

Электронный архив УГЛТУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет»

Кафедра автоматизации производственных процессов

Г.Г. Ордуянц  
С.П. Санников

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.  
ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ. МЕТОД ЛЬЕНАРА**

Методические указания  
для практических занятий и самостоятельной работы студентов  
специальности 220301, 220200, 220400, 220700  
по дисциплине «Теория автоматического управления»

Екатеринбург  
2012

Рассмотрено и рекомендовано методической комиссией  
Лесоинженерного факультета  
Протокол № 1 от 8 сентября 2011 г.

Рецензент: доцент канд. техн. наук В.Я. Тойбич

Редактор Р.В. Сайгина  
Оператор компьютерной верстки Т.В. Упова

---

Подписано в печать 23.10.12

Печать плоская

Заказ №

Формат 60x84 1/16

Печ. л. 0,93

Поз. 14

Тираж 10 экз.

Цена 5 р. 40 к.

---

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ  
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

### Задача 1

Построить фазовый портрет нелинейной системы автоматического регулирования давления в камере с нелинейностью типа кривой насыщения для начальных точек с координатами  $P_1 (1; 2)$ ,  $P_2 (-0,6; 1,2)$ ,  $P_3(-0,8; -1,2)$ , используя для построения метод Льенара.

Решение. Используя принципиальную схему (рис. 1), запишем уравнения системы:

$$\left. \begin{aligned} T_p \frac{dp(t)}{dt} + p(t) &= K_p l_3(t), \\ \frac{dl_3(t)}{dt} &= K_{дв} l_c(t), \\ l_c(t) &= K_c U(t), \\ U_2(t) &= K_{сф} p(t), \\ U_1(t) &= U_3(t) - U_2(t), \\ U(t) &= f[U_1(t)] \end{aligned} \right\}$$

где  $T_p, K_p$  – постоянная времени и коэффициент усиления камеры;  
 $K_{дв}$  – коэффициент усиления двигателя;  
 $K_c$  – коэффициент усиления соленоида;  
 $K_{сф}$  – коэффициент усиления сильфона.

Нелинейная функция  $f[U_1(t)]$  задана так:

$$f[U_1(t)] = K_v \tilde{f}(U_1),$$

где  $K_v$  – коэффициент усиления на линейном участке, а  $\tilde{f}(U_1)$  определена выражением

$$\tilde{f}(U_1) = \begin{cases} U_1, & -C \leq U_1 \leq C; \\ 1, & U_1 \geq C; \\ -1, & U_1 \leq -C, \end{cases}$$

где  $C$  – ширина линейной зоны.

Преобразуем систему уравнений к виду

$$T_p \frac{d^2 p(t)}{dt^2} + \frac{dp(t)}{dt} + CK_p K_{дв} K_c K_v f[K_{сф} p(t)] = 0.$$

Это уравнение получено в предположении, что  $U(t) = 0$  для простоты построения фазового портрета системы.

Перейдем к безразмерным переменным, вводя  $Y$  и  $\tau$ :

$$Y = \frac{P}{P_m}, \quad \tau = \frac{t}{T_p} \quad \text{при общем коэффициенте усиления}$$

$$K = K_p K_{дв} K_c K_v = 10^3; \quad T_p = 1 \text{ с}; \quad \frac{K_{сф} P_m}{C} = 1; \quad C = 0,1.$$

