ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

Т.Е. Воронцова
Л.А. Золкина
Н.К. Пешкова
С.С. Рублева

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**Индивидуальные задания и
методические указания к их выполнению
для студентов всех специальностей и направлений
очной и заочной форм обучения**

Екатеринбург
2008

Неопределенный интеграл

Краткие теоретические сведения

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если во всех точках этого отрезка ее производная равна $f(x)$, то есть выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо из первообразных функций для данной функции $f(x)$, то любая другая первообразная функция имеет вид

$$F(x)+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется *интегрированием*.

Сформулируем некоторые свойства и правила нахождения неопределенных интегралов:

1° Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x).$$

Это свойство, вытекающее прямо из определения, позволяет проверять правильность результата интегрирования.

2° Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

3° Неопределенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен сумме неопределенных интегралов этих функций:

$$\int\left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

4° Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int a f(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a = const.$$

5° Если $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b)+C.$

6° Если $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ и $u=\varphi(x)$ - любая дифференцируемая по x функция, то $\int f(u)\,du = F(u)+C.$

Таблица интегралов

1. $\int du = u + C$

2. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

2.* $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\int e^u du = e^u + C$

6. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\, du = \sin u + C$

8. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$

9. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$

10. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a}\right| + C$

12. $\int \dfrac{dx}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C$

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

(основано на прямом использовании таблицы интегралов).

Пример 1. Найти интеграл $\int\left(5 - \frac{4}{3}x^3\right)dx$.

Решение: $\int\left(5 - \frac{4}{3}x^3\right)dx =$[используем свойства 3° и 4°] $=$

$= \int 5dx - \int \frac{4}{3}x^3 dx = 5\int dx - \frac{4}{3}\int x^3 dx =$ [по формулам 1 и 2 таблицы интегралов] $= 5x - \frac{4}{3}\cdot\frac{x^4}{4} + C = 5x - \frac{x^4}{3} + C$,

здесь C - постоянная интегрирования.

Пример 2. Найти $\int\cos(5x-3)dx$.

Решение: $\int\cos(5x-3)\,dx =$ [по свойству 5° и формуле 7] $=$
$= \frac{1}{5}\sin(5x-3) + C.$

Если подынтегральное выражение можно представить в виде $f(u(x))u'(x)dx$, то имеет смысл подвести функцию $u(x)$ под знак дифференциала, то есть воспользоваться формулой $u'(x)dx = d(u(x))$, тогда

$$f(u(x))u'(x)dx = f(u(x))d(u(x)).$$

Полезно запомнить следующие формулы для наиболее часто встречающихся дифференциалов:

$\cos u\, du = d(\sin u)$	$\sin u\, du = -d(\cos u)$
$u\, du = \dfrac{du^2}{2}$	$\dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2d(\sqrt{u})$
$e^u du = de^u$	$\dfrac{du}{u} = d\ln\lvert u\rvert$
$\dfrac{du}{u^2} = -d\left(\dfrac{1}{u}\right)$	$du = \dfrac{1}{a}d(au \pm b)$
$\dfrac{du}{\cos^2 u} = d(\operatorname{tg} u)$	$\dfrac{du}{\sin^2 u} = -d(\operatorname{ctg} u)$
$\dfrac{du}{1+u^2} = d(\operatorname{arctg} u)$	$\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = d(\arcsin u)$

Пример 3. Найти $\int\frac{x\,dx}{3-2x^2}$.

Решение: Используя метод введения переменной под знак дифференциала, получаем $x\,dx = \frac{dx^2}{2}$, тогда

$$\int\frac{x\,dx}{3-2x^2} = -\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{2x^2-3} = \text{[по свойству } 5^\circ\text{]} = -\frac{1}{4}\int\frac{d(2x^2-3)}{2x^2-3} =$$

$$= \text{[по формуле 3]} = -\frac{1}{4}\ln\left|2x^2-3\right| + C.$$

Пример 4. Найти $\int\frac{\sqrt{\ln 3x+2}}{x}dx$.

Решение: Так как $\frac{dx}{x} = \frac{d(3x)}{3x} = d(\ln 3x)$, то

$$\int\frac{\sqrt{\ln 3x+2}}{x}dx = \int\sqrt{\ln 3x+2}\,d(\ln 3x) = \int(\ln 3x+2)^{1/2}d(\ln 3x+2) =$$

$$= \text{[по формуле 2]} = \frac{2(\ln 3x+2)^{3/2}}{3} + C.$$

Пример 5. Найти $\int\frac{1-2\sin 6x}{\cos^2 6x}dx$.

Решение: $\int\frac{1-2\sin 6x}{\cos^2 6x}dx=$ [по свойствам 3° и 4°] $=$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 6x}-2\int\frac{\sin 6x}{\cos^2 6x}dx=[\text{по свойству } 5^\circ]=\frac{1}{6}\int\frac{d(6x)}{\cos^2 6x}-$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{\sin 6x\,d(6x)}{\cos^2 6x}=[\text{по формуле 8; так как } \sin 6x\,d(6x)=-d(\cos 6x)\,]=$$

$$=\frac{1}{6}\operatorname{tg}6x+\frac{1}{3}\int\frac{d(\cos 6x)}{\cos^2 6x}=\frac{1}{6}\operatorname{tg}6x+\frac{1}{3}\int\cos^{-2}6x\,d(\cos 6x)=$$

$$=[\text{по формуле 2}]=\frac{1}{6}\operatorname{tg}6x-\frac{1}{3\cos 6x}+C.$$

Пример 6. Найти $\int\frac{\operatorname{arctg}^3\left(\ln\frac{x}{2}\right)}{x\left(1+\ln^2\frac{x}{2}\right)}dx$.

Решение: Так как $\frac{dx}{x}=\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=d\left(\ln\frac{x}{2}\right)$, то

$$\int\frac{\operatorname{arctg}^3\left(\ln\frac{x}{2}\right)}{x\left(1+\ln^2\frac{x}{2}\right)}dx=\int\frac{\operatorname{arctg}^3\left(\ln\frac{x}{2}\right)}{1+\ln^2\frac{x}{2}}d\left(\ln\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\left[\frac{d\left(\ln\frac{x}{2}\right)}{1+\ln^2\frac{x}{2}}=\left(\operatorname{arctg}\left(\ln\frac{x}{2}\right)\right)'d\left(\ln\frac{x}{2}\right)=d\left(\operatorname{arctg}\left(\ln\frac{x}{2}\right)\right)\right]=$$

$$=\int\operatorname{arctg}^3\left(\ln\frac{x}{2}\right)d\left(\operatorname{arctg}\left(\ln\frac{x}{2}\right)\right)=[\text{по формуле 2}]=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4\left(\ln\frac{x}{2}\right)+C.$$

2. Замена переменной (метод подстановки)

Интеграл $\int f(x)dx$ часто можно упростить, введя вместо x новую переменную t, положив $x=\varphi(t)$. Для преобразования неопределенного интеграла к новой переменной достаточно преобразовать к этой переменной его подынтегральное выражение:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Часто вместо подстановки $x=\varphi(t)$ употребляют обратную $t=\psi(x)$ и $dt=\psi'(x)dx$.

После нахождения интеграла следует вернуться к исходной переменной x.

Некоторые интегралы находятся непосредственным интегрированием с помощью подведения под знак дифференциала функции или методом замены переменной (за новую переменную обозначают функцию, дифференциал которой дан в подынтегральном выражении).

Пример 7. Найти $\int\frac{dx}{x(2+\ln x)}$.

Решение: $\int\frac{dx}{x(2+\ln x)}=\left[2+\ln x=t;\quad (2+\ln x)'dx=\frac{dx}{x}=dt\right]=$

$$=\int\frac{dt}{t}=[\text{по формуле 3}]=\ln|t|+C=\ln|2+\ln x|+C.$$

3. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \qquad (*)$$

Эта формула применяется к интегрированию выражений, которые можно так представить в виде произведения двух сомножителей u и dv, чтобы отыскание функции v по ее дифференциалу dv ($v=\int dv$) и вычисление интеграла $\int v\,du$ (где $du=u'dx$) составляли задачу более простую, чем нахождение интеграла $\int u\,dv$.

Интегралы вида

$$\int P(x)e^{kx}dx,\quad \int P(x)a^{kx}dx,\quad \int P(x)\sin kx\,dx,\quad \int P(x)\cos kx\,dx,$$

где $P(x)$ - многочлен, k - число,

вычисляются методом интегрирования по частям, причем $u=P(x)$, а за dv обозначаются все остальные множители.

