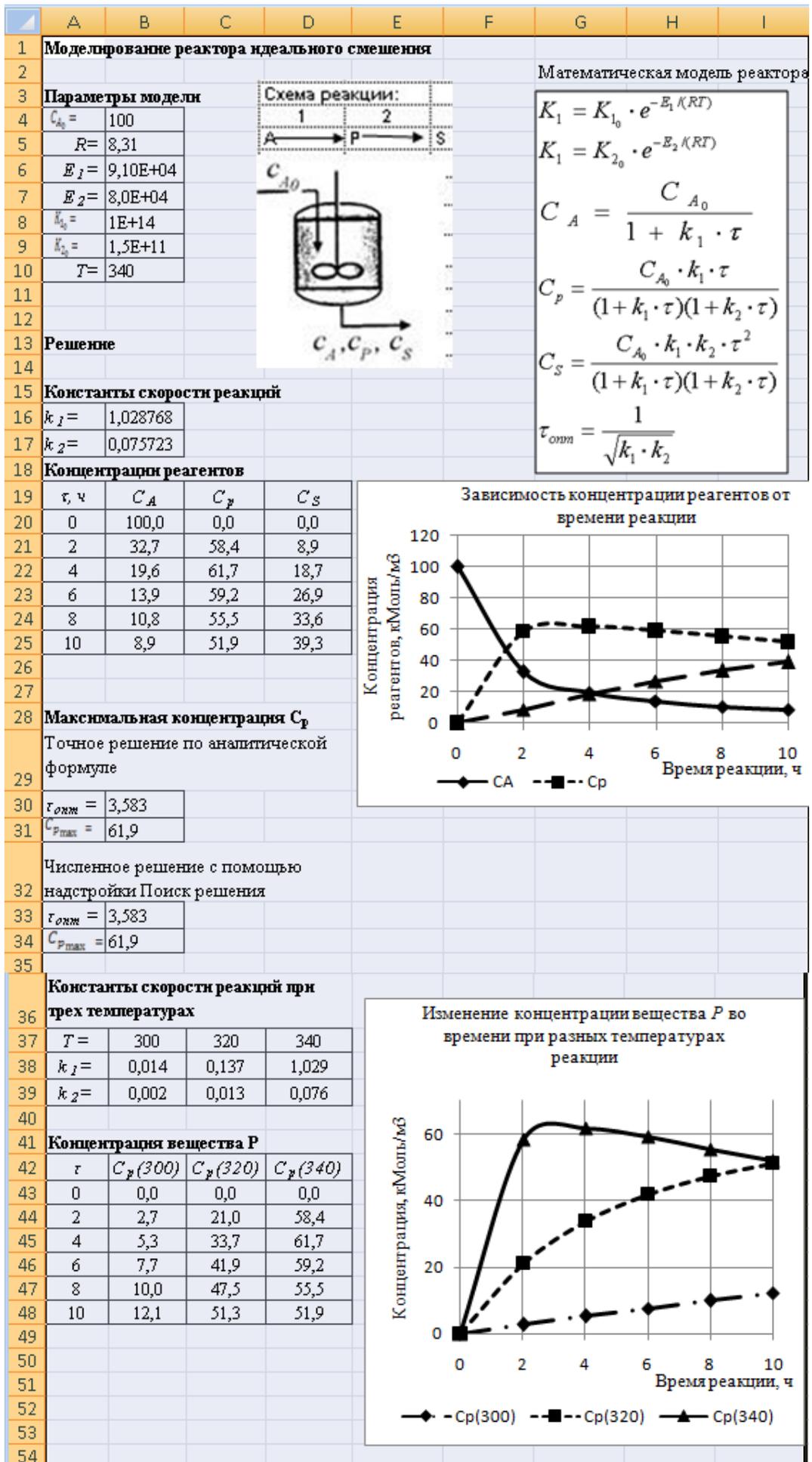


Рис. 2.2

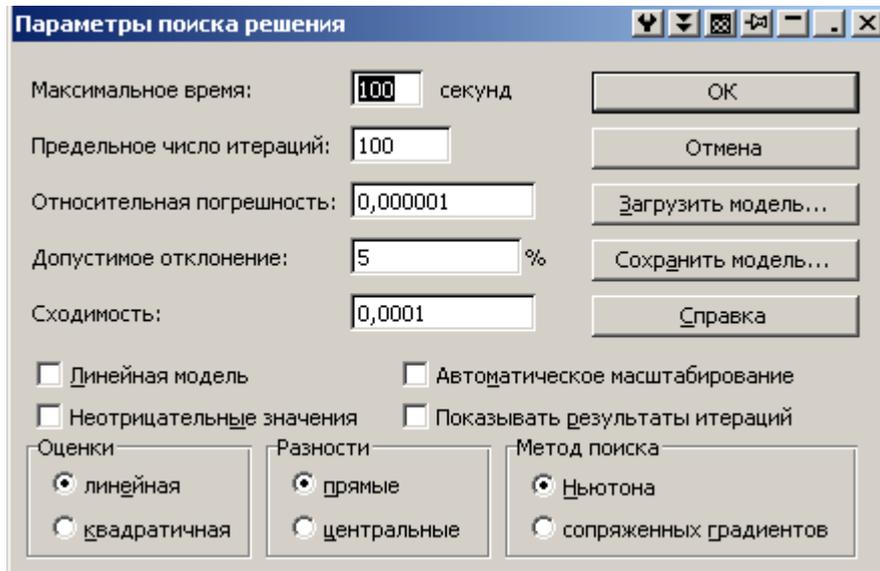


Рис. 2.4

В **Результатах поиска решения** сохраните найденное решение.

По данным блока **A19:D25** строится **Точечная диаграмма** зависимости концентраций реагентов от времени пребывания.

Исследование зависимости концентрации вещества **P** при трех температурах проводится по образцу, представленному в блоке ячеек **A37:D48** (рис. 2.2).

Расчет концентрации вещества **P** в ячейках **B43:D48** проводится следующим образом. Введите в ячейку **B43** формулу:

$$=B\$4*B\$38*A43/((1+B\$38*A43)*(1+B\$39*A43)).$$

Далее ячейка **B43** копируется вправо до ячейки **D43**, а затем блок ячеек **B43: D43** копируется вниз до 48 строки методом протаскивания за маркер автозаполнения.

### Задание для самостоятельной работы

Проведите серию вычислительных экспериментов по изучению влияния параметров модели на концентрацию реагентов. Для этого создайте копии первого листа. Это позволит более наглядно увидеть происходящие изменения в таблицах и графиках модели.

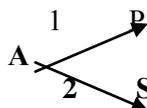
1. Пусть  $E_2$  будет равно  $6,5 \cdot 10^4$ , а затем пусть  $E_2$  будет равно  $9 \cdot 10^4$ .
2.  $k_{20}$  будет равно  $5 \cdot 10^{12}$ , а затем пусть  $k_{20}$  будет равно  $5 \cdot 10^{10}$ .

По результатам эксперимента сделайте технологические выводы.

## ДОМАШНЯЯ РАБОТА №1

Задание выполняется во внеучебное время

Выведите уравнения математической модели реактора идеального смешения, в котором проводится реакция типа



Проведите расчеты по исходным данным и образцу, представленному на рис. 2.5.

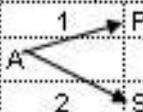
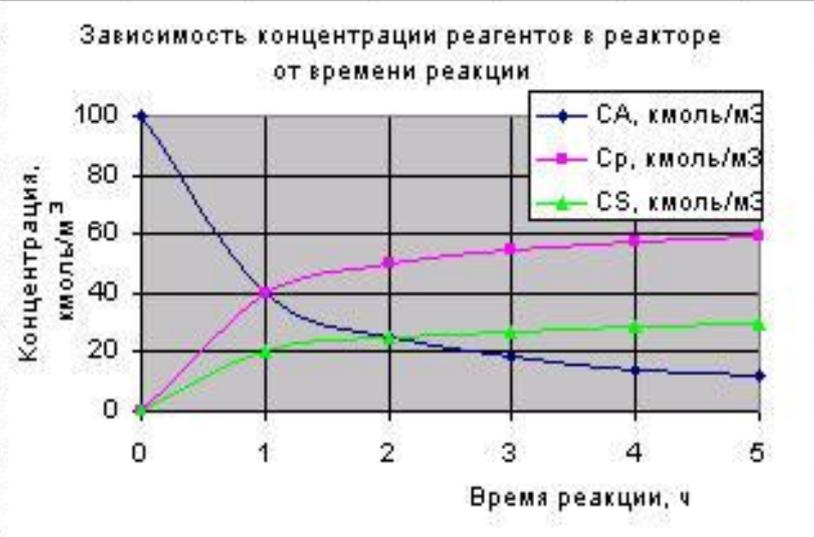
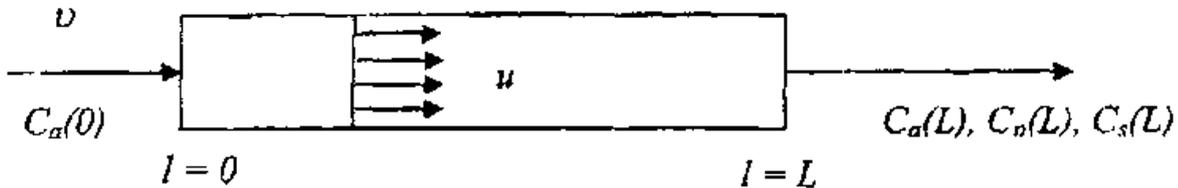
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Задание 3 для самостоятельной работы								
2	Моделирование реактора идеального смешения						? Здесь введите уравнения математической модели реактора для данной реакции		
3	Параметры модели			Схема реакции:					
4	$C_{A0} =$	100							
5	$k_1 =$	1							
6	$k_2 =$	0,5							
7									
8									
9									
10									
11									
12	Решение:								
13	Концентрации реагентов								
14	$\tau, \text{ч}$	$C_A$	$C_P$	$C_S$					
		кмоль/м <sup>3</sup>	кмоль/м <sup>3</sup>	кмоль/м <sup>3</sup>					
15	0	100,0	0,0	0,0					
16	1	40,0	40,0	20,0					
17	2	25,0	50,0	25,0					
18	3	18,2	54,5	27,3					
19	4	14,3	57,1	28,6					
20	5	11,8	58,8	29,4					
21									
22									
23									
24									
25	 <p>Зависимость концентрации реагентов в реакторе от времени реакции</p> <p>Концентрация, кмоль/м<sup>3</sup></p> <p>Время реакции, ч</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>CA, кмоль/м<sup>3</sup></li> <li>CP, кмоль/м<sup>3</sup></li> <li>CS, кмоль/м<sup>3</sup></li> </ul>								
26									
27									
28									
29									
30									
31									
32									
33									
34									
35									
36									
37									
38									
39									

Рис. 2.5

**ПРИМЕР 2.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАКТОРА ИДЕАЛЬНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ**

Для получения уравнений математической модели рассмотрим реактор идеального вытеснения, в котором проводится изотермическая реакция первого порядка  $A \rightarrow P \rightarrow S$ .

Идеализованная схема реактора представлена на рис. 2.6. Условия физической реализуемости этой модели выполняются в случае поршневого потока, когда предполагается, что в направлении его движения смешение полностью отсутствует, а в направлении, перпендикулярном движению, происходит идеальное смешение.



$V$  - объем реактора,  $m^3$ ;  $S$  - площадь поперечного сечения реактора,  $m^2$ ;  $L$  - длина реактора,  $m$ ;  $v$  - объемный расход,  $m^3/ч$ ;  $u = v/S$  - линейная скорость потока,  $m/ч$ ;  
 $\tau = l/u$  - время пребывания,  $ч$

Рис. 2.6

Уравнение, описывающее изменение концентрации вещества  $A$  в зоне вытеснения при стационарном режиме будет иметь вид:

$$\frac{v \cdot dC_A}{dl} = S \cdot \omega_A \quad (2.8)$$

При моделировании реакторов удобнее перейти от переменной интегрирования длины  $l$  к переменной  $\tau$  - время пребывания, поскольку они связаны известным соотношением:

$$\tau = \frac{l}{u} \quad \text{или} \quad d\tau = \frac{dl}{u} \quad \text{или} \quad dl = u \cdot d\tau \quad (2.9)$$

Сечение зоны вытеснения можно выразить через объемную и линейную скорость потока:

$$S = \frac{v}{u} \quad (2.10)$$

Тогда выражение (2.8) можно записать так:

$$\frac{v}{u} \cdot \frac{dC_A}{d\tau} = \frac{v}{u} \cdot \omega_A \quad \text{или} \quad \frac{dC_A}{d\tau} = \omega_A \quad (2.11)$$

Математическое описание реактора идеального вытеснения в стационарном режиме совпадает с известным кинетическим уравнением, приводящимся иногда как определение скорости химической реакции. Переменная  $\tau$  имеет размерность времени и обозначает время пребывания элементарного объема реагирующей смеси в зоне реакции. Поэтому это уравнение можно рассматривать так же как описание реактора идеального смешения периодического действия, в котором процесс проводится до определенного момента времени при отсутствии подачи исходных реагентов в аппарат и отвода из него продуктов реакции.

На основании стехиометрии реакции  $A \rightarrow P \rightarrow S$ , можно записать уравнения, описывающие изменение концентраций веществ в реакторе идеального вытеснения по времени пребывания:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{dC_A}{d\tau} = -k_1 C_A \\
 2. \quad & \frac{dC_P}{d\tau} = k_1 \cdot C_A - k_2 \cdot C_P \\
 3. \quad & \frac{dC_S}{d\tau} = k_2 \cdot C_P
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Граничные условия интегрирования:

$$C_A \Big|_{\tau=0} = C_{A_0}; \quad C_P \Big|_{\tau=0} = 0; \quad C_S \Big|_{\tau=0} = 0
 \tag{2.13}$$

Система дифференциальных уравнений (2.12) может быть решена аналитически и численными методами.

Рассмотрим аналитическое решение.

Первое дифференциальное уравнение по веществу  $A$  с разделяющимися переменными интегрируем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \int_{C_{A_0}}^{C_A} \frac{dC_A}{C} &= -k_1 \cdot \int_0^{\tau} d\tau \\
 \ln C_A \Big|_{C_{A_0}}^{C_A} &= -k_1 \cdot \tau \\
 \ln C_A - \ln C_{A_0} &= -k_1 \cdot \tau \\
 \ln \frac{C_A}{C_{A_0}} &= -k_1 \cdot \tau \\
 C_A &= C_{A_0} \cdot e^{-k_1 \cdot \tau}
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Второе дифференциальное уравнение по веществу  $P$  интегрируется достаточно сложным методом вариации произвольных постоянных. В результате интегрирования получено выражение

$$C_P = C_A \cdot \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot (e^{-k_1 \tau} - e^{-k_2 \tau})
 \tag{2.15}$$

Зависимость концентрации вещества  $S$  от времени пребывания может быть получена из уравнения материального баланса:

$$C_S = C_{A_0} - C_A - C_P
 \tag{2.16}$$

Функция  $C_P(\tau)$  имеет максимум. Величину  $\tau_{opt}$ , соответствующую максимальному значению концентрации  $C_P$ , можно найти аналитически.

Дифференцированием второго уравнения системы (2.15) по  $\tau$  находим оптимальные условия проведения реакции:

$$\frac{dC_p}{d\tau} = C_A \cdot \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot (e^{-k_1\tau} - e^{-k_2\tau}) = 0 \quad (2.17)$$

Анализ уравнения (2.17) показывает, что если  $C_A \neq 0$ ;  $k_1 \neq k_2$ ;

$\frac{k_1}{k_2 - k_1} \neq 0$ , выражение (2.17) можно упростить:

$$\frac{dC_p}{d\tau} = (e^{-k_1\tau} - e^{-k_2\tau}) = 0 \quad (2.18)$$

При дифференцировании выражения (2.18) получим:

$$-k_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \tau} + k_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \tau} = 0 \quad (2.19)$$

После логарифмирования выражения (2.19) получим:

$$\begin{aligned} \ln(-k_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \tau}) + \ln(-k_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \tau}) &= 0 \\ -\ln k_1 - k_1 \cdot \tau + \ln k_2 + k_2 \cdot \tau &= 0 \\ \tau \cdot (k_1 - k_2) &= \ln(k_1 / k_2) \\ \tau_{\text{опт}} &= \frac{\ln(k_1 / k_2)}{k_1 - k_2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

### Задание для самостоятельной работы

Проведите моделирование реактора идеального вытеснения по формулам (2.14)-(2.16) и сравните полученные результаты с результатами моделирования реактора идеального смешения. Сделайте технологические выводы.

#### Методические указания по выполнению задания

Решение системы уравнений математического описания реактора идеального вытеснения проводится аналогично заданию 1 и представлено на рис. 2.7.

