ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

В.М. Мухина
Н.В. Цепелева
Т.И. Шатунова

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Методические указания к проведению практических занятий и выполнению индивидуальных заданий для студентов очной формы обучения

Екатеринбург
2006

Содержание

Содержание данных методических указаний составляют семь практических аудиторных занятий и индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов. В каждом практическом занятии определена его цель, компактно изложен необходимый теоретический материал, предложен разбор типовых задач и рекомендованы задания для работы в аудитории и дома.

Главная цель – оказание помощи студентам первого курса в организации самостоятельной работы, в приобретении и закреплении навыков решения предлагаемых задач. Для преподавателей данные указания дают возможность оптимизировать подачу учебного материала по теме «Элементы линейной алгебры» при небольшом количестве часов на ее изложение.

Практическое занятие 1

Тема: «Матрицы и линейные операции над ними. Произведение матриц»

Цель занятия. Усвоить основные понятия и законы алгебры матриц и закрепить их в упражнениях.

Матрицей размером $m \times n$ называется прямоугольная таблица из $m \cdot n$ чисел (или алгебраических выражений), содержащая m строк и n столбцов.

Обозначения матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = (a_{ij})_{m \times n},$$

где a_{ij} - элемент матрицы, i - номер строки ($i=1,2,\dots m$), j - номер столбца ($j=1,2,\dots,n$). Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ имеет размеры 2×3, а матрица – строка $B = (4 \quad 5 \quad 3)$ имеет размеры 1×3.

Матрица, у которой $m = n$, называется квадратной (n - порядок матрицы).

Линейные операции над матрицами

1. Сложение матриц

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$, элементы которой

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} (i = 1,2,\dots, m;\ j = 1,2,\dots, n)$. Обозначение $C = A + B$.

Пример1. Найти сумму матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad A + B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -7 \\ 0 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и числа λ называется матрица, элементы которой получены умножением соответствующих элементов матрицы A на число λ.

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $2A$.

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 16 & 2 \\ 2 & -8 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции обладают следующими свойствами:

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C), \quad A + 0 = A, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A,$$

$$0 \cdot A = 0, \quad (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A, \quad \lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B \ (\lambda, \mu \in R),$$

где 0 - матрица, состоящая из нулей.

Перечисленные свойства позволяют при линейных операциях над матрицами применять многие правила преобразований алгебраических выражений (приведение подобных, перенос членов уравнения из одной части в другую и т.п.).

Примеры 3-4 решить самостоятельно.

Пример 3. Найти матрицу $C = 3A - B$, если

$$A=\begin{pmatrix}3&8&5&4\\-2&3&6&-2\\1&0&-1&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&7&2\\4&5&3&2\\0&1&3&2\end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } C=\begin{pmatrix}8&24&22&10\\-10&14&15&8\\3&1&0&10\end{pmatrix}.$$

Пример 4. Найти матрицу T, для которой $A+2T-3B$.

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\-1&-4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-2&0\\-3&2\\4&0\end{pmatrix}.\qquad \text{Ответ: } T\ \begin{pmatrix}-4&0\\5&2{,}5\\6{,}5&2\end{pmatrix}.$$

Символ $\sum$ (сигма)

Символ $\sum\limits_{k=1}^{n}$, после которого стоит некоторое выражение, содержащее индекс k, обозначает сумму таких выражений для всех значений индекса k от 1 до n.

Например, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Индекс k называется индексом суммирования. Некоторые правила обращения со знаком суммы $\sum$:

- обозначение индекса суммирования может быть изменено, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = \sum\limits_{s=1}^{n} p_s$;
- множитель, не зависящий от индекса суммирования, можно вынести за знак суммы, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha p_k = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$;
- $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(p_k + a_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$;
- $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ik} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} p_{ik}$.

Замечание. Символ $\sum$ значительно упрощает записи сумм с большим числом слагаемых и широко используется в математике и ее приложениях.

Для закрепления навыков обращения с символом $\sum$ предлагаются примеры 5-8.

Пример 5. Записать с помощью знака $\sum$:

1) $a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{8j}$, 2) $b_{k3} + b_{k4} + \ldots + b_{k8}$.

Пример 6. Записать следующие суммы:

1) $\sum\limits_{i=1}^{7} a_{i2}$, 2) $\sum\limits_{k=2}^{n} a_{3k}$, 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$.

Пример 7. Записать сумму двумя способами (начиная с внешней или внутренней суммы) $\sum\limits_{i=1}^{2}\ \sum\limits_{k=1}^{3} y_{ik}\cdot x_{ki}$.

Пример 8. Проверить равенство $\sum\limits_{j=1}^{3}\ \sum\limits_{i=1}^{4} x_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{4}\ \sum\limits_{j=1}^{3} x_{ij}$.

n-мерные векторы

n-мерным вектором называется упорядоченная система действительных чисел. Обозначение: $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ - координаты вектора.

Если рассмотреть произвольную матрицу, то каждую строку (столбец) ее можно считать вектором соответствующей размерности и наоборот, любой вектор можно трактовать как матрицу – строку (столбец).

Линейные операции над векторами аналогичны линейным операциям над матрицами.

Рассмотрим векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют число, равное сумме произведений соответствующих координат векторов.

Обозначение: $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \ldots + a_n\cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot b_i.$$

Умножение матриц

Умножение двух матриц A и B определяется только в предположении, что число столбцов первой матрицы A равно числу строк второй матрицы B. Пусть $A = \left(a_{ik}\right)_{m\times n}$ и $B = \left(b_{kj}\right)_{n\times p}$.

Произведением двух матриц A и B называется новая матрица C, элементы которой c_{ij} равны скалярному произведению i-й строки первой матрицы на j - й столбец второй матрицы, т. е.

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Итак, $\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{C}$.

В примерах 9 и 10 найти произведение матриц $A \cdot B$.

Пример 9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Ответ: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$.

Пример 10. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & 7 \\ 9 & 11 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 11. Найти произведение $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ответ: $\begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Умножение матриц обладает свойствами:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \quad \alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) \ (\alpha \in R),$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

Переместительным свойством умножение матриц, в общем случае, не обладает, т. е. $A \cdot B \neq B \cdot A$. В тех случаях, когда $A \cdot B = B \cdot A$, матрицы A и B называются перестановочными.

Пример 12. Проверить, являются ли матрицы A и B перестановочными.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример 13. Проверить, что $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, если

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Примеры 14 – 20 предлагаются для работы дома.

Пример 14.

Записать с помощью знака $\sum$:

1) $c_{31} + c_{32} + \ldots + c_{37}$,

2) $a_{12} \cdot b_{21} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{32} \cdot b_{23} + \ldots + a_{82} \cdot b_{28}$,

3) $(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + (x_{21} + x_{22} + x_{23})$.

Пример 15. Доказать, что $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{ik} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_{ik}$.