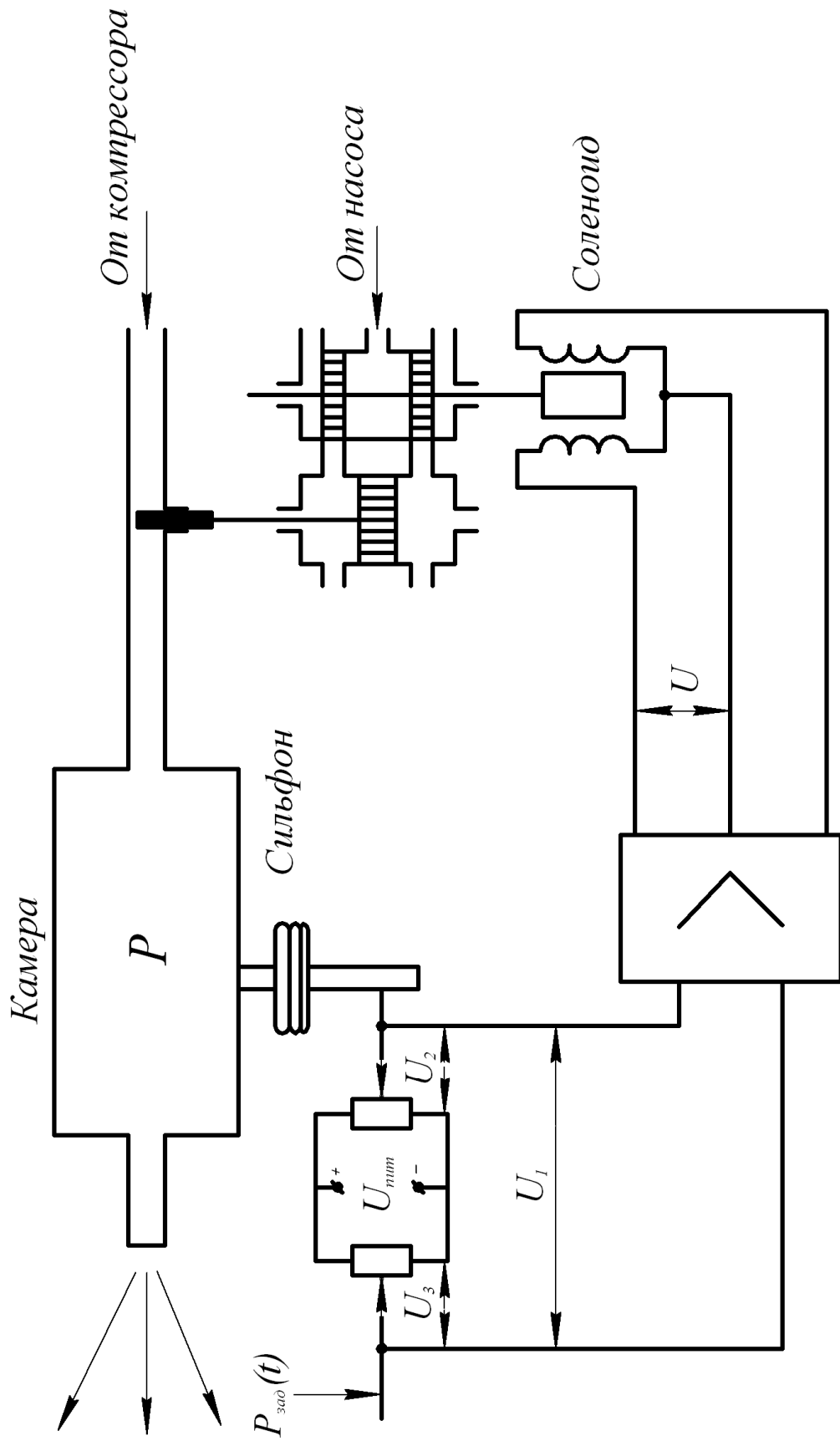


Рис. 1. Схема нелинейной системы автоматического регулирования давления в камере

Тогда уравнение системы запишется так:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \frac{dy}{d\tau} + f(y) = 0,$$

где  $f(y) = \begin{cases} y, & -1 \leq y \leq 1; \\ 1, & y \geq 1; \\ -1, & y \leq -1. \end{cases}$

Это уравнение может быть выражено через фазовые координаты  $y$  и  $y' = \frac{dy}{d\tau}$ . Тогда  $\frac{dy'}{d\tau} + y' + f(y) = 0$ .

На фазовой плоскости  $\left(y, \frac{dy}{d\tau} = y'\right)$  (рис. 2) строим две зависимости  $y' = f(y)$  (кривая 1) и  $y' = y$  (кривая 2). Далее необходимо определить наклон касательной к фазовой траектории в начальной и всех последующих точках. Выберем в качестве начальной точки  $P_1(1; 2)$ . Из точки  $P_1$  на оси  $y'$  и  $y$  опускаем перпендикуляры, пересекающие ось  $y$  в точке  $Q_1$ , а ось  $y'$  – в точке  $R_1$ . Продолжая перпендикуляр  $P_1R_1$  до пересечения с зависимостью 2, получим точку  $T_1$ . Пересечение перпендикуляра  $P_1R_1$  с зависимостью 1 дает точку  $S_1$ . Затем от точки  $Q_1$  откладываем абсциссу точки  $T_1$  (влево, если она положительна, и вправо, если она отрицательна). В результате получим отрезок  $Q_1F_1$ , длина которого равна  $y'_1 + f(y_1)$  ( $y_1$  и  $y'_1$  – абсцисса и ордината точки  $P_1$  соответственно). Наклон прямой  $P_1F_1$  к оси  $y$  равен:

$$\frac{P_1Q_1}{Q_1F_1} = \frac{y'_1}{y'_1 + f(y_1)}.$$

Следовательно, наклон прямой, проходящей через точку  $P_1$  перпендикулярно к прямой  $P_1F_1$ , определится выражением, равным выражению для фазовой скорости изображающей точки в фазовой плоскости:

$$\frac{dy'}{dy} = -\frac{f(y_1) + y'_1}{y'_1}.$$

Получим наклон касательной к фазовой траектории в точке  $P_1$ . Отсюда принцип нахождения следующей точки фазовой траектории: из точки  $F_1$ , как из центра, проводим дугу окружности радиуса  $P_1F_1$  (кривая 3) через точку  $P_1$ , и на этой дуге вблизи точки  $P_1$  выбираем следующую точку  $P_1^1$  фазовой траектории. Плавность фазовой траектории и точность ее построения тем больше, чем меньше отрезок  $P_1P_1^1$  этой дуги. Аналогичным образом получают все остальные точки фазовой траектории I. Траектории II и III построены из начальных точек  $P_2(-0,6; 1,2)$  и  $P_3(-0,8; -1,2)$ .