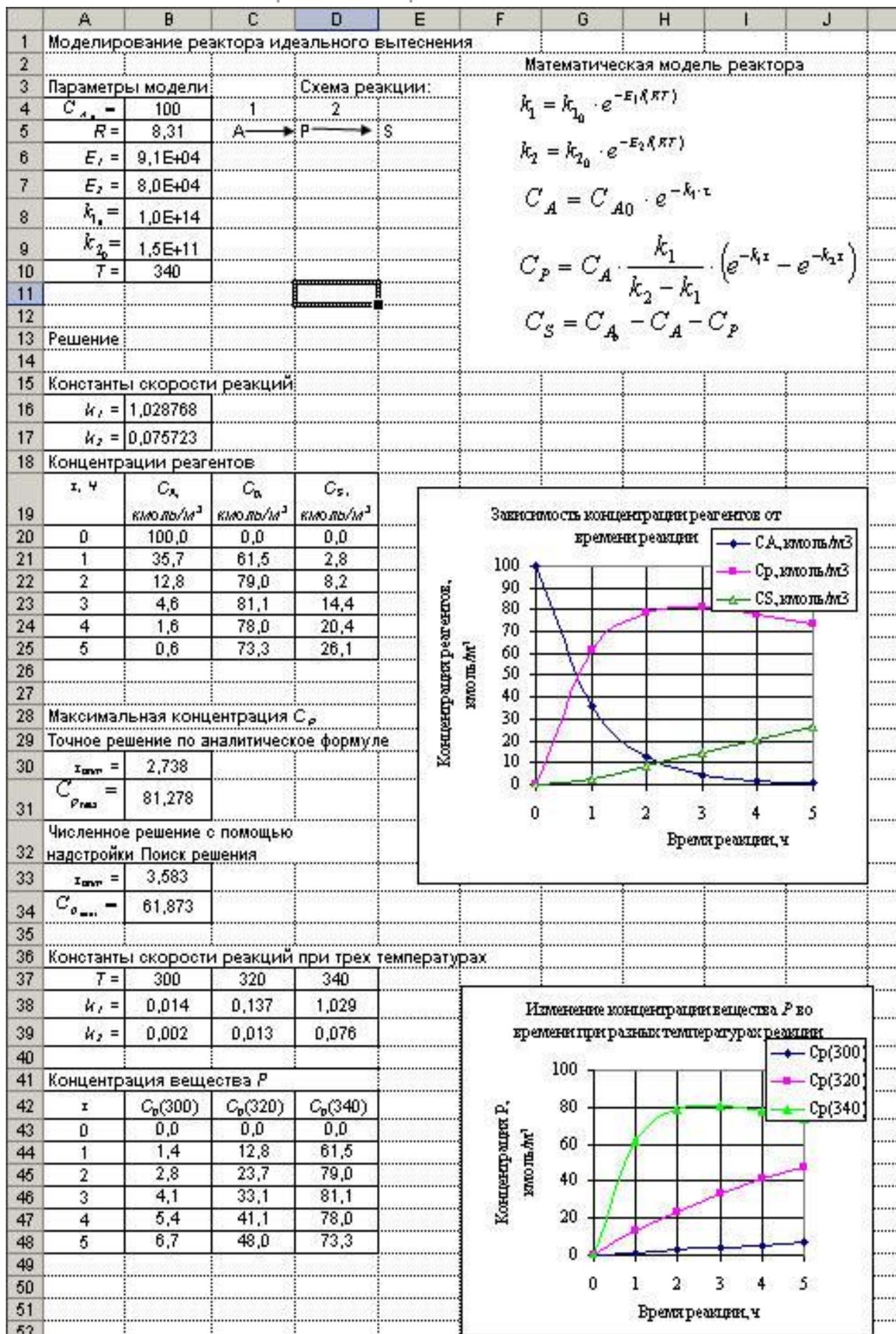


Рис. 2.7

### Задание для самостоятельной работы

Проведите моделирование реактора идеального вытеснения интегрированием системы дифференциальных уравнений (2.12) численным методом Эйлера.

#### Методические указания по выполнению задания

Интегрирование системы дифференциальных уравнений численным методом Эйлера представлено на рис. 2.8.

В блоке ячеек **A5:B6** вводятся параметры модели.

В ячейке **B8** введено значение шага интегрирования.

В блоке ячеек **A13:D23** решается система уравнений математического описания реактора.

В блоке ячеек **A13:A23** введены значения времени пребывания от 0 до 5 с шагом 0,5. В ячейках **B13:D13** введены начальные условия интегрирования. В следующих ячейках строки 14 производится расчет правой части дифференциального уравнения при заданных начальных условиях (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Ячейка	Формула в электронной таблице	Математическая формула
B14	=B13+\$B\$8*(-\$B\$5)*B13	$C_{A_{i+1}} = C_{A_i} + \Delta\tau \cdot (-k_1 \cdot C_{A_i})$
C14	=C13+\$B\$8*(B\$5*B13-\$B\$6*C13)	$C_{P_{i+1}} = C_{P_i} + \Delta\tau \cdot (k_1 \cdot C_{A_i} - k_2 \cdot C_{P_i})$
D14	=D13+\$B\$8*\$B\$6*C13	$C_{S_{i+1}} = C_{S_i} + \Delta\tau \cdot (k_2 \cdot C_{P_i})$

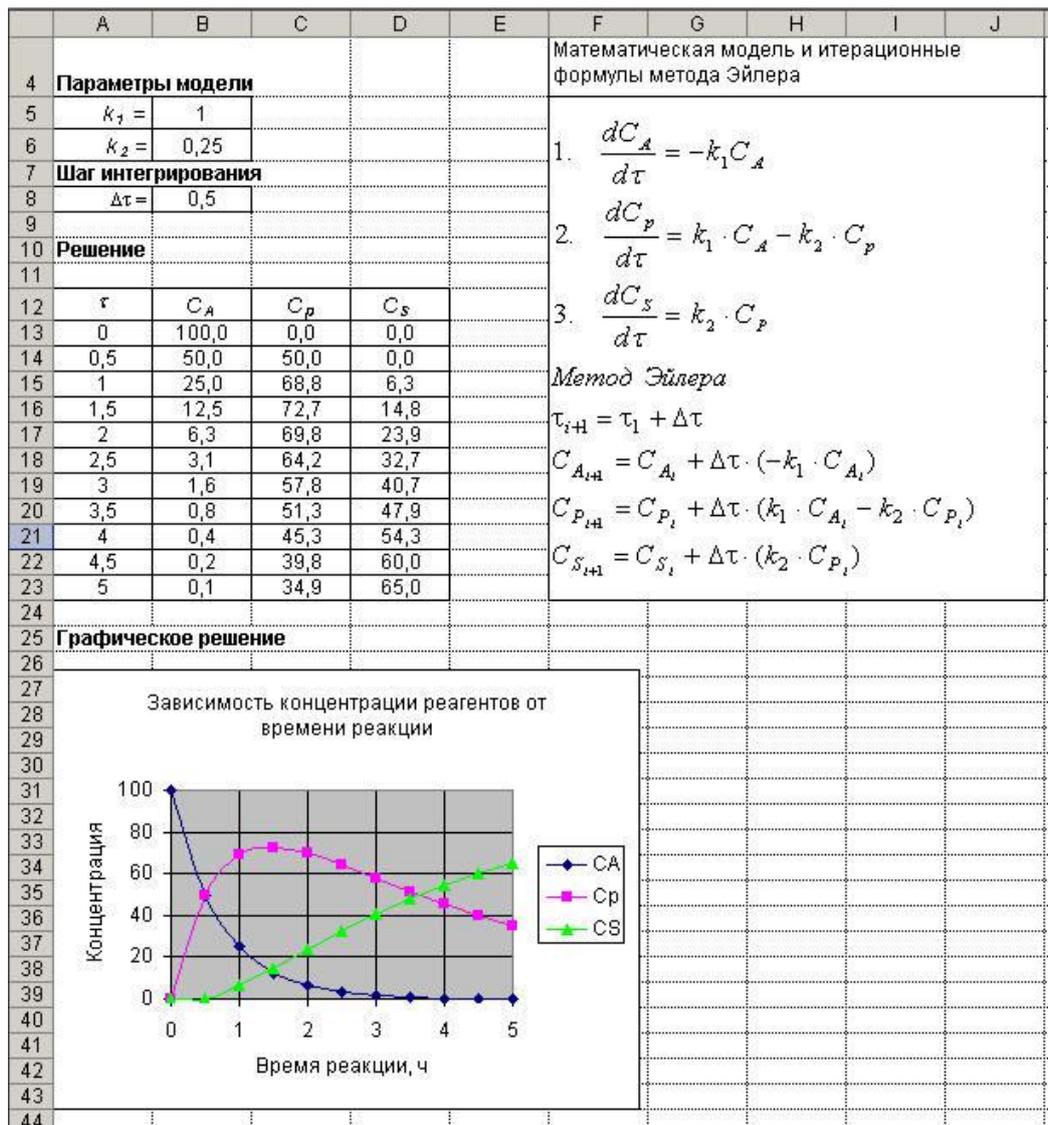


Рис. 2.8

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Гидравлические процессы, обеспечивающие транспортировку жидкостей и газов, играют важную роль в промышленности. Они подробно изучаются в учебных дисциплинах и имеют достаточно простое математическое описание, основанное на фундаментальных физических законах.

### РАСЧЕТ МОЩНОСТИ НАСОСА И ОПТИМАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПЕРЕКАЧКИ

Нефтяное масло, получаемое на технологической установке нефтеперерабатывающего завода в количестве  $V = 40 \text{ м}^3/\text{ч}$ , перекачивается по трубопроводу диаметром  $d=100 \times 4 \text{ мм}$  в хранилище парка отгрузки, расположенном на расстоянии  $l=100 \text{ м}$ . Требуется определить оптимальную мощность насоса, если общий к.п.д. насосной установки равен  $\eta=0,5$ .

Известны зависимости плотности и вязкости масла от температуры, удельная теплоемкость масла  $r=1,68 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ . Стоимость 1 кВт·ч электроэнергии составляет  $C1=4 \text{ у.е.}$ , а 1 т греющего пара  $C2=2 \text{ у.е.}$  (в технических расчетах удобно использовать условные денежные единицы, свободные от инфляции и рыночных факторов). Удельная теплота конденсации пара  $r=2260 \text{ кДж}/\text{кг}$ .

#### Математическая модель и ее анализ

Математическая модель процесса перекачки вязкой жидкости, построена на основе законов гидравлики и представлена в табл. 2.2.

Кроме поперечного сечения трубопровода и линейной скорости перекачки все остальные определяемые переменные являются функциями температуры. Ясно, что с увеличением температуры снижается вязкость масла, что приводит к снижению потерь давления на трение и уменьшается мощность электродвигателя насоса. Чем больше температура нагрева масла, тем меньше требуемая мощность насоса. Однако эти рассуждения не дают ответа на вопрос об оптимальной мощности электродвигателя насоса.

Если мы переведем наши рассуждения в экономическую плоскость, то нам удастся сформулировать критерий оптимизации. С увеличением температуры снижается мощность насоса, но увеличиваются затраты на нагрев масла, суммарные же затраты с увеличением температуры должны вначале снижаться, а затем увеличиваться. Оптимальной температурой перекачки будет температура, при которой достигается минимум функции суммарных затрат. Этой же температуре будет соответствовать оптимальная мощность электродвигателя насоса. В программе Excel можно решить данную задачу графически (приблизленно) и численно (с точностью, заданной численным методом).

Таблица 2.2

Технологический параметр	№ ур.	Описание в форме уравнений	Описание в форме Excel
Площадь поперечного сечения трубопровода, $\text{м}^2$	1	$S = \frac{3,14 \cdot d^2}{4}$	
Линейная скорость потока, м/с	2	$\omega = \frac{V}{S \cdot 3600}$	
Зависимость плотности масла от температуры, $\text{кг}/\text{м}^3$	3	$\rho = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$ $a_0 = 1000,7;$ $a_1 = -3,2981;$ $a_2 = 0,0241$	F9: =\$B\$11+\$B\$12*E9+\$B\$13*E9^2
Зависимость динамического коэффициента вязкости масла, $\text{Па}\cdot\text{с}$	4	$\mu = b_0 \cdot t^{b_1}$ $b_0=168,02; b_1= -1,6797$	G9: =\$B\$14*E9^\$B\$15

Окончание таблицы 2.2			
Критерий Рейнольдса	5	$Re = \frac{\omega \cdot d \cdot \rho}{\mu}$	H9: =F\$4*\$B\$4*F9/G9
Коэффициент трения	6	$\lambda = \frac{64}{Re}$	I9: =64/H9
Потеря давления на трение, МПа (другими видами потерь давления пренебрежем)	7	$\Delta P = \frac{\lambda \cdot l}{d} \cdot \frac{\rho \cdot \omega^2}{2} \cdot 10^{-6}$	J9: =I9*\$B\$5*F9*\$F\$4^2*10^-6/(\$B\$4*2)
Мощность, потребляемая двигателем насоса, кВт	8	$N = \frac{V \cdot \Delta P \cdot 10^6}{\eta \cdot 3600 \cdot 1000}$	K9: =\$B\$3*J9*10^6/(3600*1000*\$B\$6)
Расход тепла на подогрев масла от 20 до t °С, кВт	9	$Q = \frac{V \cdot \rho \cdot c \cdot (t - 20)}{3600}$	L9: =\$B\$3*F9*\$B\$9*(E9-20)/3600
Расход пара на подогрев масла, кг/ч	10	$D = \frac{Q \cdot 3600}{r}$	M9: =L9*3600/\$B\$10
Затраты на перекачку, у.е./ч	11	$Z_1 = N \cdot C_1$	N9: =K9*\$B\$7
Затраты на нагрев, у.е./ч	2	$Z_2 = \frac{D \cdot C_2}{1000}$	O9: =M9* \$B\$8/1000
Суммарные затраты, у.е./ч	3	$Z = Z_1 + Z_2$	P9: =N9+O9

### Методика решения задачи в программе Excel

Графическое решение задачи представлено на рис. 2.9.

Ниже будут даны комментарии по вводу формул в соответствующие ячейки таблицы. Однако крайне желательно, чтобы студенты создали подобную таблицу самостоятельно, именно поэтому на рис. 2.9 еще раз представлены уравнения математической модели.

В блоке ячеек **A3:C15** вводятся исходные данные. Решение представлено в блоке ячеек **E3:P14**. В блоке ячеек **E9:E14** введен диапазон исследования: температура перекачки от 20 до 70 °С. В ячейке **F9** введена формула 3 для расчета плотности, которая затем копируется до ячейки **F14** методом протаскивания за маркер автозаполнения (эта операция будет повторяться для всех последующих ячеек строки 9).

### Рекомендации по оформлению электронной таблицы

Для ввода греческих символов использовать команду **Вставка** → **Символ**.

Для построения графика зависимости мощности насоса от температуры нужно выделить несмежные блоки **E9:E14**; **K9:K14**.

Для построения графика зависимости затрат от температуры выделяются несмежные блоки **E9:E14**; **N9:P14**. С помощью команды **Вставка** → **Точечная** диаграмма строится график.

Диаграммы форматируются к виду, принятому в технической литературе. Форматирование удобно делать с помощью команд меню, вызываемого двойным щелчком левой кнопки мыши по соответствующему элементу диаграммы.

Из расчетной таблицы и графиков видно, что оптимальной температурой перекачки является температура около 40 °С.

# Электронный архив УГЛТУ

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
4	d =	0,1	м													
5	l =	1000	м													
6	η =	0,5														
7	C <sub>1</sub> =	0,04	у.е./т		Температура, t, °С	Плотность, ρ, кг/м <sup>3</sup>	Коэффициент вязкости, μ, Па·с	Критерий Re	Коэффициент трения, λ	Потеря давления, ΔP, МПа	Мощность насоса, N, кВт	Количество тепла, Q, кВт	Расход пара, D, кг/ч	Затраты		
8	C <sub>2</sub> =	2	у.е./кВт·ч											перекачка, Z <sub>1</sub> , у.е./ч	нагрев, Z <sub>2</sub> , у.е./ч	суммарные, Z, у.е./ч
9	c =	1,68	кДж/(кг·К)		20	944,38	1,10	121,90	0,525	4,97	110,37	0,0	0,0	4,41	0,00	4,41
10	r =	2260	кДж/кг		30	923,45	0,55	235,54	0,272	2,51	55,86	172,4	274,6	2,23	0,55	2,78
11	a <sub>0</sub> =	1000,7			40	907,34	0,34	375,21	0,171	1,55	34,45	338,7	539,6	1,38	1,08	2,46
12	a <sub>1</sub> =	-3,2981			50	896,05	0,24	539,03	0,119	1,07	23,68	501,8	799,3	0,95	1,60	2,55
13	a <sub>2</sub> =	0,0241			60	889,57	0,17	726,89	0,088	0,78	17,44	664,2	1058,0	0,70	2,12	2,81
14	b <sub>0</sub> =	168,02			70	887,92	0,13	939,97	0,068	0,61	13,46	828,7	1320,1	0,54	2,64	3,18
15	b <sub>1</sub> =	-1,6797														

<p>1. <math>S = \frac{3,14 \cdot d^2}{4}</math></p> <p>2. <math>w = \frac{V}{3600 \cdot S}</math></p> <p>3. <math>\rho = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2</math></p> <p>4. <math>\mu = b_0 \cdot t^A</math></p> <p>5. <math>Re = \frac{w \cdot d \cdot \rho}{\mu}</math></p> <p>6. <math>\lambda = \frac{64}{Re}</math></p>	<p>7. <math>\Delta P = \frac{\lambda \cdot l}{d} \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2} \cdot 10^{-4}</math></p> <p>8. <math>N = \frac{V \cdot \Delta P}{3600 \cdot 1000 \cdot \eta} \cdot 10^4</math></p> <p>9. <math>Q = \frac{V \cdot \rho \cdot c \cdot (t - 20)}{3600}</math></p> <p>10. <math>D = \frac{Q \cdot 3600}{r}</math></p> <p>11. <math>Z_1 = N \cdot C_1</math></p> <p>12. <math>Z_2 = \frac{D \cdot C_2}{1000}</math></p> <p>13. <math>Z = Z_1 + Z_2</math></p>
--	--

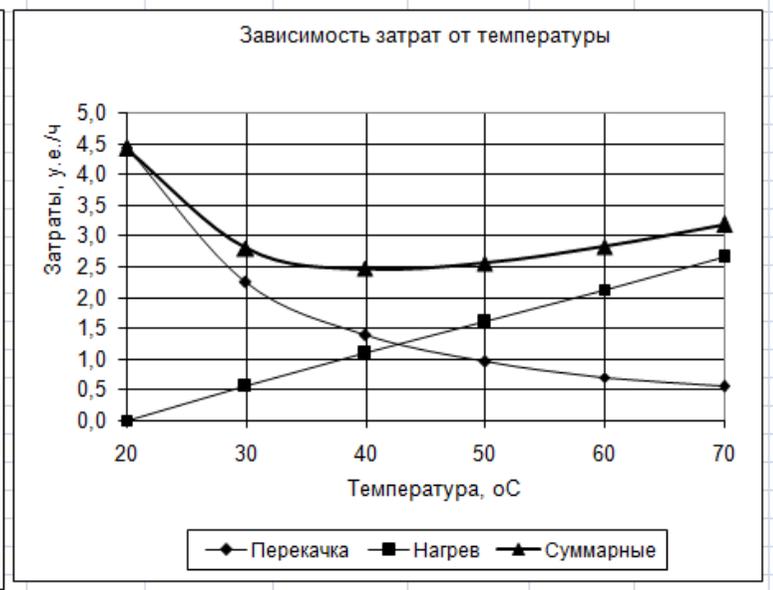
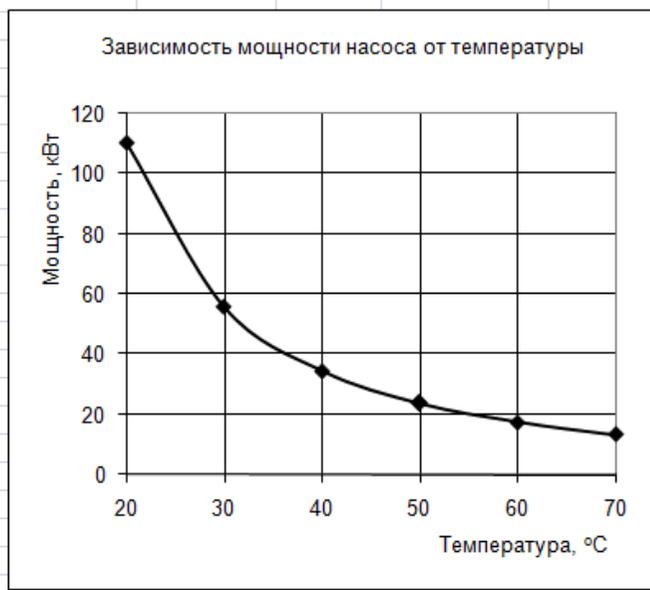


Рис. 2.9

## Электронный архив УГЛТУ

Численное решение задачи – нахождение минимума функции суммарных затрат  $Z$  можно выполнить с помощью надстройки Excel **Поиск решения**.

