

Электронный архив УГЛТУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет»

Кафедра автоматизации производственных процессов

Г.Г. Ордуянц
С.П. Санников

**ЗАДАНИЯ ПО КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ
И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К НИМ
ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ»**

Для студентов заочной формы обучения
по специальности 220301, 220200, 220400, 220700

Екатеринбург
2012

Рассмотрено и рекомендовано методической комиссией
Лесоинженерного факультета
Протокол № 1 от 8 сентября 2011 г.

Рецензент Тойбич В.Я., доцент канд. техн. наук

Редактор Сайгина Р.В.
Оператор компьютерной верстки Упорова Т.В.

Подписано в печать 23.10.12		Поз. 12
Печать плоская	Формат 60x84 1/16	Тираж 10 экз.
Заказ №	Печ. л. 1,86	Цена 9 р. 88 к.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

Изучение курса «Теория автоматического управления» осуществляется студентами заочного отделения самостоятельно, с привлечением специальной литературы и в сочетании с обзорными лекциями, лабораторно-практическими занятиями, групповыми и индивидуальными консультациями в период сессии.

Самостоятельная работа включает изучение теоретического материала курса по учебной литературе в соответствии с рабочей программой, выполнение двух контрольных и одной курсовой работ. Содержание контрольных работ и методические указания к ним изложены в настоящем руководстве.

Выбор варианта при выполнении контрольной работы определяется последней цифрой зачетной книжки для задач с четными номерами и предпоследней – с нечетными номерами. Решение каждой задачи должно содержать исходные данные, методику расчета, схемы и графики. Результаты вычислений для функций при разных значениях аргумента рекомендуется представлять в виде таблиц. В случае выполнения подобных расчетов с помощью вычислительной техники в решение задачи надо вклеить распечатку программы и результатов.

Курсовая работа посвящена расчету переходного процесса в системе автоматического регулирования и выполняется по методическим указаниям, изданным на кафедре АПП УГЛТУ.

**ПРИМЕРНАЯ РАБОЧАЯ
ПРОГРАММА КУРСА**

1. Общие принципы построения систем автоматического управления и регулирования. Классификация систем управления. САР по возмущениям, по отклонению, комбинированные. САС, программное регулирование, следящие системы. Статическое и астатическое регулирование.
2. Математическое описание и моделирование линейных элементов и систем управления. Общие понятия о передаточных свойствах СА. Линейные дифференциальные уравнения при описании динамики объектов СА. Операторный метод, динамические характеристики. Частотные характеристики. Основные типовые возмущающие воздействия. Расчет переходных процессов в линейных САР.
3. Характеристики и модели типовых динамических звеньев систем управления. Классификация звеньев. Пропорциональное, дифференцирующее, реальное дифференцирующее, интегрирующее, интегро-дифференцирующее, аperiodическое I-го порядка, запаздывающее звено. Звено 2-го порядка. Соединение звеньев автоматики. Обратные связи жесткие, гибкие. Замкнутые системы.
4. Устойчивость САР. Понятие устойчивости по Ляпунову. Критерии Рауса-Гурвица, Михайлова, Найквиста. Логарифмический критерий устойчивости. Построение областей устойчивости по одному параметру (D-разбиение).
5. Основные законы регулирования. Пропорциональное (П), интегральное (И), пропорционально-интегральное (ПИ) и пропорционально-интегрально-дифференциальное (ПИД) регулирование.
6. Переходные процессы в линейных САУ. Качество переходных процессов. Переходные процессы в автоматических системах с типовыми регуляторами. Прямые и косвенные оценки качества регулирования. Оценки качества переходного процесса в системах регулирования постоянной величины при возмущениях вида ступенчатой функции. Корневой метод оценки качества регулирования. Частотные методы анализа качества регулирования. Вещественные частотные характеристики (ВЧХ), их свойства и взаимосвязь с соответствующими им переходными процессами. Приближенное построение переходной характеристики по ВЧХ. Основные качественные оценки по вещественным частотным характеристикам. Интегральные оценки качества регулирования. 1-я, 2-я и 3-я интегральные оценки. Ошибки регулирования.
7. Синтез корректирующих элементов в простейших САР. Постановка задачи синтеза. Последовательная и параллельная коррекция по логарифмическим частотным характеристикам.

8. Основы анализа линейных импульсных систем управления. Общие сведения о дискретных системах. Математическое описание дискретных систем. Уравнения в конечных разностях. Дискретное преобразование Лапласа. Метод z -изображений в расчете импульсных САУ. Реальные импульсные фильтры. Амплитудно-импульсная модуляция, экстраполятор нулевого порядка, их z -передаточные функции. Устойчивость импульсных систем. Основными критериями устойчивости, критерии Михайлова и Найквиста. Переходные характеристики импульсных систем и оценка качества импульсных систем по этим характеристикам.
9. Характеристики и основные методы анализа нелинейных систем управления. Особенности нелинейных систем. Типовые нелинейные элементы СУ и их характеристики. Метод фазовых траекторий и их построение с помощью изоклин, метод кусочно-линейной аппроксимации, метод гармонической линеаризации. Оценка абсолютной устойчивости с помощью критерия Попова.
10. Оптимальные системы управления. Введение в адаптивное управление. Задачи оптимального управления, критерии оптимальности. Методы теории оптимального управления. Управление. Понятие об адаптивном управлении.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1

Задача 1

На рис. 1 приведена пассивная электрическая цепь в виде моста.

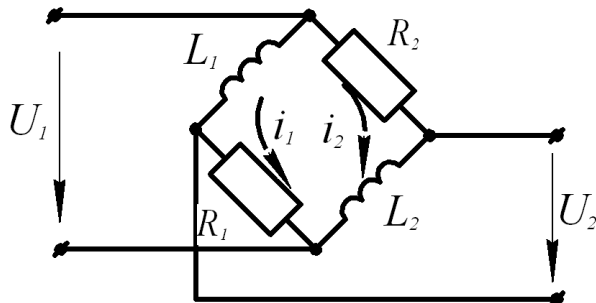


Рис. 1. Мостовая схема к задаче 1

Записать дифференциальные уравнения и найти передаточную функцию, если в качестве входного сигнала взято напряжение на первичных зажимах U_1 , в качестве выходного – напряжение на вторичных зажимах U_2 .

Значения параметров схемы приведены в табл. 1.

Таблица 1

Варианты параметров

Параметры схемы	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R_1 , кОм	1	0,33	0,43	2,2	0,82	0,33	1	3,3	0,82	0,43
R_2 , кОм	0,33	0,82	1	3,3	4,3	0,43	4,3	8,2	2,2	0,22
L_1 , Гн	0,8	0,4	0,3	1	0,2	0,5	0,9	0,7	1,1	0,25
L_2 , Гн	0,3	1,2	0,5	0,4	0,8	0,5	1	0,6	0,4	0,3

Задача 2

На рис. 2 изображена структурная схема автоматической системы.