На основании полученного фазового портрета можно сделать вывод о том, что все фазовые траектории сходятся к началу координат (особой точке типа устойчивый фокус). Следовательно, нелинейная система асимптотически устойчива.

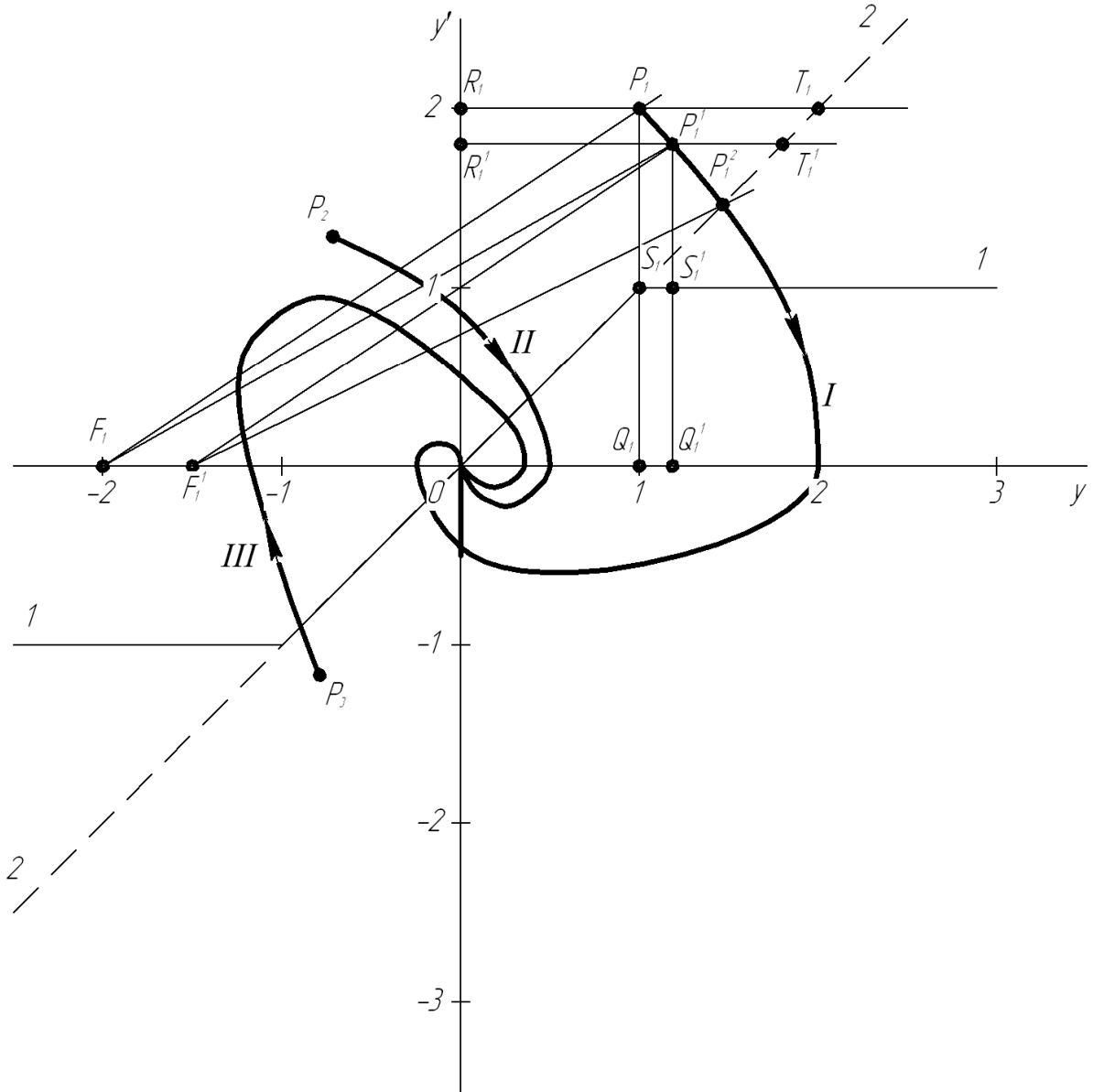


Рис. 2. Фазовый портрет нелинейной системы регулирования давления в камере с нелинейностью типа кривой насыщения

## Задача 2

Построить фазовые траектории нелинейной системы автоматического регулирования давления в камере (рис. 1) (с нелинейностью типа зоны нечувствительности) для начальных точек с координатами  $P_1(1; 2)$  и  $P_2(-1; 1)$ , используя для построения метод Ляпуна.