Для этого нужно выполнить команду **Данные** → **Поиск решения** и заполнить поля диалогового окна так, как показано на рис. 2.10. Для поиска минимума функции суммарных затрат в подокне **Ограничения** следует задать граничные условия для температуры, которая, исходя из физического смысла, не может быть меньше нуля.

Точное решение  $t=41,6$  °С.

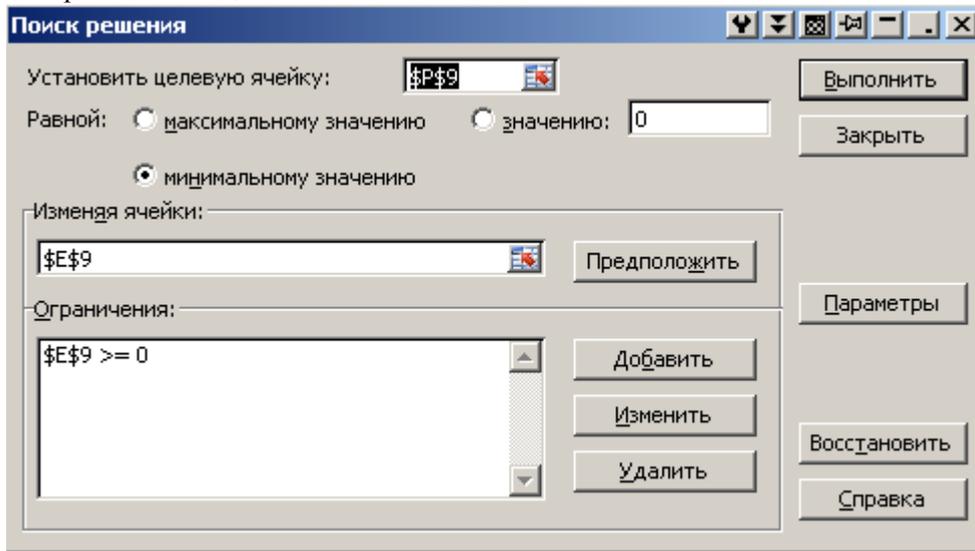


Рис. 2.10

### Задание для самостоятельной работы

По результатам изучения влияния температуры на мощность насоса постройте графики зависимости от температуры плотности, динамического коэффициента вязкости, критерия Рейнольдса, коэффициента трения.

### Домашняя работа №2

Задание выполняется во внеучебное время

Изучите влияние диаметра трубопровода на мощность насоса, если перекачку масла вести при температуре  $t=50$  °С, и сделайте технологические выводы о выборе диаметра трубопровода.

Для этого с помощью контекстного меню ярлыка листа рабочей книги выполните команду **Переместить/скопировать**. В окне диалога необходимо установить галочку в поле **Создать копию**.

Проведите необходимое редактирование копии листа 1. При этом ориентируйтесь на образец решения, представленный на рис. 2.11. Внесите изменения в исходные данные. В табличной части блока ячеек решения E3:K14 введите в ячейках E9:E14 значения диаметра трубопровода от 70 до 120 мм. Расчетные формулы с необходимыми абсолютными ссылками введите в ячейках F9:K9, а затем их скопируйте вниз до строки 14 методом протаскивания за маркер автозаполнения.

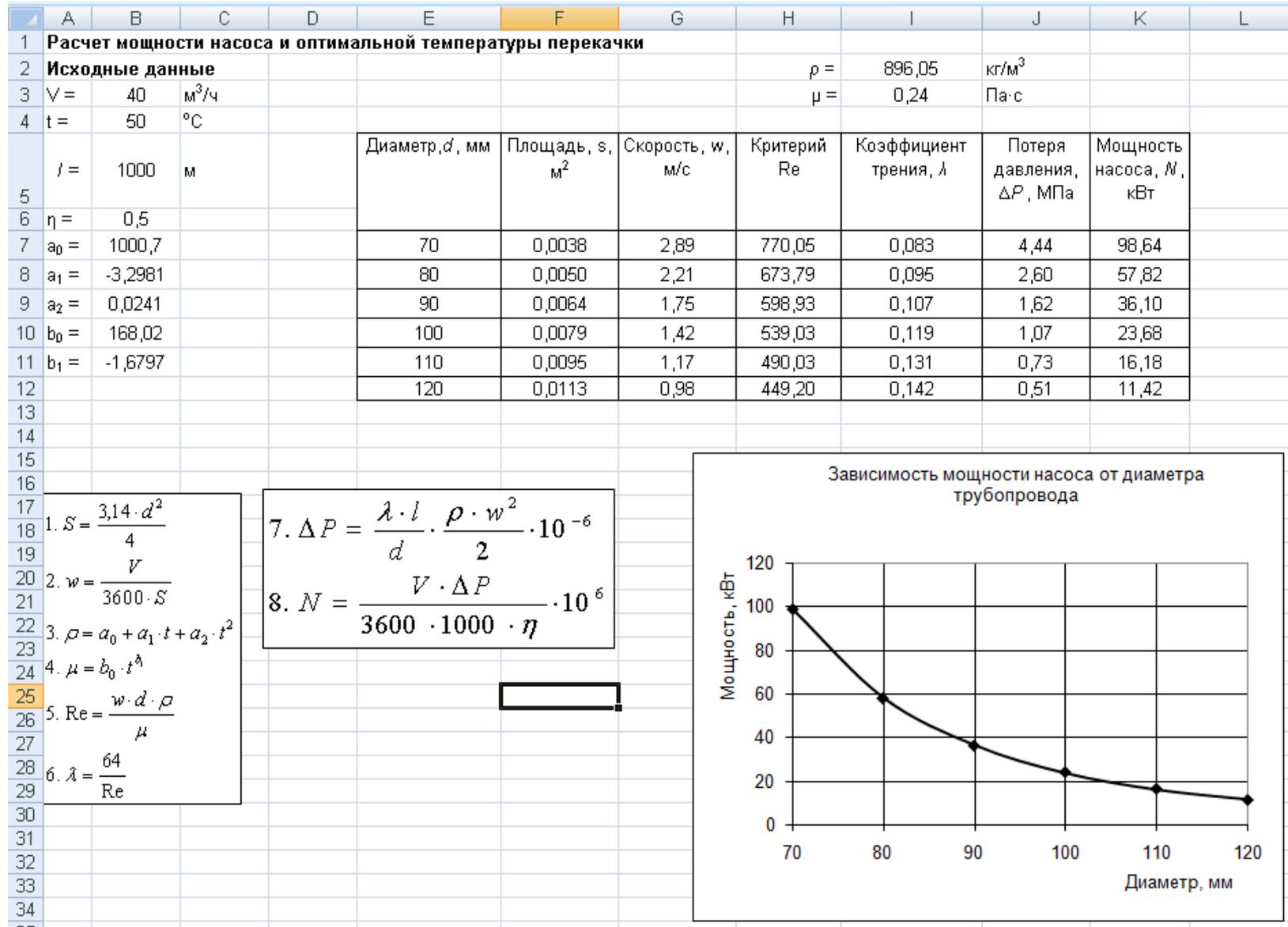


Рис. 2.11

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

В качестве примера математических моделей теплообменных процессов ниже будут проанализированы модели теплообменников простейших типов, в которых осуществляется передача тепла между двумя потоками теплоносителей. Математическое моделирование теплообменной аппаратуры заключается в расчете значений температуры потоков теплоносителей на выходе аппарата при заданных значениях температуры этих потоков на входе, известных расходах и составе теплоносителей, а также при известных геометрических характеристиках аппарата. Математическое описание теплообменных процессов подробно изучается в ряде учебных дисциплин и имеет достаточно простое математическое описание, основанное на фундаментальных физических законах.

Поэтому основное внимание в данной работе будет уделено методам решения уравнений математического описания в программе Excel, рассматриваемых на конкретных примерах.

### ПРИМЕР 3.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕННИКА ТИПА «СМЕШЕНИЕ-СМЕШЕНИЕ»

Идеализированная схема теплообменника типа «смешение-смешение» представлена на рис. 3.1.

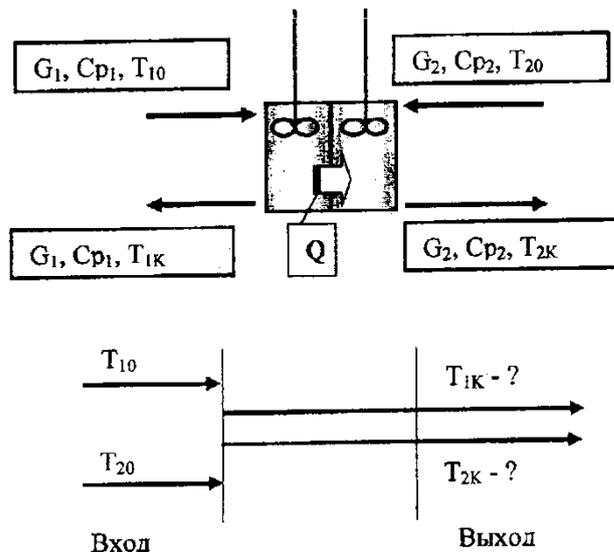


Рис. 3.1

### Математическая модель и ее анализ

Для каждого теплоносителя запишем уравнение теплового баланса движущегося потока, гидродинамическая структура которого близка к представлениям, связанным с идеальным смешением:

$$G_1 \cdot C_{p1} \cdot T_{10} - G_1 \cdot C_{p1} \cdot T_{1k} + Q_1 = 0 \quad (3.1)$$

$$G_2 \cdot C_{p2} \cdot T_{20} - G_2 \cdot C_{p2} \cdot T_{2k} + Q_2 = 0$$

Запишем выражения для источников тепла для контактирующих потоков:

$$Q_1 = k \cdot F \cdot (T_{2k} - T_{1k}) \quad (3.2)$$

$$Q_2 = k \cdot F \cdot (T_{1k} - T_{2k})$$

Коэффициент теплопередачи через стенку, разделяющую теплоносители, при небольшой разности температур потоков можно принять постоянной величиной  $k = \text{const}$ , что позволит уменьшить число уравнений в системе.

Выражения для источников тепла можно свести к новой переменной  $Q$ :

$$Q = Q_2 = -Q_1 = k \cdot F \cdot (T_{1k} - T_{2k}) \quad (3.3)$$

Тогда система математического описания теплообменника сведется к трем алгебраическим уравнениям:

1.  $G_1 \cdot C_{P_1} \cdot (T_{10} - T_{1k}) - Q = 0$
2.  $G_2 \cdot C_{P_2} \cdot (T_{20} - T_{2k}) + Q = 0$
3.  $Q = k \cdot F \cdot (T_{1k} - T_{2k})$

(3.4)

Система состоит из  $n=3$  уравнений.

Система имеет  $m=10$  переменных:

$$G_1, G_2, C_{P_1}, C_{P_2}, T_{10}, T_{20}, T_{1k}, T_{2k}, k, F, Q.$$

Число степеней свободы системы  $f = m - n = 10 - 3 = 7$ .

Система будет иметь единственное решение, если задать 7 переменных, характеризующих входные и внутренние параметры теплообменника:

$$G_1, G_2, C_{P_1}, C_{P_2}, T_{10}, T_{20}, k, F.$$

Тогда определяемыми переменными будут:  $T_{1k}, T_{2k}, Q$ .

### Разработка алгоритма решения системы уравнений

Системы уравнений решаются, как правило, итерационными методами. Тогда нужно определить: переменную, которой будет задаваться начальное приближение, порядок решения уравнений, уравнение, которое будет использоваться в качестве условия окончания итерационного цикла.

Порядок решения системы уравнений определен в табл. 3.1 и в блок-схеме на рис. 3.2.

Таблица 3.1

Номер уравнения в математическом описании	Определяемые переменные			Номер уравнения в алгоритме решения
1	+		+	1
2		+	+	2
3	+	+	+	3

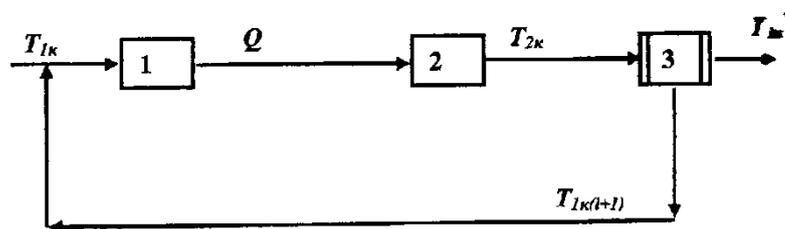


Рис. 3.2

Начальное приближение задается переменной  $T_{1k}$  в 1 и 2 уравнениях. Уравнение 3 используется в качестве критерия окончания итерационного цикла. Процесс решения всей системы уравнений сводится к решению одного уравнения с одной неизвестной  $R = Q - k \cdot F \cdot (T_{1k} - T_{2k})$

Второе уравнение системы удобнее записать относительно определяемой переменной

$$T_{2k} : \quad T_{2k} = T_{20} + \frac{Q}{G_2 \cdot C_{P_2}} \quad (3.5)$$

## Решение системы уравнений в программе Excel

Для решения уравнения с одной неизвестной в программе Excel имеется средство **Подбор параметра**, при использовании которого важно правильно выбрать начальное приближение исходя из физического смысла задачи, что позволит обеспечить быструю сходимость итерационного процесса и разумное число итераций. Например, в нашем случае в качестве начального приближения можно принять значение конечной температуры первого теплоносителя, равной начальной температуре второго теплоносителя.

Моделирование теплообменника с помощью средства **Подбор параметра** показано на рис. 3.3. В данном примере так же изучается влияние поверхности теплообменника  $F$  на выходные параметры системы.

В блоке ячеек **A3:C11** введены параметры модели.

В блоке ячеек **A19:A23** введены параметры исследования – поверхность  $F$ . В блоке ячеек **B19:B23** вводится значение начального приближения для конечной температуры первого теплоносителя  $T_{1k} = 300$ . Формулы в соответствующих ячейках представлены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Ячейка	Формула в электронной таблице	Математическая формула
C19	=B\$5*B\$6*(B\$7-B19)	$Q = G_1 \cdot C_{P_1} \cdot (T_{10} - T_{1k})$
D19	=B\$11+C19/(B\$9*B\$10)	$E_{2k} = T_{20} + Q/(G_2 \cdot C_{P_2})$
E19	=C19-B\$3*A19*(B19-D19)	$R = Q - k \cdot F \cdot (T_{1k} - T_{2k})$

Блок ячеек **C19:E19** копируется вниз до строки 23 методом протаскивания за маркер автозаполнения.

С помощью команды **Данные – Анализ «что-если» - Подбор параметра** расчет проводится для каждой ячейки блока **E19:E23**. Пример заполнения полей диалогового окна **Подбор параметра** для ячейки **E19** представлен на рис.3.3.

По данным блока **A19:B23;D19:D23** строится Точечный график зависимости конечных температур теплоносителей  $T_{1k}, T_{2k}$  от величины поверхности  $F$ .

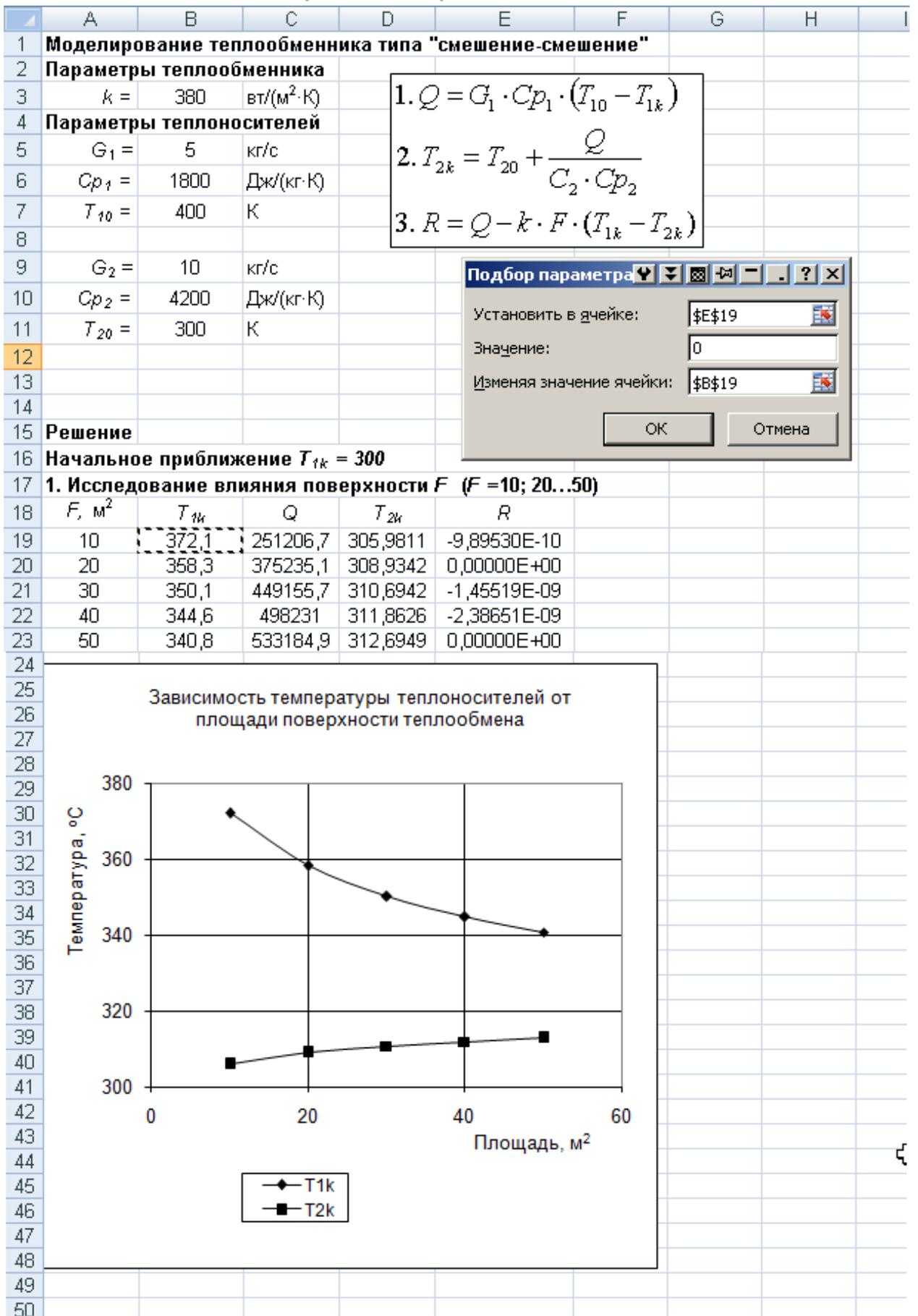


Рис. 3.3

**Задание для самостоятельной работы**

Требуется провести исследование зависимости конечных температур теплоносителей  $T_{1k}, T_{2k}$  от величины расхода второго теплоносителя  $G_2$ . Образец выполнения задания представлен на рис. 3.4.