Интегралы вида

$$\int P(x)\operatorname{arctg}x\,dx,\quad \int P(x)\operatorname{arcctg}x\,dx,\quad \int P(x)\arcsin x\,dx,\quad \int P(x)\arccos x\,dx,$$
$$\int P(x)\ln x\,dx,\quad \int P(x)\log_a x\,dx$$

также вычисляются методом интегрирования по частям, где $dv=P(x)dx$, а за u обозначаются остальные множители.

Пример 8. Найти $\int(2+3x)e^{x/5}dx$.

Решение: $\int(2+3x)e^{x/5}dx=$

$=\Big[$ Полагаем $u=2+3x$, тогда $e^{x/5}dx=dv$, **находим** du **и** v:

$$du=u'dx=(2+3x)'\,dx=\left((2)'+(3x)'\right)dx=3dx \text{ и}$$
$$v=\int dv=\int e^{x/5}dx=[\text{по свойству } 5^\circ\text{, формуле}]=5e^{x/5}.$$

После этого запишем правую часть, применив **формулу** (*) $\Big]=$

$$=(2+3x)5e^{x/5}-\int 5e^{x/5}3dx=[\text{по свойствам } 4^\circ \text{ и } 5^\circ\text{, формуле 5}]=$$
$$=(2+3x)5e^{x/5}-15\cdot5e^{x/5}+C=10e^{x/5}+15xe^{x/5}-75e^{x/5}+C=(15x-65)e^{x/5}+C.$$

Пример 9. Найти $\int x\ln x\,dx$.

Решение: $\int x\ln x\,dx=\Big[$ Пусть $u=\ln x$, тогда $dv=x\,dx$; находим

$du=(\ln x)'\,dx=\frac{dx}{x}$; $v=\int dv=\int x\,dx=$[по формуле 2]$=\frac{x^2}{2}$. Применим формулу (*) $\Big]=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac12\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac12\cdot\frac{x^2}{2}+C=$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

Пример 10. Найти $\int \operatorname{arctg}2x\,dx$.

Решение: $\int\operatorname{arctg}2x\,dx=\Big[$ Обозначим за $u=\operatorname{arctg}2x$, тогда $dv=dx$, находим $du=u'dx=(\operatorname{arctg}2x)'\,dx=\frac{2dx}{1+4x^2}$; $v=\int dv=\int dx=x$. Применим формулу (*) $\Big]=x\operatorname{arctg}2x-\int\frac{2x\,dx}{1+4x^2}=$ [Положив $1+4x^2=t$, находим $x^2=\frac{t-1}{4}$; $dx^2=d\left(\frac{t-1}{4}\right)$ и $2x\,dx=\frac{dt}{4}$] $=x\operatorname{arctg}2x-\int\frac{dt}{4t}=$[по свойству 4° и формуле 3] $=x\operatorname{arctg}2x-\frac14\ln|t|+C=x\operatorname{arctg}2x-\frac14\ln|1+4x^2|+C$.

4. Интегрирование дробей, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Задача нахождения интегралов такого типа сводится к выделению полного квадрата в знаменателе подынтегральной функции и замене переменной.

Пример 11. Найти $\int\frac{x+1}{4x^2+4x-3}dx$.

Решение: $\int\frac{x+1}{4x^2+4x-3}dx=$[по свойству 4°]$=\frac14\int\frac{x+1}{x^2+x-3/4}dx=$

=[выделим в знаменателе полный квадрат:

$$x^2+x-\frac34=\left(x^2+x+\frac14\right)-\frac14-\frac34=\left(x+\frac12\right)^2-1,$$

и подставим полученное выражение под знак интеграла] =

$$=\frac14\int\frac{x+1}{\left(x+\frac12\right)^2-1}dx=\left[\text{положив } x+\frac12=t\text{, находим } x=t-\frac12;\ dx=dt\right]=$$

$$=\frac14\int\frac{t-\frac12+1}{t^2-1}dt=\frac14\int\frac{t+\frac12}{t^2-1}dt=[\text{по свойству } 3^\circ]=\frac14\int\frac{t\,dt}{t^2-1}+\frac18\int\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=\left[t\,dt=\frac{dt^2}{2}\right]=\frac18\int\frac{dt^2}{t^2-1}+\frac18\int\frac{dt}{t^2-1}=[\text{по формулам 3 и 10}]=$$

$$=\frac18\ln\left|t^2-1\right|+\frac1{16}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=[\text{делаем обратную замену}]=$$

$$=\frac18\ln\left|x^2+x-\frac34\right|+\frac1{16}\ln\left|\frac{x-1/2}{x+3/2}\right|+C=\frac18\ln\left|x^2+x-\frac34\right|+\frac1{16}\ln\left|\frac{2x-1}{x+3}\right|+C.$$

Пример 12. Найти $\int\frac{8x+3}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$.

Решение: $\int\frac{8x+3}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int\frac{8x+3}{\sqrt{3-\left(x^2-2x+1-1\right)}}dx=$

$$=\int\frac{8x+3}{\sqrt{3-(x-1)^2+1}}dx=\int\frac{8x+3}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx=$$

[положив $x-1=t$, находим $x=t+1, dx=dt$]$=$

$$\int\frac{8(t+1)+3}{\sqrt{4-t^2}}dt=\int\frac{8t+11}{\sqrt{4-t^2}}dt=[\text{по свойствам } 3^\circ \text{ и } 4^\circ]=8\int\frac{t\,dt}{\sqrt{4-t^2}}+$$

$$+11\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=[\text{по формуле 13}]=4\int\frac{dt^2}{\sqrt{4-t^2}}+11\arcsin\frac{t}{2}=$$

$$=[\text{по формуле } 2^*]=$$

$$=-8\sqrt{4-t^2}+11\arcsin\frac{t}{2}+C=-8\sqrt{3+2x-x^2}+11\arcsin\frac{x-1}{2}+C.$$

5. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью $R(x)$ называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n},$$

где m,n - натуральные числа, $A_0,A_1,\ldots,A_n,B_0,B_1,\ldots,B_m$ - действительные числа. Различают *правильные* $(m<n)$ и *неправильные* $(m\geq n)$ дроби.

Любую неправильную дробь по правилу деления многочленов можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{N(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ - многочлен, а $\dfrac{N(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь.

Всякий многочлен легко интегрируется, следовательно, интегрирование рациональных дробей сводится к задаче интегрирования правильных дробей.

Простейшими дробями называются дроби следующих типов:

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{A}{(x-a)^k};\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k},$$

где $k\geq 2$ - натуральное число, $p^2-4q<0$, то есть квадратный трехчлен действительных корней не имеет.

Всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей.

Для разложения правильной рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие необходимо разложить знаменатель $Q(x)$ на множители. Пусть знаменатель не имеет кратных комплексных корней (в разложении

дроби отсутствуют простейшие дроби четвертого типа), то есть $Q(x)=$ $=(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_m)^{n_m}\left(x^2+p_1x+q_1\right)\left(x^2+p_2x+q_2\right)\ldots\left(x^2+p_kx+q_k\right)$, тогда правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ представим в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{n_1}}{(x-a_1)^{n_1}}+\frac{B_1}{x-a_2}+\frac{B_2}{(x-a_2)^2}+\ldots$$

$$+\frac{B_{n_2}}{(x-a_2)^{n_2}}+\ldots+\frac{C_1}{x-a_m}+\frac{C_2}{(x-a_m)^2}+\ldots+\frac{C_{n_m}}{(x-a_m)^{n_m}}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+p_kx+q_k},$$

неизвестные $A_1,A_2,\ldots,A_{n_1},B_1,B_2,\ldots B_{n_2},\ldots,C_1,C_2,\ldots C_{n_m},M_1,N_1,\ldots M_k,N_k$ можно найти методом неопределенных коэффициентов. Для этого выполним следующее:

а) приведем дроби в правой части последнего равенства к наименьшему общему знаменателю, которым будет $Q(x)$, и сложим их;

б) знаменатели $Q(x)$ в обеих частях равенства одинаковы, следовательно, числители должны быть тождественно равны; их приравниваем;

в) приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях тождества, получаем систему из n уравнений с n неизвестными;

г) решив полученную систему линейных уравнений, найдем все неизвестные коэффициенты.