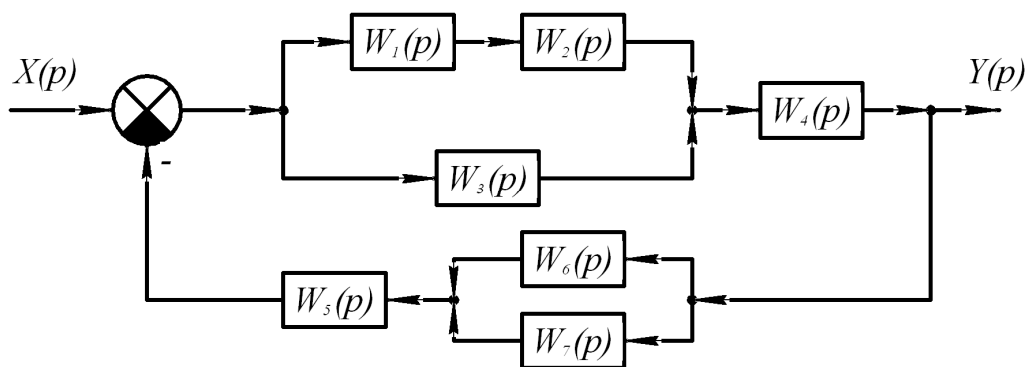


Рис. 2. Структурная схема системы

Передаточные функции имеют вид:

$$W_1(p) = K_1 \quad - \quad \text{усилительное звено};$$

$$W_2(p) = \frac{K_2}{p} \quad - \quad \text{интегрирующее звено};$$

$$W_3(p) = \frac{K_3}{T_1 p + 1} \quad - \quad \text{инерционное (апериодическое 1-го порядка) звено};$$

$$W_4(p) = \frac{K_4}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)} \quad - \quad \text{апериодическое звено 2-го порядка};$$

$$W_5(p) = K_5 \quad - \quad \text{усилительное звено};$$

$$W_6(p) = K_6 p \quad - \quad \text{дифференциальное звено};$$

$$W_7(p) = K_7 \quad - \quad \text{усилительное звено}.$$

Значения коэффициентов передачи и постоянных времени приведены в табл. 2

Таблица 2

Варианты параметров передаточных функций

Исходные данные	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K_1	1,8	2,1	2,0	1,6	1,4	2,0	0,8	1,2	1,5	1,0
K_2	0,03	0,04	0,01	0,08	0,06	0,06	0,04	0,02	0,01	0,03
K_3	1,6	1,8	2,1	1,4	1,0	0,8	1,2	2,2	2,0	1,6
K_4	1,1	2,4	1,8	1,6	1,2	1,4	2,1	2,0	1,5	1,0
K_5	1,6	2,0	2,2	1,8	1,9	1,3	1,5	2,0	1,8	2,4
K_6	2,1	0,8	1,1	0,8	1,8	1,4	1,6	1,2	1,0	1,5
K_7	1,7	1,2	2,0	1,8	1,0	1,6	1,4	1,1	1,2	1,5
$T_1, \text{с}$	4,0	2,0	2,2	3,5	3,2	2,5	2,2	3,5	4,5	3,2
$T_2, \text{с}$	0,4	0,3	0,8	0,7	0,2	0,7	0,9	0,6	0,8	0,9
$T_3, \text{с}$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,2	1,1	1,3	1,5	1,4	1,8

В задаче необходимо выполнить следующее:

1. Найти передаточную функцию разомкнутой системы.
2. Найти передаточную функцию замкнутой системы по задающему воздействию $X(p)$.

Задача 3

Апериодическое звено 2-го порядка описывается передаточной функцией следующего вида:

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

В табл. 3 приведены значения коэффициента передачи и постоянных времени T_1 и T_2 .

Построить амплитудно-фазовую (АФХ) (комплексно-частотную (КЧХ)), амплитудно-частотную (АЧХ), фазочастотную (ФЧХ) и асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную (ЛАЧХ) характеристики звена.

Таблица 3

Значения параметров звеньев

Исходные данные	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K	8	6	5	9	4	10	7	8	7	5
T_1, c	0,01	0,012	0,02	0,015	0,02	0,01	0,03	0,01	0,018	0,016
T_2, c	0,1	0,12	0,15	0,2	0,3	0,25	0,2	0,1	0,3	0,24

Задача 4

Система описывается характеристическим уравнением вида:

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Значения коэффициентов $a_0 \div a_3$ приведены в табл. 4.

Таблица 4

Значения коэффициентов

Исходные данные	Варианты									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_3, c^3	10	12	8	8	8	11	9	12	10	6
a_2, c^2	5	8	4	3	4	6	3	5	4	2
a_1, c	2,5	1,5	1	1,2	2,4	1,2	1,1	2	1	1,3
a_0	10	12	14	16	12	18	16	15	12	10

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Задача 1

В качестве примера рассмотрим нахождение передаточной функции для пассивной цепи, схема которой изображена на рис. 3.

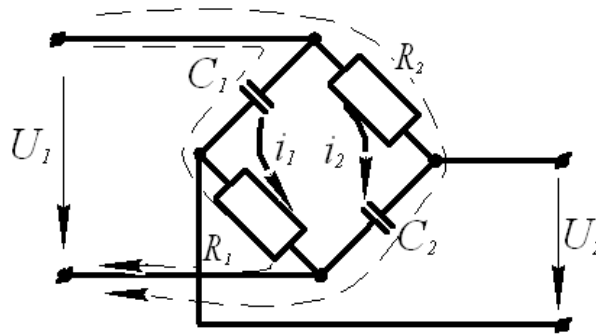


Рис. 3. Схема пассивной цепи

Запишем дифференциальное уравнение для контуров, обозначенных на рис. 3:

$$i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt = U_1,$$

$$i_2 R_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = U_1.$$

В операторной форме эти уравнения запишутся так:

$$I_1(p)R_1 + \frac{1}{pC_1} I_1(p) = U_1(p),$$

$$I_2(p)R_2 + \frac{1}{pC_2} I_2(p) = U_1(p),$$

откуда

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)pC_1}{T_1 p + 1}, \quad I_2(p) = \frac{U_1(p)pC_2}{T_2 p + 1},$$

где

$$T_1 = C_1 R_1,$$

$$T_2 = C_2 R_2,$$

p – оператор Лапласа.

Напряжение $U_2(t)$ на вторичных зажимах можно определить следующим образом:

$$U_2(t) = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt - i_1 R_1,$$

или в операторной форме:

$$U_2(p) = \frac{1}{pC_2} I_2(p) - I_1(p)R_1.$$

Подстановка выражений для токов $I_1(p)$ и $I_2(p)$ позволяет найти связь между входным $U_1(p)$ и выходным $U_2(p)$ сигналами:

$$U_2(p) = \frac{1}{pC_2} \frac{pC_2}{T_2p+1} U_1(p) - \frac{R_1 p C_1}{T_1p+1} U_1(p) = U_1(p) \frac{1 - T_1 T_2 p^2}{(T_1p+1)(T_2p+1)},$$

откуда передаточная функция получается равной:

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1 - T_1 T_2 p^2}{(T_1p+1)(T_2p+1)}.$$

Задача 2

Напомним, что при последовательном соединении звеньев (рис. 4, а) общая передаточная функция определяется произведением передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p),$$

а при параллельном соединении (рис. 4, б) – их суммой:

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

При соединении с обратной связью (рис. 4, в) общая передаточная функция замкнутой системы находится так:

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 \mp W(p)W_{o.c.}(p)}.$$

В этом выражении знак (–) относится к положительной обратной связи, когда $X_1(p) = X(p) + Y_{o.c.}(p)$, а знак (+) – к отрицательной обратной связи, когда $X_1(p) = X(p) - Y_{o.c.}(p)$.

Для случая весьма распространенной единичной отрицательной обратной связи (рис. 4, г) выражение для $W_3(p)$ получается таким:

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}.$$

В качестве примера рассмотрим нахождение передаточной функции разомкнутой и замкнутой систем, структурная схема которой изображена на рис. 5.

Звенья с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$ соединены последовательно, а потому их общая передаточная функция:

$$W_{12}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p).$$

Задача 3

В качестве примера рассмотрим построение частотных характеристик звена с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{10}{p(0,25p + 1)}.$$

Амплитудно-фазовой (АФХ) (комплексно-частотной (КЧХ)) характеристикой называется геометрическое место концов вектора $W(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ .

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega(0,25j\omega + 1)} = \frac{\overbrace{10}^{A(\omega)}}{\omega \sqrt{(0,25\omega)^2 + 1}} \underbrace{|-90^\circ - \arctg 0,25\omega|}_{\varphi(\omega)}.$$

Зависимость модуля $A(\omega)$ функции $W(j\omega)$ от частоты есть амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), зависимость фазы $\varphi(\omega)$ функции $W(j\omega)$ от частоты – фазочастотная характеристика (ФЧХ).

Данные расчета сведены в табл. 5.

