Е. И. Стенина

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Многофакторный эксперимент

Екатеринбург
2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Уральский государственный лесотехнический университет»
(УГЛТУ)

Кафедра автоматизации и инновационных технологий

Е. И. Стенина

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Метод группирования данных

Методические указания по выполнению практических,
лабораторных и исследовательских работ обучающимися
по направлению 35.03.02 «Технология лесозаготовительных
и деревоперерабатывающих производств»
очной и заочной форм обучения

Екатеринбург
2020

Печатается по рекомендации методической комиссии ИЛБ ФГБОУ ВО «Уральский государственный лесотехнический университет».
Протокол № 2 от 03 октября 2019 г.

Рецензент – профессор кафедры АИТ, д-р техн. наук Гороховский А. Г.

Редактор Е. Л. Михайлова
Оператор компьютерной верстки Т. В. Упорова

Подписано в печать 18.03.20		Поз. 16
Плоская печать	Формат 60×84/16	Тираж 10 экз.
Заказ №	Печ. л. 1,86	Цена руб. коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Сектор оперативной полиграфии УГЛТУ

ВВЕДЕНИЕ

Начало XX в. совпало с возникновением явления, которое сейчас называется научно-технической революцией (НТР).

Принято воспринимать НТР как совокупность хронологии и относительной важности различных достижений: полеты в космос, достижения в области атомной энергетики, автоматизация производства и управления, прорыв в области средств коммуникаций. Однако великие открытия были всегда, в любую эпоху развития науки. И каждый раз не менее значимые для своего времени. Типичным именно для эпохи НТР является превращение науки непосредственно в производительную силу общества.

На современном этапе развития каждое государство в структуру своей стратегической доктрины развития общества включает различные аспекты научно-технического прогресса (НТП).

В настоящее время не только процессы открытий и доведение их результатов до приемлемой практически реализуемой формы, но и процесс передачи и освоения результатов НТП требуют участия науки. И многие другие проблемы жизни общества, которые ранее решались на базе интуиции или здравого смысла, на опыте поколений, сейчас требуют активного и целенаправленного вмешательства, участия науки. Ни один серьезный вопрос в современных условиях нельзя эффективно решить, не опираясь на науку [1].

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Методические указания предназначены для приобретения студентами практических навыков в планировании и проведении многофакторных экспериментов с использованием математической теории планирования эксперимента, а также статистической обработки и анализа полученных данных.

2. ПОНЯТИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

В соответствии с тенденциями развития современной науки в методологии принят системный и вероятностно-статистический подход к исследованию процессов. Обобщенный процесс рассматривается как динамическая система, а совокупность возмущающих воздействий – как многомерные случайные процессы. Важной задачей исследований является формализация их результатов с целью сокращения сроков исследования и создания математического описания изучаемого процесса путем построения математической модели объекта.

Математическая модель – это совокупность математических зависимостей, описывающих функционирование системы [2].

Математическая модель строится по результатам теоретических и экспериментальных исследований. Процессы, связанные с обработкой древесины, крайне сложны, чтобы можно было получить их теоретическое описание, поэтому основным средством получения информации является специально спланированный эксперимент.

Эксперимент – это совокупность опытов, позволяющая установить влияние воздействующих факторов x_i на выходные параметры объекта исследования y_i (рис. 1).

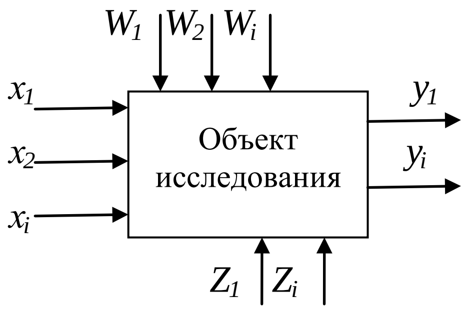

Рис. 1. Схема эксперимента

Фактор – это измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение (температура, давление, количество циклов и т. п.).

Постоянными называются факторы, не меняющие своего значения в пределах всего эксперимента (W_i, Z_i).

Переменным (варьируемым) называется фактор x_i, значение которого меняется от опыта к опыту. Каждое значение, принимаемое фактором в опыте, называется уровнем переменного фактора. Диапазон изменения (варьирования) переменных факторов ограничен верхним и нижним уровнями.

Выходной параметр – результат эксперимента y_i, который является случайной величиной, так как всегда в большей или меньшей степени содержит ошибки, обусловленные погрешностью приборов, измерений, расчетов и т. п.

Опыт – часть эксперимента, выполненная при определенных значениях одного или нескольких факторов. С целью снижения вероятности ошибки при анализе результатов эксперимента необходимо дублирование каждого опыта.

Любое экспериментальное исследование условно можно разделить на три этапа: подготовка эксперимента, планирование и постановка опытов, обработка результатов измерений и их анализ.

Многофакторный эксперимент состоит в том, что при переходе от опыта к опыту изменяют уровни не одного, а всех или почти всех факторов одновременно по определенному плану.

Достоинством многофакторных экспериментов является их более высокая эффективность. При одинаковом количестве поставленных опытов они обеспечивают более достоверное математическое описание объекта или лучшее приближение к точке оптимума.

Под математической моделью исследуемого объекта понимается функция выходной величины вида

$$\eta = f(x_1, x_2, \dots x_i). \tag{1}$$

Выбрать математическую модель – это значит выбрать вид этой функции, записать ее уравнение и отыскать численные значения его коэффициентов на основании экспериментальных данных.

Зависимость выходной величины (отклика) y от варьируемых факторов $x_1, x_2, \dots x_i$, полученная с помощью регрессионного анализа, называется регрессионной.

Учитывая, что вокруг любой точки x_i на любом графике зависимости $y = f(x_i)$ всегда существует такая область, которая описывается линейным уравнением, на первой стадии экспериментов при недостатке данных целесообразно остановить свой выбор на линейной модели (1-го порядка).

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_ix_i. \tag{2}$$

Для получения линейного уравнения регрессии применяются ортогональные планы проведения эксперимента (полный факторный, дробный факторный).