Пример 16. Найти матрицу $C = 2A + 3B$, если

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Ответ $C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -9 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

Пример 17. Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -25 & 5 \\ 18 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 18. Перестановочны ли матрицы A и B ?

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix}$, $B \cdot A$ - не существует.

Пример 19. Найти матрицу $X^2 = X \cdot X$, если $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 20. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^2 - 2x$ от матрицы

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Ответ: $\begin{pmatrix} 16 & -23 & 15 \\ -13 & 29 & 10 \\ -9 & 22 & 20 \end{pmatrix}$.

Практическое занятие 2

Тема: «Определители и их свойства. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера»

Цель занятия. Познакомиться с понятием определителя, научиться вычислять определители и решать системы уравнений по правилу Крамера.

Детерминант (определитель) квадратной матрицы ($n \times n$) - это **число**, которое ставится в соответствие данной матрице и может быть вычислено по ее элементам.

Обозначение:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пусть дана квадратная матрица второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем второго порядка матрицы A называется число, равное $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 7$.

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется определитель матрицы, полученной из A путем вычеркивания i - й строки и j - го столбца.

Пример 2. В матрице $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ минором M_{12} элемента $a_{12} = 3$ будет определитель $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ (вычеркнуты первая строка и второй столбец).

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется произведение $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Пример 3. Найти алгебраические дополнения A_{22}, A_{23} соответствующих элементов матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -7$.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-15) = 17.$$

Найти самостоятельно A_{31}, A_{32}.

Определителем третьего порядка матрицы (1) называется число, равное сумме произведений элементов первой строки на соответствующие алгебраические дополнения.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} \cdot A_{1j} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Эта формула называется формулой разложения определителя по первой строке.

Пример 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1A_{11} + 2A_{12} + 9A_{13} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$
$10 - 2(-16) + 9(-2) = 4$.

Перечислим некоторые свойства определителей:
определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, не меняя их порядка;
если переставить местами две строки (столбца), то определитель изменит знак на противоположный;
определитель не изменится, если его разложение производится по любой строке (столбцу);

- определитель, у которого две строки (столбца) одинаковы, равен нулю;
- общий множитель элементов некоторой строки (столбца) можно выносить за знак определителя;
- определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю;
- определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на некоторое постоянное число.

Пример 5. Вычислить определитель в примере 4, используя разложение по третьему столбцу.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9A_{13} + 5A_{23} + 1A_{33} = 9M_{13} - 5M_{23} + M_{33} =$$

$$= 9\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 9(-2) - 5(-4) + 2 = -18 + 20 + 2 = 4.$$

Пример 6. Используя свойства определителей, вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. Умножим элементы первой строки на (-5) и прибавим соответственно к элементам второй строки. Аналогично умножим элементы первой строки на 3 и прибавим к элементам третьей строки, получим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -16 & -6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}$.

Разложив этот определитель по элементам первого столбца, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -16 & -6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1A_{11} + 0A_{21} + 0A_{31} = A_{11} = -102.$$

Определители более высокого порядка вводятся точно так же, как определитель третьего порядка.

Для самостоятельного решения предлагаются примеры 7-9.

Пример 7. Используя свойства определителей, решить пример 4.

Пример 8. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 1 & 7 & x \\ 8 & x & 8 \\ x & 2 & x \end{vmatrix}$=0.

Ответ: $x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = -4$.

Пример 9. Используя свойства определителей, вычислить

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответ: -6.

Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Пример 10. Рассмотрим систему линейных уравнений $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$

Составим матрицу A из коэффициентов при неизвестных.

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ - ***основной определитель*** системы.

Заменяя один из столбцов определителя системы столбцом свободных членов, получим еще три вспомогательных определителя:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то единственное решение системы записывается по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}.$$

Вычислим определители:

$$\Delta = 2 \neq 0, \quad \Delta_x = 2, \quad \Delta_y = -2, \quad \Delta_z = 4. \quad x = \frac{2}{2} = 1, \quad y = \frac{-2}{2} = -1, \quad z = \frac{4}{2} = 2.$$

Пример 11. Решить самостоятельно систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Ответ: (-8;12;-1).

Примеры 12-14 рекомендуются для домашних упражнений.

Пример 12. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$ Ответ: (3;-1;2).

Пример 13. Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ x & x & 1 \\ 9 & 9 & x \end{vmatrix} = 0.$$ Ответ: $x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -2.$

Пример 14. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$. Ответ: 1.

Практическое занятие 3

Тема: «Обратная матрица и ее применение при решении матричных уравнений. Решение систем линейных уравнений матричным методом»

Цель занятия. Научиться записывать системы линейных уравнений в матричной форме, усвоить формулу для вычисления обратной матрицы и закрепить алгоритм вычисления при решении матричных уравнений.

Пусть имеем квадратную матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.1)$$

Матрицей, ***обратной*** матрице A, называется матрица A^{-1}, удовлетворяющая равенствам $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, (3.2)

где E – единичная матрица.

Матрица, для которой $\det A = 0$, называется ***вырожденной.***

Вырожденная матрица не имеет обратной. Всякая невырожденная матрица (3.1) имеет обратную, которая находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (3.3)$$

где A_{ik} - алгебраическое дополнение соответствующего элемента матрицы A. Алгебраические дополнения строки записываются в столбец.

Пример 1. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1.$

Находим алгебраические дополнения

$A_{11} = 1, \quad A_{12} = -2, \quad A_{21} = -3, \quad A_{22} = 5$ и составляем из них матрицу A', записывая их в том же порядке, что и элементы матрицы A. $A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

В матрице A' поменяем местами строки и столбцы (транспонируем матрицу), получим матрицу A^*. $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Такая матрица A^* называется ***присоединенной*** по отношению к матрице A.

Согласно (3.3) каждый элемент матрицы A разделим на $\det A$ и получим $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Проверим полученный результат:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В силу (3.2) матрица A^{-1} найдена верно.

Пример 2. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим $\det A$ как сумму произведений элементов первой строки матрицы A и их алгебраических дополнений, стоящих в первом столбце матрицы A^*: $\det A = 2A_{11} + 3A_{12} + 1A_{13}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

Тогда $\det A = 2(-3) + 3 \cdot 9 + 1(-7) = 14$.

Находим остальные алгебраические дополнения: $A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 8$,

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Составляем матрицы A' и A^*:

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -7 \\ 8 & -10 & 14 \\ 7 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 7 \\ 9 & -10 & -7 \\ -7 & 14 & 7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (3.3)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 8 & 7 \\ 9 & -10 & -7 \\ -7 & 14 & 7 \end{pmatrix}.$$

Для контроля вычислений достаточно проверить равенство (3.2).

Решить самостоятельно примеры 3-6.

Найти матрицу, обратную данной:

Пример 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ответ: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ответ: $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Ответ: $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ответ: обратная матрица не существует.