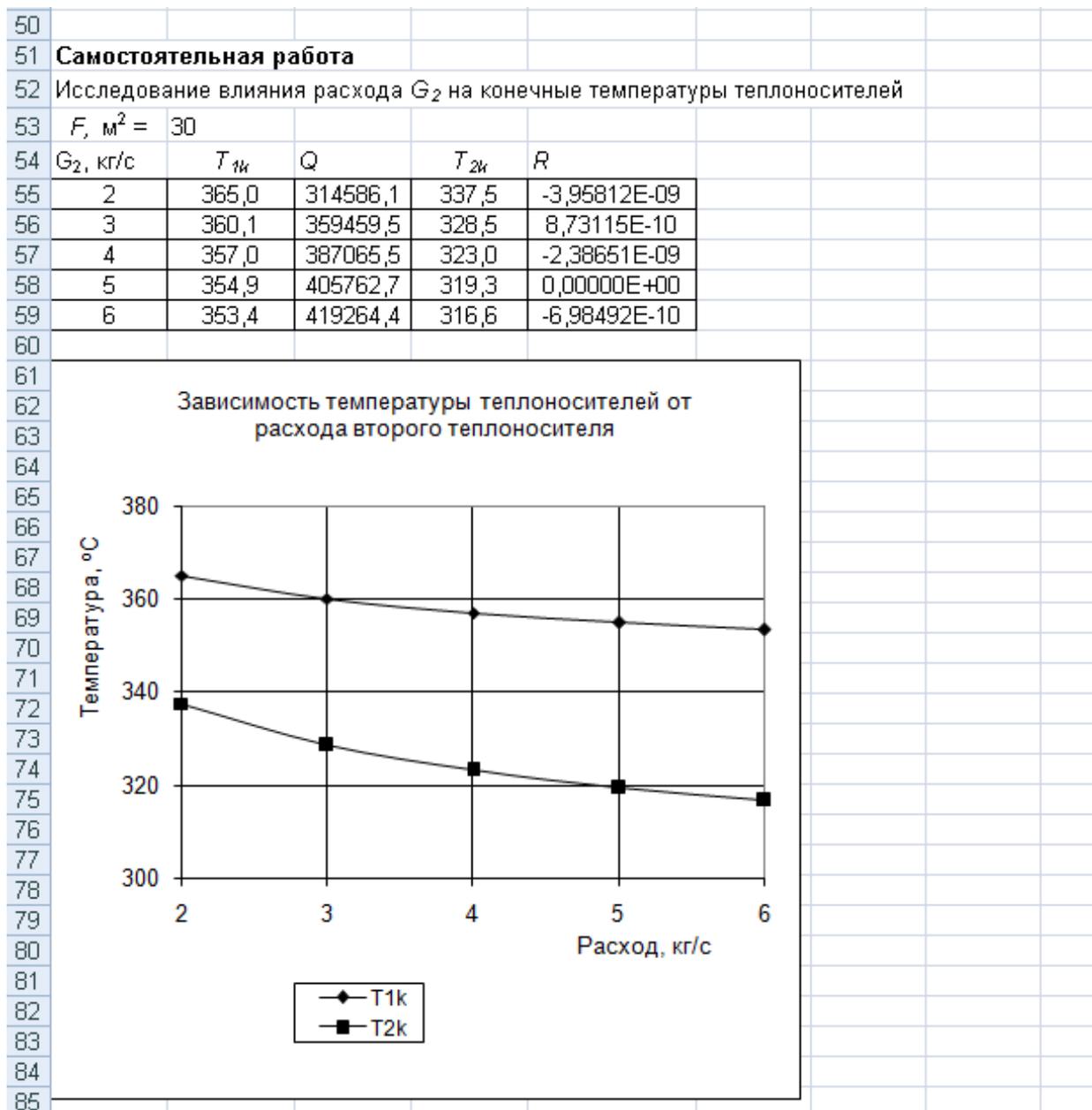


Рис. 3.4

## ПРИМЕР 3.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОБМЕННИКА ТИПА «ВЫТЕСНЕНИЕ-ВЫТЕСНЕНИЕ»

Идеализированная схема прямоточного теплообменника типа «вытеснение-вытеснение» представлена на рис. 3.5.

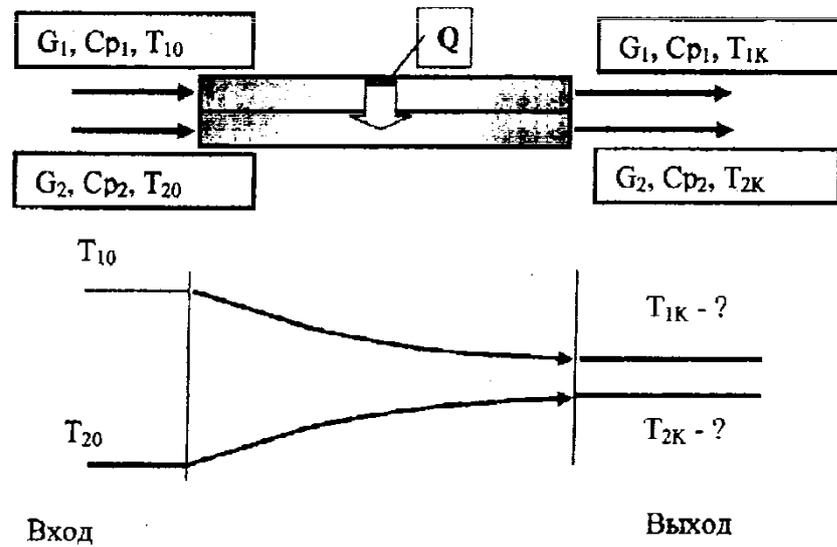


Рис. 3.5

### Математическая модель и ее анализ

Для каждого теплоносителя запишем уравнение теплового баланса движущегося потока, гидродинамическая структура которого близка к представлениям, связанным с идеальным вытеснением:

$$G_1 \cdot C_{p1} \cdot \frac{dT_1}{dl} = Q_1 \quad (3.6)$$

$$G_2 \cdot C_{p2} \cdot \frac{dT_2}{dl} = Q_2$$

Запишем выражения источников тепла для сечений соответствующих зон:

$$Q_1 = \frac{k \cdot F}{L} \cdot (T_2 - T_1) \quad (3.7)$$

$$Q_2 = \frac{k \cdot F}{L} \cdot (T_1 - T_2)$$

Коэффициент теплопередачи через стенку, разделяющую теплоносители, при небольшой разности температур потоков можно принять постоянной величиной  $k=const$ , что позволит уменьшить число уравнений в системе.

Выражения для источников тепла можно свести к новой переменной  $Q$ :

$$Q = Q_1 = -Q_2 = \frac{k \cdot F}{L} \cdot (T_2 - T_1) \quad (3.8)$$

В итоге получаем систему уравнений математического описания в следующем виде:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{dT_1}{dl} = W_1(T_1, T_2) \\ 2. \quad & \frac{dT_2}{dl} = W_2(T_1, T_2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$3. W_1(T_1, T_2) = \frac{k \cdot F}{G_1 \cdot C_{P_1} \cdot L} \cdot (T_2 - T_1)$$

$$4. W_2(T_1, T_2) = \frac{k \cdot F}{G_2 \cdot C_{P_2} \cdot L} \cdot (T_2 - T_1)$$

Моделирование теплообменника в данном случае сводится к совместному интегрированию дифференциальных уравнений по переменной  $l$  в пределах от  $O$  до  $L$  с шагом интегрирования  $h$ .

При использовании для интегрирования метода Эйлера нужно записать начальные условия интегрирования и итерационные формулы для расчета соответствующих функций.

$$5. h = \frac{L}{10}; l(O) = O; T_1(O) = T_{10}; T_2(O) = T_{20}$$

$$6. l(i+1) = l(i) + h$$

$$7. T_1(i+1) = T_1(i) + h \cdot W_1(T_1(i), T_2(i)) \quad (3.10)$$

$$8. T_2(i+1) = T_2(i) + h \cdot W_2(T_1(i), T_2(i))$$

Для реализации этого алгоритма нужно задать начальное приближение аргументу, задать шаг интегрирования и вычислить функцию правой части дифференциального уравнения при начальном значении аргумента. Количество таких итерационных циклов можно ограничить, если задать конечное значение для аргумента.

### Решение системы уравнений в программе Excel

Решение системы уравнений математического описания представлено на рис. 3.6.

В блоке ячеек **A4:C13** вводятся параметры модели.

В ячейке **B20** введена формула для расчета шага интегрирования = B5/10.

В блоке ячеек **A23:E33** решается система уравнений математического описания теплообменника.

В блоке ячеек **A23:A33** введены значения длины от 0 до 10 м с шагом 1 м.

В ячейках **B23:C23** введены начальные условия интегрирования. В следующих ячейках строки 23 производится расчет правой части дифференциального уравнения при заданных начальных условиях (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Ячейка	Формула в электронной таблице	Математическая формула
D23	=B\$3*B\$4*(C23-B23)/(B\$7*B\$8*B\$5)	$W_1(T_1, T_2) = \frac{k \cdot F}{G_1 \cdot C_{P_1} \cdot L} \cdot (T_2 - T_1)$
E23	=-B\$3*B\$4*(C23-B23)/(B\$11*B\$12*B\$5)	$W_2(T_1, T_2) = -\frac{k \cdot F}{G_2 \cdot C_{P_2} \cdot L} \cdot (T_2 - T_1)$
B24	=B23+D23*B\$20	$T_1(i+1) = T_1(i) + h \cdot W_1(T_1(i), T_2(i))$
C24	=C23+E23*B\$20	$T_2(i+1) = T_2(i) + h \cdot W_2(T_1(i), T_2(i))$

Ячейки **B24:C24** копируются вниз до строки 33 методом протаскивания за маркер автозаполнения. Ячейки **D23:E23** копируются до строки 33 аналогичным образом.

По значениям в блоке ячеек **A23:C33** строится Точечный график.

**Задание для самостоятельной работы**

Проведите вычислительный эксперимент, задавая другие значения параметрам модели, например увеличьте поверхность теплообменника до 60 м<sup>2</sup>. Созданная программа пересчитает таблицу интегрирования и перестроит график. По результатам вычислительного эксперимента сделайте технологические выводы.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Моделирование теплообменника типа "вытеснение-вытеснение"</b>							
2	<b>Параметры теплообменника</b>							
3	$k =$	380	Вт/(м <sup>2</sup> ·К)					
4	$F =$	30	м <sup>2</sup>					
5	$L =$	10	м					
6	<b>Параметры теплоносителей</b>							
7	$G_1 =$	5	кг/с					
8	$Cp_1 =$	2600	Дж/(кг·К)					
9	$T_{10} =$	550	К					
10								
11	$G_2 =$	6	кг/с					
12	$Cp_2 =$	2300	Дж/(кг·К)					
13	$T_{20} =$	400	К					
14								
15								
16								
17								
18								
19	<b>Решение</b>							
20		$h = 1$						
21	<b>Интегрирование дифференциальных уравнений методом Эйлера</b>							
22	$l$	$T_1$	$T_2$	$W_1$	$W_2$			
23	0	550,0	400,0	-13,2	12,4			
24	1	536,8	412,4	-10,9	10,3			
25	2	525,9	422,7	-9,1	8,5			
26	3	516,9	431,2	-7,5	7,1			
27	4	509,4	438,3	-6,2	5,9			
28	5	503,1	444,2	-5,2	4,9			
29	6	498,0	449,0	-4,3	4,0			
30	7	493,7	453,1	-3,6	3,4			
31	8	490,1	456,4	-3,0	2,8			
32	9	487,2	459,2	-2,5	2,3			
33	10	484,7	461,5	-2,0	1,9			
34								
35								
36								
37								
38								
39								
40								
41								
42								
43								
44								
45								
46								
47								
48								
49								

1.  $\frac{dT_1}{dl} = W_1(T_1, T_2)$
2.  $\frac{dT_2}{dl} = W_2(T_1, T_2)$
3.  $W_1(T_1, T_2) = \frac{k \cdot F}{G_1 \cdot Cp_1 \cdot L} (T_2 - T_1)$
4.  $W_2(T_1, T_2) = -\frac{k \cdot F}{G_2 \cdot Cp_2 \cdot L} (T_2 - T_1)$
5.  $h = \frac{L}{10}; l(0) = 0; T_1(0) = T_{10}; T_2(0) = T_{20}$
6.  $l(i+1) = l(i) + h$
7.  $T_1(i+1) = T_1(i) + h \cdot W_1(T_1(i), T_2(i))$
8.  $T_2(i+1) = T_2(i) + h \cdot W_2(T_1(i), T_2(i))$

L	T1 (K)	T2 (K)
0	550.0	400.0
1	536.8	412.4
2	525.9	422.7
3	516.9	431.2
4	509.4	438.3
5	503.1	444.2
6	498.0	449.0
7	493.7	453.1
8	490.1	456.4
9	487.2	459.2
10	484.7	461.5

Рис. 3.6

## ПРИМЕР 3.3. ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕПЛООБМЕННИКА ТИПА «СМЕШЕНИЕ-СМЕШЕНИЕ»

Основным вопросом, который приходится рассматривать при проектировании теплообменных аппаратов, является выбор величины поверхности теплообмена  $F$  и соответствующей ей нагрузки по хладагенту  $G_2$  при заданной тепловой нагрузке на теплообменник  $Q$ . В связи с этим для экономической оценки эффективности теплообменника заданной конструкции может быть использован критерий оптимальности, объединяющий переменные  $F$  и  $G_2$ . Постановка задачи оптимизации будет основываться на математической модели теплообменника типа «смешение-смешение», рассмотренной ранее в примере 3.1.

### Математическая модель и ее анализ

Критерий оптимальности  $R$  представляет собой суммарные затраты на эксплуатацию теплообменника в единицу времени и может быть записан в виде:

$$R = St \cdot G_2 + Sf \cdot F \text{ или } R = Rt + Rf \quad (3.11)$$

где  $St$  - стоимость единицы массы хладагента;  $Sf$  - стоимость единицы поверхности теплообмена,  $Rt = Sf \cdot G_2$  - эксплуатационные затраты,  $Rf = Sf \cdot F$  - капитальные затраты.

Для того чтобы получить возможность использовать критерий оптимальности  $R$  для выбора оптимальной поверхности теплообмена  $F_{opt}$  и оптимальной величины расхода хладагента  $G_{2opt}$ , необходимо из уравнений математического описания теплообменника найти связь между переменными  $F$  и  $G_2$ .

Запишем уравнение общего теплового баланса теплообменника:

$$G_1 \cdot C_{P_1} \cdot (T_{10} - T_{1k}) = G_2 \cdot C_{P_2} \cdot (T_{2k} - T_{20}) \quad (3.12)$$

Полученное уравнение запишем относительно переменной  $T_{2k}$ :

$$T_{2k} = T_{20} + \frac{G_1 \cdot C_{P_1}}{G_2 \cdot C_{P_2}} \cdot (T_{10} - T_{1k}) \quad (3.13)$$

Запишем выражения теплового баланса второго теплоносителя (хладагента) с учетом источника тела:

$$G_2 \cdot C_{P_2} \cdot (T_{20} - T_{2k}) + k \cdot F \cdot (T_{10} - T_{1k}) = 0 \quad (3.14)$$

Полученное уравнение запишем относительно переменной  $F$ :

$$F = \frac{G_2 \cdot C_{P_2}}{k} \cdot \frac{(T_{2k} - T_{20})}{(T_{1k} - T_{2k})} \quad (3.15)$$

Таким образом, мы получили систему уравнений, определяемые переменные которой являются функциями расхода хладагента  $G_2$ . Решение задачи оптимизации сводится к определению такого значения расхода  $G_2 = G_{2opt}$ , при котором функция суммарных затрат  $R(G_2)$  имеет минимум.

$$\begin{aligned}
 1. \quad T_{2k}(G_2) &= T_{20} + \frac{G_1 \cdot C_{P_1}}{G_2 \cdot C_{P_2}} \cdot (T_{10} - T_{1k}) \\
 2. \quad F(G_2) &= \frac{G_2 \cdot C_{P_2}}{k} \cdot \frac{(T_{2k} - T_{20})}{(T_{1k} - T_{2k})} \\
 3. \quad Rt(G_2) &= St \cdot G_2 \\
 4. \quad Rf(G_2) &= Sf \cdot F \\
 5. \quad R(G_2) &= Rt + Rf
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

При нахождении минимума функции  $R(G_2)$  необходимо учитывать следующие ограничения.

Расход хладагента  $G_2$  и поверхность теплообменника  $F$  могут принимать значения только больше нуля. Конечная температура хладагента  $T_{2k}$  не может быть больше конечной температуры первого теплоносителя  $T_{1k}$ .

Большое значение для сходимости итерационного процесса решения задачи оптимизации имеет правильный выбор начального значения переменной  $G_2$ . Из уравнения 1 следует предварительно определить, при каких значениях  $G_2$  конечная температура хладагента  $T_{2k}$  становится больше конечной температуры первого теплоносителя  $T_{1k}$ , что физически невозможно. Поэтому начальное приближение для переменной  $G_2$  должно быть принято больше этого значения.

### Решение задачи оптимизации в программе Excel

Решение задачи оптимизации представлено на рис. 3.8.