Решение. Уравнение системы в безразмерном виде получено в задаче 1 и имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \frac{dy}{d\tau} + f(y) = 0.$$

Здесь нелинейная функция  $f(y)$  для заданного вида нелинейности определяется так:

$$f(y) = \begin{cases} 0, & -1 \leq y \leq 1, \\ y-1, & y \geq 1, \\ y+1 & y \leq -1. \end{cases}$$

На фазовой плоскости  $\left( y, y' = \frac{dy}{dt} \right)$  строим функции  $y' = f(y)$  (кривая 1) и  $y' = y$  (кривая 2). Используя описанную в задаче 1 методику построения фазовых траекторий, получим траектории I и II (рис. 3.)

На основании выполненного построения можно сделать вывод об асимптотической устойчивости нелинейной системы, но в этом случае устойчивое состояние не есть единственная точка 0, а целый отрезок  $(-1 \leq y \leq 1)$  устойчивых состояний.

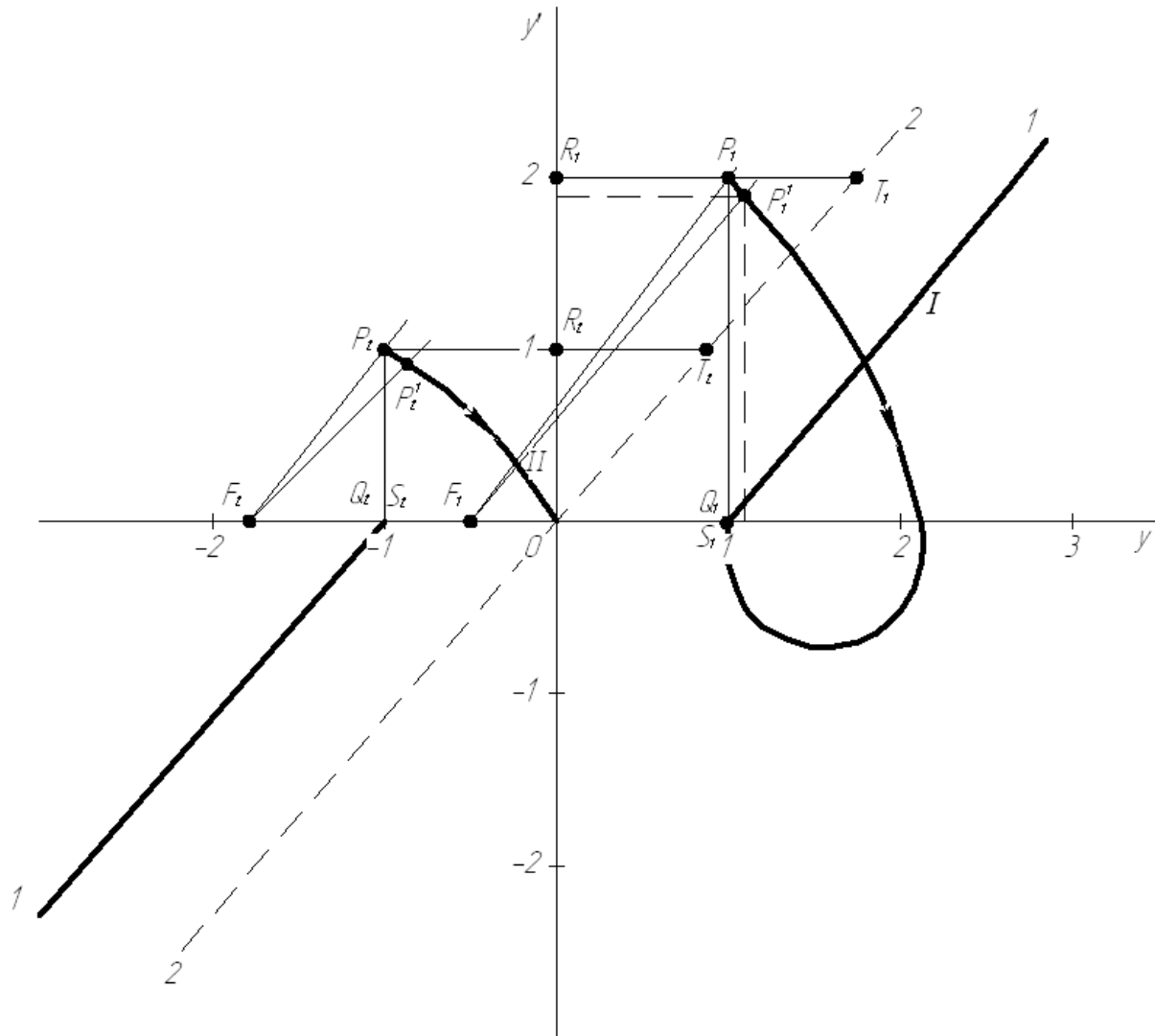


Рис. 3. Фазовый портрет нелинейной системы автоматического регулирования давления с нелинейностью типа зоны нечувствительности



### Задача 3

Построить фазовые траектории следящей системы автоматического регулирования (рис. 4) с нелинейностью типа двухпозиционная релейная характеристика без гистерезиса для начальных точек с координатами  $P_1(1; 2)$  и  $P_2(-1; 1)$ , используя для построения метод Ляпуна.