Понятие обратной матрицы позволяет решать матричные уравнения, при этом следует быть осторожным, так как умножение матриц не

перестановочно. Например, имеем матричное уравнение $X \cdot A = B$ и $\det A \neq 0$. Найдем матрицу X.

Для этого умножим обе части уравнения справа на A^{-1}. Это возможно сделать, так как $\det A \neq 0$ и, следовательно, у матрицы A существует обратная A^{-1}. Тогда $(X \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$. В силу свойств операции умножения матриц $(X \cdot A) \cdot A^{-1} = X \cdot (A \cdot A^{-1})$

и $X \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1}$, $\quad X \cdot E = B \cdot A^{-1}$, $\quad X = B \cdot A^{-1}$.

Аналогично решаются и другие матричные уравнения.

Пример 7. Найти матрицу X из уравнения: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда матричное уравнение имеет вид $A \cdot X \cdot B = C$.

Решим его, умножая слева на A^{-1}, а справа на B^{-1}. Получим

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X \cdot (B \cdot B^{-1}) = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \text{ и } X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

Находим $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решить самостоятельно примеры 8-9.

Найти матрицу X из уравнений:

Пример 8. $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Ответ: $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 9. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$. Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Одной из прикладных задач, решаемых с помощью алгебры матриц, является решение системы n линейных уравнений с n неизвестными. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (3.4)$$

Коэффициенты a_{ij} и свободные члены – известные числа; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неизвестные.

Система чисел (вектор) $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется решением системы уравнений (3.4), если числа x_j удовлетворяют этим уравнениям.

Коэффициенты системы могут быть записаны в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Неизвестные образуют матрицу – столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, а свободные члены образуют матрицу – столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$. Тогда систему уравнения (3.4) можно очень просто записать в матричной форме $A \cdot X = B$. (3.5)

Известно, что квадратная матрица A n-го порядка имеет обратную тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Можно показать, что это условие в точности совпадает с условием существования единственного решения системы линейных уравнений с n неизвестными. Для нахождения этого решения нужно умножить обе части уравнения (3.5) слева на A^{-1}, откуда равенство $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$ приводит к решению $X = A^{-1} \cdot B$.

Изложенный выше метод решения систем линейных уравнений называется матричным методом.

Пример 10. Решить систему уравнений с помощью матричного метода:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 = 11. \end{cases}$$

Решение. Введем матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Запишем систему в матричном виде $A \cdot X = B$. Используя правило умножения матриц и определение равенства матриц, нетрудно проверить, что матричное уравнение эквивалентно исходной системе двух уравнений. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

Проверка: $2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9$, $3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11$.

Пример 11. Решить систему матричным методом: $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ -x + 2y + 3z = -4, \\ 4x - y - 3z = 9. \end{cases}$

Решение. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Тогда исходной системе эквивалентно матричное уравнение $A \cdot X = B$, решение которого $X = A^{-1} \cdot B$. В примере 2 найдена матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -3 & 8 & 7 \\ 9 & -10 & -7 \\ -7 & 14 & 7 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -3 & 8 & 7 \\ 9 & -10 & -7 \\ -7 & 14 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 28 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Следовательно, $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$.

Проверка: $2x + 3y + z = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 0 = 1$,

$-x + 2y + 3z = -2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -4$,

$4x - y - 3z = 4 \cdot 2 - (-1) - 3 \cdot 0 = 9$.

Решить самостоятельно примеры 12-14.

Решить системы линейных уравнений с помощью матричного метода:

Пример 12. $\begin{cases} s - t = 3, \\ 3s - 2t = 1. \end{cases}$ Ответ: (-5;-8).

Пример 13. $\begin{cases} 3p - 2q - 5r = 6, \\ 2p + 3q - 4r = 20, \\ p - 2q + 3r = 6. \end{cases}$ Ответ: (8;4;2).

Пример 14. $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$ Ответ: (2;3;-2).

Для самостоятельного решения дома рекомендуются примеры 15-21.

Найти обратную матрицу:

Пример 15. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Ответ: $\frac{1}{ad}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Пример 16. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу X из уравнения:

Пример 17. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & 14 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$. Ответ: $X=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 18. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 11 & 20 & 6 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$. Ответ: $X=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решить систему линейных уравнений матричным методом:

Пример 19. $\begin{cases} x+3y+2=0, \\ 3x-y-7=0. \end{cases}$ Ответ: (1,9; -1,3).

Пример 20. $\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3=4, \\ 5x_1+2x_2+13x_3=2, \\ 3x_1-x_2+5x_3=0. \end{cases}$ Ответ: (-4;-2;2).

Пример 21. $\begin{cases} 10x+z=0, \\ -x+2y+3z=2, \\ 2x-y+z=-1. \end{cases}$ Ответ: (0;1;0).

Практическое занятие 4

Тема: «Системы линейных уравнений. Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)»

Цель занятия. Закрепить навыки применения метода Гаусса при решении различных систем линейных уравнений. Подготовиться к восприятию алгоритма нахождения ранга матрицы.

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с неизвестными $x_1, x_2, \dots x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \qquad (4.1)$$

В системе (4.1) $m\le n$ или $m>n$.

Относительно решения системы вида (4.1) бывают:

- несовместные (не имеют решения),
- совместные (имеют хотя бы одно решение).

Совместные системы по числу решений делятся на два класса:

- определенные (имеют единственное решение),
- неопределенные (имеют бесконечное множество решений).

Метод Гаусса решает:

- задачу совместности (есть решение или нет),
- задачу нахождения решения (если оно есть).

Решение системы (4.1) по правилу Крамера или матричным методом возможно лишь в случае, когда $m=n$, и часто связано с громоздкими вычислениями определителей.

Метод Гаусса универсален для всех систем и основан на эквивалентных преобразованиях системы.

Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, или равносильными, если множества их решений совпадают.

К эквивалентным преобразованиям системы относятся:

- перестановка уравнений,
- почленное умножение обеих частей уравнения на число, отличное от нуля,
- почленное сложение (вычитание) уравнений.

Решая систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, преобразования совершают не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членах.

Рассмотрим применение этого метода на примерах.

Пример 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членах:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

вертикальной чертой отделен столбец, составленный из свободных членов.

Умножая первую строку на (-1) и прибавляя ее ко второй, третьей и четвертой строкам, получаем матрицу

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

В матрице A_1 умножаем элементы третьей строки на (-1) и прибавляем к четвертой строке, переходим к матрице

$$A_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Матрице A_2 соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 1x_4 = 7, \\ \quad -2x_2 + 2x_3 = -6, \\ \qquad 2x_3 - 2x_4 = -8, \\ \qquad\quad 2x_4 = 6. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Из четвертого уравнения находим $x_4 = 3$, третье уравнение дает $x_3 = -1$, второе - $x_2 = 2$, а первое - $x_1 = 1$. Подставив полученные значения в исходные уравнения системы, убеждаемся, что найденное решение верно.