Таблица 5

Расчетные данные звена

ω, c^{-1}	0	1	2	4	10	
$A(\omega)$		9,98	4,45	1,77	0,37	0
$\varphi(\omega)$	-90°	-104°	-126°34'	-135°	-153°30'	-180°

По данным табл. 5 строим АФХ, АЧХ, ФЧХ (рис. 6).

Асимптотическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 7) соответствует выражению:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{10}{\omega \sqrt{(0,25\omega)^2 + 1}} = 20 \lg \frac{10}{\omega} - 10 \lg [(0,25\omega)^2 + 1].$$

По оси абсцисс отложен логарифм частоты ω в декадах (и сама частота ω, c^{-1}), по оси ординат – $L(\omega)$ в децибелах.

Начальный участок характеристики соответствует интегрирующему звену ($20 \lg \frac{10}{\omega}$) и представляет собой прямую, проходящую с наклоном -20 дБ/дек через точку $(0; 20 \lg 10)$. В точке, соответствующей частоте сопряжения $\omega_c = \frac{1}{0,25} = 4 c^{-1}$, наклон изменяется еще на -20 дБ/дек , в результате чего общий наклон 2-го участка равен -40 дБ/дек .

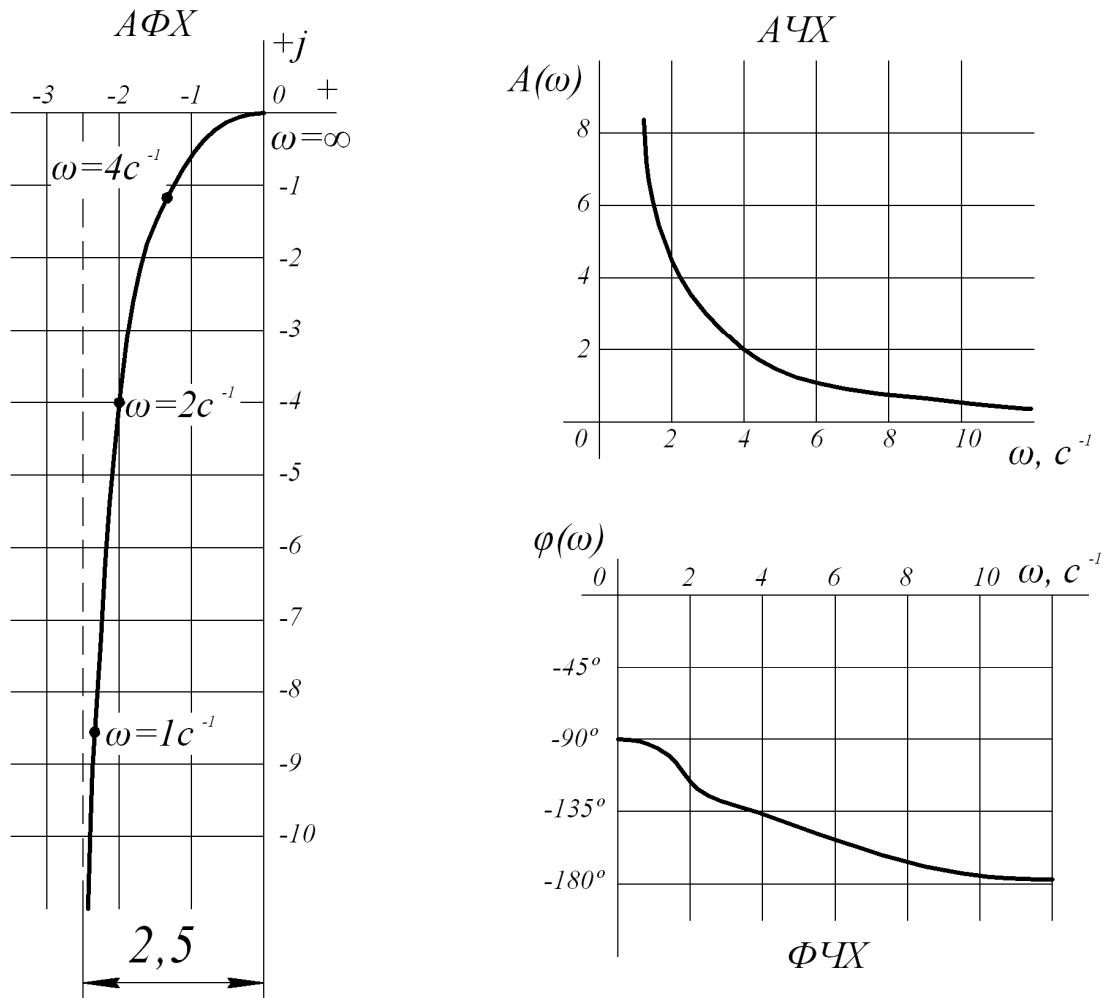


Рис. 6. Частотные характеристики звена

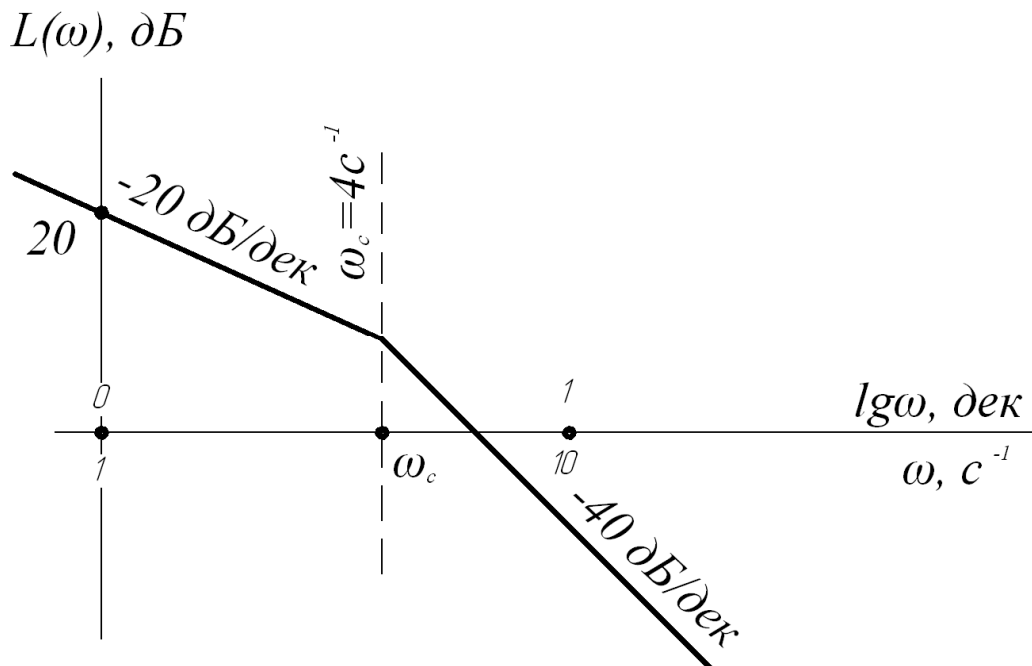


Рис. 7. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика звена

Задача 4

Критерий Рауса-Гурвица позволяет оценить устойчивость системы, описываемой характеристическим уравнением вида:

$$H(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Составим определитель из коэффициентов этого уравнения:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \underline{a_{n-1}} & \underline{a_{n-3}} & \underline{a_{n-5}} & \dots & 0 \\ \underline{a_n} & \underline{a_{n-2}} & \underline{a_{n-4}} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

При заполнении определителя по главной диагонали ставятся все коэффициенты характеристического уравнения, начиная со второго (a_{n-1}). Выше диагонального члена ставятся коэффициенты при более низких степенях p , ниже – при более высоких. На место коэффициентов, индексы которых больше n или меньше нуля, ставятся нули. Диагональные миноры выделены пунктирными линиями.

САР устойчива, если при $a_n > 0$ определитель Δ_n (Рауса-Гурвица) и все его диагональные миноры, получающиеся вычеркиванием из предыдущего определителя последней строки и последнего столбца, положительны.