Полный факторный план (ПФП) – это один из методов планирования многофакторных экспериментов, когда каждый из переменных факторов изменяется только на двух уровнях (верхнем и нижнем). Таким образом, диапазон варьирования каждого входного фактора будет следующим:

$$x_{i\,\min} \le x_i \le x_{i\,\max}, \tag{3}$$

где $x_{i\,\min}$ – нижний уровень варьирования i-го переменного фактора, который в нормированном виде обозначается как (–), или (–1);

$x_{i\,\max}$ – верхний уровень варьирования i-го переменного фактора, который в нормированном виде обозначается как (+), или (+1).

В процессе проведения эксперимента согласно ПФП реализуются все возможные сочетания уровней варьирования переменных факторов. Следовательно, число опытов, необходимых для ПФП, составит

$$N = 2^k, \tag{4}$$

где k – число переменных факторов.

Чередование уровней варьирования переменных факторов в ПФП для x_1 производится 1 через 1, для x_2 – 2 через 2 и так далее по степеням двойки.

Если в результате проверки адекватности линейного уравнения регрессии экспериментальным данным получен отрицательный результат, следует применять модели 2-го порядка [2].

3. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

3.1. Установить факторы, влияющие на исследуемый объект.

3.2. Выявить и обосновать постоянные и переменные факторы исследуемого процесса.

3.3. Обосновать уровни варьирования переменных факторов.

3.4. Выбрать выходной(ые) параметр(ы) процесса.

3.5. Построить методическую сетку проведения эксперимента (табл. 1).

3.6. Выбрать план эксперимента и провести кодирование факторов (табл. 2, 3).

3.7. Провести эксперимент и свести первичные результаты опытов в табл. 4.

3.8. Статистически обработать полученные экспериментальные данные.

3.9. Вывести уравнение регрессии и проверить его адекватность.

3.10. Проанализировать результаты эксперимента:

– выявить степень влияния выбранных переменных факторов на выходную(ые) величину(ы);

– получить уравнение регрессии в натуральном обозначении факторов (виде);

– построить графики зависимостей выходного(ых) фактора(ов) от переменных величин.

Таблица 1

Пример методической сетки эксперимента

Факторы	Значения
Постоянные факторы	
Количество образцов, шт	24
Порода древесины	Сосна
Влажность древесины, %	8…12
Температура окружающей среды, °С	20 ± 2
Способ пропитки	ВАД
Величина вакуума, МПа	0,08
Время создания вакуума, с	10
Переменные факторы	
Длительность выдержки под вакуумом, мин	5, 15
Количество циклов вакуумирования, шт.	1, 3

Таблица 2

Матрица полного факторного эксперимента для двух переменных

№ опыта	X_1	X_2
1	+ / 15*	+ / 3
2	– / 5	+ / 3
3	+ / 15	– / 1
4	– / 5	– / 1

* В числителе дано нормированное, а в знаменателе – натуральное значение переменного фактора.

Таблица 3

Кодирование переменных факторов

Уровни факторов	Код фактора	Формализованный вид	Натуральные значения	
			Длительность вакуумирования, X_1	Количество циклов, X_2
Верхний	+	$X_{вi}$	15	3
Нижний	–	$X_{нi}$	5	1
Основной	0*	$X_i^0 = \frac{X_{вi} + X_{нi}}{2}$	10	2
Интервал	Δ**	$\Delta = X_{вi} - X_i^0$	5	1

* Натуральное значение основного уровня определяется как среднее арифметическое между значениями верхнего и нижнего уровней переменного фактора.
** Интервал варьирования переменного фактора находится как разница между верхним и основным уровнями.

Таблица 4

Пример оформления первичных результатов эксперимента

Размеры образцов, см			Масса образцов, г		Поглощение, кг/м^3
a	*b*	*c*	до пропитки, m_1	после пропитки, m_2	
1-й опыт					
2,02	2,03	2,08	4,18	4,82	75,04
2,02	2,04	2,07	4,76	5,09	38,69
2,05	2,05	2,08	4,54	4,91	42,33
2,04	2,04	2,09	4,67	5,23	64,38
2,05	2,06	2,08	4,62	4,94	36,43
2,05	2,07	2,09	4,97	5,37	45,10

Окончание табл. 4

Размеры образцов, см			Масса образцов, г		Поглощение, кг/м^3
a	*b*	*c*	до пропитки, m_1	после пропитки, m_2	
2-й опыт					
2,07	2,07	2,07	4,47	4,74	30,44
2,05	2,04	2,07	4,20	4,43	26,57
2,05	2,08	2,09	5,02	5,23	23,56
2,06	2,05	2,06	4,57	4,86	33,34
2,07	2,05	2,09	4,45	4,76	34,95
1,89	2,1	2,11	4,72	5,92	143,29
3-й опыт					
2,04	2,05	2,08	4,63	4,93	34,49
2,05	2,04	2,07	4,63	4,92	33,50
2,01	2,06	2,08	4,82	5,23	47,61
1,97	1,98	2,09	4,00	4,48	58,88
2,05	2,06	2,09	4,62	4,92	33,99
2,07	2,06	2,1	4,92	5,31	43,55
4-й опыт					
2,11	2,07	2,1	4,29	4,48	20,71
2,06	2,07	2,09	4,28	4,46	20,20
2,06	2,05	2,08	4,67	4,98	35,29
2,06	2,03	2,05	4,77	5,07	34,99
1,87	2,11	2,12	4,40	5,32	109,98
2,03	2,05	2,06	4,15	4,34	22,16

4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

В основе обработки результатов экспериментов с количественными факторами лежит регрессионный анализ, который включает метод отыскания параметров математической модели и статистическую обработку экспериментальных данных.

Математическая статистика – это наука о математических методах обработки, систематизации и использовании результатов наблюдений для научных и практических выводов.

Множество значений результатов экспериментов (случайных величин), полученных в продублированных опытах, представляет собой статистическую совокупность.

Статистическая совокупность, содержащая в себе всевозможные значения случайной величины, называется генеральной статистической совокупностью.

Выборочной статистической совокупностью (или выборкой) называется совокупность, в которой содержится только некоторая часть элементов генеральной совокупности. По результатам экспериментов практически всегда сталкиваются с выборочной, а не с генеральной совокупностью.

Число значений выходной величины, содержащихся в выборке, называют объёмом выборки.