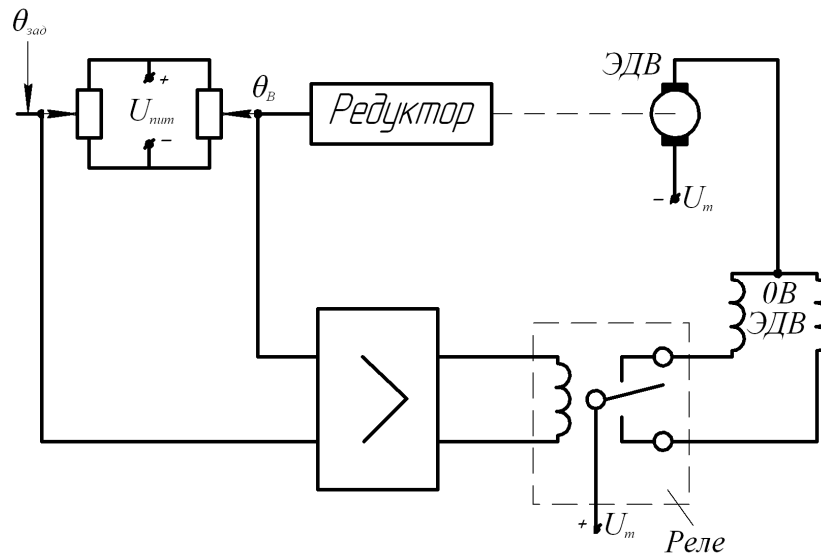


Рис. 4. Принципиальная электрическая схема нелинейной релейной следящей системы автоматического регулирования

Решение. Движение системы описывается уравнением:

$$\frac{d^2\theta_B(t)}{dt^2} + \frac{d\theta_B(t)}{dt} = \frac{KU_m}{T_{ДВ}} f[\theta_{зад}(t) - \theta_B(t)],$$

где  $\theta_B$  – угол поворота вала регулятора;

$T_{ДВ}$  – постоянная времени электродвигателя;

$U_m$  – величина сигнала на выходе релейного устройства;

$K$  – коэффициент передачи электродвигателя и редуктора.

Это уравнение может быть приведено к безразмерному виду с помощью новых переменных:

$$Y = \frac{\theta}{KT_{ДВ}U_m} \text{ и } \tau = \frac{t}{T_{ДВ}}.$$

Тогда получим:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{dy}{d\tau} + f(y) = 0.$$

Строим на фазовой плоскости  $\left(y, y' = \frac{dy}{d\tau}\right)$  (рис. 5) функции  $y' = f(y)$  (кривая 1) и  $y' = y$  (кривая 2).