Например, характеристическое уравнение САР имеет вид:

$$H(p) = 6p^3 + 3p^2 + p + 10 = 0.$$

Тогда

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 10 - 6 \cdot 10 \cdot 10 < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 60 < 0,$$

$$\Delta_1 = |3| = 3 > 0.$$

Система неустойчива, так как Δ_3 и Δ_2 отрицательны.

Для оценки устойчивости по критерию Михайлова надо построить кривую Михайлова (геометрическое место концов вектора $H(j\omega)$). Если она начинается на вещественной положительной оси, поворачивается с ростом частоты в положительном направлении (против часовой стрелки), проходит последовательно n квадрантов, нигде не обращаясь в ноль и в n -ом квадранте уходит в бесконечность, то САР устойчива.

Оценим устойчивость системы, характеристическое уравнение которой таково:

$$H(p) = 0,2p^3 + p^2 + p + 10 = 0.$$

Запишем $H(j\omega)$:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= 0,2(j\omega)^3 + (j\omega)^2 + j\omega + 10 = -0,2j\omega^3 - \omega^2 + j\omega + 10 = \\ &= (10 - \omega^2) + j\omega(1 - 0,2\omega^2) = A(\omega) + jB(\omega) = 0. \end{aligned}$$

Результаты расчета $A(\omega)$ и $B(\omega)$ для разных частот ω сведем в табл. 6.

Таблица 6

Расчетные данные для построения

$\omega, \text{с}^{-1}$	0	0,5	1	1,5	2	3	4
$A(\omega)$	10	9,75	9	7,75	6	1	-6
$B(\omega)$	0	0,475	0,8	0,8	0,4	-2,4	-8,8

По данным расчета строим семейство векторов, огибающая концов которых (рис. 8) и есть кривая Михайлова. Видно, что САР неустойчива, так как не соблюдается последовательность прохождения квадрантов.

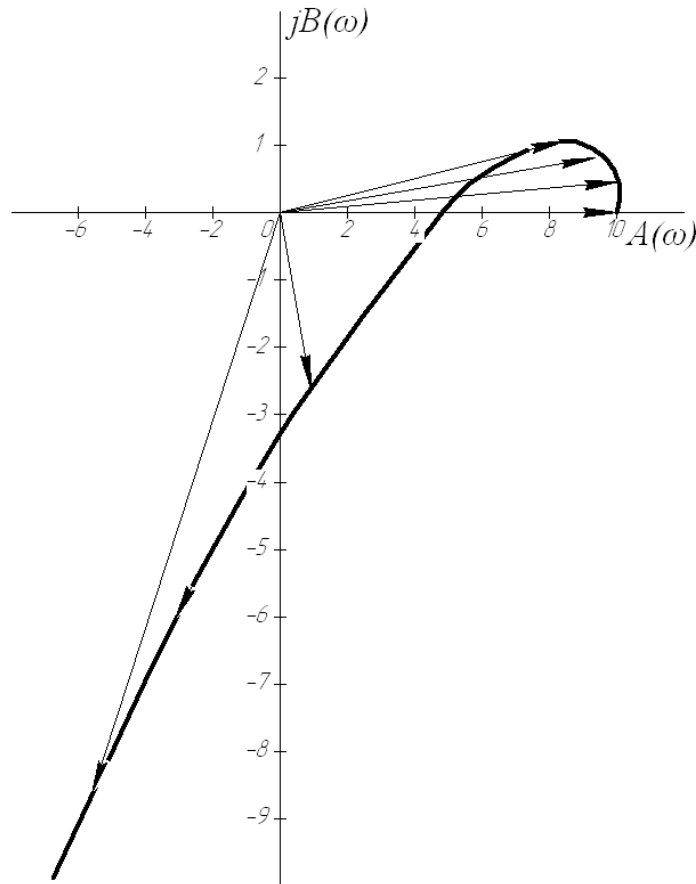


Рис. 8. Кривая Михайлова

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2

Задача 5

Расчет переходного процесса в линейной системе автоматического регулирования

Рассматривается система автоматического регулирования уровня связующего (или любой иной жидкости) в баке. Объект регулирования (ОР) – бак (рис. 9), регулируемый параметр – уровень H . Возмущающим воздействием, нарушающим материальный баланс и приводящим к отклонению уровня от заданного $H_{зад}$, является изменение нагрузки аппарата, т.е. расход связующего G_p . Уровень жидкости измеряется с помощью датчика LE . На основе сравнения текущего значения уровня H с заданным $H_{зад}$ автоматический регулятор (АР) LC вырабатывает управляющее воздействие, которое приводит в движение исполнительный механизм (ИМ) и регулирующей орган (РО), изменяющие, в свою очередь, приток G_{II} жидкости в бак.

Вместо текущих значений переменных H , G_p и G_{II} удобно рассматривать их отклонения от некоторого исходного состояния:

$y = H - H_{зад}$ – отклонение уровня от заданного значения (выходной параметр);

$f = G_p - G_{p_0}$ – отклонение расхода относительно начального значения (возмущение);

$x = G_{II} - G_{II_0}$ – отклонение притока относительно начального значения (управляющее воздействие).

Тогда дифференциальное уравнение объекта (ОР) может быть записано так:

$$T \frac{dy}{dt} + y = K_x x - K_f f,$$

где t – текущее время;

T – постоянная времени ОР;

K_f – коэффициент передачи ОР по каналу возмущения;

K_x – коэффициент передачи ОР по каналу управления.

Предполагается, что возмущающее воздействие имеет вид неединичного скачка $f(t) = f \cdot 1(t)$,

$$\text{где } f = \text{const}, \text{ а } 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \geq 0, \\ 0 & \text{для } t < 0. \end{cases}$$

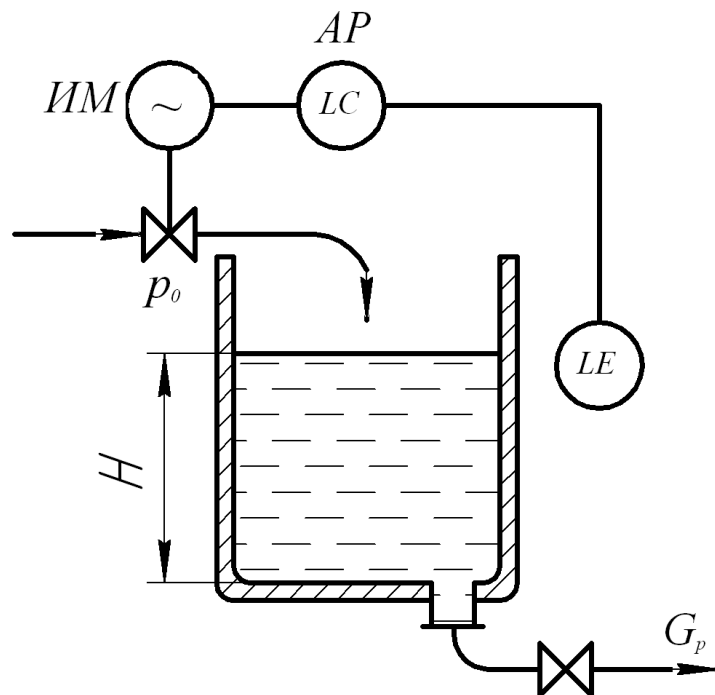


Рис. 9. Схема системы автоматического регулирования

В задаче требуется:

- 1) представить ОР в виде структурной схемы и определить передаточные функции по каналам управления $W_x(p)$ и возмущения $W_f(p)$;
- 2) рассчитать и построить кривую переходного процесса $y(t)$ в ОР в отсутствие автоматического регулятора (АР), если возмущение имеет вид неединичного скачка заданной величины f ;
- 3) составить структурную схему системы автоматического регулирования (САР) и найти передаточную функцию замкнутой САР по каналу возмущения;
- 4) рассчитать и построить кривую переходного процесса $y(t)$ в системе с АР при скачкообразном изменении возмущения на величину f ;
- 5) оценить влияние АР на изменение времени переходного процесса в ОР;
- 6) сделать соответствующие выводы.