При обработке результатов эксперимента (выборки) необходимо:

– исключить грубые ошибки из ряда полученных данных (п. 4.1);

– вычислить необходимые статистические характеристики выборок (п. 4.2);

– проверить нормальность распределения случайных величин в выборках (п. 4.3);

– проверить значимость разницы между статистическими характеристиками различных опытов (п. 4.4);

– выбрать математическую модель и рассчитать коэффициенты регрессии (п. 4.5);

– проверить значимость коэффициентов регрессии (п. 4.6);

– проверить адекватность полученного уравнения регрессии (п. 4.7);

– проанализировать результаты экспериментов.

Расчеты должны оформляться в соответствии с требованиями ЕСКД.

4.1. Отбрасывание грубых наблюдений

Грубые наблюдения (промахи) возникают в результате грубых методических ошибок при постановке и проведении опыта, поэтому их необходимо из выборки исключить. Промах по абсолютной величине существенно отличается от остальных результатов опыта, т. е. принимает максимальное или минимальное значение в числовом ряду выборки.

Для проверки предположения, является ли сомнительный результат y_i промахом или нет, его временно исключают из выборки и по оставшимся значениям выходной величины (наблюдениям) определяют среднее арифметическое $\bar{y}$ и оценку выборочной дисперсии S^2.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \tag{5}$$

где y_i – оставшиеся наблюдения выборки;

n – объем изменившейся выборки.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y^2}}{n-1}. \tag{6}$$

В случае, когда в выборке содержатся величины с большим абсолютным значением, лучше для расчета дисперсии использовать формулу.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n-1}. \qquad (7)$$

Затем рассчитывают критерий Стьюдента $t_{расч}$:

$$t_{расч} = \frac{|y_i - \overline{y}|}{S}, \qquad (8)$$

где y_i – проверяемый результат;

S – выборочное стандартное отклонение.

$$S = \sqrt{S^2}, \qquad (9)$$

где S^2 – выборочная дисперсия.

Из табл. 1 распределения Стьюдента (приложение) по уровню значимости q (в деревообработке принимается равным 0,05) и числу степеней свободы $f = n - 1$ находят $t_{табл}$. Если $t_{расч} > t_{табл}$, то сомнительный результат является промахом и должен быть исключен из выборки. После этого исследуют следующий за ним сомнительный результат и т. д.

Пример

По результатам дублированных опытов первого опыта (см. табл. 4) были получены следующие величины поглощения защитного средства сосновыми образцами, кг/м^3: 75,04; 38,69; 42,33; 64,38; 36,43; 45,10.

В полученной выборке подозрение вызывает y_i = 75,04 кг/м^3. Этот результат временно исключаем из выборки и для оставшихся пяти значений находим

$$\overline{y} = \frac{38{,}69 + 42{,}33 + 64{,}38 + 36{,}43 + 45{,}10}{5} = 45{,}39 \text{ кг/м}^3,$$

$$S^2 = \frac{38{,}69^2 + 42{,}33^2 + 64{,}38^2 + 36{,}43^2 + 45{,}10^2 - 5 \times 45{,}39^2}{4} = 123{,}43 \text{ кг/м}^3.$$

Или

$$S^2 = \frac{(38{,}69-50{,}33)^2+(42{,}33-50{,}33)^2+(64{,}38-50{,}33)^2+(36{,}43-50{,}33)^2+(45{,}10-50{,}33)^2}{4} =$$

$$= 123{,}43 \text{ кг/м}^3,$$

$$S = \sqrt{123{,}43} = 11{,}11 \text{ кг/м}^3,$$

$$t_{расч} = \frac{|75{,}04 - 45{,}39|}{11{,}11} = 2{,}67,$$

$$t_{табл} = 2{,}78 \quad \text{для} \quad f = 5 - 1 = 4 \quad \text{и} \quad q = 0{,}05.$$

$t_{расч} < t_{табл}$, следовательно, проверяемый результат не является промахом и должен быть возвращен в выборку. Результаты расчетов заносим в табл. 5.

Таблица 5

Результаты проверки выборок на промахи

Поглощение, кг/м^3	Среднее выборочное $\bar{y}$ $\bar{y}$, кг/м^3	Выборочная дисперсия S^2, кг/м^3	Стандартное выборочное отклонение S, кг/м^3	Значение критерия Стьюдента	
				расчетное $t_{расч}$	табличное $t_{табл}$
1-й опыт					
75,04	45,39	11,11	2,67	2,78	
38,69					
42,33					
64,38					3,18
36,43	53,11	15,77	1,06	2,78	3,18
45,10					
2-й опыт					
30,44					30,44
26,57					26,57
23,56	31,32	3,73	2,08	3,18	23,56
33,34					33,34
34,95	28,48	4,27	1,52	3,18	34,95
143,29	29,77	4,73	23,99	2,78	***143,29***
3-й опыт					
34,49					34,49
33,50	39,91	6,75	0,95	3,18	33,50
47,61	36,38	4,82	2,33	3,18	47,61
58,88	38,63	6,49	3,12	2,78	***58,88***
43,55					
4-й опыт					
20,71					20,71
20,20	28,29	7,94	1,02	3,18	20,20
35,29	24,52	7,02	1,53	3,18	35,29
34,99					34,99
109,98	26,67	7,78	10,71	2,78	***109,98***
22,16					22,16
20,71					20,71

Примечание. Курсивом выделены промахи.

4.2. Расчет необходимых статистических характеристики выборок

4.2.1. Расчет среднего арифметического

Самым известным вошедшим в практику вариационно-статистическим элементом, характеризующим нормальный вариационный ряд, является среднее выборочное, или просто «среднее», которое для выборки, «очищенной» от грубых наблюдений, рассчитывается по формуле (1).

Найденное $\bar{y}$ называют также оценкой математического ожидания, или выборочным средним, в отличие от генерального среднего (или математического ожидания), которое можно найти из генеральной совокупности.

Пример

Так как исследуемая выборка первого опыта не содержала промахов, то расчет производим для всех 5 случайных величин (см. табл. 3).

$$\bar{y} = \frac{75{,}04 + 38{,}69 + 42{,}33 + 64{,}38 + 36{,}43 + 45{,}10}{6} = 50{,}33 \text{ кг/м}^3.$$

4.2.2. Расчет выборочного стандартного отклонения

Количественной оценкой величины случайных ошибок исследования является выборочная дисперсия S^2, а также выборочные стандартные отклонения (выборочный стандарт) S.

Выборочная дисперсия рассчитывается для «чистой» от промахов выборки по формуле (2) или (3), а выборочный стандарт – по формуле (4).