В блоке ячеек **A3:C12** вводятся параметры модели.

В ячейке **B15** введено начальное приближение для переменной  $G_2=3$ .

В блоке ячеек **B17:B21** записана система уравнений математического описания теплообменника (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Ячейка	Формула в электронной таблице	Математическая формула
B17	=B12+B7*B8*(B9-B10)/(B11*B15)	$T_{2k} = T_{20} + \frac{G_1 \cdot C_{P_1}}{G_2 \cdot C_{P_2}} \cdot (T_{10} - T_{1k})$
B18	=B11*B15*(B17-B12)/(B3*(B10-B17))	$F = \frac{G_2 \cdot C_{P_2}}{k} \cdot \frac{(T_{2k} - T_{20})}{(T_{1k} - T_{2k})}$
B19	=B4*B15	$Rt = St \cdot G_2$
B20	=B5*B18	$Rf = Sf \cdot F$
B21	=B19+B20	$R = Rt + Rf$

Решение осуществляется с помощью надстройки **Поиск решения**. Заполнение полей диалогового окна **Поиск решения** показано на рис. 3.8.

В блоке ячеек **A29:A35** эта же задача решается методом табулирования функций.

В блоке ячеек **A29:A35** введены значения расхода  $G_2$  от 3 до 9 кг/с.

В ячейках **B29:F29** решаются уравнения математического описания (табл. 3.5).

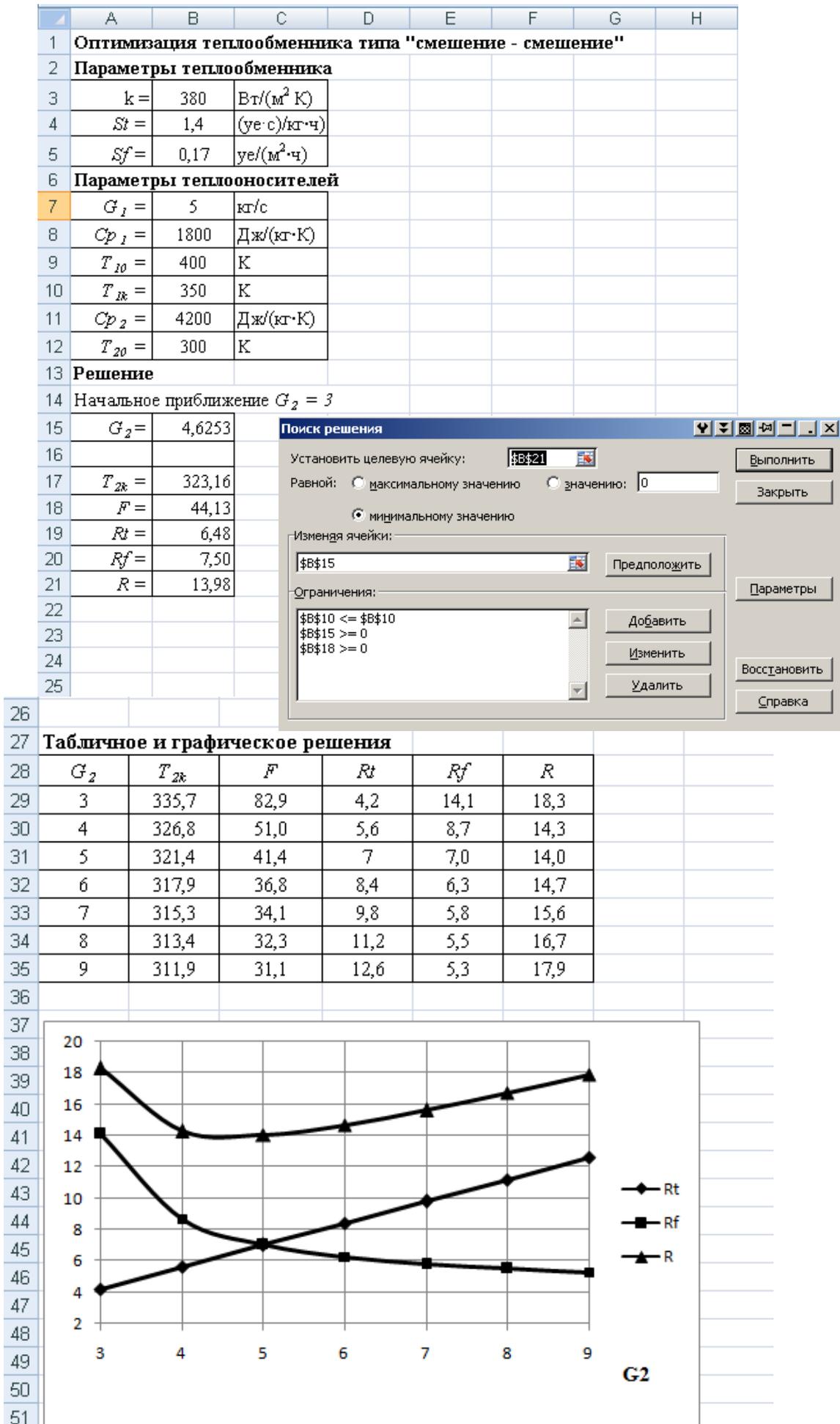


Рис. 3.8

Ячейка	Формула в электронной таблице	Математическая формула
B29	=B\$12+B\$7*B\$8*(B\$9-B\$10)/(B\$11*A29)	$T_{2k} = T_{20} + \frac{G_1 \cdot C_{P_1}}{G_2 \cdot C_{P_2}} \cdot (T_{10} - T_{1k})$
C29	=A29*B\$11*(B29-B\$12)/(B\$3*(B\$10-B29))	$F = \frac{G_2 \cdot C_{P_2}}{k} \cdot \frac{(T_{2k} - T_{20})}{(T_{1k} - T_{2k})}$
D29	=B\$4*A29	$Rt = St \cdot G_2$
E29	=B\$5*C29	$Rf = Sf \cdot F$
F 29	=D29+E29	$R = Rt + Rf$

Ячейки **B29:F29** копируются вниз до строки 35 методом протаскивания за маркер автозаполнения.

По значениям в блоке ячеек **A29:A35;D29:F35** строится Точечный график.

### Задание для самостоятельной работы

Проведите вычислительный эксперимент, задавая другие значения параметрам модели, например, задайте переменной  $G_1 = 4$ , а затем  $G_1 = 6$ . Или задайте значение стоимости единицы массы хладагента  $St = 0,7$ .

Созданная программа пересчитает таблицу и перестроит график.

По результатам вычислительного эксперимента сделайте технологические выводы.

## РАБОТА №3. ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ

Можно выделить в отдельную группу задачи моделирования и оптимизации, когда в качестве целевой функции используются не химико-технические, а экономические критерии.

Наиболее типичными являются следующие задачи.

1. Составление смесей (достижение заданного качества смеси при наименьших расходах).
2. Планирование выпуска продукции (максимизация выпуска продуктов при ограничениях на сырье и другие ресурсы для их производства).
3. Загрузка оборудования (минимизация издержек при выпуске продукции на установках разной мощности и стоимости).
4. Транспортная задача (минимизация затрат на поставку сырья от разных производителей).

С математической точки зрения эти задачи относятся к задачам, решаемым методами линейного и нелинейного программирования. В программе **Excel** эти методы реализованы в настройке **Поиск решения**. Математические аспекты методов будут рассмотрены в примерах решения типовых задач.

### ПРИМЕР 3.1. ПЛАНИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ

Если под ресурсами понимать все, что используется в процессе производства: финансы, оборудование, сырье, материалы, людей (в смысле заработной платы), то значительное число задач с позиции экономических критериев можно рассматривать как задачи планирования ресурсов. Математической моделью таких задач является задача линейного программирования, которая является достаточно распространенной задачей принятия оптимальных решений. В данном примере задача будет сформулирована в самом общем виде. В разделе заданий для самостоятельной работы будут даны более конкретные формулировки постановки задачи.

Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукцию четырех типов **Прод1, Прод2, Прод3, Прод4**, для изготовления которой требуются ресурсы трех видов: **трудовые, сырье, финансы**.

Количество ресурса каждого вида, необходимое для выпуска единицы продукции данного типа, называется нормой расхода. Нормы расхода, прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, а там же наличие располагаемого ресурса приведено в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Ресурс	Прод1	Прод2	Прод3	Прод4	Знак	Наличие
Прибыль	62	70	120	130	max	-
Трудовые	1	1	1	1	≤	16
Сырье	6	5	4	3	≤	110
Финансы	4	6	10	13	≤	100

Составим математическую модель, для чего введем следующие обозначения:

$X_j$  - количество выпускаемой продукции  $j$ -го типа,  $j=1-4$ ;

$b_i$  - количество располагаемого ресурса  $i$ -го вида,  $i = 1-3$ ;

$a_{ij}$  - норма расхода  $i$ -го ресурса для выпуска единицы продукции  $j$ -го типа;

$c_j$  - прибыль, получаемая от реализации единицы продукции  $j$ -го типа.

Как видно из табл. 3.1, для выпуска единицы **Прод1** требуется  $6x_1$  единиц сырья, для выпуска **Прод2** потребуется  $5x_2$  единиц сырья, для выпуска **Прод3** потребуется  $4x_3$  единиц сырья, а для выпуска **Прод4** потребуется  $3x_4$  единиц сырья. С учетом того, что запасы сырья ограничены 110 единицами, можно записать выражение для ограничения по сырью:

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110.$$

В этом ограничении левая часть равна величине потребного ресурса, а правая показывает количество имеющегося ресурса.

# Электронный архив УГЛТУ

Аналогично можно составить ограничения для остальных ресурсов и написать зависимость для целевой функции. Тогда математическая модель задачи будет иметь вид:

$$F=60x_1+70x_2+120x_3+130x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 16$$

$$6x_1+5x_2+4x_3+3x_4 \leq 110 \quad \} \quad (8.1)$$

$$4x_1+6x_2+10x_3+13x_4 \leq 100$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1-4$$

## Решение задачи в программе Excel

Ввод условий задачи состоит из следующих основных шагов:

1. Создание формы для ввода условий задачи.
2. Ввод исходных данных.
3. Ввод зависимостей из математической модели.
4. Назначение целевой функции.
5. Ввод ограничений и граничных условий.

Форма ввода условий задачи представлена на рис. 3.1. Обратите внимание, что текст на этом рисунке является комментарием и на решение задачи не влияет. **ЦФ** – это целевая функция **F**. **Напр.** – это направление изменения целевой функции. **Знак** – это знак, отделяющий в неравенстве левую и правую части. Эта форма наиболее приближена к математической записи систем уравнений.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Оптимальное распределение ресурсов</b>							
2	Продукты	<b>Прод1 (x<sub>1</sub>)</b>	<b>Прод1 (x<sub>2</sub>)</b>	<b>Прод1 (x<sub>3</sub>)</b>	<b>Прод1 (x<sub>4</sub>)</b>			
3	Значения x <sub>j</sub>							
4								
5						<b>ЦФ</b>	<b>Напр.</b>	
6	Козфф. в ЦФ							
7								
8	<b>Ресурсы</b>					Левая часть	Знак	Правая часть
9	Трудовые							
10	Сырье							
11	Финансы							
12								

Рис. 3.1

Далее требуется в полученную форму ввести исходные данные из табл. 3.1 и зависимости из математической модели – уравнения (3.1). Результат выполнения этих действий представлен на рис. 3.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Оптимальное распределение ресурсов</b>							
2	Продукты	Прод1 ( $x_1$ )	Прод2 ( $x_2$ )	Прод3 ( $x_3$ )	Прод4 ( $x_4$ )			
3	Значения $x_j$	0	0	0	0			
4								
5						ЦФ	Напр.	
6	Козэф. в ЦФ	60	70	120	130	0	max	
7								
8	<b>Ресурсы</b>					Левая часть	Знак	Правая часть
9	Трудовые	1	1	1	1	0	≤	16
10	Сырье	6	5	4	3	0	≤	110
11	Финансы	4	6	10	13	0	≤	100
12								

Рис. 3.2

### Алгоритм ввода зависимости для целевой функции

Курсор в **F6**.

**Формулы** –  $f_x$  **Вставить функцию**.

Курсор в окно **Категория** на категорию **Математические**.

В окне **Функция** курсор на функцию **СУММПРОИЗВ**.

**ОК**.

На экране окно диалога (Рис. 3.3).

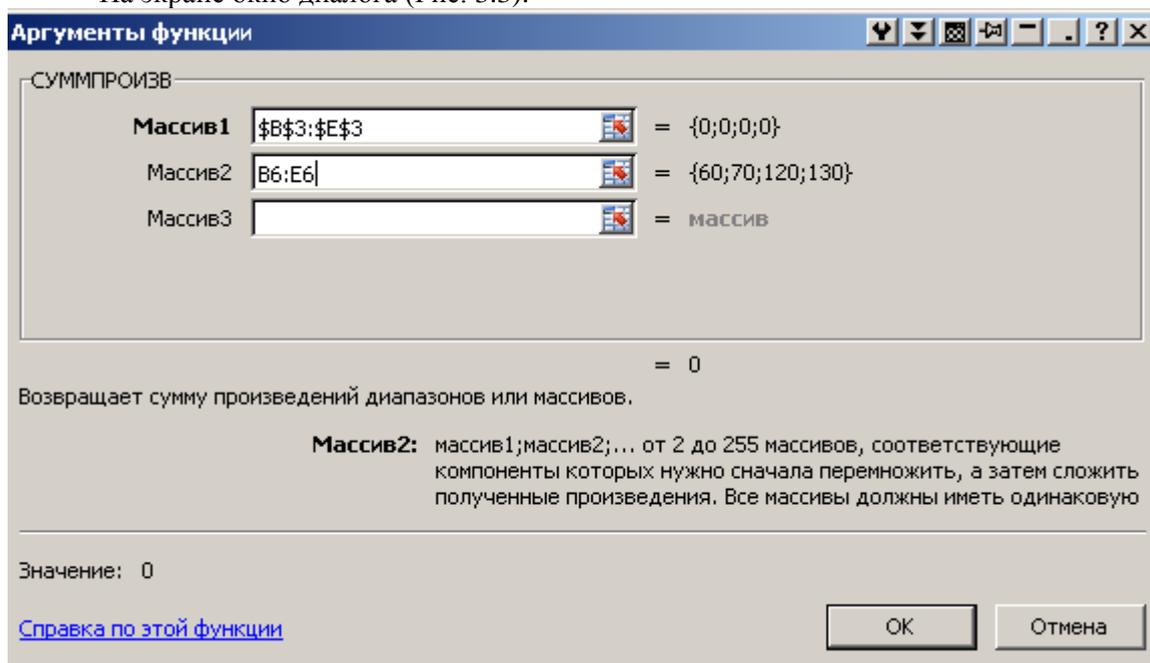


Рис. 3.3

В Массив1 ввести **\$B\$3:\$E\$3**. Заметим, что во все диалоговые окна адреса ячеек удобнее вводить не с клавиатуры, протаскивая мышью по ячейкам, чьи адреса следует ввести.

В Массив2 ввести **B6:E6**.

**ОК**.

Введено значение целевой функции. Поскольку значения переменным в блоке **B3:E3** пока равны нулю, то и значение целевой функции равно нулю.

На рис. 3.4 представлены формулы для ячеек целевой функции и левых частей ограничений.

5	<b>ЦФ</b>
6	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$E\$3;B6:E6)
7	
8	<b>Левая часть</b>
9	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$E\$3;B9:E9)
10	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$E\$3;B10:E10)
11	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$E\$3;B11:E11)

Рис. 3.4

**Алгоритм ввода зависимости для левых частей ограничений**

Курсор на **F6**.

Щелкнуть мышью по кнопке **Копировать**.

Курсор на **F9**.

Щелкнуть мышью по кнопке **Вставить**.

Скопировать **F9** в **F10: F11** методом протаскивания за маркер автозаполнения.

Целевая функция и левые части ограничений должны иметь значение равные нулю, поскольку пока количество продуктов равны нулю (начальные приближения).

**Алгоритм работы в диалоговом окне Поиск решения**

Выполнить команду **Данные → Поиск решения**.

На экране диалоговое окно Поиск решения (рис. 3.5).

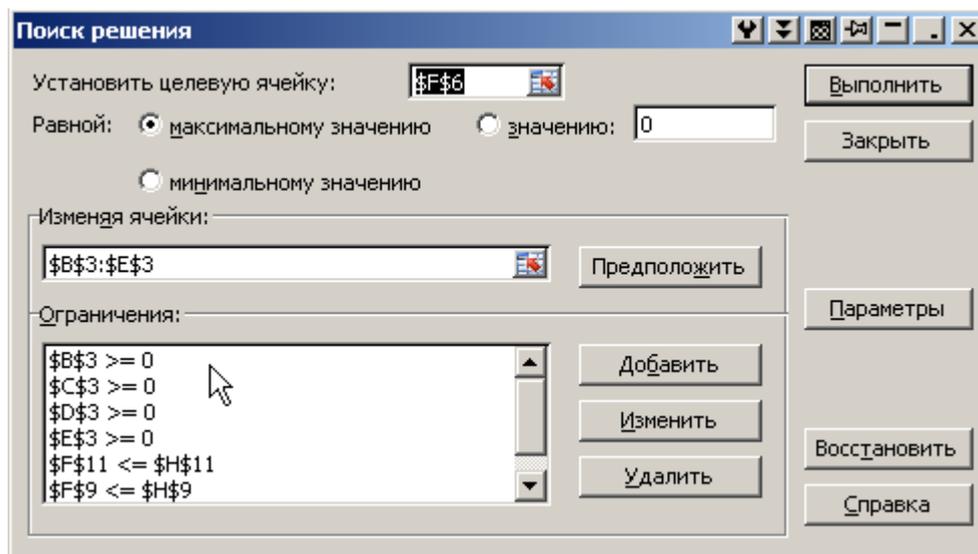


Рис. 3.5

Назначить целевую функцию.

Установить курсор в окно **Установить целевую ячейку**.

Ввести адрес: **F6**.

Ввести направление целевой функции: Максимальному значению.

Курсор в поле **Изменяя ячейки**.

Ввести адреса искомым переменных **\$B\$3;\$E\$3**.

Курсор на кнопку **Добавить**.