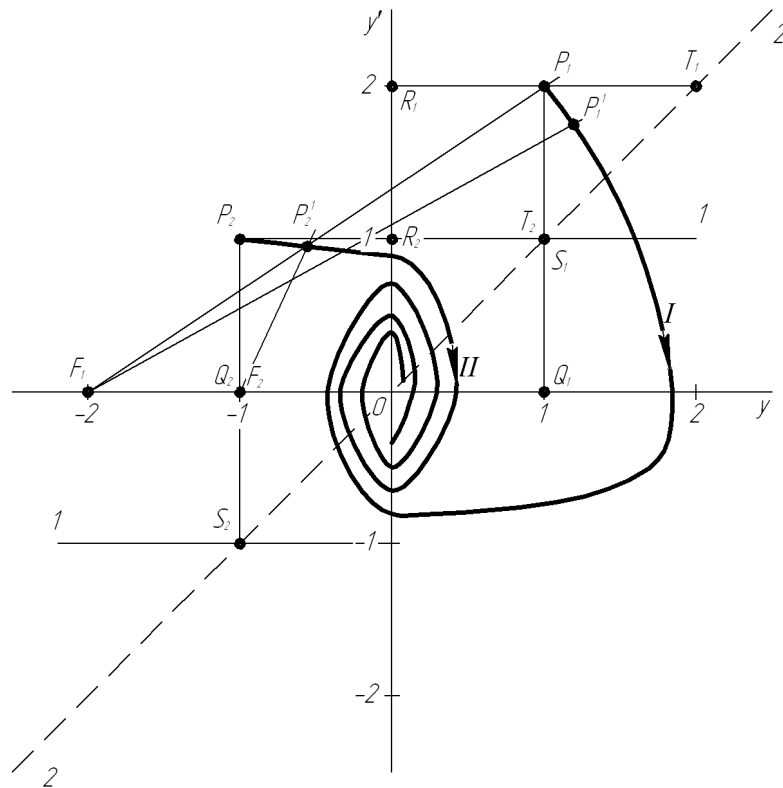


Рис. 5. Фазовый портрет нелинейной релейной следящей системы

Используя описанную в задаче 1 методику, получим фазовые траектории I и II, построенные из заданных начальных точек  $P_1$  и  $P_2$  соответственно. Из анализа фазового портрета нелинейной следящей системы следует, что на фазовой плоскости имеется одна особая точка – устойчивый фокус (начало координат). Это означает, что данная нелинейная система асимптотически устойчива.

### Задача 4

Построить фазовый портрет нелинейной следящей системы (рис. 6), имеющей люфт  $C = \pm 0,5$  мм в механической передаче Р между потенциометром обратной связи и выходным валом, используя для построения метод Льенара. В качестве начальных точек взять точки с координатами  $P_1(-3; 0)$  и  $P_2(-1,5; 0)$ .

Решение. Уравнение динамики следящей системы запишется так:

$$\mathfrak{J}_n \frac{d^2 \theta_B}{dt^2} + K_v \frac{d\theta_B}{dt} = M_{ДВ}(t),$$

где  $\mathfrak{J}_n$  – приведенный к валу электродвигателя момент инерции;

$K_v$  – коэффициент скоростного трения;

$M_{ДВ}(t)$  – момент на валу двигателя.

Момент  $M_{ДВ}(t)$  связан с током  $i_B$  обмотки возбуждения следующим соотношением:

$$M_{ДВ}(t) = K_M K_P i_B(t),$$

где  $K_M$  – коэффициент передачи двигателя;

$K_P$  – коэффициент механической передачи.

С учетом сказанного уравнение динамики системы примет вид:

$$\mathfrak{J}_n \frac{d^2 \theta_B}{dt^2} + K_v \frac{d\theta_B}{dt} = K_M K_P i_B(t).$$

Остальные уравнения составляющих системы:

– потенциометра  $U(t) = K_n [\theta_{3АД}(t) - \theta'_B(t)];$

– электронного усилителя  $i_B(t) = K_v U(t);$

– механической передачи  $\theta'_B(t) = f[\theta_B(t)].$

В последнем выражении  $\theta'_B$  – угол поворота потенциометра в отсутствии люфта в механической передаче. Тогда уравнение динамики системы будет выглядеть так:

$$\mathfrak{J}_n \frac{d^2 \theta_B}{dt^2} + K_v \frac{d\theta_B}{dt} = K_M K_P K_v K_n \{\theta_{3АД}(t) - f[\theta_B(t)]\}.$$

Полагая для упрощения  $\theta_{3АД}(t) = 0$  и вводя  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_M K_P K_v K_n}{\mathfrak{J}_n}}$ ,  $\theta_B = y$  и

$dt = \frac{d\tau}{\omega_0}$ , получим уравнение динамики в следующем виде:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \frac{K_v}{\mathfrak{J}_n \omega_0} \frac{dy}{d\tau} + f(y) = 0.$$

Для построения фазовых траекторий вводим переменную  $y' = \frac{dy}{d\tau}$ .