Пример 13. Найти $\displaystyle\int\frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}dx$.

Решение. Разложим знаменатель данной правильной дроби на множители:

$x^3-3x^2+4=x^3-2x^2-\left(x^2-4\right)=x^2(x-2)-(x-2)(x+2)=(x-2)\left(x^2-x-2\right.$

Трехчлен x^2-x-2 имеет корни -1 и 2, поэтому окончательное разложение будет: $x^3-3x^2+4=(x-2)^2(x+1)$.

Представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}=\frac{2x-5}{(x-2)^2(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+1}.$$

Теперь приведем это разложение к общему знаменателю и приравняем числители:

$$2x-5=A(x-2)(x+1)+B(x+1)+C(x-2)^2=$$
$$=Ax^2-Ax-2A+Bx+B+Cx^2-4Cx+4C.$$

Из этого тождества определяем коэффициенты A,B,C. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A+C=0 \\ x & -A+B-4C=2 \\ x^0 & -2A+B+4C=-5 \end{array}$$

Решая систему, находим A,B и C:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B-4C=2 \\ -2A+B+4C=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ A-8C=7 \end{cases} \Rightarrow 9C=-7$$

$$C=-\frac{7}{9};\ A=\frac{7}{9};\ B=-\frac{1}{3}.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}=\frac{7}{9(x-2)}-\frac{1}{3(x-2)^2}-\frac{7}{9(x+1)}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}dx=\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-2)^2}-\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x+1}=[\text{по формулам } 3{,}2]=$$
$$=\frac{7}{9}\ln|x-2|+\frac{1}{3(x-2)}-\frac{7}{9}\ln|x+1|+C=\frac{7}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+\frac{1}{3(x-2)}+C.$$

Пример 14. Найти $\int\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx$.

Решение. Подынтегральная дробь неправильная. Выделяем целую часть делением многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-5 & x^3-8 \\ \cline{2-2} x^3-8 & 1 \\ \hline x^2+3 & \end{array} \quad\Rightarrow\quad \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}=1+\frac{x^2+3}{x^3-8}$$

Замечая, что знаменатель:

$$x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right),$$

разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби

$$\frac{x^2+3}{x^3-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4},$$

откуда $\quad x^2+3=A\left(x^2+2x+4\right)+\left(Bx+C\right)\left(x-2\right)=$
$$=Ax^2+2Ax+4A+Bx^2+Cx-2Bx-2C.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A+B=1 \\ x & 2A-2B+C=0 \\ x^0 & 4A-2C=3 \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=7/12 \\ B=5/12 \\ C=-1/3 \end{array}$$

Окончательно имеем

$$\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}=1+\frac{7}{12(x-2)}+\frac{5x-4}{12\left(x^2+2x+4\right)}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx=\int dx+\frac{7}{12}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{12}\int\frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx=$$
$$=[\text{по формулам } 1,3]=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+$$
$$+[\text{выделяем полный квадрат в знаменателе}]+$$
$$+\frac{1}{12}\int\frac{5x-4}{(x+1)^2+3}dx=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+$$
$$+\left[x+1=t;\ x=t-1;\ dx=dt\right]+\frac{1}{12}\int\frac{5t-9}{t^2+3}dt=$$
$$=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{5}{12}\int\frac{t\,dt}{t^2+3}-\frac{9}{12}\int\frac{dt}{t^2+3}=[\text{так как } t\,dt=\frac{dt^2}{2} \text{ и по}$$
$$\text{формуле } 12]=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{5}{24}\int\frac{dt^2}{t^2+3}-\frac{3}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}=[\text{по формуле } 3]=$$
$$=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{5}{24}\ln\left|t^2+3\right|-\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+$$
$$+\frac{5}{24}\ln\left|x^2+2x+4\right|-\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

6. Интегрирование тригонометрических функций

а) Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ сводятся к интегралам от рациональной функции заменой переменной $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, тогда $x = 2\operatorname{arctg} t$ и

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример 15. Найти $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

Решение. Делаем замену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, тогда

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5\right)} =$$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{4t - 1 + t^2 + 5(1+t^2)}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{6t^2 + 4t + 4} = \frac{2}{6}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}} =$$

=[выделяем полный квадрат в знаменателе]=

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(t + \frac{1}{3}\right)}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} =$$

$$=[\text{по формуле 12}]= \frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\left(t + \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.$$

б) К интегралам вида $\int R(\operatorname{tg} x)dx$, $\int R\left(\sin^2 x, \cos^2 x\right)dx$ применяется подстановка $\operatorname{tg} x = t$ и соответственно к $\int R(\operatorname{ctg} x)\,dx$ - подстановка $\operatorname{ctg} x = t$, что приводит к интегралам от рациональных функций.

Пример 16. Найти $\int \operatorname{tg}^4 \frac{x}{3}\,dx$.

Решение. Делаем замену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $x = 3\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{3dt}{1+t^2}$, тогда

$$\int \operatorname{tg}^4 \frac{x}{3}\,dx = \int \frac{t^4 \cdot 3dt}{1+t^2} =[\text{по свойству } 4^\circ]= 3\int \frac{t^4 dt}{1+t^2} =$$

=[неправильная дробь, выделяем целую часть делением многочлена на многочлен]=

$$\begin{array}{r|l} t^4 & t^2+1 \\ \cline{2-2} -\;\underline{t^4 + t^2} & t^2 - 1 \\ -t^2 & \\ -\;\underline{-t^2 - 1} & \\ 1 & \end{array} \quad = 3\int\left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right)dt =[\text{по свойству } 3^\circ]=$$

$$= 3\int t^2 dt - 3\int dt + 3\int \frac{dt}{t^2+1} =[\text{по формулам 2, 1, 12}]= \frac{3t^3}{3} - 3t + 3\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{3} + x + C.$$

в) В интегралах вида $\int \cos^m x \cdot \sin^n x\,dx$, где m, n – целые числа, возможны два случая:

1) Одно из чисел m или n нечетное.

Пусть $m = 2k+1$, тогда

$$\int \cos^m x \cdot \sin^n x\,dx = \int \cos^{2k} x \cdot \sin^n x \cos x\,dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^k \sin^n x\,d(\sin x).$$

Последний интеграл находится по свойству 3° и формуле 2.

Если $n = 2k+1$, тогда

$$\int \cos^m x \cdot \sin^{2k} x \sin x\,dx = -\int \cos^m x \cdot \sin^{2k} x\,d(\cos x) =$$

$$= -\int \cos^m x \left(1 - \cos^2 x\right)^k d(\cos x).$$

Пример 17. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

Решение: $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^4 x}dx = -\int \frac{\sin^2 x\,d(\cos x)}{\cos^4 x} =$

$$= -\int \frac{\left(1 - \cos^2 x\right)d(\cos x)}{\cos^4 x} =[\text{по свойству } 3^\circ]= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x} +$$

$$+ \int \frac{\cos^2 x\,d(\cos x)}{\cos^4 x} = -\int \cos^{-4} x\,d(\cos x) + \int \cos^{-2} x\,d(\cos x) =$$

= [по формуле 2] =

$$= -\frac{\cos^{-3} x}{-3} + \frac{\cos^{-1} x}{-1} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

2) Оба числа m и n четные.

Формулы $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ позволяют понизить степень тригонометрических функций.

Пример 18. Найти $\int\cos^4 3x\,dx$.

Решение: $\int\cos^4 3x\,dx=\int\left(\cos^2 3x\right)^2dx=\int\left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^2dx=$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 6x+\cos^2 6x\right)dx=[\text{по свойству } 3^\circ]=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 6x\,dx+$$
$$+\frac{1}{4}\int\cos^2 6x\,dx=[\text{по формулам 1, 7 и свойству } 5^\circ]=\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}\sin 6x+$$
$$+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 12x}{2}dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\int\cos 12x\,dx=$$
$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{96}\sin 12x+C.$$

г) Интегралы вида $\int\cos\alpha x\cdot\cos\beta x\,dx$; $\int\sin\alpha x\cdot\sin\beta x\,dx$; $\int\sin\alpha x\cdot\cos\beta x\,dx$ находятся с помощью формул:

$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x)$$
$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x)$$
$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x)$$

Пример 19. Найти $\int\sin\frac{x}{12}\cdot\cos\frac{x}{3}dx$.