На экране диалоговое окно **Добавление ограничений** (рис. 3.6)

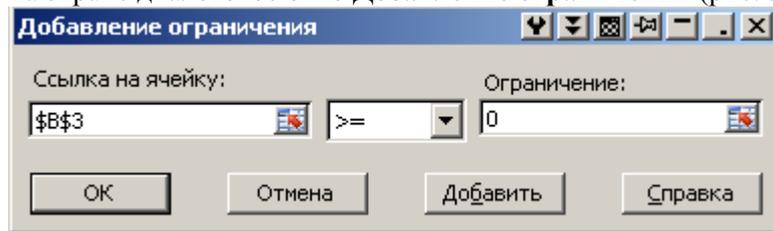


Рис. 3.6

Ввести граничные условия для переменных **Прод1**, **Прод2**, **Прод3**, **Прод4**, которые по физическому смыслу не могут быть меньше нуля:

**$V3 \geq 0, C3 \geq 0, D3 \geq 0, E3 \geq 0$ .**

В окне **Ссылка на ячейку** ввести **V3**.

Курсор в среднее списочное поле на знак **>=** (больше равно).

Курсор в окно **Ограничение**.

Ввести **0**.

Курсор на кнопку **Добавить**.

На экране опять окно **Добавить ограничения**. Аналогично ввести граничные условия для остальных переменных.

Далее продолжите ввод ограничений для левых частей:

**$F9 \leq N9, F10 \leq N10, F11 \leq N11$ .**

Если при вводе требуется изменить или удалить введенные ограничения, то воспользуйтесь кнопками **Изменить**, **Удалить**.

На этом ввод условий задачи заканчивается, но окно **Поиск решения** продолжает оставаться на экране.

### Решение задачи в программе Excel

Для выбора метода и условий решения задачи активизируйте кнопку **Параметры**. На экране диалоговое окно **Параметры поиска решения**. Отметим, что параметры, используемые по умолчанию, подходят для решения большей части практических задач, поэтому их изменять не нужно.

Установить флажок **Линейная модель**, в которой реализован алгоритм симплекс-метода. Остальные условия решения задачи примем по умолчанию.

**ОК**.

На экране: уже знакомое окно **Поиск решения**.

**Выполнить**.

В электронной таблице Вы видите результаты решения задачи распределения ресурсов (рис.3.7).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Оптимальное распределение ресурсов</b>							
2	Продукты	<b>Прод1 (<math>x_1</math>)</b>	<b>Прод2 (<math>x_2</math>)</b>	<b>Прод3 (<math>x_3</math>)</b>	<b>Прод4 (<math>x_4</math>)</b>			
3	Значения $x_j$	10	0	6	0			
4								
5						<b>ЦФ</b>	<b>Напр.</b>	
6	Козфф. в ЦФ	60	70	120	130	1320	max	
7								
8	<b>Ресурсы</b>					Левая часть	Знак	Правая часть
9	Трудовые	1	1	1	1	16	$\leq$	16
10	Сырье	6	5	4	3	84	$\leq$	110
11	Финансы	4	6	10	13	100	$\leq$	100
12								

Рис. 3.7

Поверх электронной таблицы - окно **Результаты поиска решения** (рис. 3.8), которое можно оттащить мышкой в сторону.

**ОК.**

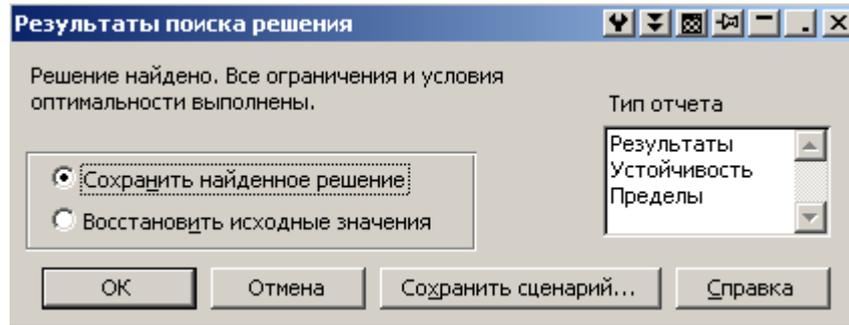


Рис. 3.8

Итак, мы получили следующие результаты решения задачи.

1. Оптимальный выпуск продукции составляет:

$$\text{Прод1} = \text{B3} = 10$$

$$\text{Прод2} = \text{C3} = 0$$

$$\text{Прод3} = \text{D3} = 6$$

$$\text{Прод4} = \text{E3} = 0$$

2. Количество используемых ресурсов равно:

$$\text{Трудовых} = \text{F9} = 16$$

$$\text{Сырья} = \text{F10} = 84$$

$$\text{Финансовых} = \text{F11} = 100$$

3. Максимальная прибыль при этом будет составлять **F6 = 1320**

Важным фактором, помогающим понять полученное решение, является графическое представление результатов, которое Вам предлагается сделать самостоятельно так, как показано на рис. 3.9.

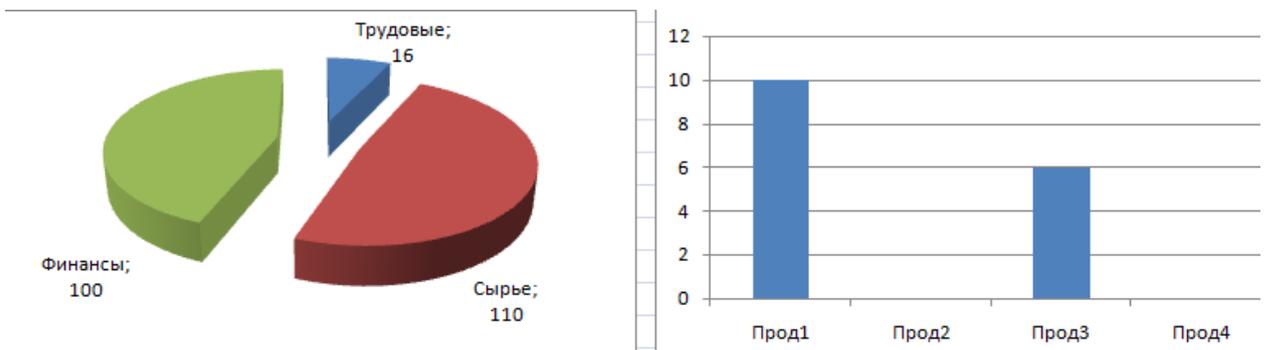


Рис. 3.9

## Параметрический анализ решения задачи линейного программирования

Под параметрическим анализом понимается решение задачи оптимизации при различных значениях того параметра, который ограничивает улучшение целевой функции. В данной задаче таким параметром могут быть финансовые ресурсы.

Предлагается провести расчет задачи при трех значениях параметра **Финансы** 50 (вариант 1), 100 (вариант 2), 150 (вариант 3).

Поскольку вариант 2 Вы уже решили, то рекомендуем щелкнуть правой кнопкой по корешку листа рабочей книги и переименовать его в Вариант 2.

Далее с помощью команды **Переместить/Скопировать** этого же меню создайте копию листа **Вариант 1**. Обратите внимание на флажок в поле **Создать копию**. Новый лист переименовать в **Вариант 1**.

Действуя аналогичным образом, создайте лист **Вариант 3**.

Для выполнения параметрического анализа воспользуемся следующим алгоритмом.

## Электронный архив УГЛТУ

Вывести на экран таблицу с результатами решения задачи (рис. 3.7) – лист **Вариант 2**.

Удалить результаты решения из ячеек **В3:Е3**:

Выделить **В3:Е3**.

<Delete>

Убрать выделение.

Решение задачи для первого варианта:

Ввести в ячейку **Н11**=50.

**Данные** → **Поиск решения**.

**Выполнить**.

В электронной таблице видны результаты расчета (рис.3.10).

**ОК**

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Оптимальное распределение ресурсов</b>							
2	Продукты	<b>Прод1</b>	<b>Прод2</b>	<b>Прод3</b>	<b>Прод4</b>			
3	Значения $x_j$	12,5	0	0	0			
4								
5						<b>ЦФ</b>	<b>Напр.</b>	
6	Козфф. в ЦФ	60	70	120	130	750	max	
7								
8	<b>Ресурсы</b>					Левая часть	Знак	Правая часть
9	Трудовые	1	1	1	1	12,5	≤	16
10	Сырье	6	5	4	3	75	≤	110
11	Финансы	4	6	10	13	50	≤	50

Рис. 3.10

Далее необходимо повторить алгоритм для варианта 3 на листе Вариант 3. Результаты расчета по варианту 3 представлены на рис. 3.11.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Оптимальное распределение ресурсов</b>							
2	Продукты	<b>Прод1</b>	<b>Прод2</b>	<b>Прод3</b>	<b>Прод4</b>			
3	Значения $x_j$	1,6667	0	14,3333	0			
4								
5						<b>ЦФ</b>	<b>Напр.</b>	
6	Козфф. в ЦФ	60	70	120	130	1820	max	
7								
8	<b>Ресурсы</b>					Левая часть	Знак	Правая часть
9	Трудовые	1	1	1	1	16	≤	16
10	Сырье	6	5	4	3	67,33333333	≤	110
11	Финансы	4	6	10	13	150	≤	150

Рис. 3.11

Создайте новый лист рабочей книги с помощью команды контекстного меню лист **Вставить** и переименуйте его в **Отчет**.

На этом листе создайте таблицу отчета по параметрическому анализу путем копирования результатов расчета из соответствующих листов рабочей книги (рис. 3.12).

Самостоятельно представьте результаты анализа в графическом виде так, как это сделано на рис. 3.13, 3.14.

# Электронный архив УГЛТУ

	A	B	C	D	E
1	<b>Отчет по параметрическому анализу</b>				
2		Финансы=50	Финансы=100	Финансы=150	
3	Прод1	12,5	10	1,67	
4	Прод2	0	0	0	
5	Прод3	0	6	14,33	
6	Прод4	0	0	0	
7	Прибыль	750	1320	1820	
8	Трудовые	12,5	16	16	
9	Сырье	75	84	67	
10	Финансы	60	100	160	
11					

Рис. 3.12

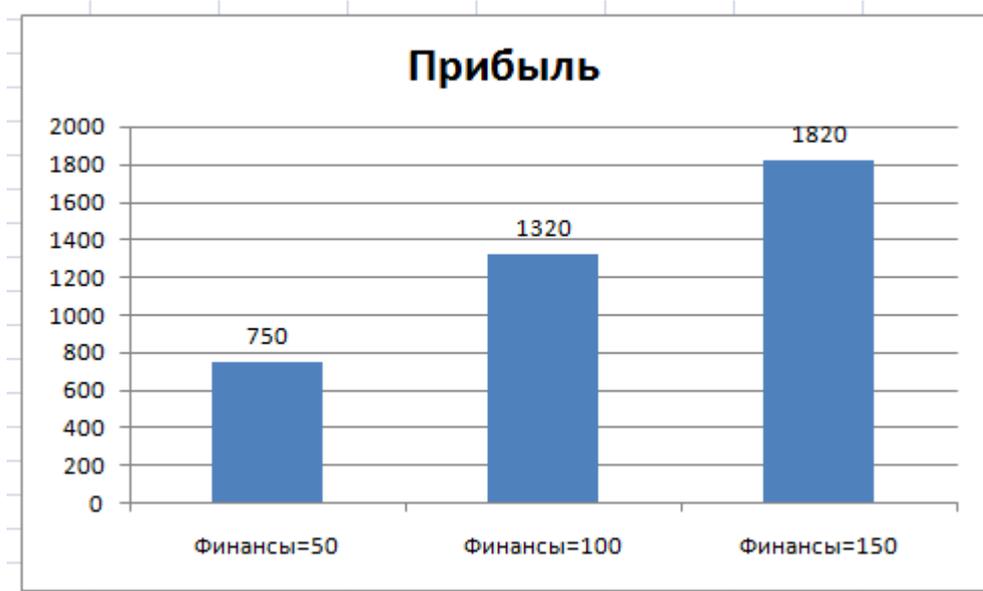


Рис. 3.13

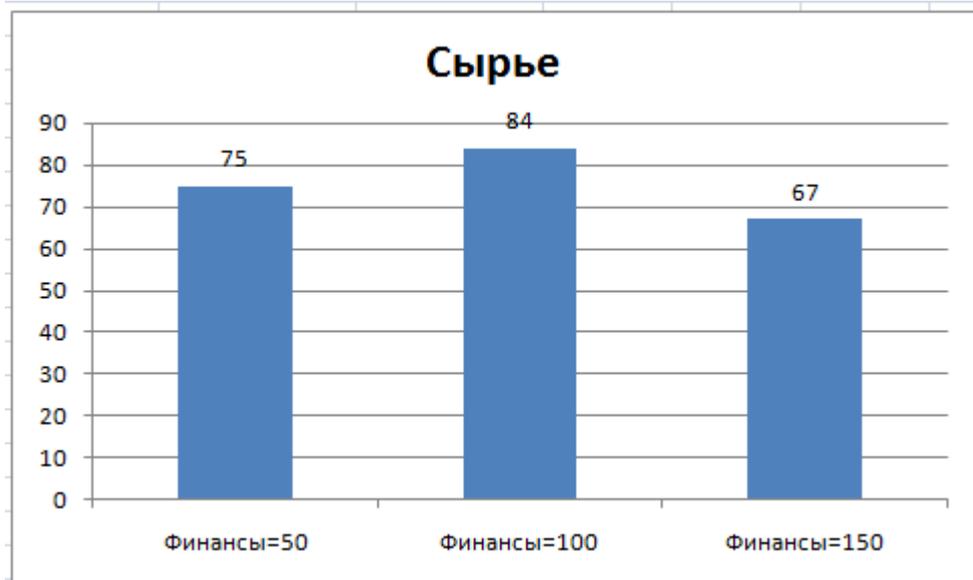


Рис. 3.14

**Домашняя работа №3**

Задание выполняется во внеучебное время

Фирма производит три вида полимерной продукции (А, В, С), для выпуска каждого требуется определенное время обработки на всех четырех станках I, II, III, IV (см. табл.).

Время работы на устройствах соответственно 84, 42, 21 и 42 часа.

Определите, какую продукцию и в каких количествах стоит производить для максимизации прибыли.

Вид продукции	Время отработки, ч				Прибыль, долл.
	I	II	III	IV	
А	1	3	1	2	3
В	6	1	3	3	6
С	3	3	2	4	4

## РАБОТА №4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

### ПРИМЕР 4.1. ТРЕНДОВЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Для выявления тенденции изменения динамического ряда наибольший эффект дает использование аналитического метода, сущность которого заключается в нахождении уравнения, выражающего закономерность изучаемого явления (уравнения **тренда**). Имея уравнение, можно решать задачи **интерполяции**, т.е. нахождения значений признака внутри исследуемого периода, или задачи **экстраполяции** – нахождения значения признака за пределами анализируемого периода. Экстраполяция основывается на предположении, что найденная закономерность развития внутри динамического ряда сохраняется и вне его, особенно в будущем.

При составлении прогнозов развития изучаемого явления оперировать оценкой, рассчитанной по уравнению тренда (точечной оценкой) можно только со знанием доверительного интервала прогноза. Границы доверительного интервала определяются по формуле

$$\hat{y} \pm t \cdot s, \quad (4.1)$$

где  $\hat{y}$  - точечный прогноз, рассчитанный по уравнению тренда;

$t$  – коэффициент Стьюдента при уровне значимости  $\alpha$  и числе степеней свободы  $f = n - 1$ ;

$s$  – среднее квадратическое отклонение тренда (ошибка аппроксимации).

Среднее квадратическое отклонение тренда вычисляется по формуле:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - l}} \quad (4.2)$$

где  $y_i, \hat{y}_i$  - фактические и расчетные значения;

$n$  – количество наблюдений;

$l$  – число коэффициентов в уравнении тренда.

На практике выбор вида уравнения тренда может быть основан на анализе графического отображения динамического ряда в виде точек на диаграмме и на анализе сущности изучаемой закономерности (последнее чаще важнее). В Excel представлены все часто используемые трендовые модели. Рассмотрим их на конкретном примере (рис. 4.1).

В блоке ячеек **A5:I6** необходимо ввести исходные данные. Далее требуется выделить блок ячеек **B5:I6** и построить **Точечную диаграмму с маркерами** (**Вставка** – **Точечная** – **Точечная с маркерами**). Отформатируйте диаграмму в соответствии с рис. 4.1.

Для построения трендовой модели правой кнопкой мыши по любой точке графика вызовите контекстное меню и выполните команду **Добавить линию тренда** (рис. 4.2).

Выберите параметры соответственно с рис. 4.2. В результате вы получите график как на рис. 4.1, на котором показано уравнение линейной зависимости и величина достоверности аппроксимации  $R^2$  ( $R^2$  называют также коэффициентом детерминации).

По величине  $R^2$  можно судить о качестве аппроксимации данных уравнением тренда.

При  $R^2 = 0$  величины, для которых определяется уравнение тренда, являются независимыми.

При  $R^2 = 1$  имеет место функциональная (а не статистическая) взаимосвязь.

При  $R^2 > 0,7$  принято говорить о существовании достаточно тесной взаимосвязи.

С математической точки зрения коэффициент детерминации  $R^2$  вычисляется по следующим формулам:

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - l} \quad S_y^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{l} \quad S_{\text{общ}}^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n - 1} \quad R^2 = \frac{S_{\text{ост}}^2}{S_{\text{общ}}^2}$$

В рассматриваемом примере  $R^2 = 0,911$ , что свидетельствует о высокой точности аппроксимации данных линейным уравнением.