Пример

$$S^2 = \frac{75{,}04^2 + 38{,}69^2 + 42{,}33^2 + 64{,}38^2 + 36{,}43^2 + 45{,}10^2 - 6 \times 50{,}33^2}{5} = 245{,}61 \text{ кг/м}^3,$$

$$S = \sqrt{245{,}61} = 15{,}67 \text{ кг/м}^3.$$

4.3. Проверка нормальности распределения

В случае, когда изменчивость случайной величины вызвана её зависимостью от большого числа сравнительно незначительных и взаимно независимых факторов, делается вывод о том, что выборка этих величин подчиняется закону нормального распределения.

Приближённая проверка нормальности распределения проводится при помощи показателей асимметрии A и эксцесса E, рассчитываемых по формулам

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^3}{n S^3}, \qquad (10)$$

$$E = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^4}{nS^4} - 3. \qquad (11)$$

Далее вычисляют среднее квадратическое отклонение для асимметрии σ_A и эксцесса σ_E по формулам

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}, \qquad (12)$$

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}. \qquad (13)$$

Далее проверяют выполнение одновременно двух условий:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{A}{\sigma_A}\right| \le 2 \\ \left|\dfrac{E}{\sigma_E}\right| \le 2 \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Если хотя бы один из показателей A или E по абсолютной величине в 2 или более раз превосходит соответствующее квадратическое отклонение, т.е. не выполняется хотя бы одно из приведенных условий, то следует усомниться в нормальности распределения случайной величины и тогда необходимо осуществить более точную процедуру проверки данной гипотезы с помощью критерия Пирсона. Если подтвердится отрицательный результат, то проведение дальнейших статистических процедур невозможно, а значит, невозможно получить достаточно достоверные выводы на основании данных результатов эксперимента.

Пример

Проводим проверку нормальности распределения выходной величины (поглощения, кг/м^3) в первой выборке 1-го опыта (табл. 6).

$$A = \frac{(75{,}04-50{,}33)^3 + (38{,}69-50{,}33)^3 + (42{,}33-50{,}33)^3 + (64{,}38-50{,}33)^3 + (36{,}43-50{,}33)^3 + (45{,}10-50{,}33)^3}{6\cdot 15{,}67^3},$$

$$A = 0{,}56,$$

$$E = \frac{(75{,}04-50{,}33)^4 + (38{,}69-50{,}33)^4 + (42{,}33-50{,}33)^4 + (64{,}38-50{,}33)^4 + (36{,}43-50{,}33)^4 + (45{,}10-50{,}33)^4}{6\cdot 15{,}67^4} - 3,$$

$$E = 1{,}305,$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(6-1)}{(6+1)(6+3)}} = 0{,}69 ,$$

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24 \cdot 6(6-2)(6-3)}{(6-1)^2(6+3)(6+5)}} = 0{,}836 ,$$

$$\frac{A}{\sigma_A} = \frac{0{,}56}{0{,}69} = 0{,}81 < 2,$$

$$\frac{E}{\sigma_E} = \frac{1{,}305}{0{,}836} = 1{,}561 < 2.$$

Таблица 6

Основные статистические показатели чистых выборок

Поглощение, кг/м^3	Среднее арифметическое выборки $\overline{y}$, кг/м^3	Выборочная дисперсия S^2, кг/м^3	Стандартное выборочное отклонение S	Объем выборки n
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1-й опыт				
75,04	50,33	245,61	15,67	6
38,69				
42,33				
64,38				
36,43				
45,10				
2-й опыт				
30,44	29,77	22,39	4,73	5
26,57				
23,56				
33,34				
34,95				
3-й опыт				
34,49	38,63	42,18	6,50	5
33,50				
47,61				
33,99				
43,55				
4-й опыт				
20,71	26,67	60,49	7,78	5
20,20				
35,29				
34,99				
22,16				

Следовательно, распределение случайных величин в выборке подчиняется нормальному закону.

4.4. Проверка значимости разницы между статистическими характеристиками различных опытов

4.4.1. Проверка гипотезы об однородности дисперсий

Выборочные дисперсии S_i^2, являющиеся характеристиками выборок, называются однородными, если они являются оценками одной и той же генеральной дисперсии, а различие между ними объясняется влиянием случайных ошибок. В противном случае различие между выборочными дисперсиями значимо.

а) **если $n_1 = n_2 = n_i$,** то рассчитывают G-критерий Кохрена:

$$G_{расч} = \frac{S^2_{\max}}{\sum\limits_{i=1}^{m} S_j^2}, \qquad (15)$$

где m – количество выборочных дисперсий, однородность которых проверяется;

$S^2_{\max}$ – наибольшая по абсолютной величине дисперсия;

S_j^2 – дисперсия j-го опыта.

Далее по уровню значимости q=0,05, числу степеней свободы выборок $f = n - 1$ и по количеству выборок m из табл. 2 приложения находят величину $G_{табл}$. Если $G_{расч} < G_{табл}$, то можно принять гипотезу об однородности дисперсий. В противном случае она отвергается.

б) **если $n_1 \neq n_i$ и сравнивается более двух выборок**, то рассчитывается критерий Бартлетта.

Предварительно вычисляют величину дисперсии воспроизводимости $S^2\{y\}$ по формуле

$$S^2\{y\} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} S_j^2 \quad f_j}{\sum\limits_{j=1}^{N} f_j}, \qquad (16)$$

где N – число опытов, проводимых в рамках эксперимента;

f_j – числа степеней свободы соответствующих дисперсий, $f_j = n_j - 1$.

Далее рассчитывают величину B:

$$B = \frac{V}{C}, \qquad (17)$$

$$V = 2{,}303\left[\left(\sum_{j=1}^{N} f_j\right)\lg S^2\{y\} - \sum_{j=1}^{N} f_j \lg S_j^2\right], \qquad (18)$$

$$C = 1 + \frac{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{f_j} - \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} f_j}}{3(N-1)}. \tag{19}$$

Затем из таблиц распределения Пирсона (табл. 3 приложения) при уровне значимости $q = 0{,}05$ и числе степеней свободы $k = N - 1$ отыскивают значение $\chi^2_{табл}$. Если $B \le \chi^2_{табл}$, то дисперсии однородны.