Решение: $\int\sin\frac{x}{12}\cdot\cos\frac{x}{3}dx=\frac{1}{2}\left(\int\sin\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\right)x+\sin\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\right)x\right)dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\sin\left(-\frac{x}{4}\right)dx+\frac{1}{2}\int\sin\frac{5x}{12}dx=-\frac{4}{2}\int\sin\frac{x}{4}d\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{5}\int\sin\frac{5x}{12}d\left(\frac{5x}{12}\right)=$$
$$=2\cos\frac{x}{4}-\frac{6}{5}\cos\frac{5x}{12}+C.$$

7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

а) Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt[n]{x^m}\right)dx$ с помощью замены переменной $t=\sqrt[n]{x}$ приводятся к интегралам от рациональных функций. Интеграл содержащий иррациональности вида $\sqrt[s_1]{x^{r_1}},\ldots,\sqrt[s_k]{x^{r_k}}$, упрощается заменой $x=t^m$, где m – наименьшее общее кратное $s_1,\ldots s_k$. Если интеграл содержит иррациональности вида $\sqrt[s_1]{(ax+b)^{r_1}},\ldots,\sqrt[s_k]{(ax+b)^{r_k}}$, то применяется замена $ax+b=t^m$.

Пример 20. Найти $\int\frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

Решение. Наименьшее общее кратное показателей корней подынтегрального выражения $m=6$, следовательно, $t=\sqrt[6]{1+x}$; $t^6=1+x; x=t^6-1$ и $dx=6t^5dt$; $\sqrt{1+x}=t^3$; $\sqrt[3]{1+x}=t^2$.

$$\int\frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx=\int\frac{t^6-1+t^3}{t^2}6t^5dt=6\int\left(t^9+t^6-t^3\right)dt=6\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C$$
$$=6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left(\frac{1+x}{10}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$

Пример 21. Найти $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-1}}$.

Решение. Сделаем замену $\sqrt[3]{2x-1}=t$, тогда $2x-1=t^3\Rightarrow x=\frac{t^3+1}{2}$ и $dx=\frac{3}{2}t^2dt$. Следовательно,

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-1}}=\int\frac{\frac{1}{2}\left(t^3+1\right)\frac{3}{2}t^2\,dt}{t}=\frac{3}{4}\int t^4dt+\frac{3}{4}\int t\,dt=\frac{3}{4}\cdot\frac{t^5}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{t^2}{2}+C=$$
$$=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-1)^5}+\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-1)^2}+C.$$

б) Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ находятся заменой переменной $x=a\sin t$.

Пример 22. Найти $\int\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}\,dx$.

Решение. Положим $x=2\sin t$, тогда $dx=2\cos t\,dt$ и

$$\int\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}\,dx=\int\frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t}2\cos t\,dt=\frac{1}{4}\int\frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}\,dt=\frac{1}{4}\int\frac{\cos^4 t}{\sin^4 t}\cdot\frac{dt}{\sin^2 t}=$$

$$=-\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^4 t\,d(\operatorname{ctg} t)=-\frac{1}{20}\operatorname{ctg}^5 t+C=$$

$$=[\sin t=\frac{x}{2};\quad \cos t=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}]=-\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}+C.$$

ВАРИАНТ 1.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \sin 4x\,dx$
2. $\int\frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$
3. $\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)}$
4. $\int\frac{x+7}{\sqrt{2x^2-3}}\,dx$
5. $\int\frac{x-\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}\,dx$
6. $\int x\ln(1+x)\,dx$
7. $\int x e^{-3x}\,dx$
8. $\int x\operatorname{arctg}x\,dx$
9. $\int(x+1)\cos 2x\,dx$
10. $\int x^2\sin\frac{x}{3}\,dx$
11. $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$
12. $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx$
13. $\int\sin x\cdot\sin 3x\,dx$
14. $\int\operatorname{tg}^3 2x\,dx$
15. $\int\frac{dx}{4-5\sin x}$
16. $\int\frac{dx}{x^2+4x-12}$
17. $\int\frac{x\,dx}{x^2-4x+5}$
18. $\int\frac{2x-3}{x^2-6x+5}\,dx$
19. $\int\frac{4-x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$
20. $\int\frac{19-4x}{\sqrt{3-2x^2-x}}\,dx$
21. $\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}\,dx$
22. $\int\frac{x^3+x+1}{x^4-81}\,dx$
23. $\int\frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}\,dx$
24. $\int\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$
25. $\int\frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$
26. $\int\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt{x}}\,dx$
27. $\int x\sqrt{3-x}\,dx$
28. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$
29. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$
30. $\int\frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$

ВАРИАНТ 2.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \cos\frac{2x}{5}\,dx$

2. $\int 2^{x^3} x^2\,dx$

3. $\int \frac{x-3}{\sqrt{5-2x^2}}\,dx$

4. $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}\left(2\operatorname{ctg}\frac{x}{3}+1\right)}$

5. $\int \frac{x+\operatorname{arcctg}3x}{9x^2+1}\,dx$

6. $\int \ln(4x-5)\,dx$

7. $\int x e^{x/2}\,dx$

8. $\int \operatorname{arctg}2x\,dx$

9. $\int (x+2)\sin 3x\,dx$

10. $\int x^2 2^{-x}\,dx$

11. $\int \sin^3 2x\cos^2 2x\,dx$

12. $\int \cos^4 3x\,dx$

13. $\int \sin 5x\cdot\sin 3x\,dx$

14. $\int \operatorname{tg}^2 2x\,dx$

15. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

16. $\int \frac{dx}{x^2-10x+29}$

17. $\int \frac{4x+31}{2x^2+11x+12}\,dx$

18. $\int \frac{11x-2}{x^2+2x+2}\,dx$

19. $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2-2x-8}}\,dx$

20. $\int \frac{x+23}{\sqrt{20-x^2-x}}\,dx$

21. $\int \frac{x+4}{x^3+2x^2-3x}\,dx$

22. $\int \frac{x+16}{x^4-4x^2}\,dx$

23. $\int \frac{x^5-2x^3-4}{x^3-x^2}\,dx$

24. $\int \frac{x^2+x+6}{x^3\left(x^2+9\right)}\,dx$

25. $\int \frac{x^3+1}{x^3-1}\,dx$

26. $\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

27. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}\,dx$

28. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

29. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[3]{x}}\,dx$

30. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

ВАРИАНТ 3.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{dx}{\cos^2 x/3}$

2. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+4}$

3. $\int \frac{x+\arcsin 4x}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx$

4. $\int \frac{2x+5}{4x^2-3}\,dx$

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+7)^2}}\,dx$

6. $\int x\sin(2x+1)\,dx$

7. $\int \arcsin\frac{x}{2}\,dx$

8. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x/3}$

9. $\int \ln(2x+3)\,dx$

10. $\int x^2 e^{2x}\,dx$

11. $\int \cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}\,dx$

12. $\int \sin^5 3x\cos^2 3x\,dx$

13. $\int \sin 4x\cdot\cos 2x\,dx$

14. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$

15. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

16. $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$

17. $\int \frac{x+18}{x^2-4x-12}\,dx$

18. $\int \frac{x+12}{\sqrt{x+6-x^2}}\,dx$

19. $\int \frac{4x+27}{2x^2-x+1}\,dx$

20. $\int \frac{x+19}{\sqrt{x^2-2x-15}}\,dx$

21. $\int \frac{4x^2-7x+4}{x^3-3x^2+2x}\,dx$

22. $\int \frac{4x^2-3x+14}{x^3-x^2+4x-4}\,dx$

23. $\int \frac{dx}{\left(x^2+x\right)\left(x^2+1\right)}$

24. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$

25. $\int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$

26. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

28. $\int \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x}}$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-1}+1}$

30. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

ВАРИАНТ 4.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}$
2. $\int x^2 \cos x^3 dx$
3. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{5-4x^2}} dx$
4. $\int \frac{e^{\frac{x}{2}} dx}{\sqrt{1+e^x}}$
5. $\int \frac{\ln(\operatorname{arctg} 3x)\, dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg} 3x}$
6. $\int x \cos\frac{x}{3} dx$
7. $\int x \ln(2x-1) dx$
8. $\int \frac{x\, dx}{\sin^2 4x}$
9. $\int x e^{2-x} dx$
10. $\int x^2 \sin 2x\, dx$
11. $\int \cos^3 2x \sin^2 2x\, dx$
12. $\int \sin^4 x\, dx$
13. $\int \sin 2x \cdot \sin 5x\, dx$
14. $\int \operatorname{ctg}^2 3x\, dx$
15. $\int \frac{dx}{4+\sin x}$
16. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$
17. $\int \frac{5x+6}{x^2+4x-12} dx$
18. $\int \frac{x+6}{x^2-2x+17} dx$
19. $\int \frac{8-x}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx$
20. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{3-2x^2+4x}}$
21. $\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx$
22. $\int \frac{x+2}{x^2(x^2+4)} dx$
23. $\int \frac{x+4}{x(x^2+4x+3)} dx$
24. $\int \frac{x}{(2x+3)^3} dx$
25. $\int \frac{x^3-1}{x^3-2x^2-3x} dx$
26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}+1}$
27. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$
28. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x+1}+2}$
29. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}} dx$
30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

ВАРИАНТ 5.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{7-4x}}$
2. $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2} dx$
3. $\int x e^{2x^2} dx$
4. $\int \frac{\sin \frac{x}{\sqrt{2}}}{\cos^5 \frac{x}{\sqrt{2}}} dx$
5. $\int \frac{\arccos^3(\ln x)}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$
6. $\int x e^{3x} dx$
7. $\int x \ln(2-3x) dx$
8. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{2} dx$
9. $\int x \sin 2x\, dx$
10. $\int x^2 \cos\frac{x}{3} dx$
11. $\int \sin^2 3x \cos^2 3x\, dx$
12. $\int \sin^5 2x\, dx$
13. $\int \cos 3x \cdot \cos 2x\, dx$
14. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$
15. $\int \frac{dx}{5-4\cos x}$
16. $\int \frac{dx}{x^2+12x+40}$
17. $\int \frac{5x-7}{x^2-x-20} dx$
18. $\int \frac{4x-1}{x^2+x+1} dx$
19. $\int \frac{4x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx$
20. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$
21. $\int \frac{x\, dx}{(2x^2-3x-2)(x-1)}$
22. $\int \frac{x^3+2x^2-4}{x^3-2x^2} dx$
23. $\int \frac{dx}{x^3-x}$
24. $\int \frac{4x^2-5x+10}{x^3-2x^2+5x} dx$
25. $\int \frac{x^2}{1-x^4} dx$
26. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2x+1}+1}$
27. $\int x\sqrt{x+2}\, dx$
28. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$
29. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$
30. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

ВАРИАНТ 6.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int\frac{dx}{\cos^2(1-2x)}$
2. $\int x^2 5^{x^3}dx$
3. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x/2}}{x}dx$
4. $\int\frac{7x-3}{9x^2-4}dx$
5. $\int\frac{4x-\arcsin^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$
6. $\int xe^{3-2x}dx$
7. $\int(x+1)\ln x\,dx$
8. $\int\arcsin 3x\,dx$
9. $\int x\sin\frac{3x}{4}dx$
10. $\int x^2\cos 2x\,dx$
11. $\int\sin^4 2x\cos^3 2x\,dx$
12. $\int\cos^2 x\sin^4 x\,dx$
13. $\int\cos 5x\cdot\cos 3x\,dx$
14. $\int\mathrm{ctg}^2 x\,dx$
15. $\int\frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$
16. $\int\frac{dx}{x^2-14x-15}$
17. $\int\frac{5x\,dx}{x^2+x-6}$
18. $\int\frac{8x+5}{x^2-2x+17}dx$
19. $\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+10x+29}}dx$
20. $\int\frac{x-1}{\sqrt{5-2x^2-4x}}dx$
21. $\int\frac{2x^2-6x-2}{x^3+x^2-2x}dx$
22. $\int\frac{dx}{x^4-x^2}$
23. $\int\frac{x^4+2x^2+3x-5}{x^3-x}dx$
24. $\int\frac{2x^2-x+5}{(x-1)(x^2+2x+3)}dx$
25. $\int\frac{7-8x+2x^2-3x^3}{(x+1)^2(x^2+4)}dx$
26. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}}$
27. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-2}$
28. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$
29. $\int\frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$
30. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

ВАРИАНТ 7.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int e^{3x-5}dx$
2. $\int\frac{5x^2-2}{\sqrt{5x^2-1}}x\,dx$
3. $\int\frac{\sin x/3}{\cos^2 x/3-3}dx$
4. $\int\frac{7+2x}{\sqrt{4-9x^2}}dx$
5. $\int\frac{\ln^3(\mathrm{arctg}\,x)}{(1+x^2)\mathrm{arctg}\,x}dx$
6. $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$
7. $\int x3^{2x}dx$
8. $\int x\cos\frac{x}{2}dx$
9. $\int x\,\mathrm{arctg}\,3x\,dx$
10. $\int x^2e^{1-2x}dx$
11. $\int(1+2\cos x)^3dx$
12. $\int\sin^4\frac{x}{2}dx$
13. $\int\sin 3x\cdot\sin 5x\,dx$
14. $\int\mathrm{tg}^4\frac{x}{2}dx$
15. $\int\frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$
16. $\int\frac{dx}{x^2+8x+17}$
17. $\int\frac{5x+2}{x^2+2x-8}dx$
18. $\int\frac{3x-2}{x^2+6x+10}dx$
19. $\int\frac{x+1}{\sqrt{5x^2+2x+1}}dx$
20. $\int\frac{2x+1}{\sqrt{7-x^2+2x}}dx$
21. $\int\frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$
22. $\int\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$
23. $\int\frac{x^5+3x^3+4x-6}{x^3+3x}dx$
24. $\int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$
25. $\int\frac{4x^2+5}{(x-1)^2(x+2)}dx$
26. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$
27. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+3}}$
28. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+4}}$
29. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$
30. $\int\frac{dx}{x\sqrt{16-x^2}}$

ВАРИАНТ 8.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{dx}{(5x-1)^{10}}$

2. $\int \frac{\mathrm{tg}\, x/2 + 4}{\cos^2 x/2} dx$

3. $\int \frac{2^{\ln 2x}}{x} dx$

4. $\int \frac{2x+3}{x^2+25} dx$

5. $\int \frac{\ln(\arccos 2x)}{\sqrt{1-4x^2}\arccos 2x} dx$

6. $\int \arcsin 2x\, dx$

7. $\int (x+2)\cos\frac{x}{3} dx$

8. $\int x e^{3x+1} dx$

9. $\int \ln(2x+1) dx$

10. $\int x^2 \sin\frac{x}{2} dx$

11. $\int \sin^5\frac{x}{2}\cos^4\frac{x}{2} dx$

12. $\int \sin^2 2x \cos^4 2x\, dx$

13. $\int \sin 5x \cdot \cos 4x\, dx$

14. $\int \mathrm{ctg}^3\frac{x}{2} dx$

15. $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x}$

16. $\int \frac{dx}{x^2+2x-15}$

17. $\int \frac{5x+1}{x^2+2x-15} dx$

18. $\int \frac{3x+2}{x^2-3x+3} dx$

19. $\int \frac{6x+5}{\sqrt{x^2+2x+9}} dx$

20. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{9-4x-2x^2}}$

21. $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} dx$

22. $\int \frac{3x^2+4x+4}{x^3-8} dx$

23. $\int \frac{dx}{x^4-1}$

24. $\int \frac{9x^2-x-2}{x^3-x} dx$

25. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-1}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$

28. $\int \sqrt{3-x^2}\, dx$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$

30. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx$

ВАРИАНТ 9.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \sin\left(\frac{3x-1}{2}\right) dx$

2. $\int x^2\sqrt{5-x^3}\, dx$

3. $\int \frac{5x+4}{\sqrt{8-9x^2}} dx$

4. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$

5. $\int \frac{2x-3^{\mathrm{arctg}\, 2x}}{1+4x^2} dx$

6. $\int (1-x)\sin\frac{x}{3} dx$

7. $\int x\, \mathrm{arctg}\frac{x}{2} dx$

8. $\int \sqrt[3]{x}\ln x\, dx$

9. $\int x\, 2^{3x} dx$

10. $\int x^2 e^{x-1} dx$

11. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$

12. $\int \sin^4\frac{x}{2} dx$

13. $\int \sin 2x \cdot \cos 4x\, dx$

14. $\int \mathrm{tg}^5 x\, dx$

15. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

16. $\int \frac{dx}{x^2+16x+65}$

17. $\int \frac{2x+9}{x^2+5x+6} dx$

18. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx$

19. $\int \frac{x+4}{\sqrt{6x^2+11x+6}} dx$

20. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{12-x^2-4x}}$

21. $\int \frac{x^2+2x-1}{x(x^2-4)} dx$

22. $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+1)}$

23. $\int \frac{dx}{9x^3-6x^2+x}$

24. $\int \frac{2x+5}{x(x^2+9)} dx$

25. $\int \frac{x\, dx}{x^3-8}$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+3}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

28. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1} dx$

29. $\int \frac{x}{2-\sqrt{x}} dx$

30. $\int \frac{x-1}{x\sqrt{9-x^2}} dx$

ВАРИАНТ 10.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int 3^{\frac{2x-1}{4}}\,dx$
2. $\int \frac{\sqrt{\arcsin x\sqrt{2}}-x}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx$
3. $\int \frac{\cos 4x}{\cos^2 2x}\,dx$
4. $\int \frac{3x-4}{x^2-2}\,dx$
5. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx$
6. $\int (x+1)\cos\frac{x}{2}\,dx$
7. $\int \frac{x}{\sin^2 3x}\,dx$
8. $\int x^3 \ln x\,dx$
9. $\int x 3^{x/2}\,dx$
10. $\int x^2 \sin 5x\,dx$
11. $\int \cos^5\frac{x}{2}\,dx$
12. $\int \cos^4 x \sin^2 x\,dx$
13. $\int \cos 3x\cdot\sin 7x\,dx$
14. $\int \mathrm{tg}^4 x\,dx$
15. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$
16. $\int \frac{dx}{x^2-12x+11}$
17. $\int \frac{x+9}{x^2+2x-3}\,dx$
18. $\int \frac{2x-1}{5x^2+2x+1}\,dx$
19. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+2x+11}}\,dx$
20. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^2+4x}}$
21. $\int \frac{2x+12}{x(x-1)(x-2)}\,dx$
22. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$
23. $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x-2)^2}\,dx$
24. $\int \frac{dx}{x^3+3x}$
25. $\int \frac{dx}{x^3+8}$
26. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx$
27. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$
28. $\int \frac{\sqrt{1-2x}}{x}\,dx$
29. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$
30. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

ВАРИАНТ 11.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int (1+4x)^5\,dx$
2. $\int \frac{e^{3x}}{\cos^2 e^{3x}}\,dx$
3. $\int \frac{\sin x/2}{\cos^2 x/2+3}\,dx$
4. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$
5. $\int \frac{\arccos^4(\ln 2x)}{x\sqrt{1-\ln^2 2x}}\,dx$
6. $\int (x+2)\sin\frac{x}{4}\,dx$
7. $\int \arccos 3x\,dx$
8. $\int \ln(2-3x)\,dx$
9. $\int x 2^{x/3}\,dx$
10. $\int x^2 e^{4x}\,dx$
11. $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^6 2x}\,dx$
12. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$
13. $\int \sin 4x\cos 2x\,dx$
14. $\int \mathrm{tg}^3 x\,dx$
15. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x-1}$
16. $\int \frac{dx}{x^2+6x-7}$
17. $\int \frac{2x+27}{x^2-x-12}\,dx$
18. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,dx$
19. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$
20. $\int \frac{x+3}{\sqrt{14-2x^2+4x}}\,dx$
21. $\int \frac{x-2}{(x^2-3x-10)x}\,dx$
22. $\int \frac{x^2+5x+6}{2x^2-x^3}\,dx$
23. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx$
24. $\int \frac{x^4}{x^2+9}\,dx$
25. $\int \frac{dx}{x^3+8}$
26. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}$
27. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$
28. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$
29. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$
30. $\int \frac{\sqrt{7-x^2}}{x^2}\,dx$

ВАРИАНТ 12.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int\sqrt[7]{(5-2x)^2}\,dx$

2. $\int x^2\sin(1+x^3)dx$

3. $\int\frac{e^{3x/2}}{1-2e^{3x/2}}dx$

4. $\int\frac{4x+3}{\sqrt{1-5x^2}}dx$

5. $\int\frac{\sqrt{4x^2+1}+\operatorname{arcctg}^6 2x}{1+4x^2}dx$

6. $\int xe^{-\frac{x}{2}}dx$

7. $\int x\ln(x+4)dx$

8. $\int x\cos 3x\,dx$

9. $\int\arcsin\frac{x}{3}dx$

10. $\int x^2\sin x\,dx$

11. $\int\sin^6 x\,dx$

12. $\int\sin^3 x\cos^6 x\,dx$

13. $\int\sin 8x\sin 2x\,dx$

14. $\int\operatorname{tg}^5 2x\,dx$

15. $\int\frac{dx}{2-\sin x}$

16. $\int\frac{dx}{x^2-20x+64}$

17. $\int\frac{11x-2}{x^2+x-2}dx$

18. $\int\frac{6x+1}{x^2-8x+25}dx$

19. $\int\frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+4x+5}}dx$

20. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-8x+7}}$

21. $\int\frac{dx}{(x^2+x-12)x}$

22. $\int\frac{x^4}{x^2+4}dx$

23. $\int\frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$

24. $\int\frac{dx}{x^3-8}$

25. $\int\frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$

26. $\int\frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$

27. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$

28. $\int\frac{dx}{5+\sqrt{x}}$

29. $\int x\sqrt{4+x}\,dx$

30. $\int\frac{3x-5}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

ВАРИАНТ 13.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int\left(4-3\cos\frac{x}{7}\right)dx$

2. $\int\frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

3. $\int\frac{\sin 3x}{\cos^9 3x}dx$

4. $\int\frac{5x+1}{\sqrt{1-2x^2}}dx$

5. $\int\frac{\sqrt{5x^2+1}-\operatorname{arctg}^3(x\sqrt{5})}{5x^2+1}dx$

6. $\int(x-3)\sin\frac{x}{2}dx$

7. $\int xe^{4x}dx$

8. $\int x\ln(1-2x)dx$

9. $\int\arccos 2x\,dx$

10. $\int x^2\cos\frac{x}{4}dx$

11. $\int\cos^4\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}dx$

12. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}dx$

13. $\int\cos 7x\cdot\sin 3x\,dx$

14. $\int\operatorname{ctg}^4 x\,dx$

15. $\int\frac{dx}{4\cos x-3\sin x-5}$

16. $\int\frac{dx}{x^2+14x+24}$

17. $\int\frac{17-2x}{x^2-5x+4}dx$

18. $\int\frac{x+2}{x^2+3x+5}dx$

19. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+2x+3}}$

20. $\int\frac{3x-1}{\sqrt{9-8x-x^2}}dx$

21. $\int\frac{dx}{(x^2-18x+80)x}$

22. $\int\frac{x^4}{x^2+7}dx$

23. $\int\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}dx$

24. $\int\frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$

25. $\int\frac{3x+2}{2x^2+x-3}dx$

26. $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

27. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

28. $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

29. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

30. $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$

ВАРИАНТ 14.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int 3^x e^{2x}\,dx$
2. $\int \frac{3x-4}{x^2+9}\,dx$
3. $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{9-\cos^2 3x}}\,dx$
4. $\int \frac{e^{x/2}}{3-e^x}\,dx$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}\sqrt{2+7\operatorname{tg}\frac{x}{3}}}$
6. $\int \arcsin\frac{x}{2}\,dx$
7. $\int (x+2)\cos 5x\,dx$
8. $\int x\ln(2-x)\,dx$
9. $\int x4^{x+3}\,dx$
10. $\int x^2 e^{-x}\,dx$
11. $\int \cos^4\frac{x}{2}\,dx$
12. $\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx$
13. $\int \cos 7x\cdot\cos 3x\,dx$
14. $\int \operatorname{ctg}^3 2x\,dx$
15. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3}$
16. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$
17. $\int \frac{9-2x}{x^2-5x+6}\,dx$
18. $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx$
19. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{4-2x^2-4x}}\,dx$
20. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-10x+9}}$
21. $\int \frac{2x+7}{(x^2+x-2)(x+3)}\,dx$
22. $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}\,dx$
23. $\int \frac{3x-4}{x^4-2x^3}\,dx$
24. $\int \frac{5x+2}{x(x^2+2x+10)}\,dx$
25. $\int \frac{dx}{x^3+27}$
26. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}\,dx$
27. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$
28. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$
29. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$
30. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}$