Исходные данные для расчета приведены в табл. 7. Там же указаны размерности этих величин. Размерность выходного параметра $[y] = м$. Размерность управляющего воздействия $[x] = м^3 / с$.

Таблица 7

Исходные данные системы

Исходные данные	Номер варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T, \text{с}$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$K_f, \text{с/м}^2$	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	5,0	3,2	4,0	3,8
$K_x, \text{с/м}^2$	1,2	1,4	1,2	1,4	1,5	1,7	1,6	1,8	1,9	1
$f \cdot 10^{-2}, \text{м}^3/\text{с}$	2	2,2	1,6	1,8	2,4	2,6	1,4	1,2	2,8	2
Тип регулятора	П	П	ПИ	ПИ	П	П	ПИ	ПИ	П	ПИ
K_p	1,8	2	2,2	2,5	3	2,8	2,2	2,6	1,6	1,6
$T_{из}$	–	–	4	4,5	2	2	5	5,5	–	6

Задача 6

На рис. 10 изображена структурная схема импульсной САР, состоящей из импульсного фильтра (ИФ) и непрерывной части с передаточной функцией $W_0(p)$. Период замыкания ключа T .

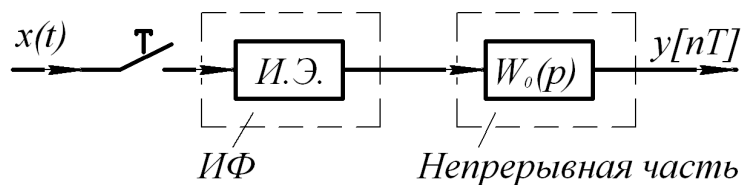


Рис. 10. Структурная схема импульсной САР

Известно, что z -изображение выходного сигнала $Y(z)$ определяется выражением:

$$Y(z) = \frac{az}{(z - 1 + a)(z - 1)}.$$

Найти и построить решетчатую функцию $y[nT]$. Значения параметра a приведены в табл. 8.

Таблица 8

Значение параметра системы a

Исходные данные	Номер варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	0,5	0,8	1	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	0,2	1,2

Задача 7

Свободное движение нелинейной системы автоматического регулирования описывается уравнением:

$$a \frac{dy}{dt} + by^2 = 0.$$

Построить фазовую траекторию линейной САР и исследовать на устойчивость при различных начальных условиях.

Значения параметров a и b приведены в табл. 9.

Таблица 9

Коэффициенты нелинейного уравнения

Исходные данные	Номер варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1	1,2	1,5	2	2,5	3	0,5	1,8	0,8	4
b	-1	1	-0,5	1,5	-1,5	-2	1	2	1,5	-4

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

Задача 5

Рассмотрим пример расчета для следующих исходных данных: $T = 10$; $K_f = 4,5$; $K_x = 1,5$; $f = 2 \cdot 10^{-2}$; параметр П-регулятора: $K_p = 2$; параметры ПИ-регулятора – $K_p = 2$; $T_{uz} = 5$.

1. Анализ объекта регулирования.

Запишем уравнение движения объекта в операторной форме:

$$TpY(p) + Y(p) = K_x X(p) - K_f F(p),$$

или

$$Y(p)(Tp + 1) = K_x X(p) - K_f F(p).$$

Отсюда

$$Y(p) = \frac{K_x}{Tp + 1} X(p) - \frac{K_f}{Tp + 1} F(p) = W_x(p)X(p) - W_f(p)F(p),$$

где $W_x(p)$ – передаточная функция ОР по управляющему воздействию;
 $W_f(p)$ – передаточная функция ОР по возмущению.

Тогда структурную схему ОР можно представить в таком виде (рис. 11).

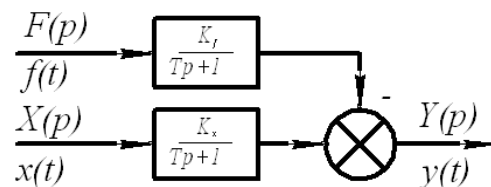


Рис. 11. Структурная схема ОР

2. Построение переходного процесса $y(t)$ в ОР в отсутствие автоматического регулятора (АР) в случае, когда возмущение имеет вид неединичного сигнала $f(t) = f \cdot 1(t) = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1(t)$.

Положим в исходном уравнении $x(t) = 0$. Тогда получим:

$$T \frac{dy}{dt} + y = -K_f f.$$

Решением этого уравнения является функция:

$$y(t) = -K_f f (1 - e^{-t/T}) = -9 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-t/10}) \text{ м.}$$

Расчет переходного процесса следует вести для интервала времени $0 \leq t \leq 5T = 50 \text{ с.}$

Выберем шаг по времени $\Delta t = 5 \text{ с.}$

Данные расчета сведем в табл. 10.

Таблица 10

Расчетные данные для построения $y(t)$

t, c	0	5	10	15	20
$t/10$	0	0,5	1	1,5	2
$e^{-t/10}$	1	0,61	0,37	0,22	0,14
$1-e^{-t/10}$	0	0,39	0,63	0,78	0,86
$y = -4,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-t/10}), м$	0	$-3,54 \cdot 10^{-2}$	$-5,68 \cdot 10^{-2}$	$-7 \cdot 10^{-2}$	$-7,78 \cdot 10^{-2}$

25	30	35	40	45	50
2,5	3	3,5	4	4,5	5
0,08	0,05	0,03	0,02	0,01	0,007
0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	0,993
$-8,26 \cdot 10^{-2}$	$-8,55 \cdot 10^{-2}$	$-8,73 \cdot 10^{-2}$	$-8,84 \cdot 10^{-2}$	$-8,9 \cdot 10^{-2}$	$-8,94 \cdot 10^{-2}$

По данным табл. 10 строится график $y(t)$ (рис. 12). Из графика видно, что $y_{уст} = -K_f f = -0,9$ м, а время регулирования (с точностью $\delta = \pm 0,05 y_{уст}$) равно $t_{II} \cong 30$ с.

3. Структурная схема замкнутой САР изображена на рис. 13.

Отклонение выходного параметра $y(t)$ от установившегося значения возникает как следствие возникновения возмущения $f(t)$. На входе АР сигнал $\Delta y(t) = g(t) - y(t)$, где $g(t)$ – задающее воздействие (в нашем случае – $H_{зад}$). В зависимости от величины и знака этого отклонения АР формирует управляющее воздействие $x(t)$, действие которого на ОР противоположно действию возмущения $f(t)$. В результате этого отклонения y либо ликвидируется полностью, либо значительно уменьшается (в зависимости от типа регулятора).

Передаточные функции регуляторов:

«П» – $W_{II}(p) = K_p$;

«ПИ» – $W_{III}(p) = K_p + K_{II} \frac{1}{p} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_{уз} p}\right) = \frac{K_p (T_{уз} p + 1)}{T_{уз} p}$.

Параметры K_p и $T_{уз}$ являются настроечными, т.е. могут изменяться при настройке АР.

В соответствии со структурной схемой (рис. 13) найдем передаточные функции замкнутой САР по возмущению.