Пример

Объемы сравниваемых 4 выборок не равны (см. табл. 6), поэтому для проверки используем критерий Пирсона.

$$S^2\{y\} = \frac{5 \cdot 245{,}61 + 4 \cdot 22{,}39 + 4 \cdot 42{,}18 + 4 \cdot 60{,}49}{17} = 101{,}66,$$

$$V = 2{,}303 \cdot (17 \cdot \lg 101{,}66 - (5 \cdot \lg 245{,}61 + 4 \cdot \lg 22{,}39 + 4 \cdot \lg 42{,}18 + 4 \cdot \lg 60{,}49)) = 7{,}24,$$

$$C = 1 + \frac{1}{3 \cdot (4-1)}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{17}\right) = 1{,}1,$$

$$B = \frac{7{,}24}{1{,}1} = 6{,}59.$$

Из табл. 4 приложения для уровня значимости $q = 0{,}05$ и числа степеней свободы выборок $k = 4 - 1$ критерий Пирсона $\chi^2_{табл} = 7{,}81$. Так как $B < \chi^2_{табл}$, то можно принять гипотезу об однородности дисперсий, т. е. различие между ними объясняется влиянием лишь случайных ошибок.

4.4.2. Проверка однородности средних выборочных

Данная процедура позволяет установить, вызвано ли расхождение между средними арифметическими выборок случайными ошибками измерения или оно связано с влиянием каких-либо неслучайных факторов. Проверка производится с применением t-критерия Стьюдента.

а) **если дисперсии однородны и $n_1 \neq n_i$**, то расчетный критерий Стьюдента определяется по формуле

$$t_{расч} = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\left[\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right]}}. \tag{20}$$

Табличное значение $t_{табл}$ находят из табл. 1 распределения Стьюдента для уровня значимости q=0,05 и числа степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2$ (см. приложение). Если $t_{расч} > t_{табл}$, то расхождение между средними значимо. В противном случае принимают гипотезу об однородности средних арифметических;

б) **если дисперсии однородны и $n_1 = n_i$**, то $t_{расч}$ определяют по формуле

$$t_{расч} = \frac{\left|\overline{y_1} - \overline{y_2}\right|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2 + S_2^2}{n}}}; \tag{21}$$

в) **если дисперсии неоднородны и $n_1 \neq n_i$**, то $t_{расч}$ определяют по формуле

$$t_{расч} = \frac{\left|\overline{y_1} - \overline{y_2}\right|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}. \tag{22}$$

Число степеней свободы в этом случае определяют по формуле

$$f = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2. \tag{23}$$

Пример

Учитывая, что предыдущая проверка (п. 4.5.1) подтвердила гипотезу об однородности дисперсий сравниваемых выборок (см. табл. 6), рассчитываем критерий Стьюдента по формуле, используя в формуле наибольшее и наименьшее из 4 средних выборочных и соответствующие им дисперсии и объемы:

$$t_{расч} = \frac{|\,50{,}33 - 26{,}67\,|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5}\right)\left[\dfrac{(6-1)\ \ 245{,}61^{2} + (5-1)\ \ 60{,}49^{2}}{6+5-2}\right]}} = 0{,}21.$$

Для уровня значимости q = 0,05 и числа степеней свободы $f = 6 + 5 - 2$ (см. табл. 1 приложения) $t_{табл}$ = 2,26. Так как $t_{расч} < t_{табл}$, то принимаем гипотезу об однородности средних, т.е. расхождение между ними незначимо и вызвано лишь наличием случайных ошибок измерения. Следовательно, экспериментальные данные можно использовать для получения уравнения регрессии.

4.5. Расчет коэффициентов регрессии и проверка их значимости

Частным случаем математической модели является уравнение регрессии, которое позволяет получить информацию о самом объекте исследования и способах управления им. С его помощью можно легко оценить характер влияния каждого из варьируемых факторов на выходную величину, также оно может послужить основой для оптимизации исследуемого объекта.

Линейное уравнение регрессии имеет вид

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij} x_i x_j, \tag{24}$$

где k – число переменных факторов;
b_0, b_i, b_{ij} – коэффициенты регрессии.

Коэффициенты регрессии рассчитываются методом наименьших квадратов по формуле

$$b_i = \frac{\sum_{i,j=1}^{k,N} x_{ij} \bar{y}_j}{N}, \tag{25}$$

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N} \bar{y}_j}{N}, \tag{26}$$

где x_{ij} – уровень i-го переменного фактора в нормированном выражении в j-м опыте;
$\bar{y}_j$ – среднее выборочное значение выходной величины в j-м опыте;
N – число опытов, поставленных согласно плану эксперимента.

Коэффициенты при независимых переменных факторах указывают на степень и характер влияния соответствующего фактора на выходную величину и исследуемый объект в целом. Чем больше абсолютная величина коэффициента, тем больше влияние он оказывает. Если коэффициент имеет знак (+), то он оказывает прямое влияние на выходную величину, т.е. с увеличением значения соответствующего переменного фактора x_i отклик y также возрастает. Если же коэффициент получился отрицательный, то влияние обратное, т. е. с увеличением значения соответствующего переменного фактора x_i отклик y убывает.

После получения уравнения регрессии еще нельзя сказать, насколько достоверно оно описывает результаты эксперимента. Для этого проводят проверку адекватности уравнения. Учитывая, что данную процедуру можно проводить только для ненасыщенных планов, у которых количество опытов должно превышать число коэффициентов уравнения регрессии, заранее задаются меньшим числом коэффициентов либо из уравнения исключают незначимые коэффициенты вместе с соответствующими переменными.

Процедура проверки значимости коэффициентов регрессии начинается с определения дисперсии воспроизводимости по формуле (16).

Для оценки коэффициентов регрессии используют дисперсию коэффициентов:

$$S^2(b_i) = \frac{S^2\{y\}}{\sum_{j=1}^{N} n_j}, \tag{27}$$

где n_j – объм выборки j-го опыта;

$S^2\{y\}$ – дисперсия воспроизводимости (формула (16)).

$$S(b_i) = \sqrt{S^2(b_i)}. \tag{28}$$

После этого для каждого коэффициента регрессии рассчитывается критерий Стьюдента:

$$t_{расч} = \frac{|b_i|}{S(b_i)}. \tag{29}$$

Для уровня значимости q = 0,05 и числа степеней свободы $f = \sum_{j=1}^{N} f_j$ из табл. 1 приложения определяют $t_{табл}$.