Замечание 1. Если в результате эквивалентных преобразований система (4.1) приводится к треугольному виду (4.2), где $m = n$, то система (4.1) имеет единственное решение.

Пример 2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ \quad 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 6, \\ 6x_1 + 5x_2 + 13x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$

Решение. Составив матрицу и совершив соответствующие преобразования, получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 6 & 5 & 13 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right).$$

Таким образом, исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 6, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -11. \end{cases}$$

В последних двух уравнениях все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободные члены отличны от нуля, что невозможно. Такая система несовместна.

Замечание 2. В результате эквивалентных преобразований в системе может получиться уравнение, у которого все коэффициенты при неизвестных равны нулю. Тогда, если свободный член этого уравнения тоже равен нулю, то это уравнение из системы можно удалить (в соответствующей матрице строку из нулей надо вычеркнуть), если же свободный член не равен нулю, то система несовместна.

Пример 3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 7, \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 4, \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$ (4.3)

Решение. Запишем матрицу коэффициентов и свободных членов и выполним над ней преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&4&-1&-3&7\\2&0&1&0&1&4\\0&1&0&2&-1&6\end{array}\right)\xrightarrow{-2}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&4&-1&-3&7\\0&-4&-7&2&7&-10\\0&1&0&2&-1&6\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&4&-1&-3&7\\0&1&0&2&-1&6\\0&-4&-7&2&7&-10\end{array}\right)\xrightarrow{4}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&4&-1&-3&7\\0&1&0&2&-1&6\\0&0&-7&10&3&14\end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система уравнений ступенчатого вида:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-x_4-3x_5=7,\\ \quad x_2+2x_4-x_5=6,\\ \quad -7x_3+10x_4+3x_5=14.\end{cases}$$

Ступенчатую систему обрежем по третьему столбцу и перенесем все неизвестные с соответствующими коэффициентами в правую часть:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=7+x_4+3x_5,\\ \quad x_2=6-2x_4+x_5,\\ \quad -7x_3=14-10x_4-3x_5.\end{cases}$$

Придадим неизвестным x_4, x_5 какие-либо конкретные значения, тогда в правой части будут вполне определенные числа, система (4.3) становится треугольного вида и, следовательно, имеет единственное решение. Но поскольку произвольных значений для неизвестных x_4, x_5 бесконечное множество, то система (4.3) будет неопределенной. Неизвестные x_4, x_5 называются свободными, а x_1, x_2, x_3 - базисными. Пусть $x_4 = x_5 = 0$, тогда $x_3 = -2$, $x_2 = 6$, $x_1 = 3$.

Нетрудно проверить, что найденный вектор $\vec{x} = (3; 6; -2; 0; 0)$ является решением системы (4.3). Аналогично находятся и другие решения.

Решить самостоятельно примеры 4-7.

Методом Гаусса решить системы линейных уравнений.

Пример 4. $\begin{cases}x_1+3x_2-x_3=19,\\2x_1+7x_2+4x_3=30,\\3x_1-x_2+6x_3=-1.\end{cases}$ Ответ: (5; 4; -2).

Пример 5. $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3-x_4=8,\\3x_1+2x_3+5x_4=12,\\x_1-x_2+x_3=4,\\8x_1+x_2+5x_3+3x_4=10.\end{cases}$

Ответ: система несовместна.

Пример 6. $\begin{cases}x_1+x_3=0,\\x_1+x_4=3,\\2x_1+3x_3+x_5=0,\\2x_3+3x_4+x_6=7,\\x_1+2x_3+2x_5=0,\\x_2+2x_3+2x_6=-7.\end{cases}$

Ответ: (0;-3; 0; 3; 0;-2).

Пример 7. $\begin{cases}2x+y-z=11,\\3x+2y-4z=15,\\4x+3y-7z=19.\end{cases}$

Ответ: $x = 7 - 2z$, $y = -3 + 5z$, где z - любое.

Для самостоятельного решения дома рекомендуются примеры 8-12.

Пример 8. $\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3=8,\\2x_1-3x_2+3x_3=8,\\4x_1+x_2-6x_3=21.\end{cases}$ Ответ: (4; -1; -1).

Пример 9. $\begin{cases}x_1+4x_2-x_3=2,\\3x_1+2x_2+2x_3=1,\\6x_1+4x_2-2x_3=5.\end{cases}$ Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$.

Пример 10. $\begin{cases}x+y-3z=7,\\3x-y+2z=4,\\7x-y+z=17.\end{cases}$ Ответ: система несовместна.

Пример 11. $\begin{cases} 2x+3y-5z=4, \\ 4x+6y-10z=8, \\ 8x+12y-20z=16. \end{cases}$ Ответ: $x=2-\frac{3}{2}y+\frac{5}{2}z$, y,z - любые.

Пример 12. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2-x_3+x_4=3, \end{cases}$

Ответ: $x_3=-1$, $x_1=2-x_2-x_4$, x_2, x_4 - любые.

Практическое занятие 5

Тема: «Ранг матрицы. Исследование систем линейных уравнений»

Цель занятия. Познакомиться с одной из важнейших характеристик матрицы, неизменяющейся при элементарных преобразованиях – рангом матрицы, усвоить приемы вычисления ранга и уяснить его роль при исследовании систем линейных уравнений.

В соответствии с поставленной целью необходимо напомнить следующие понятия:

1. Минор матрицы.

Дана матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении некоторых ее k строк и k столбцов, называется ***минором*** ***k - го порядка*** этой матрицы и обозначается M_K.

Очевидно, что $k \le \min(m,n)$.

Например, для матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$

$M_1{}'=a_{32}$, $M_1{}''=a_{43}$ - миноры первого порядка;

$M_2{}'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $M_2{}''=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$ - миноры второго порядка;

$M_3=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$ - минор третьего порядка.

Нетрудно подсчитать, что различных миноров третьего порядка в этой матрице будет 4.

2. Ранг матрицы. ***Рангом*** r матрицы называется наивысший порядок ее минора, отличного от нуля.

Из определения следует, что рангом обладает любая матрица. Ранг нулевой матрицы равен 0. Необходимо также уяснить, что если равны 0 все миноры k-го порядка матрицы, то ранг матрицы $r<k$.

Пример 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение. Выпишем все миноры 3-го порядка, их число будет равно 4, и они отличаются только столбцами.

$$M_3{}'=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}=0, M_3{}''=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}=0, M_3'''=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix}=0, M_3^{IV}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \end{vmatrix}=0.$$

Все миноры 3-го порядка равны 0, так как 2-я и 3-я строки матрицы пропорциональны. Ранг матрицы $r=2$, так как минор 2-го порядка

$$M_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq 0.$$

Вычисление ранга матрицы по определению зачастую является громоздким. Используя элементарные преобразования матрицы, можно значительно проще вычислять ее ранг.