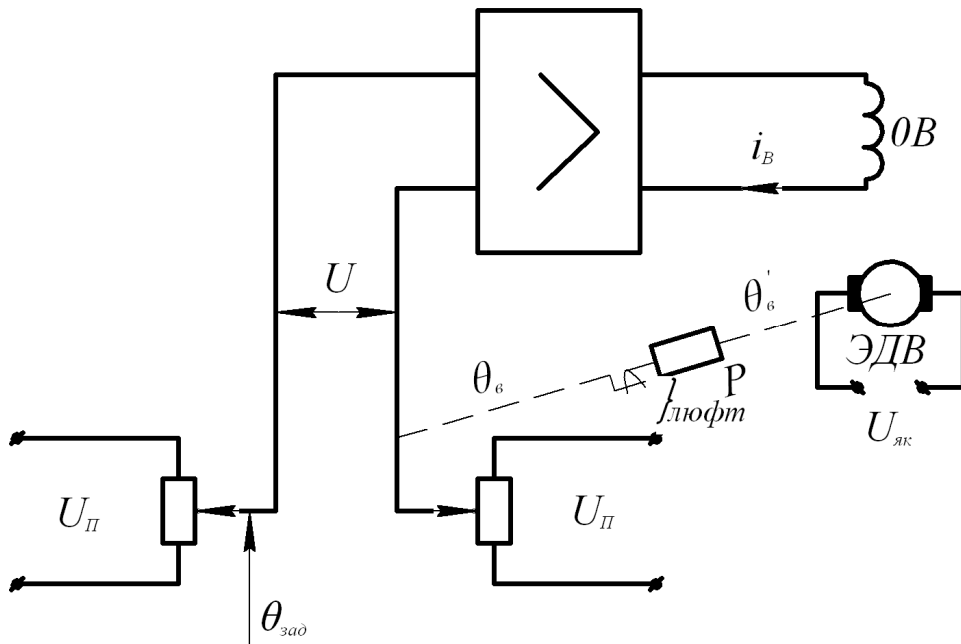


Рис. 6. Принципиальная схема непрерывной следящей системы с люфтом в механической передаче

Тогда уравнение динамики через переменные  $y'$  и  $y$  запишется так:

$$\frac{dy'}{d\tau} + Ay' + f(y) = 0,$$

где  $A = \frac{K_v}{\mathfrak{T}_n \omega_0}$ .

Из последнего получается уравнение фазовой скорости:

$$\frac{dy'}{dy} = -\frac{Ay' + f(y)}{y'}.$$

Используя описанную в задаче 1 методику, строим в фазовой плоскости  $(y, y')$  функции  $y' = f(y)$  (кривая 1) и  $y' = \frac{1}{\gamma}y$  (кривая 2, построенная для  $\gamma = 0,25$ ) (рис. 7), после чего строим фазовые траектории, исходящие из заданных начальных точек  $P_1$  и  $P_2$ .

Анализ полученного фазового портрета показывает, что в системе устанавливаются автоколебания в пределах  $1,5 \leq y_{\max} \leq 2,5$ .