Если $t_{расч} \geq t_{табл}$, то коэффициент регрессии значим. Чем больше значение $t_{расч}$, тем большее влияние оказывает соответствующий этому коэффициенту переменный фактор на выходную величину. В противном случае коэффициент регрессии незначим и соответствующий член в уравнении регрессии может быть отброшен.

После отбрасывания незначимых коэффициентов регрессии желательно снова воспользоваться методом наименьших квадратов для уточнения оставшихся значимых коэффициентов.

Пример

Линейная математическая модель для двух переменных факторов будет иметь вид

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2.$$

На основании статистической обработки результатов эксперимента матрицу эксперимента (см. табл. 2) можно преобразовать следующим образом (табл. 7):

Таблица 7

№ опыта (N_j)	x_1	x_2	$\overline{y}_j$
1	+	+	50,33
2	–	+	29,77
3	+	–	38,63
4	–	–	26,67

Следовательно,

$$b_0 = (50{,}33+29{,}77+38{,}63+26{,}67)/4 = 36{,}35,$$

$$b_1 = [(+1)\cdot 50{,}33 + (–1)\cdot 29{,}77 + (+1)\cdot 38{,}63 + (–1)\cdot 26{,}67)]/4 = 8{,}13,$$

$$b_2 = [(+1)\cdot 50{,}33 + (+1)\cdot 29{,}77 + (–1)\cdot 38{,}63 + (–1)\cdot 26{,}67)]/4 = 3{,}7.$$

Уравнение регрессии будет выглядеть следующим образом:

$$y = 36{,}35 + 8{,}13x_1 + 3{,}7x_2.$$

Для проверки значимости коэффициентов регрессии рассчитаем дисперсию воспроизводимости:

$$S^2\{y\} = \frac{245{,}61\cdot 5 + 22{,}39\cdot 4 + 42{,}18\cdot 4 + 60{,}49\cdot 4}{17} = 101{,}66,$$

$$S^2(b) = \frac{101{,}66}{6+5+5+5} = 4{,}84,$$

$$S(b) = \sqrt{4{,}84} = 2{,}2.$$

Проводить проверку значимости коэффициента b_0 нецелесообразно, так как он является средним всех значений выходной величины во всех опытах.

$$t_{расч\ 1} = 8{,}13/2{,}2 = 3{,}965,$$

$$t_{расч\ 2} = 3{,}7/2{,}2 = 1{,}68.$$

Для уровня значимости $q = 0{,}05$ и числа степеней свободы $f = 5+4+$ $+4+4$ методом интерполяции находим $t_{табл} = 2{,}11$. На основании сравнения делаем вывод о том, что коэффициент b_1 является значимым, а b_2 незначим, но отбросить его нельзя, так как фактор x_2 является одним из основных факторов режима пропитки.

4.7. Проверка адекватности уравнения регрессии

Процедура проверки адекватности результатам эксперимента полученного уравнения регрессии начинается с определения дисперсии адекватности:

$$S^2_{ад} = \frac{\sum_{j=1}^{N} n_j \sum_{j=1}^{N} (\bar{y}_j - \hat{y}_j)^2}{N - p}, \quad (30)$$

где $\hat{y}_j$ – значение выходной величины для j-го опыта, рассчитанное по уравнению регрессии;

p – число коэффициентов в уравнении регрессии.

$$\hat{y}_i = b_0 + \sum_{i,j=1}^{k,N} b_i x_{ij}, \quad (31)$$

где b_0 – расчетное значение коэффициента b_0;

b_i – расчетное значение коэффициента при i-м переменном факторе;

x_{ij} – нормированное значение i-го переменного фактора в j-м опыте.

Уравнение регрессии считается адекватным, если дисперсии адекватности $S^2_{ад}$ и воспроизводимости $S^2\{y\}$ однородны. Для установления данного обстоятельства рассчитывают критерий Фишера (табл. 4 приложения):

$$F_{расч} = \frac{S^2_{ад}}{S^2\{y\}}. \quad (32)$$

Далее из таблиц распределения Фишера для уровня значимости $q = 0{,}05$ и степеней свободы $f_y = \sum_{j=1}^{N} f_j$ и $f_{ад} = N - p$ находят $F_{табл}$. Если $F_{расч} < F_{табл}$, то делается вывод, что проверяемая модель адекватна.

Дисперсия адекватности характеризует расхождения между результатами эксперимента $\bar{y}_j$ (формула (30)) и значениями выходной величины, рассчитанными по уравнению регрессии $\hat{y}_j$. Уравнение считается адекватным, если расхождение между этими значениями вызвано лишь экспериментальными ошибками, а не связано, например, с неудачным выбором математической модели.

Если проведенная проверка показала, что уравнение регрессии неадекватно, тогда нужно:

1) ввести в математическую модель эффекты взаимодействий;

2) перейти к квадратичной модели и ввести x_i^2, т. е. рассмотреть другие планы;

3) провести еще раз эксперимент, уменьшив интервалы варьирования переменных факторов.

Пример

Было получено уравнение регрессии вида (см. п. 4.6)

$$y = 36{,}35 + 8{,}13x_1 + 3{,}7x_2.$$

Определим расчетные значения выходной величины в опытах $\hat{y}_j$. Номинальные значения переменных факторов в опытах определяются по табл. 7.

$$\hat{y}_1 = 36{,}35 + 8{,}13\cdot(+1) + 3{,}7\cdot(+1) = 48{,}18,$$

$$\hat{y}_2 = 36{,}35 + 8{,}13\cdot(-1) + 3{,}7\cdot(+1) = 31{,}92,$$

$$\hat{y}_3 = 36{,}35 + 8{,}13\cdot(+1) + 3{,}7\cdot(-1) = 40{,}78,$$

$$\hat{y}_4 = 36{,}35 + 8{,}13\cdot(-1) + 3{,}7\cdot(-1) = 24{,}52.$$

Тогда дисперсия адекватности будет равна

$$S_{ад}^2 = \frac{21\left[6\ (50{,}33 - 48{,}18)^2 + 5\ (29{,}77 - 31{,}92)^2 + 5\ (38{,}63 - 40{,}78)^2 + 5\ (26{,}67 - 24{,}52)^2\right]}{4-3} =$$

$$= 387{,}86,$$

$$F_{расч} = \frac{387{,}86}{101{,}66} = 3{,}82.$$

При уровне значимости $q = 0{,}05$ и $f_{ад} = 1$, числе степеней свободы $f_y = 17$ методом интерполяции получили, что $F_{табл} = 4{,}464$.