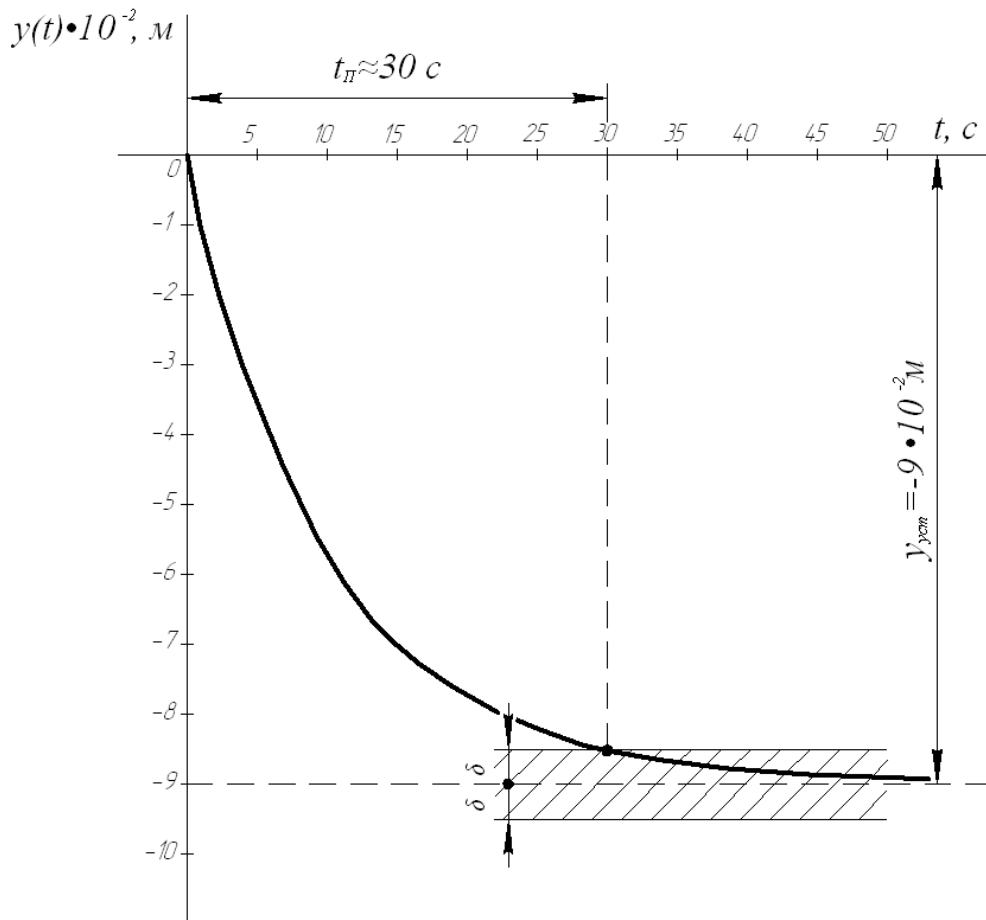


Рис. 12. График переходного процесса в ОП

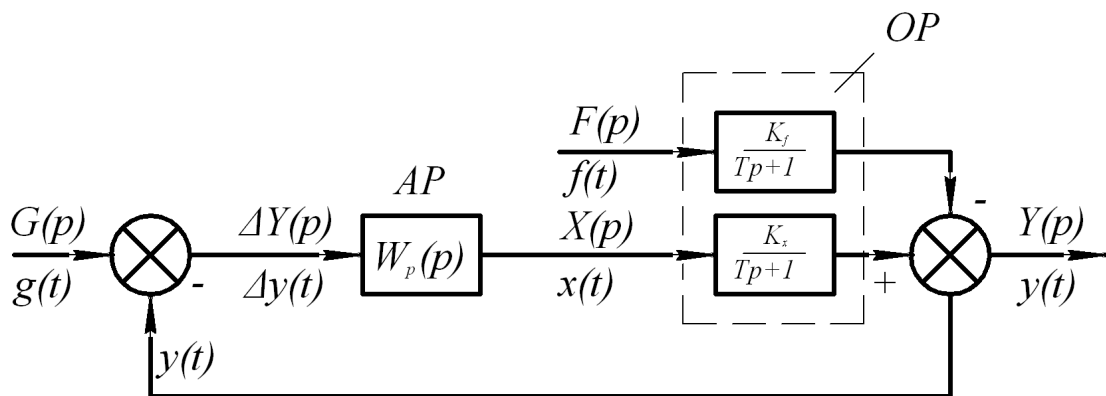


Рис. 13. Структурная схема САР

$$W_{f \text{ зам}}(p) = \frac{y(p)}{F(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W_f(p)W_x(p)}$$

Тогда для системы с П-регулятором передаточная функция будет равна:

$$W_{f \text{ зам}}(p) = \frac{-K_f}{Tp + 1 + K_p K_x}$$

для системы с ПИ-регулятором:

$$W_{f \text{ зам}}^{PI}(p) = \frac{-K_f T_{из} p}{T_p T_{из} p^2 + p T_{из} (1 + K_p K_x) + K_p K_x}.$$

4. Построение кривой переходного процесса в системе с АР при скачкообразном изменении возмущения $f(t)$.

В операторной форме выходной сигнал может быть найден так:

$$Y(p) = W_{f \text{ зам}}(p) \cdot F(p) = \frac{G(p)}{H(p)},$$

где $F(p) = \frac{f}{p}$ – изображение неединичного возмущения.

Для перехода от $Y(p)$ к $y(t)$ можно воспользоваться теоремой разложения.

Изображению $Y(p) = \frac{G(p)}{H(p)}$ соответствует оригинал:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t},$$

где $G(p_k) = G(p)$ при $p = p_k$,

$$H'(p_k) = \frac{d}{dp} [H(p)] \text{ при } p = p_k,$$

p_k – корни уравнения $H(p) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Корни уравнения $H(p) = p(10p + 4) = 0$ получаются равными $p_1 = 0$, $p_2 = -0,4$. Откуда $H'(p_1) = 4$, $H'(p_2) = -4$.

Тогда для системы с П-регулятором получается:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{-K_f f}{p[Tp + 1 + K_p K_x]} = \frac{-4,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{p[10p + 1 + 2 \cdot 1,5]} = \frac{-9 \cdot 10^{-2}}{p(10p + 4)} = \\ &= y(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t} = -9 \cdot 10^{-2} \left(\frac{1}{4} e^{0 \cdot t} + \frac{1}{-4} e^{-0,4t} \right) = \\ &= -2,25 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-t/2,5}), \end{aligned}$$

где $G(p_1) = G(p_2) = 9 \cdot 10^{-2}$.

Расчет проведен для $0 \leq t \leq 5T$, где $T = 2,5$ с.

Данные расчета сведены в табл. 11.

Таблица 11

Результаты расчета

t, c	0	1	2	3	4
$0,4t$	0	0,4	0,8	1,2	1,6
$e^{-0,4t}$	1	0,67	0,45	0,3	0,2
$1 - e^{-0,4t}$	0	0,33	0,55	0,7	0,8
$y = -2,25 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-0,4t}), м$	0	$-0,74 \cdot 10^{-2}$	$-1,24 \cdot 10^{-2}$	$-1,57 \cdot 10^{-2}$	$-1,8 \cdot 10^{-2}$

5	6	7	8	9	10
2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4
0,14	0,09	0,06	0,04	0,03	0,02
0,86	0,91	0,94	0,96	0,97	0,98
$-1,94 \cdot 10^{-2}$	$-2,05 \cdot 10^{-2}$	$-2,11 \cdot 10^{-2}$	$-2,16 \cdot 10^{-2}$	$-2,19 \cdot 10^{-2}$	$-2,21 \cdot 10^{-2}$

12	14
4,8	5,6
0,01	0,004
0,99	0,996
$-2,23 \cdot 10^{-2}$	$-2,25 \cdot 10^{-2}$

Для системы с ПИ-регулятором:

$$\begin{aligned}
 Y(p) &= \frac{-K_{uz} T_{uz} f}{T T_{uz} p^2 + T_{uz} (1 + K_p K_x) p + K_p K_x} = \frac{-4,5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{10 \cdot 5 p^2 + 5(1 + 2 \cdot 1,5) p + 2 \cdot 1,5} = \\
 &= \frac{-0,9 \cdot 10^{-2}}{p^2 + 0,4 p + 0,06} = y(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t} = \\
 &= -0,9 \cdot 10^{-2} \left[\frac{1 \cdot e^{(-0,2 + j0,14)t}}{2(-0,2 + j0,14) + 0,4} + \frac{1 \cdot e^{(-0,2 - j0,14)t}}{2(-0,2 - j0,14) + 0,4} \right] = \\
 &= -6,42 \cdot 10^{-2} e^{-0,2t} \sin 0,14t.
 \end{aligned}$$

При расчете учитывалось, что уравнение

$$H(p) = p^2 + 0,4p + 0,06 = 0$$

имеет корни $p_1 = -0,2 + j0,14$, $p_2 = -0,2 - j0,14$;

$$H'(p) = 2p + 0,4.$$

График $y(t)$ в этом случае представляет собой отрицательную синусоиду с амплитудой 6,42 и частотой $\omega = 0,14 \text{ c}^{-1}$, вписанную в экспоненту $e^{-0,2t}$ с постоянной времени $T = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ c}$.