3. Элементарные преобразования матрицы. ***Элементарными*** преобразованиями называются преобразования матрицы, не меняющие ее ранга. К ним относятся:

- транспонирование матрицы,
- перестановка двух строк местами,
- умножение всех элементов строки на постоянное число $\lambda \neq 0$,
- сложение одной строки с другой, умноженной на постоянное число,
- вычеркивание нулевой строки,

- вычеркивание строки – линейной комбинации других строк.

Две матрицы A и B называются эквивалентными, если они получены одна из другой путем конечного числа элементарных преобразований. Обозначение : $A \sim B$.

Пример 2. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{pmatrix} \xrightarrow{-2,\ -5,\ -7} \begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-13&6\\0&-14&-26&12\\0&-14&-26&8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-13&6\\0&-7&-13&4\end{pmatrix} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&-7&-13&6\\0&-7&-13&4\end{array}\right),$$

$$M_3 = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&-7&6\\0&-7&4\end{vmatrix} = 14 \neq 0,\ \ r = 3.$$

Переход от одной матрицы к другой производится в результате последовательности преобразований.

1. Умножим 1-ю строку на (-2), (-5), (-7) и прибавим ко 2-й, 3-й, 4-й строкам соответственно.
2. Разделим 4-ю строку на 2 и вычеркнем 3-ю строку, пропорциональную 2-й.
3. Умножим 1-й столбец на (-3), (-5),(1) и прибавим ко 2-му, 3-му, 4-му столбцам соответственно.
4. Вычеркнем 3-й столбец, пропорциональный 2-му.

После преобразований остается матрица 3-го порядка, ее определитель $M_3 \neq 0$. Ранг равен 3-му порядку минора.

Решить самостоятельно в аудитории примеры 3-4.

Пример 3. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix}0&2&-4\\-1&-4&5\\3&1&7\\0&5&-10\\2&3&0\end{pmatrix}$.

Ответ: $r = 2$.

Пример 4. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix}3&-1&3&2&5\\5&-3&2&3&4\\1&3&-5&0&-7\\7&5&1&4&1\end{pmatrix}$.

Ответ: $r = 3$.

4. Базисный минор. ***Базисным минором*** матрицы называется минор, отличный от 0, порядок которого равен рангу матрицы. Строки и столбцы, на которых он построен, называются базисными. Так, в примере 1 ранг матрицы равен 2 и $M_2 = \begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix} = -3 \neq 0$ является базисным минором.

Можно указать и другие базисные миноры, например, $M_2 = \begin{vmatrix}1&1\\-1&2\end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

5. **Исследование системы линейных уравнений.** Дана система m линейных уравнений с n неизвестными (4.1). Обозначим через A матрицу коэффициентов при неизвестных, а через B - матрицу, полученную из A присоединением столбца свободных членов.

$$A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}&b_2\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}.$$

Матрицу A назовем ***основной матрицей*** системы, а B - ***расширенной*** матрицей.

Теорема о совместности системы линейных уравнений (Кронекера – Капелли):

- для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы A равнялся рангу расширенной матрицы B , т. е. $r(A) = r(B)$;
- если $r(A) = r(B) = n$ (числу неизвестных), то система имеет единственное решение;
- если $r(A) = r(B) < n$, то система имеет бесчисленное множество решений.

6. Решение системы m линейных уравнений с n неизвестными.

Пусть $r(A) = r(B) = r$, тогда в матрице A найдется минор r -го порядка $M_r \neq 0$.

Уравнения системы (4.1), соответствующие базисным строкам матрицы A , называются ***базисными.*** И теперь, при решении системы можно ограничиться лишь r базисными уравнениями, а остальные $(m-r)$ уравнений отбросить как уравнения, являющиеся линейными комбинациями базисных уравнений (по теореме о базисном миноре).

Неизвестные, соответствующие столбцам базисного минора, назовем ***базисными***, а остальные $(n-r)$ - ***свободными неизвестными***.

Пример 5. Исследовать и решить систему $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислив ранги этих матриц, убеждаемся в том, что $r(A)=r(B)=2$ и система совместна.

Так как $r<n$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Выбрав в качестве базисного минора $M_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}=-33$, отбрасываем «лишнее» первое уравнение. Базисными переменными здесь являются x_1 и x_2, а свободными – x_3, x_4.

Запишем «укороченную» систему, перенеся свободные переменные в правые части уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2=4-2x_3-2x_4, \\ 9x_1+4x_2=2-x_3-7x_4. \end{cases}$$

Решим полученную систему по формулам Крамера. Вычислим определители:

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix} (4-2x_3-2x_4) & 5 \\ (2-x_3-7x_4) & 4 \end{vmatrix}=6-3x_3+27x_4,$$

$$\Delta x_2=\begin{vmatrix} 3 & (4-2x_3-2x_4) \\ 9 & (2-x_3-7x_4) \end{vmatrix}=-30+15x_3-3x_4.$$

Запишем общее решение системы:

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}=\frac{6-3x_3+27x_4}{-33}=-\frac{2}{11}+\frac{1}{11}x_3-\frac{9}{11}x_4,$$
$$x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}=\frac{-30+15x_3-3x_4}{-33}=\frac{10}{11}-\frac{5}{11}x_3+\frac{1}{11}x_4.$$

Положив в общем решении $x_3=x_4=0$, получим частное решение $\vec{x}=\left(-\frac{2}{11};\frac{10}{11};0;0\right)$. Если задать другие значения свободных переменных, получим другое частное решение.

Замечание. Выбрав другой базисный минор в матрице A, получим другой набор базисных и свободных переменных, а значит, и другую форму общего решения.

Примеры 6-7 решить в аудитории самостоятельно.

Исследовать совместность и найти общее и частное решения системы.

Пример 6. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$ Ответ: $x_3=1-3x_1-4x_2$, $x_4=1$.

Пример 7. $\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8, \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7, \\ x_1+8x_2-7x_3=12. \end{cases}$ Ответ: (3; 2; 1).

Примеры 8-13 рекомендуются для домашних упражнений.

Пример 8. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}$. Ответ: $r=3$.

Пример 9. Вычислить два различных базисных минора матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 & 11 \end{pmatrix}$.

Пример 10. Найти значение λ, при котором матрица A будет иметь наименьший ранг.

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Чему равен ранг при найденном λ, и чему он равен при других значениях λ?

Ответ: при $\lambda = 0$ ранг $r = 2$, при $\lambda \neq 0$ $r = 3$.

Исследовать совместность и найти общее и одно частное решение системы.

Пример 11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

Ответ: $x_3 = \frac{1}{7}(9 - 5x_1 + 2x_2)$, $x_4 = \frac{1}{7}(2 + 2x_1 - 5x_2)$.

Пример 12. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 0{,}1\,(6 - 15x_2 - x_4)$, $x_3 = 0{,}2\,(1 + 4x_4)$.