Так как $F_{расч} < F_{табл}$, то можно сделать вывод о том, что уравнение регрессии вида $y = 36{,}35 + 8{,}13x_1 + 3{,}7x_2$ адекватно описывает исследуемый процесс.

4.8. Анализ результатов эксперимента

Пусть было получено адекватное уравнение регрессии

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{23}x_2x_3 + b_{13}x_1x_3.$$

1. b_0 дает среднее значение выходной величины.

2. Выделение незначимых факторов по t-критерию Стьюдента (фактор незначим, если он не оказывает существенного влияния на процесс).

3. Можно установить степень влияния каждого фактора, что определяется сравнением абсолютных величин коэффициентов уравнения регрессии (чем больше коэффициент, тем больше роль фактора при этом коэффициенте и тем больше он влияет на процесс).

4. Можно сказать, в каком направлении влияет каждый фактор на процесс (выходную величину). Знак (+) у коэффициента свидетельствует о том, что при увеличении значения данного фактора выходная величина растет и, наоборот, при уменьшении (–) убывает. Можно также определить роль парных взаимодействий: например $b_{12}\,x_1\,x_2$. Если b_{12} имеет знак (+), то выходная величина возрастает при одновременном возрастании или одновременном убывании факторов x_1 и x_2. Если b_{12} имеет знак (–), то выходная величина возрастает при увеличении одного и уменьшении другого фактора.

5. Можно получить величину $\hat{y}$ при разных значениях x_i в диапазонах варьирования факторов.

6. Можно получить уравнение регрессии в зависимости от натуральных значений факторов, для чего можно воспользоваться формулами перехода

$$x_i = \frac{X_i - X_i^0}{\Delta_i}, \tag{33}$$

где x_i – нормированное значение i-го переменного фактора;

X_i – натуральное значение i-го переменного фактора;

X_i^0 – основной уровень i-го переменного фактора;

Δ_i – интервал варьирования i-го переменного фактора.

7. Можно получить зависимость выходной величины в виде графиков как от каждого фактора, так и от их взаимодействия. Для этого уравнение регрессии удобно использовать в нормализованных обозначениях факторов и в нем принять все значения факторов, кроме одного, равным 0 ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$):

$$y = f\,(x_1) = b_0 + b_1\,x_1.$$

8. Если уравнение регрессии адекватно, его можно использовать для предсказания значений факторов внутри диапазона варьирования.

Пример

На основе полученного уравнения регрессии $y = 36{,}35 + 8{,}13x_1 + 3{,}7x_2$ можно сделать следующие выводы:

1) циклическое импульсное разрежение обеспечивает в среднем величину поглощения 36,35 кг/м^3 в пределах исследуемых диапазонов;

2) при осуществлении стадии вакуумирования в режиме пропитки длительность воздействия разрежения имеет более значимое прямое воздействие на величину поглощения y, которое будет возрастать при возрастании длительности вакуумирования x_1 от 5 до 15 мин ($t_{расч1}$ = 3,965 > > $t_{табл}$ = 2,11);

3) количество циклов вакуумирования оказывает менее значимое прямое воздействие. Величина поглощения y будет возрастать при увеличении циклов вакуумирования x_2 от 1 до 3 ($t_{расч2}$ = 1,68 < $t_{табл}$ = 2,11);

4) расчетные значения выходной величины при разных значениях факторов равны: $\hat{y}_1$ = 48,18, $\hat{y}_2$ = 31,92, $\hat{y}_3$ = 40,78, $\hat{y}_4$ = 24,52 кг/м^3.

Расхождение между экспериментальными и расчетными значениями составляет 4,3 %;

5) наибольшее поглощение антисептика обеспечивается тремя циклами вакуумирования продолжительностью 15 мин и составляет П = 50,33 кг/м^3.

6) можно получить уравнение регрессии в натуральном виде, воспользовавшись фомулами перехода и данными табл. 3.

$$x_1 = \frac{X_1 - 10}{5}, \qquad x_2 = \frac{X_2 - 2}{1}.$$

Тогда уравнение регрессии примет вид

$$y = 36{,}35 + 8{,}13\,\frac{X_1 - 10}{5} + 3{,}7\,\frac{X_2 - 2}{1}.$$

После проведения процедур упрощения и приведения подобных получим

$$y = 32{,}35 + 1{,}63X_1 + 3{,}7X_2.$$

На основе полученного уравнения регрессии в натуральном виде можно построить графики зависимостей поглощения y от продолжительности вакуумирования x_1 (рис. 2) и количества циклов вакуумирования x_2 (рис. 3). Наиболее простым изображением являются плоскостные двухмерные графики. Для их получения все переменные факторы, кроме одного, примем равными 0. Таким образом, имеем следующие зависимости:

$$y = 32{,}35 + 1{,}63X_1,$$

$$y = 32{,}35 + 3{,}7X_2.$$

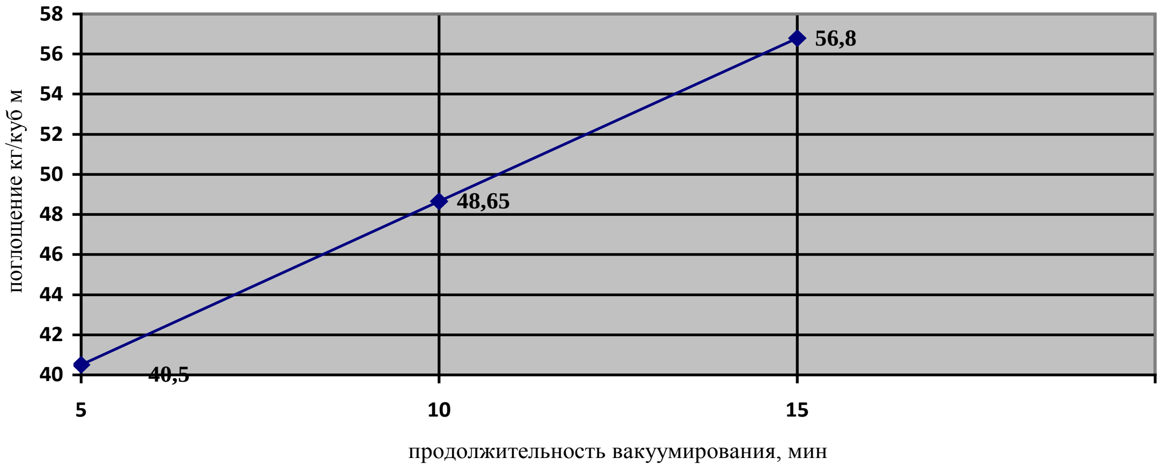

Рис. 2. График зависимости величины поглощения
от продолжительности вакуумирования