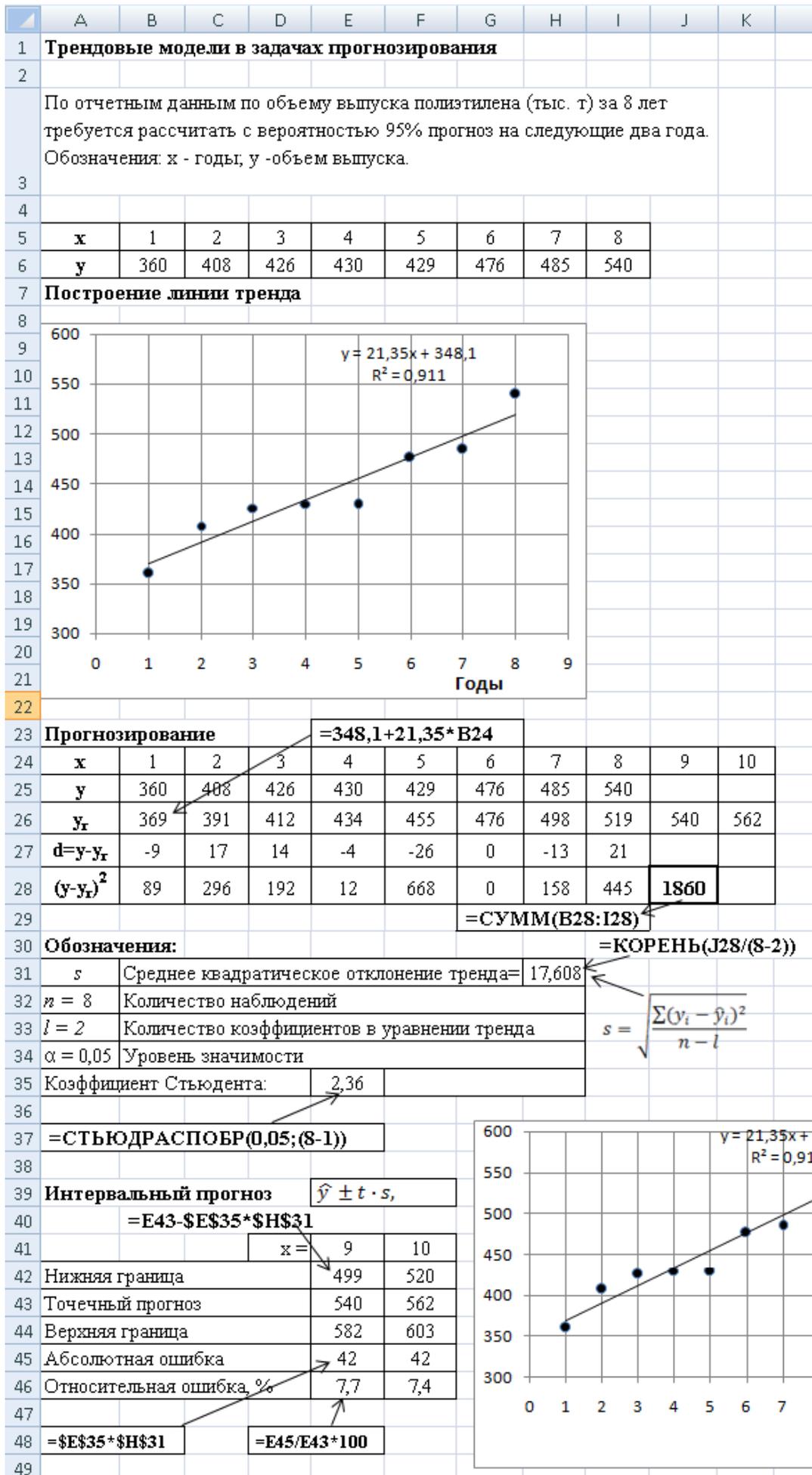


Рис. 4.1.

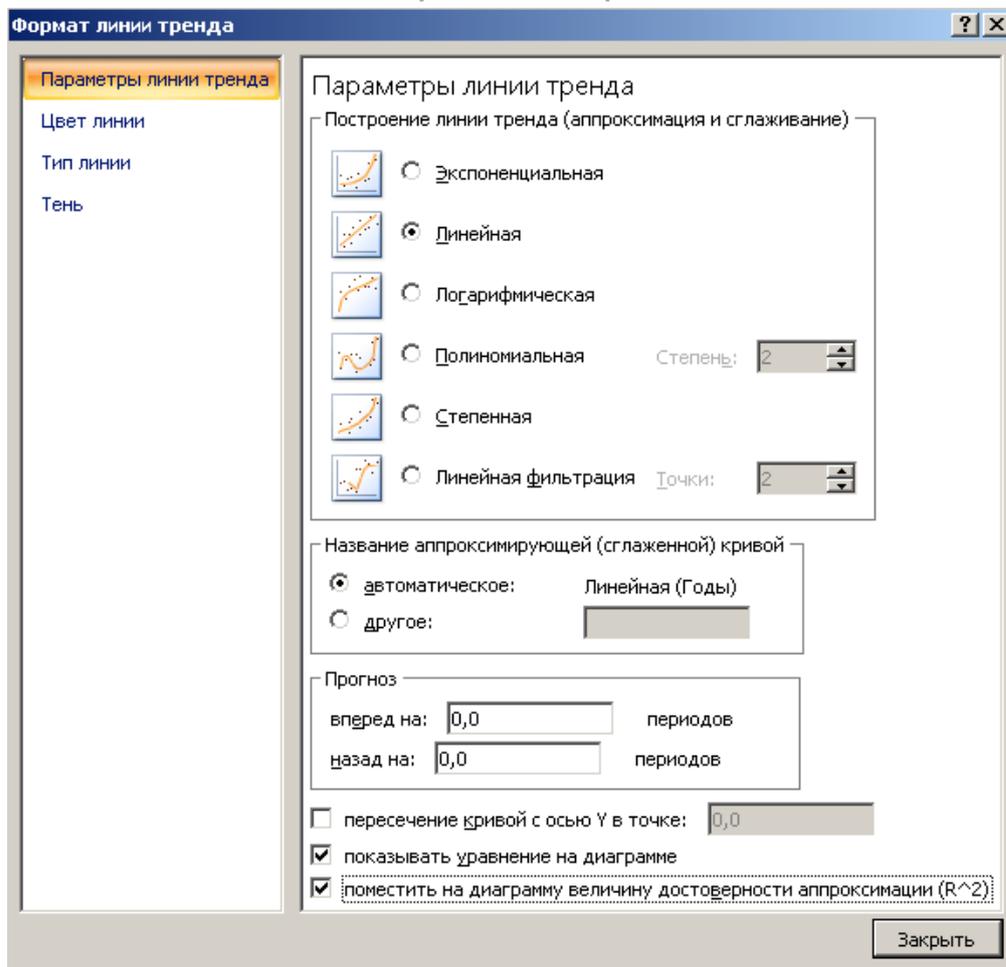


Рис. 4.2

Прогнозирование объема выпуска удобрений нВ следующие два года осуществляется в блоке ячеек **A24:K28**.

В блок ячеек **A24:I24** потребуется вновь ввести исходные данные, например, методом копирования блока **A5:I6**.

В ячейке **B26** провести расчет функции по уравнению тренда  $=348,1+21,35*B24$  при аргументе, записанном в ячейке **B24**. Далее ячейка **B26** копируется методом протаскивания до ячейки **K26**.

В строке **27** проведен расчет остатков.

В строке **28** проведен расчет квадратов остатков.

В ячейке **J28** рассчитана сумма квадратов остатков.

В ячейке **H31** рассчитано среднее квадратическое отклонение тренда.

В ячейке **E35** рассчитан коэффициент Стьюдента.

Далее нам потребуется рассчитать доверительные интервалы прогноза. Рассчитанный ранее в ячейках **J26:K26** точечный прогноз введен вновь в ячейках **E43:F43**. В блоке ячеек **A42:F46** проведен расчет доверительных интервалов. Относительная ошибка прогноза около 7,5% является вполне приемлемой.

В правый нижний угол рабочего листа скопирован график линии тренда. Щелкните по линии тренда правой кнопкой мыши, в контекстном меню – **Формат линии тренда**, в открывшейся вкладке установите **Прогноз вперед** на 2 периода. На графике линия тренда будет автоматически продолжена на 9 и 10 значения оси времени.

Отметим, что при практическом использовании результатов прогнозирования фактические значения признака будут соответствовать расчетным только в том случае, если за новый период в деятельности анализируемой организации не произошло качественных изменений.

### Задание для самостоятельной работы

Скопируйте полученный расчет на новый лист. В качестве упражнения выберите другую модель тренда. Из визуального вида расположения точек напрашивается мысль об использовании полинома третьей степени, как наиболее близкой формальной модели. Для этого в диалоговом окне **Добавить линию тренда** активизируйте полиномиальную модель третьей степени. Далее проведите расчеты прогнозирования по новой модели.

Ответ: Формально новая модель лучше линейной. Однако в реальной жизни экономические прогнозы носят обычно линейный характер. Но убедиться в этом можно будет только через два года. Полином третьей степени наверняка даст слишком завышенные прогнозные значения (рис. 4.3).

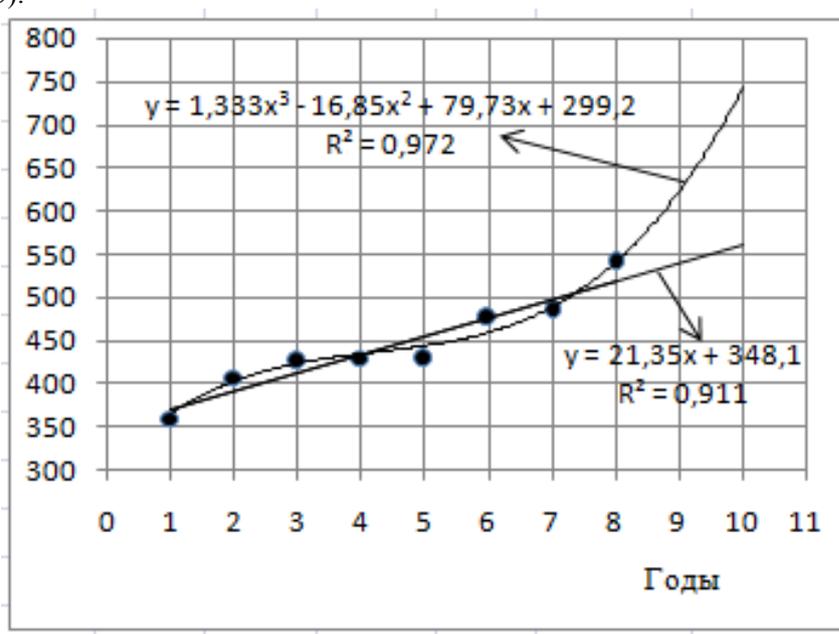


Рис. 4.3

### Домашняя работа № 4

Имеются экспериментальные данные по вязкости нефтяного масла при различных температурах:

t, град С	20	25	35	45	55	65	75
μ, Па	1,38	0,70	0,35	0,25	0,19	0,16	0,14

Требуется найти уравнение аппроксимации и оценить адекватность модели.

## ПРИМЕР 4.2. ПОСТРОЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СРЕДСТВАМИ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Если между независимой (входной) переменной  $x$  и зависимой (выходной) переменной имеется корреляционная связь, то ее можно оценить и исследовать методом регрессионного анализа. Этот метод в пакете Excel 2007 вызывается из надстроек командой **Данные – Анализ данных – Регрессия**.

Рассмотрим технологию применения регрессионного анализа на примере адсорбции  $\text{SO}_2$  силикагелем. Условия задачи приведены на рис. 4.5.

В блоке ячеек **A6:B9** осуществлен ввод экспериментальных данных.

Далее выполняем команду **Данные – Анализ данных – Регрессия** и заполняем поля диалогового окна Регрессия (рис. 4.4).

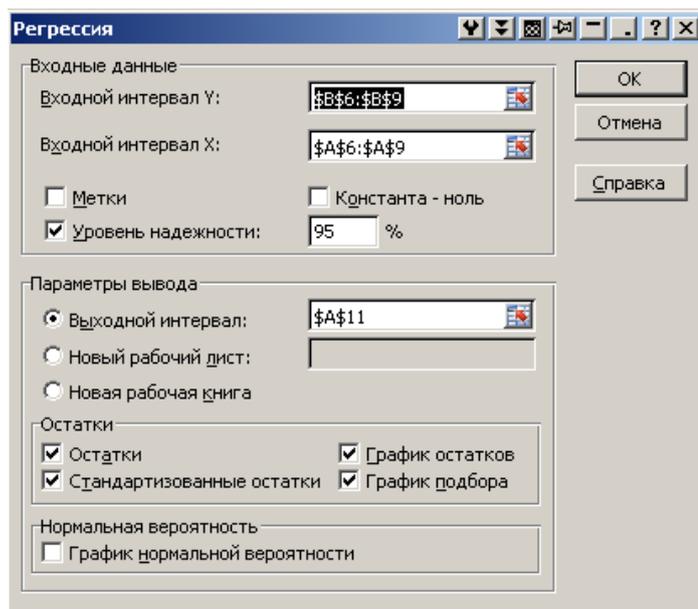


Рис. 4.4

Щелкните кнопку ОК.

После выполнения этих действий Excel отобразит полученные результаты на том же листе начиная с ячейки **A11**.

Как видите, полученные результаты разделены на шесть областей: регрессионная статистика, дисперсионный анализ, оценочные параметры, данные об остатках, данные о распределении вероятности, диаграммы. Рассмотрим эти области более подробно. Вероятно, что на вашем рабочем листе вы видите несколько другую картинку. Это объясняется тем, что команда Регрессия из пакета анализа данных Excel представляет полученные результаты в неформатированном виде, поэтому для более удобного просмотра вам придется их отредактировать.

### **Интерпретация параметров регрессии**

#### ***Интерпретация статистических параметров регрессии***

Рассмотрим область статистических параметров регрессии. Величина  $R^2$  в строке *R-квадрат* равна 0,918367347. Величина в строке *Множественный R* равна квадратному корню величины  $R^2$ . Она выражает абсолютную величину корреляции между зависимой переменной и **предиктором** (независимая переменная  $x$ ). Величина в строке *Нормированный R-квадрат* используется для анализа регрессии с несколькими предикторами. Наконец, величина в строке *Стандартная ошибка* описывает размер типичного отклонения наблюдаемого значения ( $x$ ,  $y$ ) от линии регрессии. Стандартную ошибку можно представить себе как усредненную меру отклонений от линии регрессии. В нашем примере типичное отклонение наблюдаемой точки от линии регрессии составляет 1,414213562. Величина в строке *Наблюдения* указывает размер выборки, т.е. в данном случае регрессия основана на значениях из 4 измерений.

#### ***Интерпретация результатов анализа изменчивости (дисперсионный анализ)***

В области *Дисперсионный анализ* приведены параметры изменчивости концентрации  $\text{SO}_2$  в силикагеле. Изменчивость определяется двумя составляющими: изменениями линии регрессии и хаотичными изменениями. В столбце  $d_f$  приводятся данные о количестве степеней свободы. Об-

щее количество степеней свободы указано в строке *Итого* и равно 3 (число наблюдений – 1). Из них одна степень свободы связана с изменениями линии регрессии. Она указана в строке *Регрессия*. В строке *Остаток* указано 2 степени свободы, которые связаны с хаотичными изменениями. В столбце *SS* приводятся значения суммы квадратов. Общая сумма квадратов в ячейке на пересечении со строкой *Итого* содержит сумму квадратов отклонений концентрации от среднего. Общая сумма квадратов складывается из двух частей: одна определяется изменениями линии регрессии, а другая связана с хаотичными изменениями и указана в ячейке на пересечении со строкой *Остаток*. Первая часть указана в ячейке на пересечении со строкой *Регрессия* и является суммой квадратичных отклонений от среднего. Вторая часть указана в ячейке на пересечении со строкой *Остаток* и является суммой квадратичных отклонений от линии регрессии. Последнее из двух значений должно принимать минимальное значение в уравнении регрессии. В данном примере общая сумма квадратичных отклонений равна 49, причем одно ее слагаемое 45 определяется изменениями линии регрессии, а другое (4) – ошибкой.

Какая доля общей суммы квадратичных отклонений связана с регрессией? В данном примере она составляет  $45/49 = 0,918367$ , или 91,84%. Эта величина равна  $R^2$ .

В столбце *MS* отображаются результаты деления суммы квадратичных отклонений на количество степеней свободы. Обратите внимание: среднеквадратическое значение для остатков равно квадрату стандартной ошибки в ячейке **B17** ( $1,414213562^2 = 2$ ). Таким образом, среднеквадратическое значение можно использовать для определения стандартной ошибки.

В столбце *F* отображаются результаты отношения среднеквадратического значения для регрессии и среднеквадратического значения для остатков. Большая величина F-отношения означает большую статистическую значимость регрессии. В следующем столбце, *Значимость F*, оценивается значимость модели. Если величина F-критерия значима ( $p < 0,05$ ), то регрессионная модель является значимой. Таким образом, в нашем примере регрессия является статистически значимой.

### **Интерпретация оценочных параметров**

В столбце *Коэффициенты* указаны значения пересечения линии регрессии с осью *Y* ( $b_0 = 7$ ) и наклона ( $b_1 = 1,5$ ).

В столбце *Стандартная ошибка* приводятся величины стандартной ошибки для пересечения (1,732050808) и наклона (0,316227766).

В столбце *t-статистика* указано отношение величины коэффициентов к соответствующей стандартной ошибке.

В столбце *P-Значение* приведено значение вероятности для t-распределения Стьюдента, которое используется для проверки гипотез при малом объеме выборки. В данном примере с вероятностью  $(1-\alpha) = (1 - 0,0416) = 0,9584$  (95,84%) можно говорить о том, что зависимость между *x* и *y* существует.

Для подтверждения адекватности в ячейке **H22** вычислено критическое значение F-критерия (критерия Фишера). Поскольку найденное значение F-критерия больше критического, то модель адекватно описывает эксперимент.

В двух последних столбцах приводятся 95%-ные доверительные интервалы для пересечения и наклона. Обратите внимание, что в данной области дважды приводятся значения 95%-ных доверительных интервалов. В первой паре столбцов всегда приводятся значения 95%-ных доверительных интервалов, а во второй – значения доверительных интервалов, процентная доля которых указана нами в диалоговом окне *Регрессия*.