Для расчета графика по точкам следует выбрать интервал времени $0 \leq t \leq 4T = 20 \text{ c}$ с шагом $\Delta t = 2 \text{ c}$.

Данные расчета сведены в табл. 12.

Данные расчета переходного процесса

t, c	0	4	5	6
$-0,2t$	0	-0,4	-0,8	-1,2
$e^{-0,2t}$	1	0,67	0,45	0,3
$0,14t$	0	0,28	0,56	0,84
$\sin 0,14t$	0	0,28	0,53	0,75
$y(t) = -6,42 \cdot 10^{-2} e^{-0,2t} \sin 0,14t$	0	$-1,18 \cdot 10^{-2}$	$-1,53 \cdot 10^{-2}$	$-1,44 \cdot 10^{-2}$

8	10	12	14	16	18
-1,6	-2	-2,4	-2,8	-3,2	-3,6
0,2	0,14	0,09	0,06	0,04	0,03
1,12	1,4	1,68	1,96	2,24	2,52
0,9	0,98	0,99	0,93	0,78	0,58
$-1,16 \cdot 10^{-2}$	$-0,85 \cdot 10^{-2}$	$-0,58 \cdot 10^{-2}$	$-0,36 \cdot 10^{-2}$	$-0,21 \cdot 10^{-2}$	$-0,1 \cdot 10^{-2}$

20	22	24	26
-4	-4,4	-4,8	-5,2
0,02	0,012	0,008	0,006
2,8	3,08	3,36	3,64
0,34	0,062	-0,22	-0,48
$-0,04 \cdot 10^{-2}$	$-0,005 \cdot 10^{-2}$	$0,011 \cdot 10^{-2}$	$0,018 \cdot 10^{-2}$

По данным табл. 11 и 12 построены графики переходного процесса (рис. 14). Кривая 1 – переходный процесс в САР с П-регулятором, кривая 2 – с ПИ-регулятором.

Можно перейти от изображения $Y(p)$ к оригиналу $y(t)$ с помощью табличных операторов (см. приложение). Продемонстрируем этот прием для системы с П-регулятором.

$$Y(p) = \frac{-9 \cdot 10^{-2}}{p(10p + 4)} = y(t) = ?$$

«Подгоним» выражение для $Y(p)$ под табличный оператор вида:

$$\frac{1}{p(p + a)} = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}).$$

Для этого вынесем в знаменателе функции $Y(p)$ за скобку число 10.

Получим:

$$Y(p) = \frac{-9 \cdot 10^{-2}}{10p \left(p + \frac{4}{10} \right)} = \frac{-9 \cdot 10^{-2}}{10} \cdot \frac{1}{p(p+0,4)} =$$

$$= y(t) = -9 \cdot 10^{-3} \frac{1}{0,4} (1 - e^{-0,4t}) = -2,25 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-\frac{t}{2,5}}),$$

что совпадает с результатом, полученным с помощью теоремы разложения.

Аналогичным образом можно найти оригинал $y(t)$ для

$$Y_{III}(p) = \frac{-0,9 \cdot 10^{-2}}{p^2 + 0,4p + 0,06},$$

«сводя» при этом выражение $Y_{III}(p)$ к табличному оператору следующего вида:

$$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} = e^{-at} \sin \omega t.$$

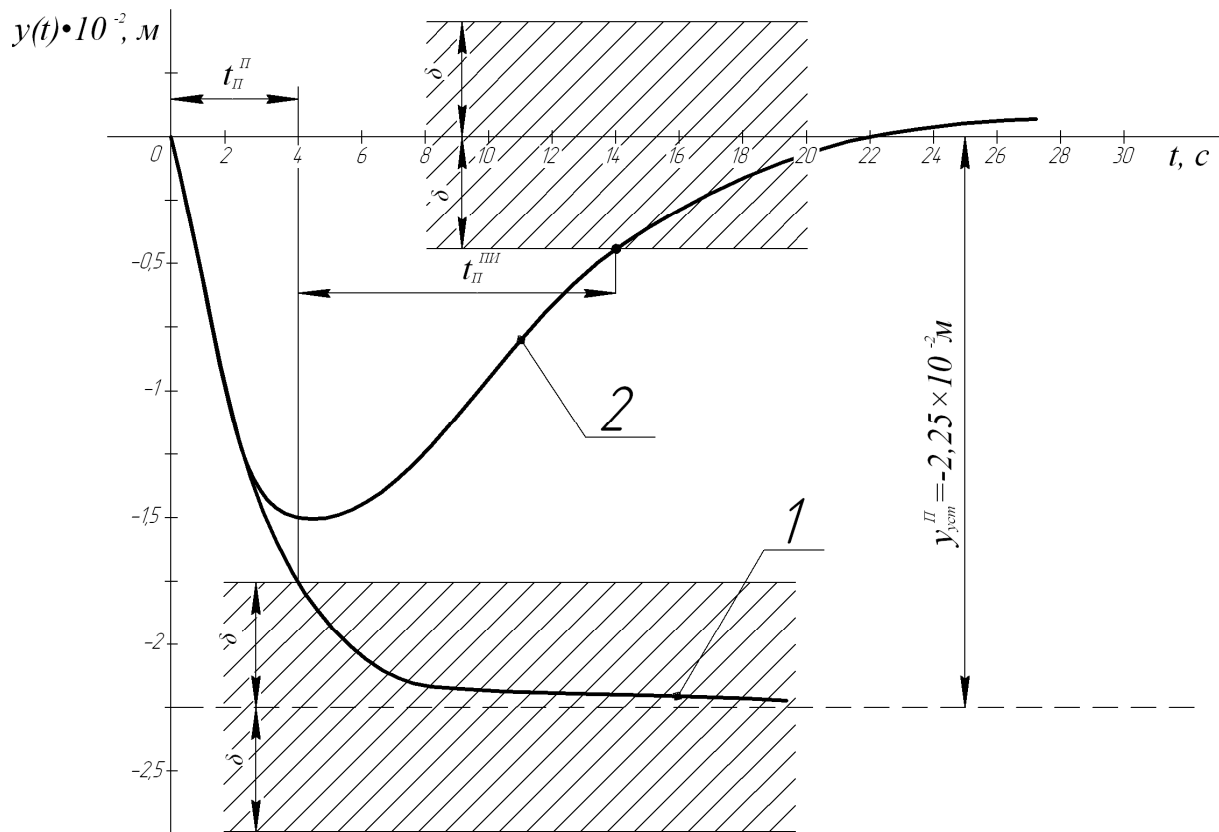


Рис. 14. Графики переходных процессов в САР с П- и ПИ- регуляторами

5. Найдем время переходного процесса t_{Π} в системе без регулятора и с П- и ПИ-регуляторами.

Под временем t_{II} понимают отрезок времени, по истечении которого выходной параметр $y(t)$ отличается от своего нового установившегося значения не более чем на заранее установленную величину δ , которую обычно принимают равной $0,05y_{уст}$ в системе без регулятора. В рассматриваемом примере

$$\delta = 0,05 \cdot 9 \cdot 10^{-2} = 0,45 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Выделив на графиках $y(t)$ зоны, ограниченные $\pm \delta$, получим:

- для системы без регулятора $t_{II} = 30$ с (рис. 12);
- для системы с П-регулятором $t_{II}^P = 4$ с (рис. 14);
- для системы с ПИ-регулятором $t_{II}^{PB} = 14$ с (рис. 14).