Пример 13. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$ Ответ: система несовместна.

Практическое занятие 6

Тема: «Линейная зависимость векторов. Ранг и базис системы векторов»

Цель занятия. Усвоить понятия линейной зависимости и независимости системы векторов, научиться находить базисы системы векторов, уяснить значение понятий ранга и базиса при изучении систем векторов.

В соответствии с поставленной целью напомним общие теоретические положения.

Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_k$ называется ***линейно независимой***, если из равенства нулю линейной комбинации векторов

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \dots + \lambda_k\overline{a}_k = 0 \qquad (6.1)$$

следует равенство нулю всех коэффициентов λ_i.

Если же равенство (6.1) возможно при неравенстве нулю хотя бы одного из коэффициентов λ_i, то система называется линейно зависимой.

Необходимое и достаточное условие линейной зависимости

Для того, чтобы система, содержащая не менее 2-х векторов, была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из ее векторов выражался в виде линейной комбинации остальных.

Пример 1. Векторы $\overline{a}_1 = (2,3,-1)$, $\overline{a}_2 = (0,-1,4)$, $\overline{a}_3 = (4,7,-6)$ образуют линейно зависимую систему, так как $\overline{a}_3 = 2\overline{a}_1 - \overline{a}_2$.

Пример 2. Векторы $\overline{a}_1 = (2,3,-1)$, $\overline{a}_2 = (0,1,2)$, $\overline{a}_3 = (0,1,3)$ образуют линейно независимую систему.

В самом деле, записав для данных векторов равенство (6.1) $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \lambda_3\overline{a}_3 = 0$ и переходя к координатным равенствам, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$

Система уравнений имеет единственное решение $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, откуда и следует линейная независимость векторов.

Рангом r данной системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов этой системы.

Базисом системы векторов, имеющей ранг r, называется любая линейно независимая подсистема из r векторов.

Так, например, система единичных векторов n-мерного пространства $\overline{e}_1 = (1; 0; 0; \dots; 0)$, $\overline{e}_2 = (0; 1; 0; \dots; 0)$, … $\overline{e}_n = (0; 0; \dots; 1)$ является одним из его базисов и любой n-мерный вектор $\overline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ может быть представлен в виде линейной комбинации единичных векторов с коэффициентами, равными координатам вектора: $\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + \dots + a_n\overline{e}_n$.

Сформулируем теорему, позволяющую сводить изучение всего многообразия векторов системы (или пространства) к изучению r векторов базиса.

Теорема 1. Всякий вектор $\vec{a}$ системы векторов может быть представлен в виде линейной комбинации векторов любого из ее базисов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$, т. е.

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_r \vec{a}_r. \tag{6.2}$$

Способ нахождения ранга системы векторов дает следующая теорема.

Теорема 2. Ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из координат векторов – строк.

Пример 3. Выяснить, будет ли система векторов $\vec{a}_1 = (1; 2; 3; 4)$, $\vec{a}_2 = (0; 1; -1; 5)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 2; 9)$ линейно зависимой.

Решение. Определим ранг системы векторов как ранг матрицы, составленной из координат этих векторов.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ и } r = 2.$$

Так как ранг системы векторов равен двум, то базис образует 2 вектора, а третий вектор (по теореме 1) – линейная комбинация векторов базиса, откуда и следует линейная зависимость системы векторов.

Примеры 4 – 7 решите самостоятельно в аудитории.

Пример 4. Исследовать линейную зависимость системы векторов $\vec{a}_1 = (1; 0; 0; 2; 5)$, $\vec{a}_2 = (0; 1; 0; 3; 4)$, $\vec{a}_3 = (0; 0; 1; 4; 7)$, $\vec{a}_4 = (2; -3; 4; 11; 12)$.

Ответ: система линейно независима.

Пример 5. Найти все базисы системы векторов $\vec{a}_1 = (2; 1; -3; 1)$, $\vec{a}_2 = (4; 2; -6; 2)$, $\vec{a}_3 = (6; 3; -9; 3)$, $\vec{a}_4 = (1; 1; 1; 1)$.

Ответ: $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_4$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_4$, $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$.

Пример 6. Найти какой-нибудь базис системы векторов и выразить все векторы системы, не входящие в базис, через векторы базиса.

$\vec{a}_1 = (1; 2; 3; 4)$, $\vec{a}_2 = (2; 3; 4; 5)$, $\vec{a}_3 = (3; 4; 5; 6)$, $\vec{a}_4 = (4; 5; 6; 7)$.

Ответ: $\vec{a}_3 = -\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$, $\vec{a}_4 = -2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$.

Пример 7. Найти все значения λ, при которых вектор $\vec{b}$ линейно выражается через $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$.

$\vec{a}_1 = (2; 3; 5)$, $\vec{a}_2 = (3; 7; 8)$, $\vec{a}_3 = (1; -6; 1)$, $\vec{b} = (7; -2; \lambda)$.

Ответ: $\lambda = 15$.

Примеры 8-11 рекомендуются для домашних упражнений.

Пример 8. Исследовать линейную зависимость системы векторов $\vec{a}_1 = (4; -5; 2; 6)$, $\vec{a}_2 = (2; -2; 1; 3)$, $\vec{a}_3 = (6; -3; 3; 9)$, $\vec{a}_4 = (4; -1; 5; 6)$.

Ответ: система линейно зависима.

Пример 9. Найти базисы системы векторов $\vec{a}_1 = (1; 2; 0; 0)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; 3; 4)$, $\vec{a}_3 = (3; 6; 0; 0)$.

Ответ: $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$.

Пример 10. Найти все значения λ, при которых вектор $\vec{b}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

$\vec{a}_1 = (3; 4; 2)$, $\vec{a}_2 = (6; 8; 7)$, $\vec{b} = (9; 12; \lambda)$.

Ответ: λ - любое число.

Пример 11. Найти какой–нибудь базис системы векторов и все векторы системы, не входящие в базис, выразить через векторы базиса. $\vec{a}_1 = (5; 2; -3; 1)$, $\vec{a}_2 = (4; 1; -2; 3)$,

$$\overrightarrow{a_3}=(1;1;-1;-2),\quad \overrightarrow{a_4}=(3;4;-1;2).$$

Ответ: базисом является система $\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$; $\quad \overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_2}$.

Практическое занятие 7

Тема: «Системы однородных линейных уравнений»

Собственные значения и собственные векторы

Цель занятия. Научиться находить фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений и применять полученные навыки для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы.

Система линейных уравнений (4.1) называется ***системой линейных однородных*** уравнений, если все их свободные члены равны нулю. Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \qquad (7.1)$$

Система (7.1) всегда совместна, так как она имеет нулевое (тривиальное) решение (0; 0; …;0).

Система (7.1) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $r(A)<n$.

Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующим свойством: если векторы $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ - решения системы (7.1), то их линейная комбинация $\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}$, где λ_1, λ_2 - любые действительные числа, также является решением этой системы. В связи с этим интерес представляет линейно независимая система решений, через которую линейно выражаются все остальные решения. Такая система называется ***фундаментальной системой решений.***

Теорема о фундаментальной системе решений

Если ранг r матрицы A меньше числа ***переменных*** n, то всякая фундаментальная система решений системы (7.1) состоит из $(n-r)$ решений. Общее решение системы (7.1) имеет вид

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_k\overrightarrow{a_k}, \quad (7.2)$$

где $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\ldots\overrightarrow{a_k}$ - любая фундаментальная система решений, $\lambda_1,\ \lambda_2\ldots\lambda_k$ - произвольные числа и $k=n-r$.

В примерах 1-3 найти фундаментальную систему решений.

Пример 1.
$$\begin{cases} x_1-x_2-2x_3+3x_4+x_5=0\\ 2x_1+3x_2-4x_3+2x_4+4x_5=0,\\ x_1+4x_2-2x_3-x_4+3x_5=0,\\ -3x_1+x_2+6x_3-6x_4-x_5=0. \end{cases} \qquad (7.3)$$

Решение

1. Находим общее решение системы (7.3). Для этого, используя эквивалентные преобразования над строками матрицы A, приведем систему к ступенчатому виду.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 1\\ 2 & 3 & -4 & 2 & 4\\ 1 & 4 & -2 & -1 & 3\\ -3 & 1 & 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 0 & -4 & 2\\ 0 & 5 & 0 & -4 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6\\ 0 & -2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 7 & 14 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Минор $M_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0.$

Следовательно, $r(A)=3$ и переменные $x_1,\ x_2,\ x_4$ являются базисными, а $x_3,\ x_5$ - свободными.

Матрице, полученной после преобразований, соответствует система:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_5 = 0, \\ x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Общее решение системы (7.3) имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 + 3x_5, \\ x_2 &= -2x_5, \\ x_4 &= -2x_5. \end{aligned} \qquad (7.4)$$

2. Так как $r(A) = 3$, то число линейно независимых векторов фундаментальной системы решений $k = n - r = 5 - 3 = 2$.

Взяв два набора свободных переменных:

$$x_3 = 1, \quad x_5 = 0 \text{ и}$$
$$x_3 = 0, \quad x_5 = 1,$$

подставим их в общее решение (7.4), получим фундаментальную систему решений:

$$\vec{a}_1 = (2; 0; 1; 0; 0)^T \text{ и}$$
$$\vec{a}_2 = (3; -2; 0; -2; 1)^T.$$

Для самостоятельного решения предлагаются примеры 2 – 3.

Пример 2.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_5 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\vec{a}_1 = (5; 1; 0; 13; 0)^T$,

$\vec{a}_2 = (0; 0; 1; 2; 0)^T$,

$\vec{a}_3 = (-1; 0; 0; 1; 1)^T$.

Пример 3.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Собственные значения и собственные векторы матрицы

Пусть дана квадратная матрица A (3.1) n-го порядка и ненулевой вектор-столбец

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1; x_2; \ldots x_n)^T.$$

Определение. Вектор $\vec{x} \neq 0$ называется ***собственным вектором*** матрицы A, если найдется такое число λ, что выполняется условие

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \qquad (7.5)$$

Число λ называется ***собственным значением*** матрицы A, соответствующим вектору $\vec{x}$.

Векторно–матричное равенство (7.5) равносильно системе линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \qquad (7.6)$$

Существование ненулевого вектора $\vec{x}$, удовлетворяющего уравнению (7.5), равносильно существованию ненулевого решения системы (7.6).

Для того, чтобы ранг матрицы коэффициентов при неизвестных системы (7.6) был меньше числа n, необходимо и достаточно, чтобы определитель $|A - \lambda E| = 0$, где E - единичная матрица n-го порядка или

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn-\lambda} \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.7)$$

Определитель $|A - \lambda E|$ является многочленом n-й системы относительно λ и называется ***характеристическим многочленом*** матрицы A, а уравнение (7.7) – ***характеристическим уравнением*** матрицы A.

Пример 4. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразуем определитель, прибавив третью строку ко второй,

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(3-\lambda)((4-\lambda)(3-\lambda)+(2-\lambda))+(\lambda-2-4+\lambda)=(3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+14)-2(3-\lambda)=$$

$$=(3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12)=0.$$

Окончательно, $(3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-6)=0$ и собственные значения $\lambda_1=3,\quad \lambda_2=2,\quad \lambda_3=6.$

Находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1=3$.

Запишем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{cases} -x_2+x_3=0, \\ -x_1+2x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2=0. \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\begin{cases} x_2=x_3 \\ x_1=x_3 \end{cases}$ - общее решение и если $x_3=1$, то $\vec{a}_1=(1;1;1)$ является фундаментальной системой решений и собственный вектор

$$\vec{a}_1=x_3(1;1;1)=(x_3;x_3;x_3).$$

Находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2=2$.

Составим систему уравнений $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ или $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ -x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=0. \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\begin{cases} x_2=0 \\ x_1=-x_3 \end{cases}$ - общее решение и если $x_3=1$, получим фундаментальную систему решений $\vec{a}_1=(-1;0;1)$ и собственный вектор

$$\vec{b}=x_3(-1;0;1)=(-x_3;0;x_3).$$

Находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3=6$.

Составим систему уравнений $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ или

$$\begin{cases} -3x_1-x_2+x_3=0, \\ -x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2-3x_3=0. \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\begin{cases} x_2=-2x_3 \\ x_1=x_3 \end{cases}$ - общее решение и если $x_3=1$, то $\vec{a}_3=(1;-2;1)$ является фундаментальной системой решений и собственный вектор

$$\vec{c}=x_3(1;-2;1)=(x_3;-2x_3;x_3).$$

Итак, собственные векторы заданной матрицы $\vec{a}_1=(x_3;x_3;x_3)$,

$$\vec{b}=(-x_3;0;x_3),\ \vec{c}=(x_3;-2x_3;x_3).$$

Самостоятельно решить примеры 5-6.

Пример 5. Найти собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\vec{a}=(-x_2-x_3;\ x_2;\ x_3),\quad \vec{b}=(x_3;x_3;x_3)$.

Пример 6. Найти собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\vec{a}=(0;0;x_3)$.

4Для домашних упражнений рекомендуем выполнить индивидуальное задание (задача 3).

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Решить систему линейных уравнений:

а) по формулам Крамера,
б) матричным методом,
в) методом Гаусса.