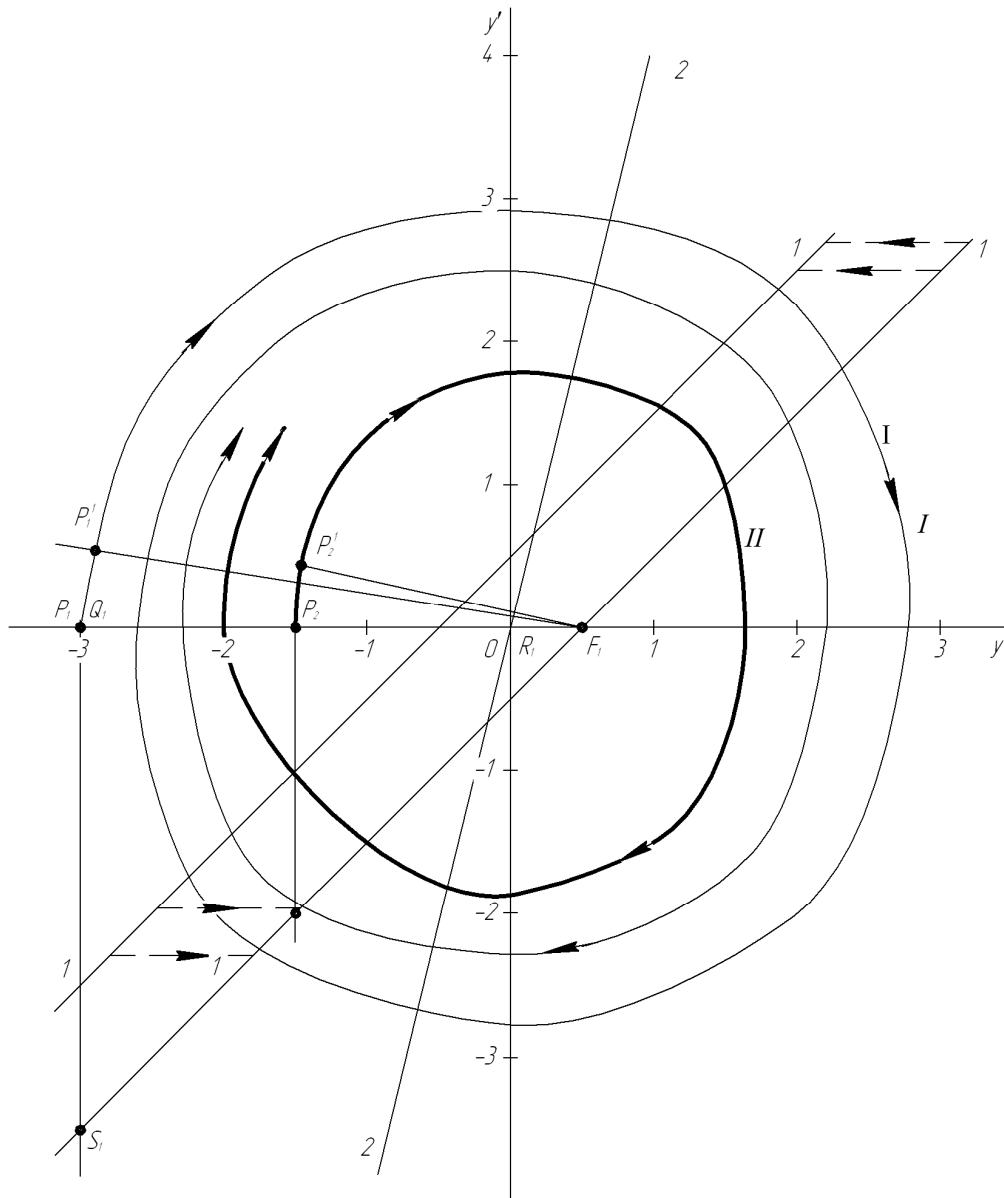


Рис. 7. Фазовый портрет непрерывной следящей системы с люфтом в механической передаче

### Задача 5

Построить фазовые траектории методом Льенара для системы автоматического регулирования, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y = 0.$$

Решение. Введем новую переменную  $y' = \frac{dy}{dt}$ . Тогда уравнение, описывающее нелинейную систему, запишется так:

$$\frac{dy'}{dt} + (y')^2 + y = 0.$$

Из него можно получить уравнение фазовой скорости:

$$\frac{dy'}{dy} = -\frac{(y')^2 + y}{y'}.$$

Используя методику, изложенную в задаче 1, строим в фазовой плоскости  $\left(y, y' = \frac{dy}{dt}\right)$  кривую  $f(y) = (y')^2$  (кривая 1) и  $y' = y$  (кривая 2) (рис. 8), используя которые, получаем фазовые траектории I, II и III, исходящие из точек  $P_1, P_2$  и  $P_3$ . Фазовые траектории сходятся к особой точке типа устойчивый фокус (начало координат). Следовательно, система асимптотически устойчива.

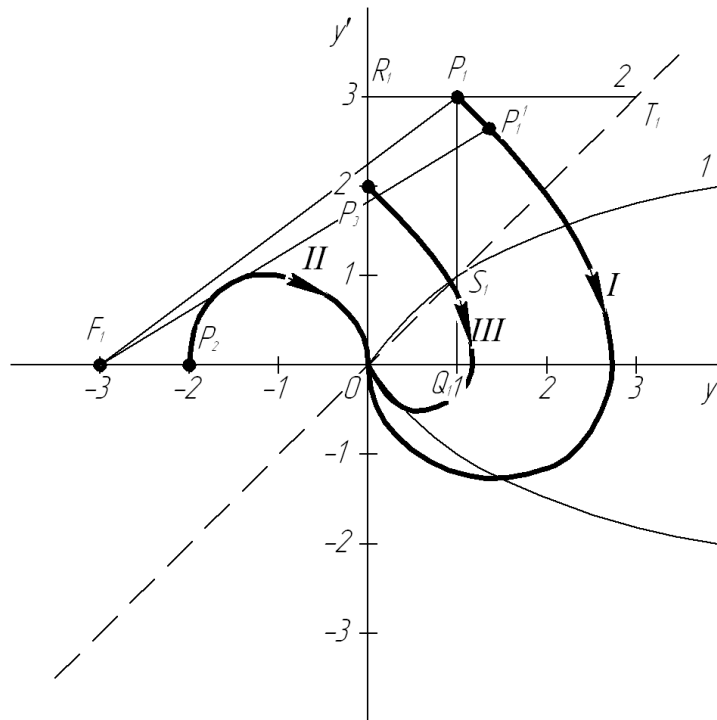


Рис. 8. Фазовый портрет нелинейной системы

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин М.В. Автоматическое управление. – М.: ИНФА-М: ФОРУМ, 2007.
2. Ким Д.П. Теория автоматического управления. т. 1.– М.: Физматлит, 2003.
3. Лукас В.А. Теория автоматического управления: учебн. для вузов. 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Недра, 2004.
4. Ким Д.П., Дмитриева Н.Д. Сборник задач по теории автоматического регулирования. Линейные системы.– М.: Физматлит, 2007.
5. Теория автоматического управления: учебн. для вузов. В 2 ч. / под ред. А.А. Воронова. 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Высшая школа, 1986.
6. Теория автоматического управления: учебн. для вузов. В 2 ч. / под ред. В.А. Нетушила. 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Высшая школа, 1976.
7. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления: учеб. пособие для вузов / под ред. В.А. Бесекерского. 5-е изд., перераб. и доп.– М.: Наука, 1978.
8. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. – М.: Машиностроение, 1973.
9. Топчиев Ю.Н., Цыпляков А.П. Задачник по теории автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1977.



Г.Г. Ордуянц  
С.П. Санников

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.  
ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ. МЕТОД ЛЬЕНАРА**

Екатеринбург  
2012