ВАРИАНТ 15.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int 5^{1-2x}\,dx$
2. $\int \frac{3x-1}{x^2+7}\,dx$
3. $\int \frac{\operatorname{tg}^5 \frac{x}{3}}{\cos^2 \frac{x}{3}}\,dx$
4. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sqrt{2+\sin^2 2x}}$
5. $\int \frac{e^{\arcsin(x\sqrt{3})}-x}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx$
6. $\int (x+1)\cos 4x\,dx$
7. $\int x\operatorname{arctg} 2x\,dx$
8. $\int (2-x)e^{3x}\,dx$
9. $\int x\ln(2x+1)\,dx$
10. $\int x^2\sin\frac{x}{4}\,dx$
11. $\int \sin^5 x\,dx$
12. $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$
13. $\int \sin 3x\cdot\sin 7x\,dx$
14. $\int \operatorname{tg}^3\frac{x}{2}\,dx$
15. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+7}}$
17. $\int \frac{x-13}{x^2-2x-8}\,dx$
18. $\int \frac{x\,dx}{x^2-4x+5}$
19. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{6-2x^2+4x}}\,dx$
20. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{(x-3)^2-3}}\,dx$
21. $\int \frac{4\,dx}{x(x^2+10x-11)}$
22. $\int \frac{x-3}{x^3+9x}\,dx$
23. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}\,dx$
24. $\int \frac{x^5}{x^3-8}\,dx$
25. $\int \frac{3x-14}{x^4-7x^3}\,dx$
26. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x}}$
27. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$
28. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\,dx$
29. $\int \frac{x+3}{x\sqrt{2x+3}}\,dx$
30. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

ВАРИАНТ 16.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int\sqrt[6]{2-5x}\,dx$

2. $\int\frac{\ln^3 x+3}{x}dx$

3. $\int \mathrm{tg}\frac{x}{5}dx$

4. $\int\frac{3x-2}{\sqrt{4-3x^2}}dx$

5. $\int\frac{2x+4^{\mathrm{arctg}\,4x}}{1+16x^2}dx$

6. $\int x\ln(3x+1)dx$

7. $\int(x+1)\sin\frac{x}{5}dx$

8. $\int x\,\mathrm{arctg}\,3x\,dx$

9. $\int x e^{-2x}\,dx$

10. $\int x^2\cos 7x\,dx$

11. $\int\sin^4 x\,dx$

12. $\int\sin^3\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$

13. $\int\sin 2x\cdot\cos 6x\,dx$

14. $\int\mathrm{ctg}^4 x\,dx$

15. $\int\frac{dx}{5\cos x+3\sin x}$

16. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x-3/4}}$

17. $\int\frac{x-1}{x^2+6x-16}dx$

18. $\int\frac{2x-11}{x^2+x+6}dx$

19. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{6-4x^2+4x}}$

20. $\int\frac{(1+3x)dx}{\sqrt{x^2-4x+10}}$

21. $\int\frac{x-4}{x(x^2-5x+6)}dx$

22. $\int\frac{3x-10}{x^4-5x^3}dx$

23. $\int\frac{x^5}{x^3-27}dx$

24. $\int\frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$

25. $\int\frac{x-4}{x^3+16x}dx$

26. $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

27. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}}$

28. $\int\frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$

29. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2-x}}$

30. $\int\frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$

ВАРИАНТ 17.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int\left(\frac{3}{5x}+4e^{3x}\right)dx$

2. $\int\frac{x+x^3}{x^4+4}dx$

3. $\int\frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}}dx$

4. $\int\frac{\sin 2x}{1-3\cos^2 2x}dx$

5. $\int\frac{\ln(\arcsin 5x)dx}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$

6. $\int x e^{2x}\,dx$

7. $\int\sqrt[4]{x}\ln x\,dx$

8. $\int\arccos\frac{x}{2}dx$

9. $\int\frac{x}{\sin^2 x/4}dx$

10. $\int x^2\cos 5x\,dx$

11. $\int\sin^4\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$

12. $\int\sin^5 x\cos^2 x\,dx$

13. $\int\sin 3x\cdot\sin 4x\,dx$

14. $\int\mathrm{tg}^3\frac{x}{3}dx$

15. $\int\frac{dx}{2\cos x-3\sin x+1}$

16. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5/4}}$

17. $\int\frac{2x-1}{x^2+10x+16}dx$

18. $\int\frac{x+2}{x^2-6x+25}dx$

19. $\int\frac{x+1}{\sqrt{7-4x^2-4x}}dx$

20. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+6x-1}}$

21. $\int\frac{dx}{(x^2-5x+6)x}$

22. $\int\frac{x^5}{x^3-1}dx$

23. $\int\frac{3x-4}{x^4-2x^3}dx$

24. $\int\frac{x-2}{x^3+4x}dx$

25. $\int\frac{5x+2}{(x^2+2x+1)x}dx$

26. $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$

27. $\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$

28. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{5+4x}}$

29. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{3-2x}}$

30. $\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$

ВАРИАНТ 18.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{x-x^3}{\sqrt{9-x^4}}dx$

2. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2 4x}}$

3. $\int \frac{\sin \frac{x}{3}}{4+\cos^2 \frac{x}{3}}dx$

4. $\int \frac{2^x}{4^x-9}dx$

5. $\int \frac{\arcsin(\ln 5x)}{x\sqrt{1-\ln^2 5x}}dx$

6. $\int x3^{2x}dx$

7. $\int \frac{x}{\cos^2 3x}dx$

8. $\int (2x+3)\sin x\,dx$

9. $\int x\ln(1-x)dx$

10. $\int x^2 e^{1-x}dx$

11. $\int \sin^3 \frac{x}{2}\cos^3 \frac{x}{2}dx$

12. $\int \cos^4 3x\,dx$

13. $\int \cos 7x\cdot\cos 5x\,dx$

14. $\int \operatorname{ctg}^3 2x\,dx$

15. $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+\frac{9}{4}}}$

17. $\int \frac{21-3x}{x^2-2x-15}dx$

18. $\int \frac{x\,dx}{x^2-4x+29}$

19. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{7-9x^2-6x}}dx$

20. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+6x-1}}$

21. $\int \frac{x^2-3x-3}{x(x-3)(x-4)}dx$

22. $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$

23. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$

24. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

25. $\int \frac{x^2+3}{x^3-8}dx$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

27. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$

28. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$

29. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{4+3x}}$

30. $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$

ВАРИАНТ 19.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int (2x-\sin 5x)dx$

2. $\int \frac{\ln^2\left(\frac{x}{6}\right)+1}{x}dx$

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{3x}{4}(2+\operatorname{ctg}^2 \frac{3x}{4})}$

4. $\int \frac{2x+3}{1-3x^2}dx$

5. $\int \frac{3x+2^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

6. $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$

7. $\int x\sin^2 x\,dx$

8. $\int \ln(4-3x)dx$

9. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{3}dx$

10. $\int x^2\cos 3x\,dx$

11. $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$

12. $\int \cos^6 x\,dx$

13. $\int \sin 8x\cdot\cos 2x\,dx$

14. $\int (1-\operatorname{tg}3x)^2 dx$

15. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x}$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+7x-\frac{13}{4}}}$

17. $\int \frac{4-2x}{x^2+4x-32}dx$

18. $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$

19. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-9x^2+12x}}$

20. $\int \frac{1-x}{\sqrt{x^2+10+6x}}dx$

21. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-3)(x-5)}$

22. $\int \frac{x+2}{x^3+2x^2+x}dx$

23. $\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$

24. $\int \frac{x^2-2x+1}{x^2(x^2+1)}dx$

25. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$

26. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$

27. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$

28. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$

29. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$

ВАРИАНТ 20.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$

2. $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}$

3. $\int \frac{\cos\frac{x}{4}\,dx}{1+2\sin\frac{x}{4}}$

4. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{5x^2+1}}dx$

5. $\int \frac{\ln\left(\operatorname{arctg}(x\sqrt{3})\right)dx}{\operatorname{arctg}(x\sqrt{3})(1+3x^2)}$