№	Коэффициенты при неизвестных			Свободные члены	№	Коэффициенты при неизвестных			Свободные члены
	x_1	x_2	x_3			x_1	x_2	x_3	
1	1	2	2	3	10	3	4	2	8
	4	-2	-5	5		2	-4	-3	-1
	6	-1	3	1		1	5	1	0
2	1	-2	4	3	11	5	8	-1	7
	2	1	-6	2		2	-3	2	9
	3	-6	1	-2		1	2	3	1
3	2	3	4	1	12	2	-1	5	4
	1	-6	-2	-1		5	2	13	2
	4	-3	8	-1		3	-1	5	0
4	3	2	2	8	13	1	1	-1	-2
	2	-3	3	8		4	-3	1	1
	4	1	-6	21		2	1	-1	1
5	2	-1	1	3	14	1	2	1	4
	1	1	0	3		3	-5	3	1
	0	2	-1	1		2	7	-1	8
6	1	4	-1	2	15	2	1	2	1
	3	2	2	1		1	2	2	2
	6	4	-2	5		2	2	1	1
7	1	2	3	2	16	1	2	1	2
	3	1	2	3		2	1	1	1
	2	3	1	1		1	1	2	2

8	1	1	1	1	17	1	2	3	5
	6	3	1	-9		3	1	2	6
	8	-4	-2	5		2	3	1	1
9	1	1	0	1	18	2	1	3	3
	1	-2	1	1		4	2	5	5
	1	0	-2	2		3	4	7	2
19	3	4	2	8	33	1	-1	3	9
	1	5	2	5		3	-5	1	-4
	2	3	4	3		4	-7	1	5
20	1	3	2	4	34	1	1	1	1
	2	6	1	2		2	1	2	1
	4	8	-1	2		1	1	3	2
21	1	1	1	4	35	2	-3	5	1
	2	-3	4	-4		1	1	-2	-4
	5	-7	8	-7		3	-1	-1	-2
22	2	-1	1	2	36	2	2	-1	4
	3	2	2	-2		3	-1	-3	7
	1	-2	1	1		1	3	-2	3
23	1	2	3	5	37	3	-2	5	11
	2	-1	-1	1		2	1	-2	2
	1	3	4	6		1	3	0	3
24	1	-2	3	6	38	1	3	-1	19
	2	3	-4	20		2	7	4	30
	3	-2	-5	6		3	-1	6	-1
25	8	3	-6	2	39	2	3	2	9
	1	1	-1	1		1	2	-3	14
	-4	-1	3	-2		3	4	1	16
26	2	1	1	2	40	3	2	1	5
	5	1	3	14		1	1	-1	0
	2	1	2	5		2	-1	5	3
27	2	-1	4	15	41	1	2	-1	-3
	3	-1	1	8		2	3	1	-1
	-2	1	1	0		1	-1	-1	3
28	1	1	1	1	42	1	3	-3	13
	1	-1	2	-5		2	-3	3	-10
	4	1	4	-2		1	0	1	0
29	2	-3	1	2	43	2	-1	1	-4
	1	5	-4	-5		3	1	-1	-1
	4	1	-3	-4		4	-2	3	-7

30	2	-4	3	1	44	2	0	1	6
	1	-2	4	3		0	2	-1	2
	3	-1	5	2		3	-4	0	-2
31	3	1	1	-2	45	2	-1	4	15
	5	-1	-1	10		2	1	1	8
	1	-1	5	-12		3	-1	0	5
32	2	1	-1	0	46	1	1	-1	2
	1	-1	-3	13		1	-2	1	-3
	3	-2	4	-15		2	1	0	5
47	2	-1	1	1	49	5	-6	4	3
	3	1	-3	0		3	-3	2	2
	1	3	-4	2		4	-5	2	1
48	2	-3	1	-16	50	1	-2	1	7
	1	2	1	6		2	-3	-5	-8
	5	-1	-3	-14		4	5	-1	0

Задача 2. Исследовать совместность и найти общее и одно частное решение системы линейных уравнений.

№	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены	№	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4			x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	5	4	3	1	10	1	2	-2	-1	-5
	2	-1	2	-1	0		2	-1	-3	2	-1
	5	3	8	1	1		1	2	3	-6	-10
2	1	1	-2	1	1	11	2	-4	1	3	3
	4	-1	-1	-1	1		1	-7	3	4	4
	4	3	-4	-1	2		2	-16	7	9	9
3	1	-1	1	-1	-2	12	5	3	-7	8	4
	1	2	-2	-1	-5		5	-4	-14	1	18
	2	-1	-3	2	-1		1	0	-2	1	2
4	3	2	1	-4	6	13	1	-3	2	-1	-1
	4	3	1	-7	8		1	9	6	0	3
	9	7	2	-16	18		1	3	4	1	1
5	8	5	3	-7	2	14	8	5	-10	3	11
	1	5	-4	-14	9		1	5	3	2	13
	1	1	0	-2	1		3	-2	-2	1	2

6	11	2	5	-4	13	15	2	-9	-7	-5	2
	9	-13	2	-3	-4		2	-7	-5	-3	2
	2	15	3	-4	17		7	-6	1	8	7
7	8	-1	-1	3	4	16	1	-1	0	-2	-3
	5	-5	-1	-2	2		1	1	2	4	7
	10	3	0	2	5		2	3	5	11	19
8	1	1	1	1	1	17	4	-16	6	1	10
	1	1	2	1	0		2	-7	2	1	4
	1	1	-1	1	3		7	-6	-2	0	-2
9	4	3	-4	-1	2	18	2	2	-7	7	6
	1	-3	1	1	0		7	5	1	10	4
	1	1	-2	1	1		4	3	2	-1	-3
19	2	2	2	0	6	23	3	1	-16	4	-5
	11	9	13	-4	33		1	1	-7	2	-2
	4	3	5	-2	12		-1	0	-6	7	1
20	3	-1	5	7	6	24	2	-7	7	-2	-12
	2	-5	-1	-4	-9		5	1	10	-7	-8
	1	0	2	3	3		3	2	-1	-4	6
21	-9	-7	2	2	-5	25	2	2	2	0	4
	-7	-5	2	2	-3		13	9	11	4	20
	-6	1	7	7	8		5	3	4	2	7
22	-3	-2	-1	1	0	26	7	5	1	3	2
	7	4	1	1	2		-4	-1	5	2	-3
	19	11	3	2	5		3	2	0	1	1

Задача 3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.   5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.   6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.   8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.   9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.   11. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.   12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.   14. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.   15. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.   17. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.   18. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.   20. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.   21. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & -8 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.   23. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.   24. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.   26. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.   27. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.   29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.   30. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

31. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.   32. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.   33. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Рекомендуемая литература

1. Высшая математика для экономистов [Текст] / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2002.
2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] / П.Е. Данко, А.Г. Панов, Т.Я. Кожевникова. Ч.1. М.: Высшая школа, 2002.
3. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике [Текст] / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко М.: АЙРИС ПРЕСС, 2003.
4. Общий курс высшей математики для экономистов [Текст]: учебник / под ред. В.И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2001.
5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст] / Д.Т. Письменный. М.: АЙРИС ПРЕСС, 2004.