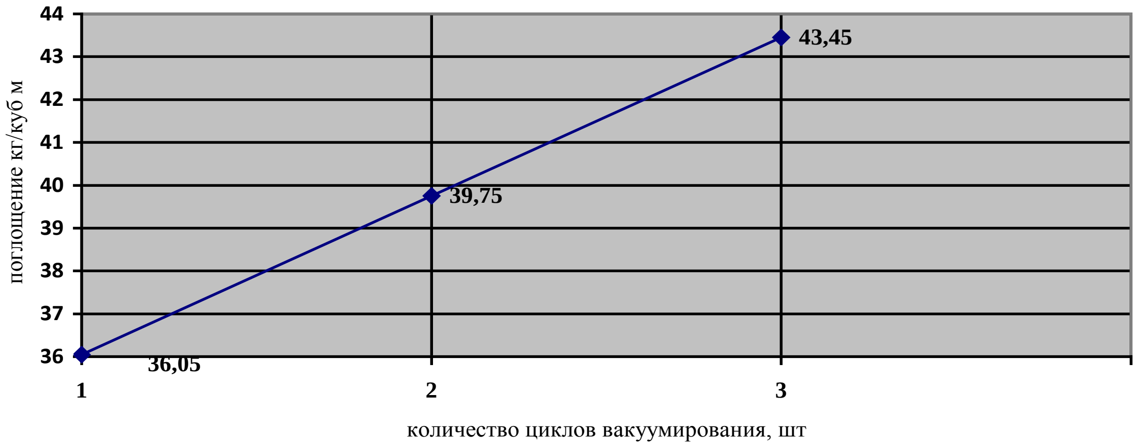

Рис. 3. График зависимости величины поглощения
от количества циклов вакуумирования

ЛИТЕРАТУРА

1. Лудченко, А. А. Основы научных исследований: учебное пособие / Я. А. Лудченко, Т. А. Примак; под ред. А. А. Лудченко. – 2-е изд., стер. – Киев : О-во «Знания», КОО, 2001. – 113 с.

2. Пижурин, А. А. Основы научных исследований в деревообработке : учебник для студентов вузов, обучающихся по дневной и заочный форме специальностей 250403 (260200) «Технология деревообработки» и 150405 (170400) «Машины и оборудование лесного комплекса» / А. А. Пижурин, А. А. Пижурин ; Моск. гос. ун-т леса. – М. : МГУЛ, 2005. – 305 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Значения *t*-критерия Стьюдента
(*q* – уровень значимости, *f* – число степеней свободы)

f	*q*	*q*
	0,05	0,01
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
15	2,13	2,95
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
60	2,00	2,66
80	1,99	2,64
100	1,98	2,63
120	1,98	2,62
200	1,97	2,60
500	1,96	2,59
∞	1,96	2,58

Таблица 2

Значения *G*-критерия Кохрена
(*f* – число степеней свободы выборки, *m* – количество выборок)

m	*f*									
	q = 0,05									
	1	2	3	4	5	10	16	36	144	∞
2	0,99	0,98	0,94	0,91	0,88	0,79	0,73	0,66	0,58	0,50
3	0,97	0,87	0,80	0,75	0,71	0,60	0,55	0,47	0,40	0,33
4	0,91	0,77	0,68	0,63	0,59	0,49	0,44	0,37	0,31	0,25
5	0,84	0,68	0,60	0,54	0,51	0,41	0,36	0,31	0,25	0,20
6	0,78	0,62	0,53	0,48	0,44	0,36	0,31	0,26	0,21	0,17
7	0,73	0,56	0,48	0,43	0,40	0,32	0,28	0,23	0,18	0,14
60	0,17	0,11	0,09	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02
120	0,10	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01
q = 0,01										
2	0,99	0,99	0,98	0,96	0,94	0,85	0,79	0,71	0,61	0,50
3	0,99	0,94	0,88	0,83	0,79	0,67	0,61	0,52	0,42	0,33
4	0,97	0,86	0,78	0,72	0,68	0,55	0,49	0,41	0,33	0,25
5	0,93	0,79	0,70	0,63	0,59	0,47	0,41	0,34	0,26	0,20
6	0,88	0,72	0,63	0,56	0,52	0,41	0,35	0,29	0,22	0,17
7	0,84	0,66	0,57	0,51	0,47	0,36	0,31	0,25	0,19	0,14
60	0,22	0,14	0,11	0,09	0,08	0,06	0,05	0,03	0,02	0,02
120	0,12	0,08	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01

Таблица 3

Значения критерия Пирсона χ^2
(k – число степеней свободы)

k	q	
	0,05	0,01
1	3,84	6,63
2	5,99	9,21
3	7,81	11,3
4	9,49	13,3
5	11,1	15,1
10	18,3	23,2
15	25,0	30,6
20	31,4	37,6
25	37,7	44,3
30	43,8	50,9
40	55,8	63,7
50	67,5	76,2

Таблица 4

Значения F-критерия Фишера
(f_1 – число степеней свободы большей дисперсии, f_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

f_2	f_1											
	q = 0,05											
	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,40	19,43	19,45	19,46	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,94	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,07
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,84
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,24	2,09	2,01	1,92	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51

Окончание табл. 4

f_2	f_1											
	q = 0,05											
	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,91	1,75	1,66	1,55	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,00
q = 0,01												
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5982	6056	6157	6209	6261	6366
2	98,50	99,0	99,17	99,25	99,30	99,33	99,37	99,40	99,43	99,45	99,47	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,42	27,91	27,49	27,23	26,87	26,69	26,50	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,55	14,20	14,02	13,84	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	10,05	9,72	9,55	9,38	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,87	7,56	7,40	7,23	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,62	6,31	6,16	5,99	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,81	5,52	5,36	5,20	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,26	4,96	4,81	4,65	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,85	4,56	4,41	4,25	3,91
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,37	3,23	3,09	2,94	2,42
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,98	2,70	2,55	2,39	2,01