6. Выводы.

- Для варианта с П-регулятором.

Его применение позволило уменьшить время переходного процесса с 30 до 4 с. Установившееся значение отклонения выходного параметра уменьшилось в $(1 + K_p K_x)$ раз с $-9 \cdot 10^{-2}$ м до $-2,25 \cdot 10^{-2}$ м. Наличие этого отклонения (статической ошибки) является характерной особенностью систем этого типа с П-регулятором. Уменьшение статической ошибки возможно за счет увеличения настроечного параметра (K_p) П-регулятора, но чрезмерно это делать нельзя из-за возможной потери устойчивости системой.

- Для системы с ПИ-регулятором.

Применение регулятора этого типа позволило уменьшить время переходного процесса с 30 до 14 с и полностью устранить остаточное отклонение выходного параметра. Статическая ошибка регулирования в этом случае равна нулю.

Задача 6

Известно, что решетчатая функция $f[nT]$ и ее z -изображение $F(z)$ связаны между собой выражением:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]z^{-n} = f(0)z^0 + f[T]z^{-1} + f[2T]z^{-2} + \dots$$

Нетрудно видеть, что если функцию $F(z)$ представить в виде бесконечного ряда по убывающим степеням z , начиная с z^0 , то коэффициенты этого ряда $f(0)$, $f[T]$, $f[2T]$, ... есть ординаты решетчатой функции $f[nT]$.

В качестве примера построим решетчатую функцию $f[nT]$, если ее z -изображение:

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Для разложения функции $F(z)$ в ряд по убывающим степеням z поделим числитель ее на знаменатель.

$$\begin{array}{r} \frac{-z}{z-2+z^{-1}} \quad \left| \frac{z^3-2z+1}{z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+\dots} \right. \\ \hline -2-z^{-1} \\ \hline -2-4z^{-1}+2z^{-2} \\ \hline -3z^{-1}-2z^{-2} \\ \hline -3z^{-1}-6z^{-2}+3z^{-3} \\ \hline 4z^{-2}-3z^{-2} \\ \hline \dots\dots\dots \end{array}$$

Итак, $F(z) = 0 \cdot z^0 + 1 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 3 \cdot z^{-3} + 4 \cdot z^{-4} + \dots$

Значения коэффициентов при убывающих степенях z и есть ординаты решетчатой функции: $f[0] = 0$, $f[T] = 1$, $f[2T] = 2$, ...

На рис. 15 изображена решетчатая функция. Пунктиром обозначена основная огибающая ее.

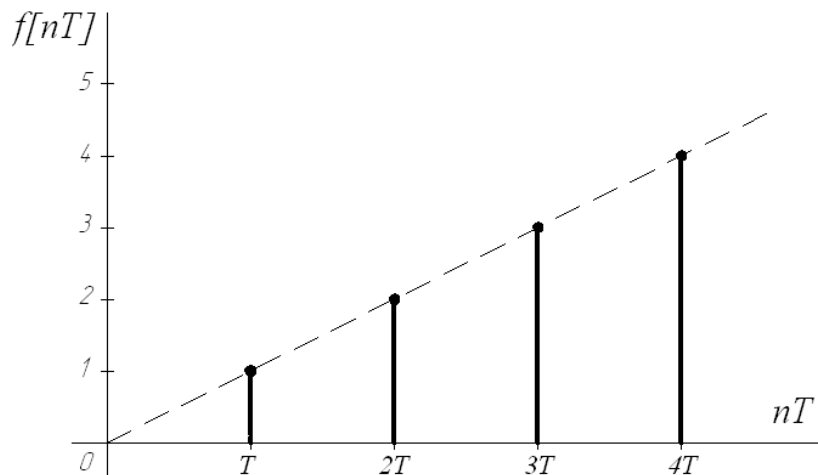


Рис. 15. Решетчатая функция $f[nT]$

Задача 7

В качестве примера рассмотрим построение фазовой траектории для случая, когда свободное движение нелинейной системы описывается нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + 2y = 0.$$

Фазовая траектория движения нелинейной системы строится в координатах y и y' , где $y' = \frac{dy}{dt}$. Запишем исходное уравнение через вновь введенную переменную y' .

$$(y')^2 + 2y = 0,$$

откуда

$$(y')^2 = -2y.$$

Фазовая траектория, соответствующая полученной зависимости, изображена на рис. 16.

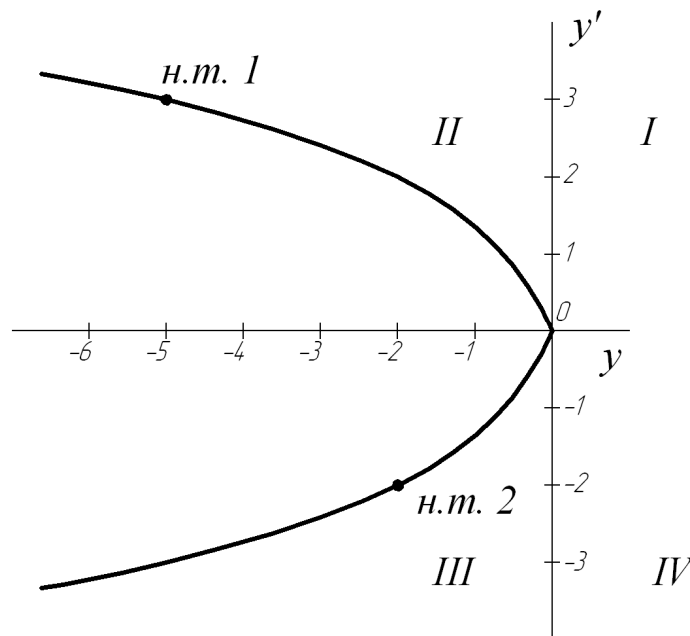


Рис. 16. Фазовая траектория нелинейной САР

Для анализа устойчивости системы необходимо выяснить, движется ли изображающая точка к состоянию устойчивого равновесия (к особой точке – началу координат). Общее правило таково: для всех $y' > 0$ движение изображающей точки по фазовой траектории идет в сторону возрастания y , а для всех $y' < 0$ – в сторону убывания y . Нетрудно видеть (рис. 16), что из начального состояния, соответствующего н.т. 1, изображающая точка при своем движении придет в начало координат, а из н.т. 2 движение изображающей точки будет в сторону от начала координат. Следовательно, для всех начальных точек, расположенных во II квадранте, движение нелинейной САР устойчиво, а в III – неустойчиво.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Изображение по Лапласу функций времени

Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\mp at}$	$\frac{1}{p \pm a}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин, М.В. Автоматическое управление [Текст] / М.В. Гальперин. – М.: ИНФА-М: ФОРУМ, 2007.
2. Ким Д.П. Теория автоматического управления [Текст] / Д.П. Ким. – М.: Физматлит. Т. 1. 2003.
3. Лукас, В.А. Теория автоматического управления [Текст] / В.А. Лукас: учебн. для вузов. 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Недра, 2004.
4. Ким, Д.П. Сборник задач по теории автоматического регулирования. Линейные системы [Текст] / Д.П. Ким, Н.Д. Дмитриева. – М.: Физматлит, 2007.
5. Теория автоматического управления [Текст]: учебник для вузов. В 2 ч. / под ред. А.А. Воронова. 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Высшая школа, 1986.
6. Теория автоматического управления [Текст]: учебник для вузов. В 2 ч. / под ред. В.А. Нетушила. 2-е изд., перераб. И доп.– М.: Высшая школа, 1976.
7. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления [Текст]: учебник пособие для вузов / под ред. В.А. Бесекерского. 5-е изд., перераб. и доп.– М.: Наука, 1978.
8. Цыпкин Я.С. Теория линейных импульсных систем [Текст] / Я.С. Цыпкин, Ю.С. Попков. – М.: Наука, 1973.



Г.Г. Ордуянц
С.П. Санников

**ЗАДАНИЯ ПО КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ
И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К НИМ
ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ»**

Екатеринбург
2012