### **Вывод остатка**

Эта часть включает остатки и предсказываемые значения *y*. Как известно, остатки – это разность между наблюдаемыми значениями и линией регрессии (предсказываемые значения). Кроме этого, эта область содержит стандартизованные остатки. Стандартизованными называются нормированные остатки, которые не зависят от исходной единицы измерения. В Excel стандартизованные остатки вычисляются по формуле:

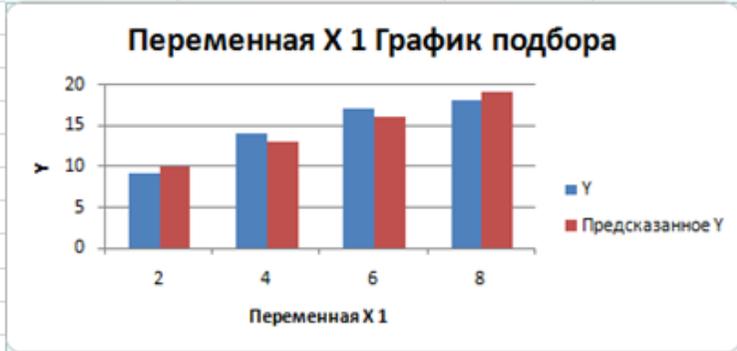
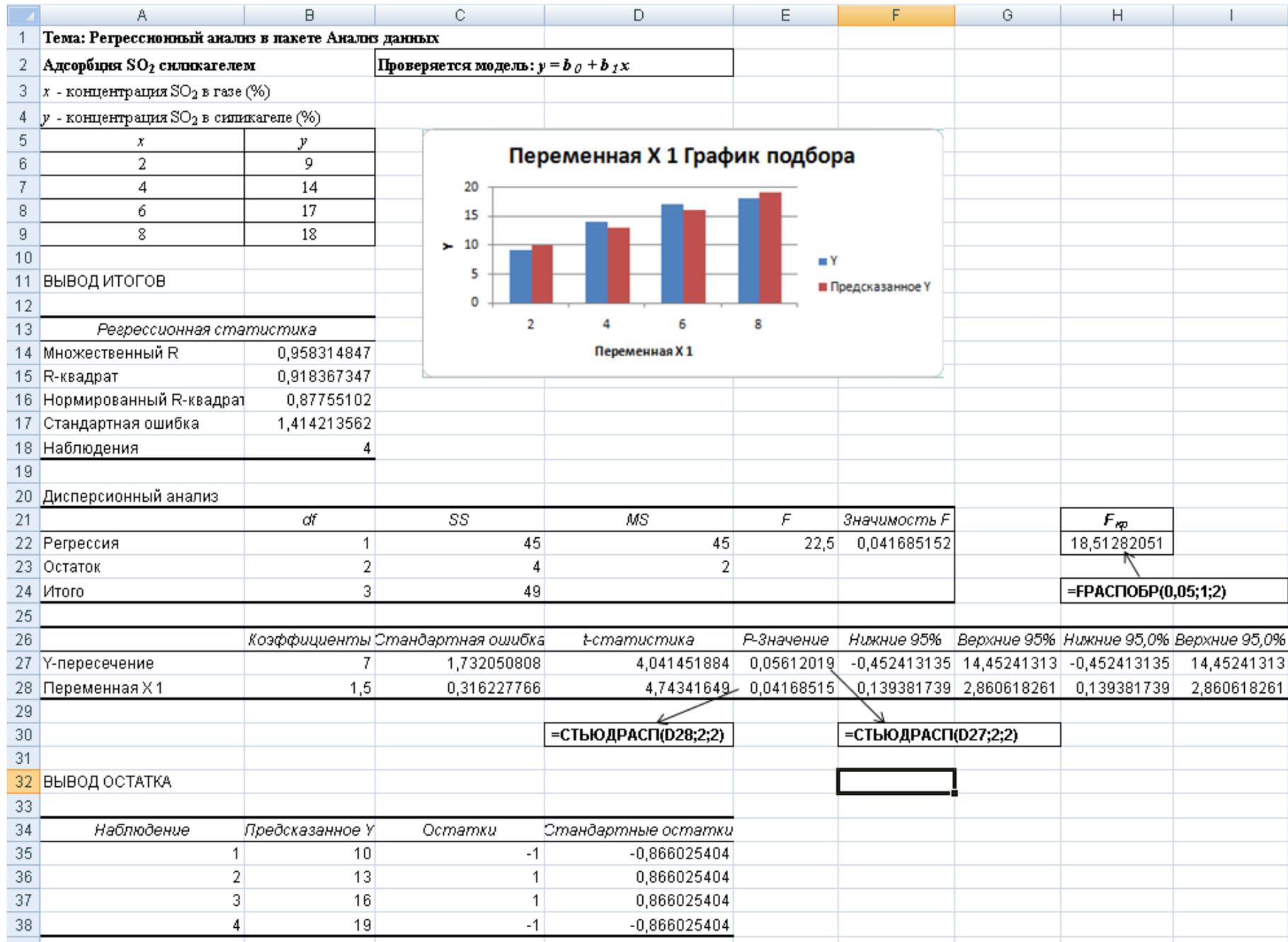
$$\text{стандиртизованный остаток} = \frac{\text{остаток}}{\sqrt{\text{сумма квадратичных остатков}/n}},$$

где *n* – количество наблюдений в наборе данных.

Стандартизованные остатки с величиной более 2 или менее -2 являются потенциальными выбросами (грубыми ошибками измерения). При исследовании полученных данных следует учитывать наличие такого резко отличающегося значения (возможно, исключать его из выборки).

# Электронный архив УГЛТУ

Рис. 4.5



Подытожим изложенный теоретический материал.

## Проверка гипотез о параметрах модели

После проведения регрессионного анализа установка достоверности полученной зависимости проводится следующим образом.

1. По величине коэффициента детерминации определяют, с какой точностью полученное регрессионное описание (аппроксимирует) экспериментальные данные. Как отмечалось выше, при  $R^2 = 1$  имеется функциональная зависимость, при  $R^2 = 0$  зависимость отсутствует (несмотря на найденные значения коэффициентов). При  $R^2 > 0,7$  принято говорить о существовании достаточно тесной взаимосвязи. В нашем примере имеется достаточно высокое значение  $R^2 = 0,918$ .
2. С помощью **F-распределения** оценивается значимость (адекватность) модели. Если величина значимости  $F < 0,05$ , то регрессионная модель является значимой и адекватно описывает эксперимент. В нашем примере значимость  $F = 0,0416$  – модель значима. Дополнительно можно рассчитать критическое значение критерия Фишера  $F_{кр}$  с помощью функции **FRASPOBR** и сравнить его с **F**-критерием. Для значимой модели  $F$ -критерий  $> F_{кр}$ .  
В данном примере  $F = 22,5 > F_{кр} = 18,5$  – модель адекватна.
3. Аналогично с помощью критерия Стьюдента проверяют, что  $k$ -й коэффициент регрессии значимо не отличается от нуля (проверка значимости коэффициентов в уравнении регрессии). Когда  $p$ -значение  $> 0,05$ , коэффициент можно считать нулевым и эта переменная должна быть исключена из уравнения регрессионной модели.  
В данном примере  $p$ -значение для переменной  $x$  равно  $0,0416$  – коэффициент при переменной значим. О значимости  $k$ -го коэффициента можно судить и по величине его доверительного интервала. Если интервал содержит значение равное нулю, то с вероятностью  $\alpha$  можно утверждать, что он статистически незначимо отличается от нуля.
4. По величине стандартных остатков определяют возможные выбросы (грубые ошибки измерений), как показано выше, принимают решение об их исключении, и в случае положительного решения повторяют процедуру регрессионного анализа для уменьшенной выборки.

## Задание для самостоятельной работы

Проведите проверку адекватности линейной регрессии для двух серий экспериментов по адсорбции  $SO_2$  силикагелем.

$x$	2	4	6	8
$y$ (вариант 1)	8,5	14	17	17,5
$y$ (вариант 2)	9,5	13	16	18,5

### ПРИМЕР 4.3. МНОГОФАКТОРНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Выше рассматривалась простая линейная регрессия для предсказания зависимой переменной  $y$  на основании значений независимой переменной  $x$  (предиктора). В многофакторных регрессионных задачах зависимая переменная предсказывается на основании нескольких независимых переменных. В многофакторных регрессионных задачах перед исследователем неизбежно встает вопрос о выборе типа модели, ведь вариантов становится много. Например, при изучении влияния на функцию отклика  $y$  двух факторов  $x_1$  и  $x_2$  можно использовать 6 регрессионных моделей. Пакет **Анализ данных** позволяет легко найти все возможные модели и оценить их адекватность.

Рассмотрим технологию многофакторного регрессионного анализа на примере, представленном на рис. 4.6, 4.7.

На рис. 4.6 проверяется модель  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ .

Анализ регрессионной статистики показывает, что модель адекватна: значимость  $F=0,0005$ , однако имеет невысокое значение  $R^2=0,85$ .

На рис. 4.7 проверяется модель, учитывающая парные взаимодействия  $x_1$  и  $x_2$  и квадратичный эффект от  $x_1$ :

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2 + b_4x_1^2.$$

Для этой модели значение  $R^2=0,986$ , что свидетельствует об очень высокой функциональной зависимости, кроме того, модель адекватна по **F**-критерию.

# Электронный архив УГЛТУ

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Многофакторный регрессионный анализ</b>							
2	<b>Проверяется модель: <math>y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2</math></b>							
3	$x_1$	$x_2$	$y$					
4	6	10	45					
5	6	20	150					
6	6	12	180					
7	8	14	320					
8	10	16	450					
9	12	18	550					
10	14	20	700					
11	16	22	840					
12	18	24	920					
13	12	10	270					
14	18	8	100					
15								
16	<b>Вывод ИТОГОВ</b>							
17								
18	<i>Регрессионная статистика</i>							
19	Множественный R	0,922175805						
20	R-квадрат	0,850408214						
21	Нормированный R-квадрат	0,813010268						
22	Стандартная ошибка	131,7155736						
23	Наблюдения	11						
24				$F_{кр}$				
24				4,4590	←	=FРАСПОБР(0,05;2;8)		
25	<b>Дисперсионный анализ</b>							
26		<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>		
27	Регрессия	2	789012,6069	394506,3034	22,7394362	0,000500762		
28	Остаток	8	138791,9386	17348,99232				
29	Итого	10	927804,5455					
30								
31		<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>	
32	Y-пересечение	-532,5815739	145,8138297	-3,652476414	0,00647116	-868,8288679	-196,3342799	
33	Переменная X 1	27,37523992	9,372785068	2,920715638	0,01927014	5,761558817	48,98892103	
34	Переменная X 2	39,8512476	8,079874289	4,932161835	0,00114631	21,21902409	58,48347111	

Рис. 4.6

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Многофакторный регрессионный анализ</b>						
2	<b>Проверяется модель: <math>y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2 + b_4 x_1^2</math></b>						
3	$x_1$	$x_2$	$x_1 \cdot x_2$	$x_1^2$	$y$		
4	6	10	60	36	45		
5	6	20	120	36	150		
6	6	12	72	36	180		
7	8	14	112	64	320		
8	10	16	160	100	450		
9	12	18	216	144	550		
10	14	20	280	196	700		
11	16	22	352	256	840		
12	18	24	432	324	920		
13	12	10	120	144	270		
14	18	8	144	324	65		
15							
16	<b>Вывод итогов</b>						
17							
18	<i>Регрессионная статистика</i>						
19	Множественный R	0,992863461					
20	R-квадрат	0,985777853					
21	Нормированный R-квадрат	0,976296422					
22	Стандартная ошибка	47,47137576					
23	Наблюдения	11					
24							
25	<i>Дисперсионный анализ</i>						
26		<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>	
27	Регрессия	4	937192,4473	234298,1118	103,969308	1,13841E-05	
28	Остаток	6	13521,1891	2253,531517			
29	Итого	10	950713,6364				
30							
31		<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>
32	Y-пересечение	-324,3379256	166,9579357	-1,942632581	0,10007596	-732,8692763	84,19342509
33	Переменная X 1	86,65858211	23,41723271	3,700632914	0,01008081	29,35867799	143,9584862
34	Переменная X 2	-14,77978238	9,217378438	-1,603469195	0,15995211	-37,33389487	7,774330112
35	Переменная X 3	3,876099199	0,616985015	6,282323077	0,00075676	2,366391256	5,385807141
36	Переменная X 4	-5,003226008	0,942243776	-5,309906136	0,00181257	-7,308813466	-2,69763855

Рис. 4.7

### Графическое представление уравнения регрессии

Графическая зависимость функции одной переменной строится очень просто с помощью **Точечной диаграммы**.

Графическая зависимость функции двух переменных представляет собой поверхность, технология построения которой имеет некоторые особенности, что отражено на рис. 4.8.

Уравнение регрессии справедливо только в пределах изменения переменных в эксперименте. В ячейках **C8:K8** задан ряд значений по переменной  $x_2$ , а в ячейках **B9:B17** по переменной  $x_1$ .

В ячейке **C9** записана формула для вычисления функции отклика, причем абсолютная адресация сделана с учетом копирования этой ячейки вправо до ячейки **K9**, а затем вниз до ячейки **K17**.

Для построения поверхности предварительно выделите блок ячеек **B8:K17**, затем выполните **Вставка – Другие диаграммы – Проволочная поверхность**.

Отформатируйте полученную диаграмму как на рис. 4.8.

Далее построим сечения поверхности отклика. Например, для выяснения влияния на функцию отклика фактора  $x_1$  выделите при утопленной клавише **Ctrl** несмежные блоки **B9:B17; D9:D17; F9:F17; H9:H17** и постройте **Точечную диаграмму** в соответствии с рис. 4.8. Самостоятельно выполните сечения по  $x_2$ .

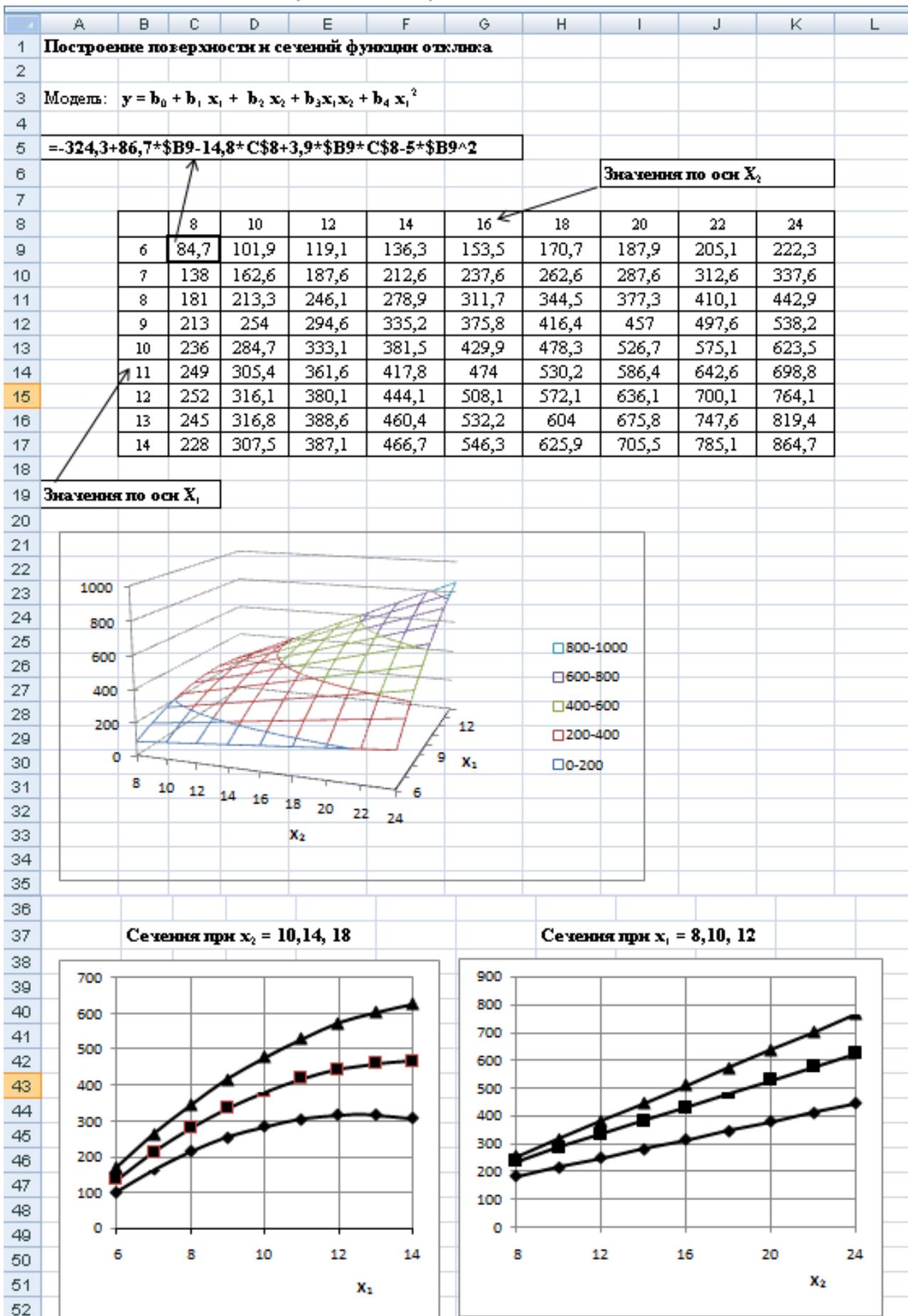


Рис. 4.8.

**Домашняя работа №5**

Задание выполняется во внеучебное время

Экспериментально изучали зависимость выхода полимера заданной молекулярной массы ( $y$ ) в реакции полимеризации от концентрации мономера в растворе ( $x_1$ ) и концентрации инициатора полимеризации ( $x_2$ ).

Результаты эксперимента представлены в таблице.

$x_1$	10	30	10	30	30	10
$x_2$	0,2	0,2	0,8	0,8	0,5	0,6
$y$	55	10	75	81	60	82

Требуется найти уравнение регрессии и оценить его адекватность.

Постройте поверхность отклика для интервалов:

$x_1$  (0;4...32) и  $x_2$  (0,2; 0,4...1,2).

Постройте графики для двух сечений поверхности отклика, близких к границам интервалов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аникин В.Л. Решение задач математического моделирования и оптимизации процессов химической технологии средствами Excel: Учебное пособие/ В.Л. Аникин. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2004. 162 с.
2. Берк К, Кэйри П. Анализ данных с помощью Microsoft Excel. : Пер. с англ. М.: Издат. дом «Вильямс», 2005. 560 с.

## Оглавление

Работа №1. Обработка результатов научных исследований.....	3
Задание для самостоятельной работы.....	5
Работа №2. Математическое моделирование в химической технологии .....	6
МОДЕЛИРОВАНИЕ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКТОРОВ.....	6
Пример 2.1. Моделирование реактора идеального смешения.....	6
Пример 2.2. Моделирование реактора идеального вытеснения .....	12
МОДЕЛИРОВАНИЕ гидравлических процессов .....	17
Расчет мощности насоса и оптимальной температуры перекачки .....	17
МОДЕЛИРОВАНИЕ теплообменных процессов.....	22
Пример 3.1. Моделирование теплообменника типа «смешение-смешение» .....	22
Пример 3.2. Моделирование теплообменника типа «вытеснение-вытеснение».....	27
Пример 3.3. Оптимизация теплообменника типа «смешение-смешение» .....	30
Работа №3. Технико-экономическое моделирование и оптимизация.....	34
Пример 3.1. Планирование оптимального выпуска продукции .....	34
Работа №4. Экспериментально-статистические модели в химической технологии .....	43
Пример 4.1. Трендовые модели в задачах прогнозирования .....	43
Пример 4.2. Построение экспериментально-статистических моделей средствами регрессионного анализа .....	47
Пример 4.3. Многофакторный регрессионный анализ.....	50
Список литературы.....	54