6. $\int x\operatorname{arctg}\frac{x}{3}dx$

7. $\int (2x+1)\sin 5x\,dx$

8. $\int x\cos^2 x\,dx$

9. $\int \ln(1-2x)dx$

10. $\int x^2 2^{3x}dx$

11. $\int \sin^4\frac{x}{3}dx$

12. $\int \sin^3 x\cos x\,dx$

13. $\int \cos 8x\cdot\sin 2x\,dx$

14. $\int (1-\operatorname{ctg}2x)^2\,dx$

15. $\int \frac{dx}{\cos x+3\sin x}$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9x+\frac{17}{4}}}$

17. $\int \frac{3-x}{x^2-10x+9}dx$

18. $\int \frac{2-3x}{x^2+6x+25}dx$

19. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4-6x^2-8x}}dx$

20. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+8x+x^2}}$

21. $\int \frac{4x+1}{x^3-4x}dx$

22. $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}dx$

23. $\int \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2(x+1)}dx$

24. $\int \frac{dx}{x^4+3x^2}$

25. $\int \frac{dx}{1+x^3}$

26. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

27. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}dx$

28. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

29. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$

30. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$

ВАРИАНТ 21.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \left(e^{2x}+e^{-2x}\right)dx$

2. $\int \frac{x-5}{\sqrt{4-9x^2}}dx$

3. $\int \frac{x^3+2x}{\sqrt{x^4-5}}dx$

4. $\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{5}\left(4-\operatorname{tg}^2\frac{x}{5}\right)}$

5. $\int \frac{x-\operatorname{arctg}^2 7x}{1+49x^2}dx$

6. $\int x\cos(2x-1)dx$

7. $\int (3x-1)e^{-\frac{x}{2}}dx$

8. $\int x\operatorname{arctg}2x\,dx$

9. $\int \sqrt[3]{x^2}\ln x\,dx$

10. $\int x^2 3^{2x}\,dx$

11. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$

12. $\int \sin^4 3x\,dx$

13. $\int \sin 6x\cdot\sin 4x\,dx$

14. $\int \left(1-3\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2 dx$

15. $\int \frac{dx}{1+\cos x-2\sin x}$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+40x-144}}$

17. $\int \frac{3x}{7-x^2-6x}dx$

18. $\int \frac{x\,dx}{2x^2-2x+3}$

19. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-6x+16}}dx$

20. $\int \frac{1-4x}{\sqrt{1-4x^2+4x}}dx$

21. $\int \frac{x-4}{x^3-4x}dx$

22. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$

23. $\int \frac{x+3}{x^3+4x^2+4x}dx$

24. $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$

25. $\int \frac{x}{x^3-1}dx$

26. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$

27. $\int \frac{x\,dx}{1-\sqrt[3]{x+1}}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)}$

29. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}$

30. $\int \frac{x^4}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx$

ВАРИАНТ 22.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int 7^{1-4x}dx$
2. $\int \frac{1-x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$
3. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx$
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 2x}}$
5. $\int \frac{\mathrm{ctg}^4 x/4+3}{\sin^2 x/4}dx$
6. $\int \ln(x^2+1)dx$
7. $\int xe^{1-2x}dx$
8. $\int x\sin\frac{x}{5}dx$
9. $\int \arccos\frac{x}{3}dx$
10. $\int x^2e^{7x}dx$
11. $\int \cos^4 3x\,dx$
12. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}dx$
13. $\int \cos 6x\cdot\cos 4x\,dx$
14. $\int (1+3\,\mathrm{ctg}\,x)^2dx$
15. $\int \frac{dx}{5+3\sin x}$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+50x+600}}$
17. $\int \frac{1-2x}{2x^2-16x}dx$
18. $\int \frac{3x+2}{x^2-2x+10}dx$
19. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{21-3x^2+6x}}$
20. $\int \frac{6x-5}{\sqrt{x^2-6x+5}}dx$
21. $\int \frac{dx}{x^3-9x}$
22. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)x^2}dx$
23. $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$
24. $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$
25. $\int \frac{x}{x^3+8}dx$
26. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}}$
27. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$
28. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$
29. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$
30. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$

ВАРИАНТ 23.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+3x}}$
2. $\int e^{x/2}\sin(e^{x/2})dx$
3. $\int \frac{x+4}{7x^2+3}dx$
4. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x\,(\mathrm{tg}^2 4x-2)}$
5. $\int \frac{\ln(\arcsin\frac{x}{2})}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx$
6. $\int x2^{-x}dx$
7. $\int \mathrm{arcctg}\,3x\,dx$
8. $\int x\cos\frac{x}{7}dx$
9. $\int \frac{x}{\cos^2 x/4}dx$
10. $\int \ln^2 x\,dx$
11. $\int \cos^2 3x\sin^4 3x\,dx$
12. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$
13. $\int \sin 6x\cdot\cos 4x\,dx$
14. $\int \mathrm{tg}^2 5x\,dx$
15. $\int \frac{dx}{1+\cos x-\sin x}$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+24x-44}}$
17. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}$
18. $\int \frac{5x-3}{4x^2-8x-5}dx$
19. $\int \frac{3-2x}{\sqrt{3-x^2+2x}}dx$
20. $\int \frac{x-1}{\sqrt{4+x^2-5x}}dx$
21. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$
22. $\int \frac{dx}{x^3+1}$
23. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$
24. $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$
25. $\int \frac{dx}{(x^2+3x+2)x}$
26. $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}$
27. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x}}$
28. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}}$
29. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$
30. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$

ВАРИАНТ 24.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int\left((5x-2)^8-3^{x/2}\right)dx$
2. $\int\frac{dx}{x\left(2-\ln^2\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}$
3. $\int\frac{2x+3}{\sqrt{9+4x^2}}dx$
4. $\int\frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx$
5. $\int\frac{x-\operatorname{arcctg}4x}{1+16x^2}dx$
6. $\int\frac{x\,dx}{\sin^2 5x}$
7. $\int(1-x)\cos 7x\,dx$
8. $\int x^2\ln\frac{x}{2}dx$
9. $\int\operatorname{arctg}3x\,dx$
10. $\int x^2e^{-4x}dx$
11. $\int\cos^5 2x\sin^3 2x\,dx$
12. $\int\sin^4\frac{x}{3}dx$
13. $\int\sin 4x\cdot\cos 6x\,dx$
14. $\int\operatorname{tg}^3 4x\,dx$
15. $\int\frac{dx}{5+4\cos x}$
16. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+22x+21}}$
17. $\int\frac{x\,dx}{4x^2-8x-5}$
18. $\int\frac{1-x}{x^2-6x+18}dx$
19. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{6-4x^2+8x}}$
20. $\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$
21. $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$
22. $\int\frac{dx}{x^3-x^2}$
23. $\int\frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx$
24. $\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}$
25. $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$
26. $\int x\sqrt{4-x}\,dx$
27. $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$
28. $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$
29. $\int\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}}dx$
30. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

ВАРИАНТ 25.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int\left(e^{x/4}+\frac{x}{x^2+4}\right)dx$
2. $\int\frac{\operatorname{ctg}^{2/3}2x}{\sin^2 2x}dx$
3. $\int\frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}}dx$
4. $\int\frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x/2}}$
5. $\int\frac{2x+\operatorname{arctg}x/3}{9+x^2}dx$
6. $\int x\sin(1-3x)dx$
7. $\int\sqrt[4]{x^3}\ln x\,dx$
8. $\int\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}dx$
9. $\int(x-1)e^{4x+1}dx$
10. $\int x^2 3^{-x}dx$
11. $\int\sin^4 2x\cos^3 2x\,dx$
12. $\int\cos^4\frac{x}{2}dx$
13. $\int\sin 2x\cdot\sin 5x\,dx$
14. $\int\operatorname{ctg}^3 3x\,dx$
15. $\int\frac{dx}{2+\cos x}$
16. $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+15/4}}$
17. $\int\frac{x-5}{11-x^2-10x}dx$
18. $\int\frac{x-3}{x^2-4x+7}dx$
19. $\int\frac{2x+1}{\sqrt{3-6x^2+12x}}dx$
20. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-8x+7}}$
21. $\int\frac{dx}{9x^3-6x^2+x}$
22. $\int\frac{x^2+2x-1}{x(x^2-4)}dx$
23. $\int\frac{x-7}{(x+1)(x^2+2x+5)}dx$
24. $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)}$
25. $\int\frac{x\,dx}{x^3-8}$
26. $\int\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[4]{x^3}}dx$
27. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$
28. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x-1}}$
29. $\int\frac{dx}{5+\sqrt[3]{(x+1)^2}}$
30. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$